

INSTYTUT KONSTRUKCJI I EKSPLOATACJI MASZYN
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport Serii PREPRINTY Nr 006/83

ANALIZA STATECZNOŚCI
NIEJEDNOSPÓJNYCH PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Jerzy Czmochowski

Rozprawa doktorska

Promotor: doc. dr inż. Franciszek Romanów

Słowa kluczowe:
stateczność,
płyty trójwarstwowe,
metoda elementów
skończonych,
płyty z otworami

Wrocław 1983

SPIS RZECZY:

| | |
|---|-----|
| Wstęp | 3 |
| Oznaczenia | 4 |
| 1. Kryteria stateczności | 10 |
| 2. Przegląd literatury | 12 |
| 2.1. Stateczność sprężysta cienkich prostokątnych płyt z otworem | 12 |
| 2.2. Stateczność sprężysta płyt trójwarstwowych | 21 |
| 2.3. Stateczność sprężysta płyt trójwarstwowych z otworem . | 23 |
| 2.4. Trójwarstwowy element skończony | 24 |
| 3. Podstawowe założenia | 27 |
| 4. Macierz sztywności i naprężeń początkowych elementu skoń- czonego trójwarstwowego | 35 |
| 5. Problem wyboczenia | 42 |
| 6. Rozwiązanie problemu wartości własnych | 44 |
| 7. Prostokątny trójwarstwowy element skończony | 50 |
| 7.1. Element prostokątny w płaskim stanie naprężenia | 51 |
| 7.2. Element prostokątny w zagadnieniu stateczności płyt trójwarstwowych | 57 |
| 8. Trójkątny trójwarstwowy element skończony | 65 |
| 8.1. Element trójkątny w płaskim stanie naprężenia | 66 |
| 8.2. Element trójkątny w zagadnieniu stateczności płyt trójwarstwowych | 68 |
| 9. Algorytm obliczania stateczności sprężystej niejedno- spójnych płyt trójwarstwowych | 71 |
| 10. Przykłady liczbowe | 76 |
| 11. Przykłady obliczeń stateczności sprężystej płyt trój- warstwowych z otworem metodą elementów skończonych | 111 |
| 12. Analiza dokładności i wnioski | 118 |
| Literatura | 125 |
| Załącznik - plany warstwowe | 135 |

WSTĘP

W tworzeniu współczesnych konstrukcji powierzchniowych istnieje tendencja do coraz oszczędniejszego zużycia materiałów.

Cel ten osiąga się między innymi przez odpowiednie kształtowanie elementów konstrukcji i stosowanie materiałów kompozytowych. Jednym z takich elementów są cienkie konstrukcje trójwarstwowe z lekkim rdzeniem, które charakteryzują się znaczną sztywnością przy stosunkowo niskim ciężarze. Początkowo tego typu konstrukcje znalazły zastosowanie w lotnictwie, później w budownictwie, w budowie statków, nadwozi samochodowych i kolejowych.

Decydującym warunkiem wytrzymałości takich konstrukcji jest na ogół kryterium stateczności.

W praktyce konstrukcyjnej często spotykamy się z elementami powierzchniowymi osłabionymi otworami (wycięciami) np. otwory okienne, otwory wentylacyjne, otwory do przeprowadzenia instalacji elektrycznej, paliwowej itp.

Obliczanie stateczności sprężystej takich konstrukcji przysparza znacznych trudności, ze względu na występowanie tutaj niejednorodnych pól naprężeń, czego wynikiem jest na ogół złożony charakter wyboczenia. Zadanie to można rozwiązać jedynie metodami przybliżonymi. Stosowanie metod tradycyjnych korzystających z kryterium energetycznego metodą Ritza pozwoliło rozwiązywać jedynie te przypadki, dla których znany jest rozkład naprężeń np. obszary nieskończone z otworem [85].

Dopiero rozwój tzw. metod komputerowych (metody różnic skończonych, metody elementów skończonych) umożliwił skuteczne rozwiązywanie tego typu zadań. Przy pomocy tych metod można rozwiązywać również zagadnienie stateczności konstrukcji powierzchniowych niemalże dowolnego kształtu, przy dowolnym sposobie obciążenia i podparcia.

W niniejszej pracy podjęto próbę opracowania algorytmu obliczeń, zastosowanego do analizy zlinearyzowanego, bifurkacyjnego problemu stateczności niejednostopólnych płyt trójwarstwowych.

Zadanie to rozwiązano przez wprowadzenie odpowiedniego trójwarstwowego elementu skończonego, który w zagadnieniu stateczności nie był dotychczas stosowany. Problem wyboczenia płyty trójwarstwowej z otworem sprowadzono do uogólnionego zagadnienia wartości

własnych i wektorów własnych.

Celem pracy jest pokazanie przydatności tego typu elementu w analizie stateczności niejednostopójnych płyt trójwarstwowych.

W dalszej pracy przedstawioną koncepcję elementu można w znany sposób bezpośrednio zastosować w tworzeniu płaskich elementów powłokowych.

OZNACZENIA

Wielkości geometryczne

| | |
|--------------------------|---|
| h | - grubość płyty, |
| t | - grubość warstw zewnętrznych (okładzin), |
| $2c$ | - grubość warstwy środkowej (rdzenia), |
| l_1, l_2 | - rozmiary płyty prostokątnej odpowiednio w kierunku osi x_1, x_2 , |
| $c' = c + \frac{t}{2}$, | |
| $S = 2\Omega + S_b$ | - pole powierzchni zewnętrznej płyty, |
| S_b | - pole powierzchni bocznej płyty, |
| Ω | - pole powierzchni środkowej płyty, |
| $2a, 2b$ | - długość i szerokość elementu prostokątnego, |
| $d = a/b$. | |

Wielkości fizyczne

| | |
|----------------------------------|---|
| $E_1, E_2, G_{12}, \nu_1, \nu_2$ | - stałe fizyczne dla materiału ortotropowego okładzin (dla materiału izotropowego $E_1 = E_2 = E, \nu_1 = \nu_2 = \nu, G_{12} = G = E/2(1 + \nu)$, |
| G_{13}, G_{23} | - moduły sprężystości poprzecznej materiału rdzenia (dla materiału izotropowego $G_{13} = G_{23} = G_c$), |
| $B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$ | - sztywność płyty izotropowej na rozciąganie, |

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad - \text{sztywność płyty izotropowej na zginanie,}$$

$$k = \frac{\pi^2 B \cdot c}{l_1^2 G_c} \quad - \text{parametr sprężysto-geometryczny płyty trójwarstwowej,}$$

Wielkości kinematyczne

$$u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad - \text{składowe wektora przemieszczeń odpowiednio w kierunku osi } x_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$u_i^c, u_i^f, u_i^o \quad - \text{j.w. odpowiednio w rdzeniu, okładzinach } (f \equiv g, d), \text{ w powierzchni środkowej okładzin,}$$

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= \frac{1}{2c} (n_\alpha^{og} + u_\alpha^{od}), \quad (\alpha = 1, 2) \\ \psi_\alpha &= \frac{1}{2c} (u_\alpha^{og} - u_\alpha^{od}), \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned} \right\} \text{składowe wektora przemieszczeń sprowadzonych płyty trójwarstwowej,}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^o, \mu_{\alpha\beta}^f, \varepsilon_{\alpha\beta}^c \quad - \text{składowe tensora odkształceń odpowiednio w okładzinach } (f \equiv g, d), \text{ rdzeniu } (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (\mu_{\alpha\beta}^g = \mu_{\alpha\beta}^d = \mu_{\alpha\beta}),$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}^c, \mu_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3} \quad - \text{składowe tensora odkształceń sprowadzonych płyty trójwarstwowej } (\alpha, \beta = 1, 2),$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta}^{og} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{od}),$$

$$\mu_{\alpha\beta}^c = \frac{1}{2c} (\varepsilon_{\alpha\beta}^{og} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{od}),$$

Wielkości kinetyczne

- $N_{\alpha\beta}^o(f)$, $M_{\alpha\beta}^{(f)}$, $Q_{\alpha 3}^c$ - składowe tensora sił jednostkowych odpowiednio w okładzinach ($f \equiv g, d$), rdzeniu ($\alpha, \beta = 1, 2$)
 $(M_{\alpha\beta}^g = M_{\alpha\beta}^d = M_{\alpha\beta})$,
- $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}^c$, $M_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha 3}^c$ - składowe tensora sił jednostkowych sprowadzonych płyty trójwarstwowej ($\alpha, \beta = 1, 2$),
 $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^{og} + N_{\alpha\beta}^{od}$,
 $M_{\alpha\beta}^c = c(N_{\alpha\beta}^{og} - N_{\alpha\beta}^{od})$,
- V - energia potencjalna układu,
 $U(f)$, U^c - energia odkształcenia sprężystego odpowiednio okładzin ($f \equiv g, d$), rdzenia,
- W - praca sił zewnętrznych,
 $\nabla_{\alpha\beta}^2 = \partial_{,11}^2 + \partial_{,22}^2 = \partial_{,\alpha\alpha}^2$ - operator Laplace'a,
 $\delta_{\alpha\beta}$ - delta Kroneckera, $\delta_{\alpha\beta} = 1$, gdy $\alpha = \beta$,
 $\delta_{\alpha\beta} = 0$, gdy $\alpha \neq \beta$,
- λ - operator obciążenia,
 F - funkcja naprężeń Airy'ego.

Oznaczenia macierzy i wektorów

- $[]$ - macierz prostokątna,
 $\{ \}$ - wektor kolumnowy,
 $[]$ - macierz diagonalna lub quasideagonalna,
 $\{ \}^T$, $[]^T$ - wektor, macierz transponowana,
 $[I]$ - macierz jednostkowa,
 $[I_2] \equiv [1 \quad 2b \quad 2a]$
 $[I_2^*] \equiv [2b \quad 2a]$
 $[I_3] \equiv [a \quad b \quad ab]$

- $\{u\}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad \psi_1 \quad \psi_2 \quad u_3\}$ - wektor przemieszczeń,
 $\{r\}^T = \{r_1^T, r_2^T, \dots, r_n^T\}$ - wektor przemieszczeń węzłowych
 (n - ilość węzłów),
 $\{r_i\}^T = \{r_i^{plT}, r_i^{qT}, r_i^{bT}\} = \{r_i^{plT}, r_i^{bqT}\}$ - wektor przemieszczeń
 w węźle "i",
 $\{r_i^{pl}\}^T = \{u_1^i \quad u_2^i\}$ lub $\{r_i^{pl}\}^T = \{u_1^i \quad u_2^i \quad \alpha_3^i\}$ - wektor prze-
 mieszczeń w
 węźle "i"
 działających
 w płaszczyź-
 nie płyty

$$(\alpha_3^i = u_{1,2}^i + u_{2,1}^i),$$

- $\{r_i^q\}^T = \{\psi_1^i \quad \psi_2^i\}$ - wektor przemieszczeń w węźle
 powodujących ścinanie rdzenia,
 $\{r_i^b\}^T = \{u_3^i, \alpha_1^i, \alpha_2^i\}$ - wektor przemieszczeń w węźle wyni-
 kających z ugięcia okładzin
 $(\alpha_1^i = -u_{3,2}^i, \alpha_2^i = u_{3,1}^i),$
 $[\phi]^e$ - macierz funkcji kształtu elementu,
 $[\phi]^e = [\phi_1, \dots, \phi_m]$ (m - ilość węzłów w elemencie)

$$[\phi_i]^e = \begin{bmatrix} \phi_i^{pl} & & \\ & \phi_i^q & \\ & & \phi_i^b \end{bmatrix},$$

- $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_0^T \quad \kappa_c^T \quad \kappa^T \quad \varepsilon^{cT}\}$ - wektor odkształceń płyty trój-
 warstwowej,
 $\{\varepsilon_0\}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}\}$ - wektor odkształceń membranowych,
 $\{\kappa_c\}^T = \{\kappa_{11}^c \quad \kappa_{22}^c \quad 2\kappa_{12}^c\}$ - wektor odkształceń zginających płytę
 trójwarstwową,
 $\{\kappa\}^T = \{\kappa_{11} \quad \kappa_{22} \quad 2\kappa_{12}\}$ - wektor odkształceń zginających
 okładziny,

$\{\varepsilon^c\}^T = \{2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{23}\}$ - wektor odkształceń ścinających w rdzeniu,

$\{\varepsilon^f\}^T = \{\varepsilon_{11}^{of} \quad \varepsilon_{22}^{of} \quad 2\varepsilon_{12}^{of}\}$ - wektor odkształceń membranowych w okładzinach ($f \equiv g, d$).

Operatory różniczkowe:

$$[L^0] = \begin{bmatrix} L^{pl} & 0 & 0 \\ 0 & L^{pl} & 0 \\ 0 & 0 & L^b \\ 0 & -I & L^q \end{bmatrix}, \quad [L^1(\{u\})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} L^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$[L^{pl}] = \begin{bmatrix} \partial_{,1} & 0 \\ 0 & \partial_{,2} \\ \partial_{,2} & \partial_{,1} \end{bmatrix}, \quad \{L^b\} = \begin{Bmatrix} -\partial_{,11} \\ -\partial_{,22} \\ -2\partial_{,12} \end{Bmatrix}, \quad I = [1, 1],$$

$$\{L^q\} = \frac{c'}{c} \begin{Bmatrix} \partial_{,1} \\ \partial_{,2} \end{Bmatrix}, \quad \{L^*\} = \begin{Bmatrix} u_{3,1} \cdot \partial_{,1} \\ u_{3,2} \cdot \partial_{,2} \\ u_{3,2} \cdot \partial_{,1} + u_{3,1} \cdot \partial_{,2} \end{Bmatrix},$$

$$\partial_{,\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2),$$

$[B^0]$, $[B^1]$ - macierze opisujące pole odkształceń w zależności od przemieszczeń węzłowych odpowiednio dla nieskończenie małych odkształceń oraz dla odkształceń skończonych,

$$[B^0] = \begin{bmatrix} B^{pl} & 0 \\ 0 & B^{bq} \end{bmatrix}, \quad [B^1] = \begin{bmatrix} 0 & B_b^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[B_i^{pl}] = [L^{pl}][\phi_i^{pl}], \quad [B_{bi}^1] = [0 \ ; \ \frac{1}{2} \{L^*\}][\phi_i^b],$$

$$[B_i^{bq}] = \begin{bmatrix} B_{1i}^{bq} & 0 \\ 0 & B_{2i}^{bq} \\ B_{3i}^{bq} & B_{4i}^{bq} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} [B_{1i}^{bq}] &= [L^{p1}][\phi_i^q], \\ [B_{2i}^{bq}] &= [L^b][\phi_i^b], \\ [B_{3i}^{bq}] &= -[\phi_i^q], \\ [B_{4i}^{bq}] &= [L^q][\phi_i^b], \end{aligned}$$

($i = 1, \dots, m$) m - ilość węzłów w elemencie.

$$\{s\}^T = \{N^T \quad M_c^T \quad M^T \quad Q_c^T\} \quad - \text{wektor sił jednostkowych płyty trójwarstwowej,}$$

$$\{N\}^T = \{N_{11} \quad N_{22} \quad N_{12}\} \quad - \text{wektor sił jednostkowych membranowych,}$$

$$\{M_c\}^T = \{M_{11}^c \quad M_{22}^c \quad M_{12}^c\} \quad - \text{wektor momentów zginających płytę trójwarstwową,}$$

$$\{M\}^T = \{M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12}\} \quad - \text{wektor momentów zginających okładziny,}$$

$$\{Q_c\}^T = \{Q_{13} \quad Q_{23}\} \quad - \text{wektor sił poprzecznych w rdzeniu,}$$

$$\{N^f\}^T = \{N_{11}^{of} \quad N_{22}^{of} \quad N_{12}^{of}\} \quad - \text{wektor sił jednostkowych membranowych w okładzinach (f = g, d),}$$

$$[D] = 2 [D_{p1}, c^2 D_{p1}, D_b, D_q] \quad - \text{macierz sprężystości płyty trójwarstwowej,}$$

$$[D_{p1}] = \begin{bmatrix} D_{11}^{p1} & D_{12}^{p1} & 0 \\ D_{21}^{p1} & D_{22}^{p1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^{p1} \end{bmatrix}, \quad [D_b] = \begin{bmatrix} D_{11}^b & D_{12}^b & 0 \\ D_{21}^b & D_{22}^b & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^b \end{bmatrix}, \quad [D_q] = \begin{bmatrix} D_{13}^q & 0 \\ 0 & D_{23}^q \end{bmatrix},$$

$$D_{11}^{p1} = \frac{E_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad D_{12}^{p1} = D_{21}^{p1} = \frac{\nu_2 E_1 t}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2 t}{1 - \nu_1 \nu_2},$$

$$D_{22}^{p1} = \frac{E_2 t}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad D_{66}^{p1} = t G_{12},$$

$$D_{ij}^b = \frac{t^2}{12} D_{ij}^{p1}, \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad D_{\alpha 3}^q = 2c G_{\alpha 3}, \quad (\alpha = 1, 2).$$

1. KRYTERIA STATECZNOŚCI

Przedmiotem analizy jest problem stateczności sprężystej płyt prostokątnych osłabionych otworem obciążonych siłami konserwatywnymi działającymi w płaszczyźnie płyty. W takim przypadku obciążenie odpowiadające utracie stateczności może być określone z kryterium statycznego [106].

Statyczne kryterium utraty stateczności oznacza istnienie równowagi w pewnym położeniu sąsiednim do położenia badanego. Wtedy bądź tworzy się pewna nowa postać równowagi, czyli następuje bifurkacja postaci równowagi, bądź też parametr obciążenia osiąga lokalne maksimum [106]. W przypadku bifurkacji najczęściej podstawowa postać równowagi przestaje być stateczna, natomiast nowa postać może być stateczna (stateczny punkt bifurkacji) lub nie (niestateczny punkt bifurkacji) [98].

Jeżeli podstawowe położenie równowagi opisane jest pewną funkcją przemieszczeń (np. ugięcie płyty) z jednorodnymi warunkami brzegowymi, to bifurkację możemy opisać układem liniowych równań różniczkowych

$$[L_{1i}] \{u\} + \lambda [L_{2i}] \{u\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

gdzie $[L_{1i}]$, $[L_{2i}]$ - odpowiednie liniowe operatory różniczkowe,
 n - ilość stopni swobody wektora przemieszczeń
 $\{n\}$

Problem (1.1) jest problemem wartości własnych i pozwala na określenie wartości krytycznych parametru obciążenia, natomiast nie umożliwia określenia przemieszczeń, czyli nie określa pokrytycznego zachowania się układu. Przemieszczenia $\{u\}$ określone są jedynie z dokładnością do stałego czynnika. Najmniejsza z ciągu wartości własnych określa praktycznie ważną wartość obciążenia krytycznego.

Analiza utraty stateczności mająca na celu określenie lokalnego maksimum parametru obciążenia (punkt graniczny) lub następnych punktów bifurkacji wymaga zastosowania równań teorii nieliniowej [15].

Wówczas równowaga opisana jest układem równań różniczkowych nieliniowych postaci (1.1), gdzie odpowiednie operatory różniczkowe są nieliniowe [106].

Energetyczna postać kryterium statycznego. Jak wiadomo równania równowagi odpowiadają warunkowi stacjonarności energii potencjalnej układu, znikaniu pierwszej wariacji:

$$\delta V = 0 \quad (1.2)$$

Aby stan równowagi był stateczny energia potencjalna musi osiągać wartość minimalną, tzn. w stanie statecznym zmiana energii w wyniku dowolnego zaburzenia stanu równowagi powinna być nieujemna. Zmianę energii możemy przedstawić w postaci sumy wariacji

$$\Delta V = \delta V + \delta^2 V + \delta^3 V + \dots \quad (1.3)$$

Ponieważ pierwsza wariacja δV jest w stanie równowagi równa zeru, stateczność równowagi zależy w pierwszym rzędzie od drugiej wariacji. Jeżeli druga wariacja energii potencjalnej jest dodatnio określona stan równowagi jest stateczny. Zerowanie się drugiej wariacji

$$\delta^2 V = 0 \quad (1.4)$$

stanowi kryterium równowagi obojętnej, a więc kryterium stanu krytycznego [106]. Natomiast kryterium bifurkacji można sformułować jako warunek równowagi w nowym położeniu

$$\delta V = 0 \quad (1.5)$$

Kryterium to stanowi podstawę przybliżonej metody energetycznej Ritza. Jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że dla małych odchyłeń od stanu równowagi energia potencjalna jest stała, to zgodnie z metodą energetyczną Timoshenki zerowy poziom tej energii odpowiada sile krytycznej [95], czyli

$$V = 0 \quad (1.6)$$

w położeniu sąsiednim jest również kryterium bifurkacji [106].

2. PRZEGLĄD LITERATURY

2.1. Stateczność sprężysta cienkich prostokątnych płyt z otworem

Zadanie stateczności cienkiej sprężystej płyty z otworem w zakresie teorii liniowej sprowadza się kolejno do rozwiązania płaskiego zadania teorii sprężystości w celu znalezienia dokrytycznego rozkładu naprężeń, a potem do określenia krytycznego obciążenia według jednego z kryterium stateczności.

W przypadku kryterium statycznego [32] zadanie sprowadza się do określenia ekstremalnej wartości własnej zagadnienia brzegowego opisanego równaniem stateczności Saint-Venanta:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 u_3 = \sigma_{\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta} \quad (2.1)$$

ze zmiennymi w danym obszarze współczynnikami $\sigma_{\alpha\beta}$ i odpowiednimi kinematycznymi warunkami dla ugięć u_3 .

Natomiast podstawę energetycznej formy kryterium statycznego stanowi funkcjonal Bryan'a [95]:

$$V = \frac{D}{2} \int_{\Omega} [(\nabla^2 u_3)^2 - (1 - \nu)L(u_3, u_3)] d\Omega - \frac{h}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} u_{3,\alpha} u_{3,\beta} d\Omega \quad (2.2)$$

gdzie:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

$$L(u_3, u_3) = 2(u_{3,11} u_{3,22} - u_{3,12}^2).$$

Jeżeli obciążenie zewnętrzne płyty wzrasta proporcjonalnie do jednego parametru (tzn. obciążenie proste), to składowe stanu naprężenia możemy zapisać w postaci:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \sigma_{\alpha\beta}^0 \quad (2.3)$$

gdzie $\sigma_{\alpha\beta}^0$ są składowymi stanu naprężenia odpowiadającymi pewnemu obciążeniu jednostkowemu.

W takim przypadku problem wyboczenia sprowadza się do wyznaczenia mnożnika obciążenia odpowiadającego utracie stateczności λ_{kr} .

Rozkład naprężeń jednostkowych wewnątrz płyty określony przez funkcje $\sigma_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2)$ otrzymujemy w wyniku rozwiązania płaskiego zadania dla rozpatrywanego obszaru przy zadanym jednostkowym obciążeniu.

Płaskie zadanie liniowej teorii sprężystości sprowadza się do całkowania równań równowagi

$$\sigma_{\alpha\beta, \beta}^0 = 0 \quad (2.4)$$

i równania nierozdzielności (inaczej geometrycznej zgodności) odkształceń

$$\nabla^2 \sigma_{\alpha\alpha}^0 = 0, \quad (2.5)$$

przy warunkach brzegowych

$$p_\alpha^0 = \sigma_{\alpha\beta}^0 n_\beta \quad \text{na} \quad S_\sigma, \quad (2.6)$$

jeśli na powierzchni bocznej S_σ ($S_\sigma \in S_b$) działają siły powierzchniowe p_α^0 ; n_β ($\beta = 1, 2$) są kosinusami kierunkowymi normalnej do powierzchni S_σ ,

$$u_\alpha^0 = \bar{n}_\alpha^0 \quad \text{na} \quad S_u \quad (2.7)$$

jeśli na powierzchni bocznej S_u ($S_u \in S_b$) zadane są przemieszczenia \bar{u}_α^0 .

Jeżeli wprowadzimy funkcję naprężeń $F(x_1, x_2)$ związaną z naprężeniami

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta} F_{, \gamma\gamma} - F_{, \alpha\beta} \quad (2.8)$$

to równania (2.4) i (2.5) można sprowadzić do równania biharmonicznego:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0, \quad (2.9)$$

Metody rozwiązywania płaskiego zadania teorii sprężystości można podzielić na [93]:

- metody analityczne (np. przy pomocy wzorów całkowych Cauchy'ego),
- metody komputerowe (np. MRS, MES),
- metody analogowe.

Po rozwiązaniu płaskiego zadania, otrzymane naprężenia wprowadzamy do równania (2.1) lub potencjału (2.2) i korzystając z odpowiedniego kryterium stateczności możemy wyznaczyć mnożnik obciążenia krytycznego. Zadanie to najczęściej wykonuje się jedną z następujących metod:

- metoda Timoshenko lub Ritza,
- metoda ortogonalizacji Bubnova-Galerkina,
- metoda kollokacji,
- MRS,
- MES.

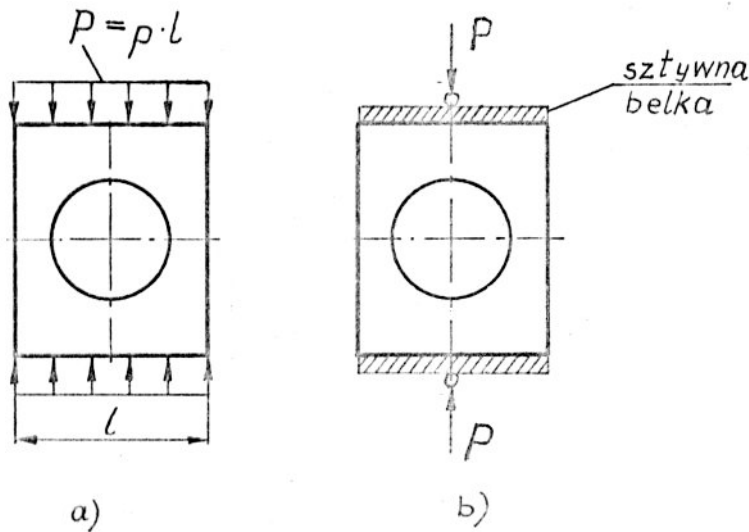
Metoda Timoshenko i Ritza

W większości prac poświęconych rozpatrywanemu problemowi [97] dokrytyczny stan naprężenia aproksymuje się przybliżonymi formułami lub przyjmuje się go jako jednorodny. W pierwszych pracach badano stateczność sprężystą płyt kwadratowych z centralnym kołowym otworem przy ściskaniu [43, 48] i ścinaniu [40, 42] siłami równomiernie rozłożonymi na brzegach. Dokrytyczny stan naprężenia przyjęto taki sam jak dla obszaru nieskończonego z otworem kołowym opisany równaniami Kirscha [85]. Właściwe zadanie stateczności rozwiązano z wykorzystaniem kryterium energetycznego Timoshenko [95, 106].

Funkcje ugięć $u_3(x_1, x_2)$ aproksymowano podwójnym szeregiem trygonometrycznym. Po scałkowaniu po obszarze płyty metodą numeryczną Gaussa i zróżniczkowaniu po nieznanach współcz. otrzymano jednorodny układ równań algebraicznych, którego niezerowe rozwiązanie stanowiło podstawę do otrzymania siły krytycznej. Zbadano wpływ promienia otworu na wielkość siły krytycznej.

W zagadnieniu stateczności płyt osłabionych otworem należy zwrócić uwagę na sposób obciążenia, szczególnie, gdy porównujemy wyniki teoretyczne z doświadczalnymi. Otóż płyta może być obciążona siłą równomiernie rozłożoną na brzegu (rys.1a) lub w sposób zapewniający równomierne przemieszczenie brzegów (rys.1b).

Nie ma to istotnego znaczenia w przypadku płyt bez otworu, natomiast przy obecności otworu różnica w globalnej sile krytycznej jest tym



Rys.1. Płyta prostokątna obciążona siłą ściskającą
 a) równomiernie rozłożoną
 b) w sposób zapewniający równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów

większa im większy jest otwór [33, 39, 86, 87].

W pracach [62, 86, 87] zbadano stateczność płyt kwadratowych z centralnym kołowym otworem przy równomiernym przemieszczeniu przeciwległych brzegów. Zadanie stateczności rozwiązano metodą energetyczną Ritz'a ($\delta V = 0$), zadając funkcję aproksymującą ugięcie w postaci szeregu trygonometrycznego.

Metoda kollokacji

Do obliczania stateczności niejednostopnych płyt z uwzględnieniem płaskiego pola naprężeń w pracach [11, 49] zastosowano metodę kollokacji. Zadanie rozwiązano w dwóch etapach. Pierwszy sprowadził się do całkowania równania biharmonicznego (2.9) przy zadanych warunkach granicznych. W charakterze funkcji naprężeń wybrano szereg funkcji hiperboliczno-trygonometrycznych, który ściśle spełniał równanie różniczkowe (2.9), a warunki brzegowe tylko w zadanych punktach.

Otrzymane naprężenia z zależności (2.8) i (2.3) wprowadzono do równania stateczności Saint-Venanta (2.1). Ugięcie płyty szukano w postaci szeregu potępowego, który dokładnie spełniał warunki graniczne na zewnątrz i wewnątrz brzegu. Ze względu na symetrię rozpatrzono 1/8 część płyty. Obliczenia prowadzono dla 9 punktów kollokacji. W konsekwencji otrzymano jednorodny układ liniowych równań

algebraicznych. Przyrównując do zera wyznacznik tego układu, otrzymano równanie względem parametru λ , minimalna wartość którego daje wartość krytyczną λ_{kr} . Zgodnie z tw. Papkowicza otrzymana wartość stanowi dolne oszacowanie rzeczywistej wartości krytycznej. Jak podają autorzy przy tej ilości punktów kolokacji błąd nie przekracza 15%.

Dużą popularność przy rozwiązaniu powyższego problemu mają metody komputerowe, w tym szczególnie metoda różnic skończonych (MRS) i metoda elementów skończonych (MES).

Metoda różnic skończonych. Jak wiadomo MRS polega na zamianie operatorów różniczkowych na operatory różnicowe określone na dyskretnym zbiorze punktów. Dzięki takiemu przybliżeniu problem własny zagadnienia brzegowego (2.1) sprowadza się do rozwiązania problemu własnego jednorodnego układu równań algebraicznych. Zazwyczaj stosuje się siatki regularne prostokątne ze względu na łatwość generacji równań różniczkowych. Dlatego też tą metodą rozwiązuje się zazwyczaj zadania stateczności płyt z otworami prostokątnymi. Zastosowanie siatek nieregularnych (o dowolnym rozmieszczeniu węzłów) pozwalałoby obliczać stateczność płyt o dowolnym kształcie. Brak jest jednak takich prac. Autorzy pracy [17] przedstawili wyniki obliczeń stateczności płyt bez otworu MRS przy zastosowaniu siatek regularnych i nieregularnych. Okazało się, że zastosowanie tych ostatnich jest bardzo wrażliwe na sposób rozmieszczenia węzłów brzegowych. I tak dla płyty prostokątnej ($l_2/l_1 = 2,24$) z 50 nieregularnie rozmieszczonymi węzłami, współczynnik obciążenia krytycznego C (por. przykład 10.1) zmieniał się od 1,71 do 3,94, gdy obliczony metodami klasycznymi [95] jest równy 4,05.

W pierwszych pracach, gdzie zastosowano MRS w tego typu zadaniach przyjmowano założenie, że dokrytyczny stan naprężenia jest jednorodny [9, 10, 56, 94].

W ten uproszczony sposób rozwiązano zadanie stateczności izotropowej [94] i ortotropowej [89] płyty kwadratowej z kwadratowym i prostokątnej z prostokątnym [9, 10, 56] otworem umieszczonym centralnie, przy różnej kombinacji warunków brzegowych na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu.

Dla osiągnięcia zadanej dokładności MRS wymaga wprowadzenia dużej ilości punktów węzłowych szczególnie przy spełnieniu warunków

brzegowych na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu. Celem zmniejszenia tej niedogodności Muzyčenko [56] wprowadził jako zmienne węzłowe oprócz ugięcia płyty u_3 również jej pochodne cząstkowe $u_{3,\alpha}$. Dokładne rozwiązanie problemu stateczności płyt perforowanych wymaga jednak rozwiązania płaskiego zadania teorii sprężystości. Wykorzystując MRS do rozwiązania równania biharmonicznego (2.9) i do równania stateczności Saint-Venanta (2.1) (rozmiar siatki $1/16$) w pracy [65] przedstawiono po raz pierwszy rozwiązanie zadania stateczności płyty kwadratowej z kwadratowym wycięciem przy ścinaniu. Natomiast w pracach [80, 81] zbadano stateczność płyt perforowanych przy działaniu sił skupionych, gdzie równanie biharmoniczne (2.9) rozbito na dwa harmoniczne Laplace'a i Poissona. Różne przypadki podparcia brzegów zewnętrznych i wewnętrznych płyt prostokątnych ($l_2/l_1 = 1,5$) z centralnym kwadratowym otworem zbadano w pracy [23], gdzie dokrytyczny stan naprężenia przyjęto z pracy Długača [19] (rozmiar siatki kwadratowej $1_1/8$). Siatkę w krzywoliniowym ortogonalnym układzie współrzędnych zastosowano w [30, 32] do zadania stateczności płyty kwadratowej z kołowym otworem, swobodnie podpartej na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu, przy działaniu sił ściskających równomiernie rozłożonych na dwu przeciwległych brzegach. Płaskie zadanie teorii sprężystości rozwiązano przy zastosowaniu funkcji zmiennej zespolonej. Jak wiadomo [55, 59] zadanie to prowadzi do znalezienia dwóch funkcji analitycznych tzw. potencjałów Kołosowa w tym przypadku w obszarze pierścienia, który odwzorowuje się na dany obszar płyty [93]. Funkcje analityczne poszukiwano w postaci szeregu potęgowego. Dokładność rozwiązania określano wg różnicy otrzymanych i zadanych naprężeń na brzegu obciążonym. Np. aby osiągnąć dokładność 0,5% w szeregu potęgowym należało uwzględnić 120 wyrazów (dla otworu $2R/l = 0,7$). Rozwiązanie równania stateczności Saint-Venanta zapisanego we współrzędnych krzywoliniowych z uwzględnieniem warunków granicznych, po rozpisaniu w różnicach skończonych sprowadzono do problemu własnego. Podobny sposób zaprezentowano w pracy [37], z tym że przy rozwiązaniu problemu stateczności skorzystano z kryterium energetycznego metodą Ritza.

Metoda elementów skończonych. W ostatnich latach dominującą metodą w tej dziedzinie stała się MES. W pracy [101] zastosowano MES do badania stateczności płyt kwadratowych w centralnym kwadratowym otworem. Zbadano wpływ wielkości otworu przy zastosowaniu 16 elementów kwadratowych w $1/4$ części płyty. Stateczność płyt kwadratowych z centralnym otworem kołowym przy równomiernym przemieszczeniu lub przy obciążeniu równomiernie rozłożonymi siłami ściskającymi na dwóch przeciwległych brzegach rozwiązano w [39, 78] (por. przykład 10.0). Zastosowano kombinację MES i metody Ritza. Płaski stan naprężenia rozwiązano MES wykorzystując element trójkątny zapewniający stałość odkształceń wewnątrz elementu. A do właściwego zadania stateczności zastosowano metodę Ritza, aproksymując ugięcie płyty w postaci pojedynczej sinusoidy w kierunku obciążenia i szeregu kosinusowego w kierunku prostopadłym. Otrzymano w [78] dobrą zgodność wyników z badaniami eksperymentalnymi [43], jeśli chodzi o obciążenie krytyczne. Przeprowadzona analiza pokrytyczna z wykorzystaniem równania nierozdzielności odkształceń Karmana, dała zgodne wyniki z doświadczeniem dla małych otworów. Przyczyną rozbieżności wyników w przypadku płyt z dużymi otworami było przyjęcie ugięcia w postaci pojedynczej sinusoidy, podczas gdy w rzeczywistości wyboczenie w okolicy otworu ma charakter bardziej złożony (por. przykład 10.8). Ponadto analiza nie uwzględniła zmiany postaci wyboczenia w zakresie pokrytycznym. Zjawisko to ma jeszcze większe znaczenie w przypadku płyt trójwarstwowych z miękkim rdzeniem [15].

Badając stateczność MES płyty kwadratowej z otworem kołowym obciążonej równomiernie rozłożonymi siłami ścinającymi stwierdzono w [79] większe obniżenie siły krytycznej niż otrzymane przez Kroll'a [42]. Podobne zadanie w przypadku otworu wzmocnionego pierścieniem przedstawiono w [5], gdzie zastosowano niedostosowany element trójkątny. Autorzy pracy [33] podają natomiast, że w eksperymencie pracy [79] nie obciążenie, lecz przemieszczenia ścinające były równomiernie rozłożone na brzegach płyty. Przeprowadzając obliczenia przy takim założeniu obciążenia kinematycznego otrzymano lepszą zgodność z doświadczeniem. Zastosowano tutaj elementy trójkątne z wierzchołkowymi punktami węzłowymi o 9 stopniach swobody każdy (tzn. przemieszczenia translacyjne u_1, u_2, u_3 i ich pierwsze pochodne cząstkowe

względem osi x_1 i x_2) i węzłem w środku ciężkości o 3 stopniach swobody (przemieszczenia u_1, u_2, u_3). Dodatkowe równania zapewniające ciągłość przemieszczeń uogólnionych na brzegach elementu włączono do analizy globalnej przy pomocy metody mnożników Lagrange'a.

W drugiej połowie lat siedemdziesiątych ukazało się szereg prac w tej dziedzinie autorów japońskich [71], u nas jednak trudno dostępnych. Jedna grupa tych prac opiera się na metodzie funkcji zmiennej zespolonej przy rozwiązywaniu płaskiego zadania teorii sprężystości i kryterium energetycznym metodą Ritza przy rozwiązywaniu właściwego zadania stateczności. Druga grupa prac opiera się w obu zadaniach na MES.

Model ciągły. Metoda modelu ciągłego polega na tym, że płytę z otworem przedstawia się w postaci równoważnej konstrukcji ciągłej, której materiał ma zmienną gęstość i zmienny moduł sprężystości [72]. Sztywność na zginanie i na rozciąganie takiego modelu są funkcjami współrzędnych. Podstawą analizy są równania równowagi, odpowiednik równania Saint Venanta, dla płyty o zmiennej sztywności na zginanie $D(x_1, x_2)$ oraz równania nierozdzielności odkształceń, odpowiednik równań Karmana, dla płyty o zmiennej sztywności na rozciąganie $B(x_1, x_2)$. Moduł sprężystości i gęstość modelu ciągłego opisuje się przy pomocy funkcji impulsowej. Opis taki wygodny jest w przypadku płyt z prostokątnymi wycięciami [69], których boki są równoległe do zewnętrznych boków płyty. Aby obliczać przy pomocy tej koncepcji płyty z krzywoliniowymi otworami [67] lub otworami prostokątnymi dowolnie zorientowanymi względem boków zewnętrznych płyty [96], zastępuje się rzeczywisty otwór sumą małych otworów prostokątnych. Zadanie stateczności rozwiązuje się tradycyjnymi metodami stosowanymi w teorii płyt ciągłych bez uwzględnienia niejednorodności dokrytycznego stanu naprężenia. Np. stosując metodę ortogonalizacji Bubnova-Galerkina, aproksymuje się ugięcie w postaci pojedynczej sinusoidy w kierunku osi x_1 i x_2 lub w postaci podwójnych szeregów trygonometrycznych [69, 96]. Metoda ta została rozwinięta przez Preobrażenskigo [67-70], który rozwiązał szereg zadań teorii stateczności i drgań płyt z wycięciami, zakończona monografią [72].

Zaletą tej metody jest to, że rozwiązania dużej ilości zadań w tej dziedzinie otrzymuje się w postaci zamkniętej. Wadą natomiast jest to, że nie uwzględnia wpływu niejednorodności dokrytycznego

stanu naprężenia, przez co nie daje możliwości badania lokalnego charakteru wyboczenia w okolicy otworu.

Stateczność płyty prostokątnej z otworem bez określenia do-
krytycznego stanu naprężenia. Rozwiązanie zadania stateczności sprężystej płyt z otworami związane jest z koniecznością rozwiązania płaskiego zadania teorii sprężystości, co już nie jest proste w przypadku niejednorodnych obciążeń i nieciągłych powierzchni. Jak wiadomo [44] zadaniu typu wariacyjnego odpowiada nie jeden, lecz cały zbiór funkcjonałów. W pracach [45, 46] przedstawiono sposób zbudowania takiego funkcjonału, z warunku starjonarności, którego w stanie krytycznym określa się wszystkie równania różniczkowe i warunki graniczne zagadnienia stateczności płyt cienkich z otworami. Pierwszymi pracami idącymi w tym kierunku były [2, 3], gdzie rozwiązano zadanie Sommerfelda (stateczność płyty przy obciążeniu siłą skupioną). W pracy [45] podano nowe energetyczne kryterium stateczności, efektywne w rozwiązywaniu zadań stateczności płyt z otworami. Zadanie wymaga jedynie spełnienia kinematycznych warunków granicznych dla funkcji ugięć i warunków granicznych dla funkcji opisującej wariację płaskiego stanu naprężenia przy utracie stateczności. Na podstawie otrzymanego funkcjonału przedstawiono rozwiązanie zadania stateczności kwadratowej płyty z centralnym kołowym otworem ściskany równomiernie rozłożonymi siłami, wykluczające konieczność wcześniejszego rozwiązania płaskiego zadania teorii sprężystości.

Ogólniejszym problemem jest zagadnienie stateczności powłok z otworami, któremu również poświęcono szereg prac. Obszerny przegląd literatury w tym zakresie podano w pracach [7, 28, 34-36]. Często zagadnienie to rozwiązywane jest podobnymi metodami.

2.2. Stateczność sprężysta płyt trójwarstwowych

Płyta trójwarstwowa (typu sandwich) zbudowana jest z dwóch cienkich warstw zewnętrznych z materiału o stosunkowo dużej sztywności (zwanymi dalej okładzinami), pomiędzy którymi znajduje się lekka, o niskiej wytrzymałości warstwa (zwana dalej rdzeniem).

Utrata stateczności takiej płyty może odbywać się w dwojaki sposób: globalny lub miejscowy. Miejscowa postać wyboczenia może mieć charakter symetryczny lub asymetryczny. Globalnej i miejscowej utracie stateczności przyporządkowane są odrębne metody obliczeń, gdyż dla płyt trójwarstwowych obie postacie są wzajemnie niezależne [95].

Okładziny przedstawia się najczęściej w postaci cienkiej sprężystej płyty, dla której słuszną jest hipoteza prostej normalnej Kirchhoffa-Love'a (K-L).

Rdzeń w ogólnym przypadku należy rozpatrywać jak ciało trójwymiarowe. Podejście takie przedstawiono w niektórych pracach [27, 58], lecz możliwość rozwiązania tak przedstawionego zadania jest ograniczona do bardzo prostych przypadków, np. płyta cylindrycznie ściszana [27].

W związku z tym wprowadzono szereg metod upraszczających sprowadzających trójwymiarowe równania teorii sprężystości do dwuwymiarowych. Podział tych metod podany w pracy [26] można przedstawić w następujący sposób:

- a) metoda rozkładu po grubości (w szereg potęgowy, w szereg trygonometryczny, wielomianów Lagrange'a);
- b) metoda asymptotyczna;
- c) metoda hipotez (K-L, Reissnera, Timoshenko, Własowa, Ambarcumjana i in.)

Wszystkie znalazły również zastosowanie w teorii płyt trójwarstwowych (lecz nie zawsze w teorii stateczności sprężystej). Np. metoda rozkładu w szereg wielomianów Lagrange'a w pracach [24, 25], metoda asymptotyczna [31, 63, 64], metoda Reissnera [20, 64, 66, 76], metoda Ambarcumjana [4, 64, 75].

W tzw. technicznej teorii płyt trójwarstwowych przyjmuje się dalsze uproszczenia. Pomija się przede wszystkim poprzeczną ścisłość rdzenia. Założenie to jest dopuszczalne jedynie dla tzw. cienkich płyt trójwarstwowych [82, 84, 95].

W przypadku, gdy sztywności rdzenia i okładzin są tego samego rzędu, przyjmuje się hipotezę K-L dla całego pakietu warstw. W praktyce jednak ze względu na obniżenie ciężaru płyty trójwarstwowej rdzenie wykonuje się z lekkich mało sztywnych materiałów. Wówczas należy uwzględnić wpływ poprzecznego ścinania rdzenia na pracę sił zewnętrznych. W przypadku lekkiego rdzenia odkształcenia poprzecznego ścinania rozkładają się równomiernie na grubości rdzenia, co odpowiada liniowemu rozkładowi przemieszczeń. Dla stosunkowo sztywnych grubych rdzeni ($cE_c/Et > 2$) [29], rozkład poprzecznych odkształceń ścinających na grubości rdzenia przyjmuje się w postaci funkcji kwadratowej. Natomiast, gdy stosunek modułu sprężystości okładziny E do modułu sprężystości rdzenia E_c w płaszczyźnie płyty jest duży i stosunek grubości okładziny t do grubości rdzenia $2c$ nie jest bardzo mały (tzn. $cE_c/Et < 0,1$) [95], to siły podłużne przenoszone są niemal w całości przez okładziny. Takie rdzenie przyjęto nazywać miękkimi. W dalszym ciągu będziemy zajmować się tylko tego rodzaju płytami (tzn. cienkimi z miękkim rdzeniem) ze względu na ich szerokie zastosowania praktyczne [82,95]. Płyty tego typu przy stosunkowo niskim ciężarze charakteryzują się dużą sztywnością, dobrą izolacją termiczną i akustyczną oraz dobrymi własnościami zmęczeniowymi. Do zasadniczych wad tego typu konstrukcji należy zaliczyć: duże wymagania technologiczne oraz małą odporność na działanie sił skupionych.

Podstawą liniowej analizy stateczności płyt tego typu jest następujące równanie różniczkowe [82, 95]

$$2B(c + \frac{t}{2})^2 \nabla^4 u_3 + (1 - \frac{cB}{G_c} \nabla^2) (2D \nabla^4 u_3 - N_{\alpha\beta} u_{3,\alpha\beta}) = 0, \quad (2.10)$$

gdzie

$$B = \frac{Et}{1-\nu^2}.$$

Rozwiązanie zadania stateczności płyty trójwarstwowej można uprościć, gdy zaniedba się nierównomierny rozkład naprężeń na grubości okładzin, tzn. gdy założy się sztywność na zginanie okładzin D równą zeru. Wówczas ulegnie obniżeniu rząd równania różniczkowego (2.10) z sześciu do czterech i odpowiednio ilość warunków brzegowych [82].

Z założenia tego korzysta się w obliczeniach metodą różnic skończonych [104, 105].

2.3. Stateczność sprężysta płyt trójwarstwowych z otworem

Podobnie jak w przypadku płyty jednorodnej cienkiej zadanie stateczności sprężystej (w przypadku kryterium statycznego) sprowadza się do określenia ekstremalnej (minimalnej dodatniej lub minimalnej co do wartości bezwzględnej ujemnej) wartości własnej zagadnienia brzegowego opisanego równaniem różniczkowym (2.10) ze zmiennymi współczynnikami $N_{\alpha\beta}$ i odpowiednimi kinematycznymi warunkami brzegowymi.

Tak postawione zadanie rozwiązano w pracy [104] metodą różnic skończonych, dla płyty prostokątnej ($l_2/l_1 = 1,5$) swobodnie podpartej na całym brzegu zewnętrznym ze swobodnym kwadratowym wycięciem ($l_1/2$) w centrum płyty, obciążonej siłami ściskającymi lub rozciągającymi równomiernie rozłożonymi na dwu przeciwległych brzegach. Z powodów podanych w poprzednim punkcie zaniedbano sztywność na zginanie okładzin D . Uwzględniono niejednorodność dokrytycznego stanu naprężenia, który zaczerpnięto w gotowej postaci z pracy [19]. Równanie równowagi (2.10) rozpisano w różnicach skończonych dla regularnej kwadratowej siatki rozmiaru $l_1/8$. Ze względu na symetrię płyty i obciążenia rozważano tylko $1/4$ część płyty, rozdzielając wszystkie postacie utraty stateczności na symetryczne i asymetryczne względem osi symetrii. Zagadnienie wartości własnych rozwiązano w sposób iteracyjny, badając znak wartości wyznacznika. Wyniki obliczeń obciążenia krytycznego przedstawiono w postaci wykresów w funkcji parametru sprężysto-geometrycznego płyty trójwarstwowej $k = \pi^2 Bc/l_1^2 G_c$ w przedziale (0-1). W podobny sposób w pracy [105] rozwiązano zadanie stateczności kwadratowych płyt trójwarstwowych z centralnym kwadratowym otworem obciążonych siłami ścinającymi rozłożonymi wg zadanej funkcji na brzegu zewnętrznym płyty. Wykorzystano rozwiązanie płaskiego zadania z pracy [65] otrzymanego MRS przy siatce rozmiaru $l_1/16$. Natomiast do właściwego zadania stateczności zastosowano siatkę kwadratową rozmiaru $l_1/8$.

We wszystkich przypadkach obciążeń zaobserwowano, że ze wzrostem parametru k obciążenie krytyczne zmniejsza się nagle dla $k = 0-0,2$ a później w sposób łagodny dla $k = 0,3-1$. Rozpatrzono również wpływ warunków brzegowych i stwierdzono, że rozbieżność w sile krytycznej dla różnych przypadków podparcia jest największa, gdy parametr k

jest bliski zeru (odpowiada to płycie jednowarstwowej) i wynosi 20-25% pomiędzy skrajnymi wartościami. Natomiast dla większych wartości parametru k wpływ warunków brzegowych zmniejsza się. Wynika to z faktu, że płyta trójwarstwowa jest mniej wrażliwa na warunki brzegowe w porównaniu z płytą jednorodną [83].

Prace te są jedynymi w tej dziedzinie znanymi autorowi. Zastosowana metoda różnic skończonych pozwala w prosty sposób rozwiązywać zadania stateczności prostokątnych płyt z prostokątnymi wycięciami.

Ze względu na duże znaczenie praktyczne zaistniała potrzeba opracowania skutecznego sposobu obliczania stateczności płyt trójwarstwowych z otworami dowolnego kształtu. Na podstawie analizy istniejącej literatury w tej dziedzinie zdecydowano się na zastosowanie metody elementów skończonych. Na taką decyzję wpływa duża uniwersalność tej metody. Pozwala ona rozwiązywać zarówno dokrytyczny płaski stan naprężenia jak i właściwe zagadnienie stateczności. Istnieje duża swoboda w formułowaniu kinetycznych i kinematycznych warunków brzegowych. Obszar płyty może być niemalże dowolnego kształtu. Możliwość przedstawienia postaci wyboczenia np. w formie planów warstwicznych. W prosty sposób można uwzględnić sztywność na zginanie okładzin. Zanim przejdziemy do przedstawienia sposobu rozwiązania zagadnienia stateczności płyt trójwarstwowych MES, przedstawimy w jaki sposób tworzy się trójwarstwowe elementy skończone w dostępnej nam literaturze.

2.4. Trójwarstwowy element skończony

W stosunku do konstrukcji trójwarstwowych obserwuje się dwa kierunki budowania elementu skończonego. Pierwszy wychodzi z ogólnej trójwymiarowej teorii sprężystości, czego konsekwencją jest budowanie elementów skończonych przestrzennych. Drugi opiera się na uściślonych teoriach płyt (odchodzących od hipotezy K-L). W pierwszym przypadku wymaga się, aby przy zmniejszaniu grubości płyty, wyniki pokrywały się z hipotezą K-L. Próbę rozwiązania takiego elementu podjęto w pracy [21], gdzie w opisie stanu przemieszczeń wewnątrz elementu wprowadzono dwa pola przemieszczeń. Pierwsze pole opisuje stan przemieszczeń w całym superelemencie (budowano superelement złożony z podziału płyty po grubości na elementy przestrzenne) i jest zgodne z teorią płyt cienkich. Drugie pole ma charakter przestrzennego stanu

przemieszczeń w każdym elemencie składowym. Superelement taki posiada stosunkowo dużą ilość stopni swobody, co znacznie wpływa na wydłużenie czasu obliczeń na maszynie cyfrowej (np. przy podziale grubości płyty na 4 warstwy otrzymujemy 72 stopnie swobody w elemencie prostokątnym, co przy obliczeniach statyki płyt przy podziale w planie na 16 elementów dało czas obliczeń 3h 40 min, a na 25 elementów - 6h). W zadaniu stateczności płyt i przy obecności otworu, gdzie należy zagęszczać podział na elementy czas ten uległby zwielokrotnieniu.

Większość opracowań stosujących MES w teorii płyt trójwarstwowych opiera się na zastosowaniu teorii jednorodnych płyt średniej grubości, gdzie uwzględnia się wpływ poprzecznych odkształceń ścinających i ściskających.

W pracy [88] przedstawiono element prostokątny płytowy z 10 stopniami swobody w węźle (10 ssw), tzn. ugięcie i pochodne cząstkowe do 3 stopnia, a przemieszczenie uogólnione aproksymowano wielomianami siódmego stopnia. Na bazie teorii płyt Reissnera i Love'a uwzględniono wpływ naprężeń ścinających na ugięcie płyty. Pryor w pracy [73] uzupełnia klasyczny prostokątny element płytowy [103] o odkształcenia ścinające. Dla przemieszczeń w płaszczyźnie w stanie tarczowym przyjmuje aproksymację biliniową, dla ugięć w stanie zginania aproksymację niepełnym wielomianem czwartego stopnia, a odkształcenia poprzecznego ścinania wielomianem biliniowym. Podobny opis elementu przedstawiono w monografii [13] w rozdziale poświęconym elementowi płytowemu uwzględniającemu efekt poprzecznych odkształceń ścinających. Ponieważ odkształcenia od poprzecznego ścinania są stałe na grubości rdzenia w celu zapewnienia zgodności odkształceń na styku z okładziną, wprowadza się dodatkową funkcję opisującą w sposób paraboliczny rozkład tych odkształceń (naprężeń) w następujący sposób

$$\tau = f(x_3)Q$$

gdzie:

Q - wartość średnia naprężeń tnących na grubości rdzenia,
a funkcja $f(x_3)$ spełnia warunek

$$\int_{-c}^c f(x_3) dx_3 = 1$$

Dla płyt homogenicznych jest to funkcja paraboliczna postaci

$$f(x_3) = \frac{3}{4c} \left(1 - \frac{x_3^2}{c^2} \right).$$

Wprowadzenie takich równoważnych pod względem całkowym odkształceń powoduje w efekcie modyfikację macierzy sprężystości w następujący sposób

$$[D^*] = \frac{5c}{3} [D],$$

gdzie:

- [D] - macierz sprężystości przy założeniu odkształceń ścinających stałych na grubości rdzenia,
- [D*] - przy odkształceniach ścinających opisanych funkcją paraboliczną.

Jak podaje Grigoljuk [29] uwzględnienie parabolicznego rozkładu naprężeń tnących jest istotne dla płyt trójwarstwowych o sztywnym i grubym rdzeniu (np. dla płyty trójwarstwowej budowy symetrycznej, gdy $cE_c/Et > 2$).

Stosując tego typu element w pracy [60] obliczono ugięcie w środku płyty trójwarstwowej obciążonej siłami równomiernie rozłożonymi. Przyjęto tutaj założenie, że powierzchnia środkowa okładziny przylega bezpośrednio do rdzenia. Założenie to jest dopuszczalne wtedy, gdy grubość okładziny jest bardzo mała w porównaniu z grubością rdzenia.

W pracy [38] przedstawiono element trójkątny trójwarstwowy z trzema stopniami swobody w węźle (ugięcie i dwa obroty względem osi współrzędnych). Efektywność elementu zbadano przy obliczaniu ugięć płyty trójwarstwowej z rdzeniem komórkowym obciążonej siłą skupioną. Przedstawiono rozkłady ugięć i naprężeń w obszarze płyty.

Podobnie w szeregu pracach [12, 14, 22, 53, 54, 77] jako wartości węzłowe przyjmuje się ugięcie płyty i kąty obrotu normalnej do powierzchni środkowej. Płyta trójwarstwowa pracuje wówczas jak jednorodna płyta wg modelu Timoshenko [91], odpowiednio dobraną sztywnością na zginanie.

Przy badaniu wpływu obciążeń działających poprzecznie do powłoki walcowej w pracy [8] przedstawiono element skończony, w którym ugięcia

okładzin nie są jednakowe. Założono liniowy rozkład odkształceń poprzecznych i odkształceń od ścinania na grubości rdzenia. Przyjęcie takiego pola odkształceń narusza jednak warunek nierozdzielności odkształceń.

Obserwuje się brak opracowań w zakresie stateczności płyt trójwarstwowych MES. W pracy [14] przedstawiono jedynie stateczność prętów (belek) trójwarstwowych.

3. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Przedmiotem pracy jest analiza zlinearyzowanego problemu stateczności niejednostopólnych prostokątnych płyt trójwarstwowych.

Zakładamy, że płyta złożona jest z trzech warstw: z dwóch sztywnych jednakowej grubości t , pomiędzy którymi znajduje się warstwa o znacznie mniejszej sztywności grubości $2c$.

Przyjmujemy, że okładziny pracują jak cienkie płyty, dla których słuszna jest hipoteza przemieszczeniowa Kirchhoffa-Love'a (K-L). Dla rdzenia istotne znaczenie mają tylko odkształcenia od poprzecznego ścinania. Pomijamy wpływ poprzecznych naprężeń normalnych. Siły podłużne przenoszą tylko warstwy zewnętrzne. Dla miękkich rdzeni ($E_c c / E t < 0,1$) naprężenia normalne i tnące w płaszczyźnie rdzenia są pomijalnie małe w stosunku do pozostałych naprężeń. Materiały warstw zewnętrznych oraz rdzenia są liniowo sprężyste, jednorodne i ortotropowe.

Płytę trójwarstwową odnosimy do ortogonalnego układu współrzędnych x_i , $i = 1, 2, 3$ (rys.2). Funkcja przemieszczeń w okładzinie zgodnie z hipotezą K-L ma postać [95] (rys.3):

$$u_{\alpha}^{(f)} = u_{\alpha}^{o(f)} - (x_3 \pm c') u_{3,\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2), \quad (3.1)$$

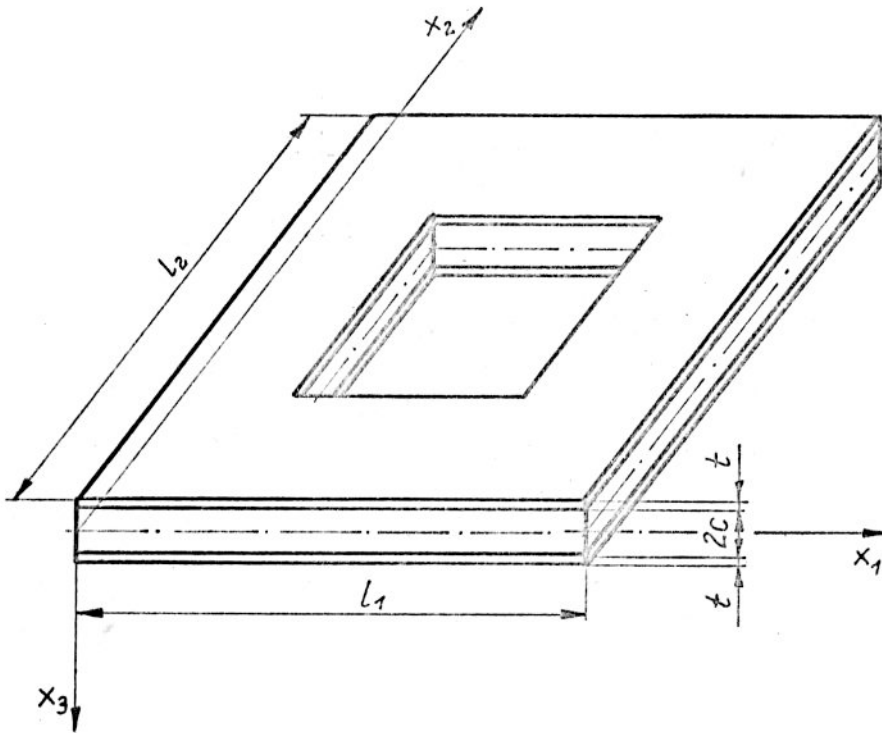
$$u_3^{(f)} = u_3,$$

gdzie:

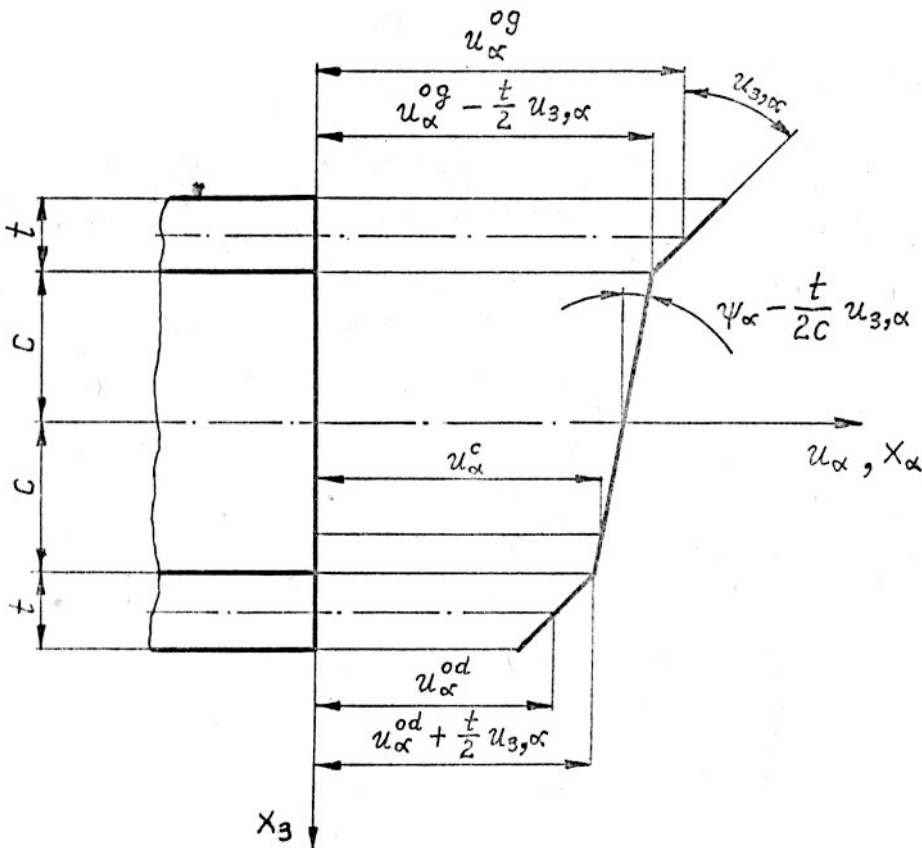
$f \equiv g$ - dla okładziny górnej (rys.3), $-(c + t) \leq x_3 \leq -t$,
 $f \equiv d$ - dla okładziny dolnej, $c \leq x_3 \leq c+t$ (znak minus w wyrażeniu w nawiasie),

$$c' = c + \frac{t}{2}$$

$u_{\alpha}^{o(f)}$ - przemieszczenie powierzchni środkowej okładziny
($f \equiv g, d$) w kierunku osi x_{α} ($\alpha = 1, 2$).



Rys.2. Płyta prostokątna trójwarstwowa z otworem



Rys.3.

Wykres przemieszczeń płyty trójwarstwowej podczas zginania w płaszczyźnie x_{α}, x_3

Funkcja przemieszczeń w rdzeniu zgodnie z przyjętymi założeniami ma postać [95]

$$u_{\alpha}^c = u_{\alpha} - x_3 (\psi_{\alpha} - \frac{t}{2c} u_{3,\alpha}), \quad (\alpha = 1, 2), \quad (3.2)$$

$$u_3^c = u_3,$$

gdzie:

$$u_{\alpha} = \frac{1}{2} (u_{\alpha}^{og} + u_{\alpha}^{od}), \quad (3.3)$$

$$\psi_{\alpha} = \frac{1}{2} (u_{\alpha}^{og} - u_{\alpha}^{od}),$$

są uogólnionymi przemieszczeniami sprowadzonymi do powierzchni środkowej płyty trójwarstwowej. Jak widać pole przemieszczeń płyty trójwarstwowej określa w sposób jednoznaczny pięć funkcji przemieszczeń. Pierwsze trzy u_i ($i = 1, 2, 3$) określają przemieszczenia translacyjne w kierunku osi x_i , a dwie ostatnie obroty względem osi x_{α} ($\alpha = 1, 2$).

Związki geometryczne pomiędzy składowymi tensora odkształceń, a składowymi wektora przemieszczeń są zgodnie z nieliniową teorią płyt następujące [76]:

- dla okładzin:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(f)} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^{(f)} + u_{\beta,\alpha}^{(f)} + u_{3,\alpha}^{(f)} \cdot u_{3,\beta}^{(f)}), \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (3.4)$$

- dla rdzenia:

$$\varepsilon_{\alpha 3}^c = \frac{1}{2} (u_{\alpha,3}^c + u_{3,\alpha}^c), \quad (\alpha = 1, 2), \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{33}^c = 0.$$

Uwzględniając wzory na przemieszczenia (3.1-3.3) odkształcenia płyty możemy wyrazić przy pomocy odkształceń uogólnionych sprowadzonych do powierzchni środkowej płyty trójwymiarowej:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(f)} = \varepsilon_{\alpha\beta} \pm c \kappa_{\alpha\beta}^{(c)} + (x_3 \pm c') \kappa_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}^c = \varepsilon_{\alpha 3},$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}), \\
 \kappa_{\alpha\beta}^{(c)} &= \frac{1}{2} (\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}), \\
 \kappa_{\alpha\beta} &= -u_{3,\alpha\beta}, \\
 \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (-\psi_{\alpha} + \frac{c'}{c} u_{3,\alpha}), \quad (\alpha, \beta = 1, 2),
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

są uogólnionymi odkształceniami powierzchni środkowej płyty trójwymiarowej. Pierwsze są odkształceniami typu błonowego, drugie są odkształceniami zginania płyty trójwarstwowej wynikające z różnicy odkształceń (sił) górnej i dolnej okładziny, trzecie są odkształceniami zginania okładzin, a czwarte są odkształceniami ścinającymi w rdzeniu. W wielu pracach [13, 14, 60] przyjmuje się że $c'/c = 1$, co jest uzasadnione w przypadku płyt trójwarstwowych o stosunkowo grubym rdzeniu w porównaniu z grubością okładzin lub też pomija się zginanie okładzin $\kappa_{\alpha\beta} = 0$ [18].

Dalej wprowadzimy wektor odkształceń płyty trójwarstwowej:

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_0 \quad \kappa^c \quad \kappa \quad \varepsilon^c\} = \{\varepsilon_0, \varepsilon^{bq}\}, \tag{3.8}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon_0\}^T &= \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}, \\
 \{\kappa^c\}^T &= \{\kappa_{11}^c, \kappa_{22}^c, 2\kappa_{12}^c\}, \\
 \{\kappa\}^T &= \{\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}, \\
 \{\varepsilon^c\}^T &= \{2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\},
 \end{aligned}$$

oraz wektor przemieszczeń sprowadzonych do powierzchni środkowej płyty trójwarstwowej

$$\{u\}^T = \{u_1, u_2, \psi_1, \psi_2, u_3\} = \{u^{pl^T}, u^{bq^T}\} \tag{3.9}$$

Nieliniowe związki geometryczne (3.7) możemy teraz przedstawić w formie macierzowej w następujący sposób:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \hline \mu_{11}^c \\ \mu_{22}^c \\ 2\mu_{12}^c \\ \hline \mu_{11} \\ \mu_{22} \\ 2\mu_{12} \\ \hline 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{,1} & & & \frac{1}{2} u_{3,1} \cdot \partial_{,1} \\ & \partial_{,2} & & \frac{1}{2} u_{3,2} \cdot \partial_{,2} \\ \partial_{,2} & \partial_{,1} & & \frac{1}{2} (u_{3,2} \cdot \partial_{,1} + u_{3,1} \cdot \partial_{,2}) \\ \hline & & \partial_{,1} & \\ & & & \partial_{,2} \\ \partial_{,2} & \partial_{,1} & & \\ \hline & & & -\partial_{,11}^2 \\ & & & -\partial_{,22}^2 \\ & & & -\partial_{,12}^2 \\ \hline & & -1 & \\ & & & -1 \\ & & & \frac{c'}{c} \partial_{,1} \\ & & & \frac{c'}{c} \partial_{,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.10a)$$

lub

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \mu^c \\ \mu \\ \varepsilon^c \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} L^{pl} & 0 & 0 \\ 0 & L^{pl} & 0 \\ 0 & 0 & L^b \\ 0 & -I & L^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} L^*(u) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} u^{pl} \\ u^q \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.10b)$$

$$\{\varepsilon\} = ([L^0] + [L^1(u)]) \cdot \{u\}, \quad (3.10c)$$

gdzie:

$[L^0]$, $[L^1(u)]$ - macierz operatorów różniczkowych.

Podstawą analizy stateczności sprężystej jest zbadanie energii potencjalnej układu, która w przypadku płyty trójwarstwowej może być przedstawiona w następujący sposób:

$$V = U^c + U^g + U^d - W, \quad (3.11)$$

gdzie:

U^c, U^g, U^d - energia odkształcenia sprężystego odpowiednio rdzenia, okładziny górnej i dolnej,
 W - praca sił zewnętrznych.

Warunek stacjonarności stanu równowagi możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \delta V = & \int_{V^g} \{\sigma^g\}^T \cdot \delta \{\varepsilon^g\} dV + \int_{V^d} \{\sigma^d\}^T \cdot \delta \{\varepsilon^d\} dV + \\ & + \int_{V^c} \{\sigma^c\}^T \cdot \delta \{\varepsilon^c\} dV - \int_S \{q\}^T \delta \{u\} dS = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie:

$\{\sigma^c\}, \{\sigma^{(f)}\}, (f = g, d)$ - wektor naprężeń odpowiednio w rdzeniu i okładzinach;

$$\{\sigma^{(f)}\}^T = \{\sigma_{11}^{(f)}, \sigma_{22}^{(f)}, \sigma_{12}^{(f)}\},$$

$$\{\sigma^c\}^T = \{\sigma_{13}^c, \sigma_{23}^c\};$$

$\{\varepsilon^c\}, \{\varepsilon^{(f)}\}, (f = g, d)$ - wektor odkształceń w rdzeniu i okładzinach;

$$\{\varepsilon^{(f)}\}^T = \{\varepsilon_{11}^{(f)}, \varepsilon_{22}^{(f)}, 2\varepsilon_{12}^{(f)}\},$$

$$\{\varepsilon^c\}^T = \{2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\};$$

$\{q\}$ - wektor zewnętrznych obciążeń powierzchniowych,

$V^c, V^{(f)}, (f = g, d)$ - objętość odpowiednio rdzenia i okładzin,

S - zewnętrzna całkowita powierzchnia płyty trójwarstwowej:

$$S = 2\mathcal{R} + S_b$$

\mathcal{R} - powierzchnia płaszczyzny środkowej płyty trójwarstwowej,

S_b - powierzchnia boczna płyty.

Związki fizyczne zgodnie z przyjętymi założeniami mają postać

- dla okładzin:

$$\{\sigma^f\} = [E^f] \{\varepsilon^f\}, \quad (3.13)$$

- dla rdzenia:

$$\{\sigma^c\} = [E^c] \{\varepsilon^c\}, \quad (3.14)$$

gdzie dla płyty ortotropowej

$$[E^f] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad [E^c] = \begin{bmatrix} G_{13} & 0 \\ 0 & G_{23} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1,$$

dla płyty izotropowej:

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad G_{12} = G, \quad G_{13} = G_{23} = G_c,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.16)$$

Po scałkowaniu wyrażenia (3.12) względem współrzędnej x_3 otrzymamy:

$$\delta V = \int_{\Omega} (\{N\}^T \delta\{\varepsilon_0\} + \{\bar{M}^c\}^T \delta\{w^c\} + \{M\}^T \delta\{w\} + \\ + \{Q^c\}^T \delta\{\varepsilon^c\}) d\Omega + \int_{\Omega} \{\bar{q}\}^T \delta\{u\} d\Omega = 0, \quad (3.17a)$$

lub w postaci zwartej:

$$\delta V = \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\bar{q}\}^T \delta\{u\} d\Omega, \quad (3.17b)$$

gdzie wprowadzono następujące wektory sił jednostkowych:

$$\{N\} = \{N^g\} + \{N^d\},$$

$$\begin{aligned} \{M^c\} &= c (\{N^g\} - \{N^d\}), \\ \{M\} &= \{M^g\} + \{M^d\}, \\ \{N^{(f)}\} &= \int_t \{\sigma^{(f)}\} d x_3, \\ \{M^{(f)}\} &= \int_t \{\sigma^{(f)}\} \cdot (x_3 \pm c') d x_3, \quad (f \equiv g, d), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\{N\}^T \equiv \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}$ jest wektorem sił jednostkowych stanu membranowego,

$\{M^c\}^T \equiv \{M_{11}^c, M_{22}^c, M_{12}^c\}$ jest wektorem momentów jednostkowych zginających wynikłych z różnicy sił na górnej i dolnej okładzinie,

$\{M\}^T = \{M_{11}, M_{12}, M_{12}\}$ jest wektorem momentów jednostkowych zginających okładziny,

$\{Q^c\}^T = \{Q_{13}, Q_{23}\}$ jest wektorem sił poprzecznych jednostkowych w rdzeniu,

$$\{\sigma\}^T = \{N, M^c, M, Q^c\}, \quad (3.19)$$

$$\{\bar{q}\} = \int \{q\} d x_3.$$

Związki fizyczne pomiędzy siłami jednostkowymi i odkształceniami otrzymamy z (3.18) po podstawieniu wzorów (3.13)-(3.16) w następującej postaci

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad (3.20)$$

gdzie:

$$[D] = [2 D_{p1}, 2c^2 D_{p1}, 2D_b, D_q], \quad (3.21)$$

$$[D_{p1}] = t [E^{(f)}],$$

$$[D_b] = \frac{t^3}{12} [E^{(f)}], \quad (3.22)$$

$$[D_q] = 2c [E^c].$$

Macierz sprężystości płyty trójwarstwowej $[D]$ tworzą cztery podmacierze:

- $[2D_{p1}]$ - macierz sprężystości okładzin na ściskanie i ścinanie w płaskim stanie naprężeń (okładziny są jednakowe w związku z tym pominięto indeks (f)),
- $[2c^2D_{p1}]$ - macierz sprężystości płyty trójwarstwowej na zginanie i skręcanie wynikłe z różnicy sił na górnej i dolnej okładzinie,
- $[2D_b]$ - macierz sprężystości okładzin na zginanie i skręcanie,
- $[D_q]$ - macierz sprężystości rdzenia na ścinanie.

4. MACIERZ SZTYWNOŚCI I NAPRĘŻEN POCZĄTKOWYCH TRÓJWARSTWOWEGO ELEMENTU SKOŃCZONEGO

Metoda elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej polega na aproksymacji rzeczywistego rozkładu przemieszczeń $\{u(x_1, x_2)\}$ za pomocą funkcji interpolacyjnych (tzw. funkcji kształtu) i skończonej liczby N węzłowych przemieszczeń $\{r\} = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ [6]. Zapisujemy to w postaci:

$$\{u(x_1, x_2)\} = [\phi(x_1, x_2)] \{r\}, \quad (4.1)$$

gdzie:

$\{u\}$ jest funkcją przemieszczeń (tutaj (3.9)), a macierz funkcji kształtu $[\phi]$ określona jest oddzielnie dla każdego elementu.

Typowy układ przemieszczeń węzłowych w odniesieniu do okładziny przedstawiono na rys.4. W najprostszym przypadku pomija się obrót względem osi x_3 , tzn. $\alpha_3^{i(f)}$. Natomiast w przypadku tzw. elementów dostosowanych dodatkowo wprowadza się drugie pochodne cząstkowe ugięcia $u_{3,\alpha\beta}$ [73]. Tutaj ograniczymy się do minimalnego układu parametrów węzłowych stosowanych w zagadnieniu stateczności cienkich płyt [73] w odniesieniu do okładziny:

$$\{r_i^{(f)}\}^T = \{u_1^{i(f)}, u_2^{i(f)}, u_3^i, \alpha_1^i, \alpha_2^i\} \quad (4.2a)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ \alpha_3^i \\ \psi_1^i \\ \psi_2^i \\ \psi_3^i \\ u_3^i \\ \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c} & & & & & & & \\ & & \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c} & & & & & \\ & & & & \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{ig} \\ u_1^{id} \\ u_2^{ig} \\ u_2^{id} \\ \alpha_3^{ig} \\ \alpha_3^{id} \\ u_3^i \\ \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Układ przemieszczeń węzłowych $\{r_i\}$ wygodnie jest podzielić w następujący sposób:

$$\{r_i\}^T = \left\{ r_i^{pl} \mid r_i^q \quad r_i^b \right\} = \left\{ r_i^{pl} \quad r_i^{bq} \right\} \quad (4.6)$$

gdzie:

$\{r_i^{pl}\}$ oznacza wektor przemieszczeń węzłowych działających w płaszczyźnie płyty

$$\{r_i^{pl}\}^T = \{u_1^i \quad u_2^i \quad \alpha_3^i\},$$

$$\alpha_3^i = u_{1,2}^i + u_{2,1}^i, \quad (\text{por. [1]})$$

lub

$$\{r_i^{pl}\}^T = \{u_1^i \quad u_2^i\}; \quad (\text{por. [73, 103]})$$

$\{r_i^q\}$ oznacza wektor przemieszczeń węzłowych wynikających ze ścinania poprzecznego rdzenia

$$\{r_i^q\}^T = \{\psi_1^i \quad \psi_2^i \quad \psi_3^i\},$$

$$v_3^i = v_{1,2}^i + v_{2,1}^i,$$

lub

$$\{r_i^q\}^T = \{v_1^i \quad v_2^i\}; \quad (\text{por. [60, 73]})$$

$\{r_i^b\}$ oznacza wektor przemieszczeń węzłowych wynikających z ugięcia okładzin (por. [73, 103]):

$$\{r_i^b\}^T = \{u_3^i \quad \alpha_1^i \quad \alpha_2^i\},$$

gdzie:

$$\alpha_1^i = -u_{3,2},$$

$$\alpha_2^i = u_{3,1}.$$

Wówczas macierz funkcji kształtu można przedstawić w następujący sposób:

$$[\phi_i]_{5 \times 7} = \begin{bmatrix} \phi_i^{pl} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i^q & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i^b \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Mając określone pole przemieszczeń (4.4) możemy opisać pole odkształceń (3.7)-(3.10) przy pomocy przemieszczeń węzłowych:

$$\{\varepsilon\} = [B^0 + B^1 (\{r\})] \{r\}, \quad (4.8)$$

gdzie:

$$[B^0] = \begin{bmatrix} B^{pl} & 0 & 0 \\ 0 & B_1^{bq} & 0 \\ 0 & 0 & B_2^{bq} \\ 0 & B_3^{bq} & B_4^{bq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{pl} & 0 \\ 0 & B^{bq} \end{bmatrix}, \quad [B^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_b^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Macierz $[B^0]$ jest macierzą, która występuje w przypadku liniowych nieskończenie małych odkształceń:

Natomiast macierz $[B^1]$ jest liniowa względem przemieszczeń $\{r\}$:

$$[B_b^1(r)] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \{r^b\}^T \cdot [\phi_{,1}^b]^T \cdot [\phi_{,1}^b] \\ \{r^b\}^T \cdot [\phi_{,2}^b]^T \cdot [\phi_{,2}^b] \\ \{r^b\}^T \cdot ([\phi_{,2}^b]^T [\phi_{,1}^b] + [\phi_{,1}^b]^T [\phi_{,2}^b]) \end{bmatrix},$$

stąd wynika, że:

$$\delta[B^1(r)] = [B^1(\delta r)],$$

$$[B^1(\delta r)] \cdot \{r\} = [B^1(r)] \delta\{r\}.$$

Pozwala to wariację odkształceń (4.8) zapisać w postaci:

$$\delta\{\epsilon\} = [B^0 + 2B^1(r)] \delta\{r\} \quad (4.10)$$

Wówczas z równania (3.17b) otrzymamy

$$\delta V = \delta\{r\}^T \int_{\Omega} [B^0 + 2B^1]^T \{\epsilon\} d\Omega - \delta\{r\}^T \{P\} \quad (4.11)$$

gdzie:

$$\{P\} = \int_{\Omega} [\phi]^T \{\bar{q}\} d\Omega \quad (4.12)$$

jest wektorem sił węzłowych kinematycznie równoważnych obciążeniom zewnętrznym.

Kolejna wariacja wyrażenia (4.11) ma postać:

$$\delta^2 V = \delta\{r\}^T \int_{\Omega} ([B^0 + 2B^1(r)]^T \delta\{\epsilon\} + 2 \delta[B^1(r)]^T \{\epsilon\}) d\Omega. \quad (4.13)$$

Ze związku fizycznego (3.20) i wzoru (4.10) mamy

$$\delta\{\epsilon\} = [D] \delta\{\epsilon\} = [D][B^0 + 2B^1] \delta\{r\}. \quad (4.14)$$

Ponieważ macierz $[B^1(r)]$ jest liniowa względem wektora $\{r\}$ możemy napisać, że

$$\delta[B^1(r)]^T \{\epsilon\} = [B^1(\delta r)]^T \cdot \{\epsilon\} = \frac{1}{2} [Z(\epsilon)] \delta\{r\}, \quad (4.15)$$

gdzie:

$$[Z(\epsilon)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_b(\epsilon) \end{bmatrix},$$

$$[Z_b(\epsilon)] = [\phi_{,1}^b]^T [\phi_{,2}^b] \cdot N_{11} + [\phi_{,2}^b][\phi_{,2}^b] \cdot N_{22} + \\ + ([\phi_{,1}^b]^T [\phi_{,2}^b] + [\phi_{,2}^b]^T [\phi_{,1}^b]) \cdot N_{12}. \quad (4.16)$$

Podstawiając (4.14) i (4.15) do (4.13) otrzymamy

$$\delta^2 V = \delta \{r\}^T \left(\int_{\Omega} [B^0 + 2B^1]^T [D] [B^0 + 2B^1] d\Omega + \int_{\Omega} [Z(\epsilon)] d\Omega \right) \delta \{r\} \quad (4.17)$$

lub

$$\delta^2 V = \delta \{r\}^T [K_T] \delta \{r\}, \quad (4.18)$$

gdzie:

$$[K_T] = [K_0] + [K_u] + [K_\epsilon] \quad (4.19)$$

jest macierzą sztywności stycznej. Składnikami tej macierzy są:

- liniowa macierz sztywności sprężystej

$$[K_0] = \int_{\Omega} [B^0]^T [D] [B^0] d\Omega, \quad (4.20)$$

- macierz początkowych odkształceń (zawierająca efekty dużych przemieszczeń)

$$[K_u] = 2 \int_{\Omega} ([B^0]^T [D] [B^1(r)] + 2[B^1(r)]^T [D] [B^1(r)] + \\ + [B^1(r)]^T [D] [B^0]) d\Omega, \quad (4.21)$$

- oraz macierz początkowych naprężeń

$$[K_\epsilon] = \int_{\Omega} [Z(\epsilon)] d\Omega. \quad (4.22)$$

Podstawiając (3.21) i (4,9) do (4.20) otrzymamy:

$$[K_o] = \begin{bmatrix} K^{pl} & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{pl} & & \\ & & \\ & & K^{bq} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

gdzie:

$$[K^{pl}] = 2 \int [B^{pl}]^T [D_{pl}] [B^{pl}] d\Omega \quad (4.24)$$

jest znaną macierzą sztywności w płaskim stanie naprężeń

$$[K_1] = 2c^2 [K^{pl}] + [K_1^q], \quad (4.25)$$

$$[K_1^q] = \int_{\Omega} [B_3^{bq}]^T [D_q] [B_3^{bq}] d\Omega, \quad (4.26)$$

$$[K_{12}] = \int_{\Omega} [B_3^{bq}]^T [D_q] [B_4^{bq}] d\Omega, \quad (4.27)$$

$$[K_2] = 2 [K^b] + [K_2^q], \quad (4.28)$$

gdzie:

$$[K^b] = \int_{\Omega} [B_2^{bq}]^T [D_b] [B_2^{bq}] d\Omega \quad (4.29)$$

jest znaną macierzą sztywności na zginanie płyty cienkiej (w tym przypadku okładziny),

$$[K_2^q] = \int_{\Omega} [B_4^{bq}]^T [D_q] [B_4^{bq}] d\Omega. \quad (4.30)$$

Macierz $[K^{bq}]$ jest macierzą sztywności na ścinanie i zginanie płyty trójwarstwowej.

Macierz początkowych odkształceń po podstawieniu (3.21) i (4.9) do (4.21) ma postać:

$$[K_u] = 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & [B^{pl}]^T [D_{pl}] [B_b^1(r)] \\ & 0 & 0 \\ \text{sym.} & 2 [B_b^1(r)]^T [D_{pl}] [B_b^1(r)] \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

W dalszej analizie zajmować się będziemy płytami trójwarstwowymi obciążonymi wyłącznie w jej płaszczyźnie przy założeniu, że zachowanie się konstrukcji przed utratą stateczności jest liniowe. Założenie to pozwala pominąć nieliniowy składnik $[K_u]$ macierzy stycznej $[K_T]$.

Macierz początkowych naprężeń $[K_\xi]$ jest funkcją stanu naprężeń $\{\xi\}$:

$$[K_\xi] = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & | & 0 & K_\xi^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & K_\xi^{bq} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

gdzie:

$$[K_\xi^b] = \int_{\Omega} [Z_b(\xi)] d\Omega. \quad (4.33)$$

W przypadku, gdy stan naprężeń w płycie jest jednorodny naprężenia możemy wynieść przed znak całki (4.33). Natomiast, gdy stan naprężeń nie jest jednorodny (np. dla obszarów niejednorodnych) nie powinno się tego robić. Jednak przy zagęszczaniu podziału obszaru płyty na elementy możemy przyjąć, że w obrębie elementu stan naprężeń jest zbliżony do jednorodnego. Założenie to (najczęściej stosowane [71]) pozwala pominąć całkowanie naprężeń w obrębie elementu.

5. PROBLEM WYBOCZENIA

Zerowanie się drugiej wariacji energii potencjalnej układu, stanowi kryterium stanu krytycznego. W związku z tym utrata stateczności wystąpi wtedy, gdy macierz sztywności stycznej (por. 4.18) staje się osobliwa. Zakładamy, że płyta przed utratą stateczności jest płaska i odkształcenia są liniowe. Pozwala to pominąć nieliniowy składnik macierzy sztywności stycznej $[K_u]$. Ponadto przyjmujemy, że obciążenie płyty wzrasta proporcjonalnie do jednego parametru, tzn. $\{P(\lambda)\} = \lambda \{P_0\}$. Wówczas naprężenia w płycie możemy zapisać w postaci:

$$\{\xi\} = \lambda \cdot \{\xi_0\} \quad (5.1)$$

gdzie:

$\{\delta_0\}$ jest wektorem naprężeń odpowiadających obciążeniu $\{P_0\}$.

W ten sposób zadanie sprowadza się do wyznaczenia mnożnika $\lambda = \lambda_{kr}$ odpowiadającemu obciążeniu krytycznemu.

W momencie wyboczenia wyznacznik macierzy sztywności stycznej jest równy zeru:

$$|K_T| = |K_0 + \lambda K_\delta(\delta_0)| = 0, \quad (5.2)$$

czyli problem wyboczenia polega na rozwiązaniu zagadnienia wartości własnych.

Najmniejsza dodatnia wartość własna i odpowiadający jej wektor własny określają rzeczywiste wyboczenia konstrukcji.

Zagadnienie (5.2) możemy napisać w następujący sposób:

$$([K_0] + \lambda [K]) \{r\} = 0, \quad (5.3)$$

gdzie:

$\{r\}$ - wektor własny określający postać wyboczenia.

Jednorodny układ równań (5.3) ze względu na budowę macierzy $[K_0]$ (por. 4.23) i macierzy $[K_\delta]$ (por. 4.32) można przedstawić w postaci

$$([K^{bq}] + \lambda [K_\delta^{bq}]) \cdot \{r^{bq}\} = 0 \quad (5.4)$$

Macierze $[K^{bq}]$ i $[K_\delta^{bq}]$ są macierzami pasmowymi symetrycznymi o elementach rzeczywistych.

W celu wyznaczenia macierzy naprężeń początkowych $[K_\delta^{bq}]$ należy wpierv rozwiązać płaski stan naprężenia $\{\delta_0^{pl}\}$ przy pewnym jednostkowym obciążeniu $\{P_0\}$. Stan ten możemy wyznaczyć z rozwiązania zagadnienia liniowego w następujący sposób. Z równania

$$[K^{pl}] \{r^{pl}\} = \{P_0\} \quad (5.5)$$

określimy pole przemieszczeń w płycie przy obciążeniu $\{P_0\}$.

Dalej z równania

$$\{\varepsilon^{pl}\} = [B^{pl}] \{r^{pl}\} \quad (5.6)$$

otrzymamy odkształcenia stanu tarczowego, a ze związków fizycznych

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon \\ 0 \end{matrix} \right\}^{pl} = [D_{pl}] \left\{ \epsilon \right\}^{pl} \quad (5.7)$$

otrzymamy poszukiwany rozkład naprężeń.

Po podstawieniu odkształceń $\left\{ \epsilon \right\}^{pl}$ ze wzoru (5.6) do wzoru (5.7) otrzymamy

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ 0 \end{matrix} \right\}^{pl} = [S^{pl}] \left\{ r \right\}^{pl} \quad (5.8)$$

gdzie:

$$[S^{pl}] = [D_{pl}] [B^{pl}] \quad (5.9)$$

jest tzw. macierzą naprężeń, a

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ 0 \end{matrix} \right\}^{plT} = \left\{ \begin{matrix} N_{11} & N_{22} & N_{12} \end{matrix} \right\} \quad (5.10)$$

jest wektorem naprężeń (sił jednostkowych [N/m]) w płaskim stanie naprężeń, który jest wprowadzany do macierzy naprężeń początkowych (4.33) i (4.16).

6. ROZWIĄZANIE PROBLEMU WARTOSCI WŁASNYCH

Uogólnione zagadnienie wartości własnych (5.4) przekształcamy do postaci standardowej:

$$[A] \{w\} = \mu \{w\}. \quad (6.1)$$

Postać tą dla macierzy pasmowych, symetrycznych o dużym wymiarze najwygodniej można otrzymać przeprowadzając rozkład macierzy $[K^{bq}]$ (5.4) na czynniki trójkątne Choleskiego [6, 61, 100]

$$[K^{bq}] = [L] [L]^T = [U]^T [U] \quad (6.2)$$

gdzie:

[L] - macierz trójkątna dolna (lower),

[U] - macierz trójkątna górna (upper).

Wówczas po odpowiednich przekształceniach [6, 100] otrzymamy postać (6.1), gdzie

$$[A] = [U]^{-T} [K_{6q}^{bq}] [U]^{-1} \quad (6.3)$$

$$\{w\} = [U] \cdot \{r^{bq}\},$$

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}.$$

W zlinearyzowanym problemie stateczności potrzebna jest jedynie ekstremalna wartość własna (pierwsza siła krytyczna) lub co najwyżej jeszcze kilka następnych. Dlatego ze względu na swą efektywność, szczególne znaczenie mają metody przeznaczone do znajdowania pojedynczych (zwłaszcza ekstremalnych) wartości własnych np. metoda potęgowa [47, 74], metoda "gradientowa" [41], metoda "gradientowa" przy optymalnej redukcji błędu rozwiązania na każdym kroku iteracyjnym [61, 100]. Ostatnia z tych metod, podobnie jak metoda Richardsona [47], bazuje na wykorzystaniu własności wielomianów Czebyszewa do optymalnej redukcji błędu rozwiązania w wektorze iterowanym. Algorytm rozwiązania problemu własnego przedstawiono na rys.5. Na schemacie blokowym pokazano podstawowe kroki algorytmu i nazwy odpowiednich podprogramów. Macierz sztywności $[K^{bq}]$ w podprogramie o nazwie UTU jest poddana triangularyzacji (6.2). Przed rozpoczęciem procesu iteracyjnego przyjmuje się wektor początkowy $\{w_1\} = \{1, \dots, 1\}^T$ oraz początkową wartość własną $\mu_1 = 0$, w podprogramie o nazwie POCZ.

W pierwszym etapie procesu iteracyjnego przeprowadza się normalizację wektora iterowanego $\{w_m\}$ (podprogram NORM) w następujący sposób:

$$\{\tilde{w}_m\} = \frac{\{w_m\}}{\|\{w_m\}\|}, \quad (6.4)$$

gdzie:

$$\|\{w_m\}\| = (\{w_m\}^T \{w_m\})^{1/2}$$

jest normą euklidesową wektora $\{w_m\}$.

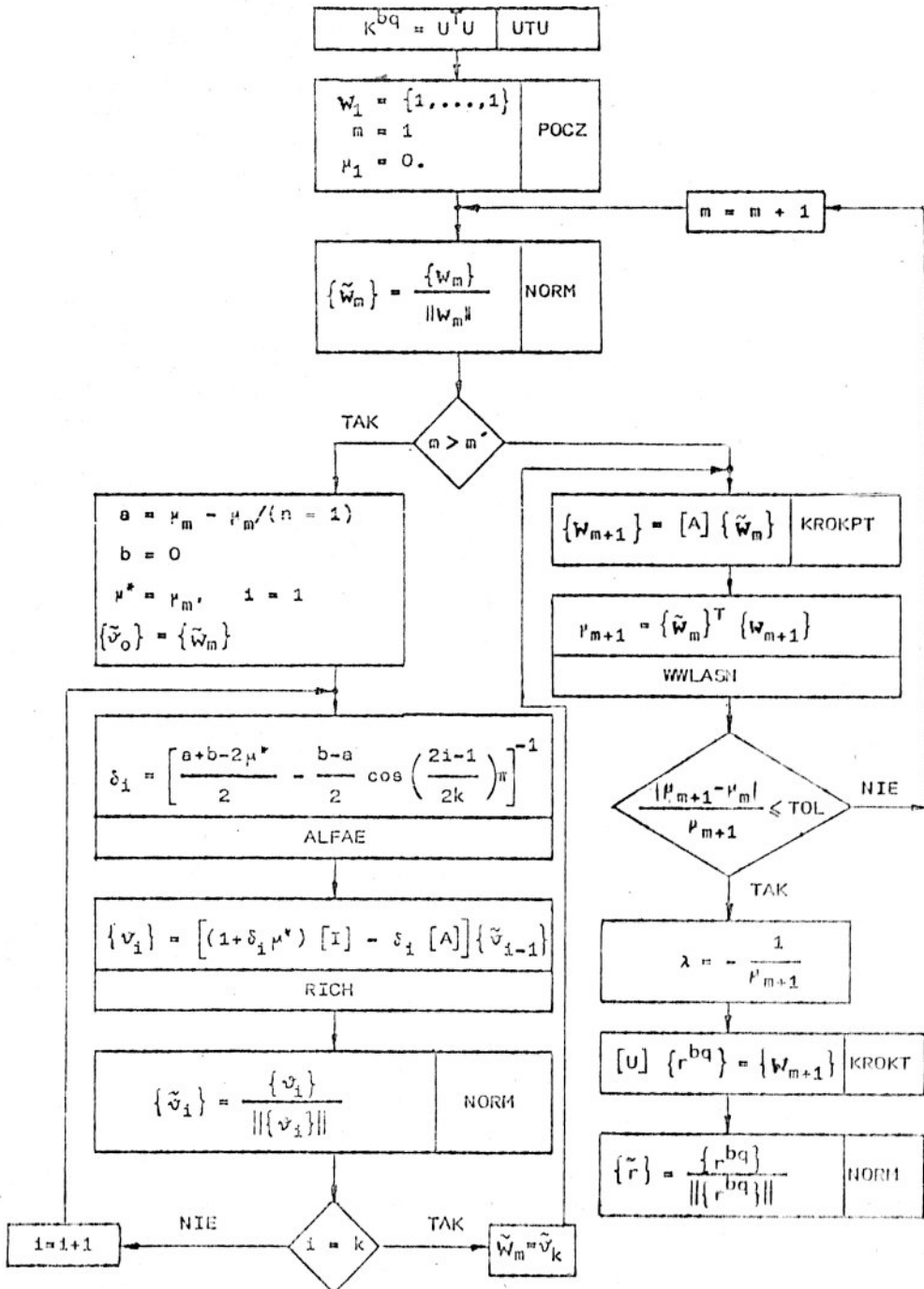
Ulepszony wektor otrzymujemy ze wzoru:

$$\{w_{m+1}\} = [A] \{\tilde{w}_m\}, \quad (6.5)$$

który numerycznie rozwiązywany jest w tzw. kroku potęgowym (podprogram KROKPT, rys.6):

Problem własny

$$([K^{bq}] - \lambda [K_s^{bq}]) \{r^{bq}\} = 0$$



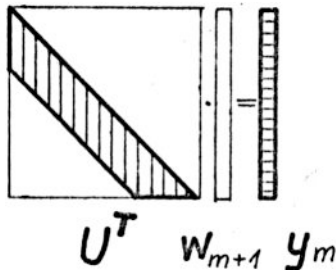
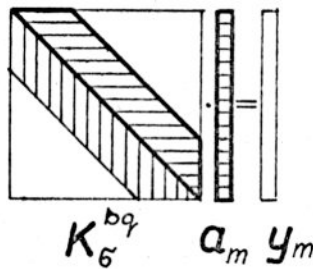
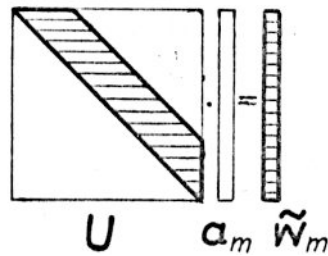
Rys.5. Schemat blokowy rozwiązania problemu własnego

- krok pierwszy, tzw. krok wstecz polega na wyznaczeniu ze wzoru

$$[U] \{a_m\} = \{\tilde{w}_m\} \quad (6.6)$$

wektora $\{a_m\}$ (podprogram KROKT). Obliczenia wykonuje się idąc od końca wektora $\{\tilde{w}_m\}$, dlatego nazwa krok wstecz;

$$\{w_{m+1}\} = [A] \{\tilde{w}_m\} = [U]^{-T} [K_6^{bq}] [U]^{-1} \{\tilde{w}_m\}$$



Rys.6.

Schemat "kroku potęgowego"

- krok drugi, pośredni polega na prostym mnożeniu macierzy naprężeń początkowych $[K_6^{bq}]$ przez wektor $\{a_m\}$ (podprogram AV):

$$[K_6^{bq}] \{a_m\} = \{y_m\}; \quad (6.7)$$

- krok trzeci, tzw. "krok w przód" polega na obliczeniu ze wzoru:

$$[U]^T \{w_{m+1}\} = \{y_m\} \quad (6.8)$$

ulepszono wektora $\{w_{m+1}\}$ (podprogram KROKP). Obliczenia przeprowadza się tutaj idąc od początku wektora $\{y_m\}$.

Dalej obliczamy iloczyn Rayleigh'a ze wzoru:

$$\mu_{m+1} = \{\tilde{W}_m\}^T \{W_{m+1}\}, \quad (6.9)$$

gdzie

μ_{m+1} jest ulepszoną wartością własną problemu standardowego (6.1) o największym module (podprogram WWLASN).

Test zakończenia iteracji polega na porównaniu dwóch ostatnich wartości:

$$\frac{|\mu_{m+1} - \mu_m|}{\mu_{m+1}} \leq \text{TOL} = 10^{-5} \quad (6.10)$$

Jeżeli warunek (6.10) nie został spełniony powtarzamy proces iteracyjny (rys.5). Jeśli został spełniony wykonujemy transformację odwrotną wracając do zmiennych problemu wyboczenia (5.4) przez związki (6.3). Mianowicie ze wzoru

$$[U] \{r^{bq}\} = \{\omega_{m+1}\} \quad (6.11)$$

i po normalizacji

$$\{\tilde{r}\} = \frac{\{r^{bq}\}}{\|\{r^{bq}\}\|}, \quad (6.12)$$

otrzymamy znormalizowany wektor własny, a ze wzoru

$$\lambda = - \frac{1}{\mu_{m+1}} \quad (6.13)$$

wartość własną problemu (5.4). Przedstawiony algorytm opiera się na metodzie potęgowej [47, 74] obliczania ekstremalnej wartości własnej i wektora własnego problemu (5.4).

Metoda ta jest szybko zbieżna w pierwszych dwóch, trzech krokach, później zbieżność maleje przez co znacznie wydłuża się czas obliczeń. Zaletą tej metody jest dobra stabilność. W celu przyspieszenia zbieżności procesu iteracyjnego wykorzystano własności wielomianów Czebyszewa do optymalnej redukcji błędu rozwiązania w wektorze iterowanym. Na schemacie rys.5 proces iteracyjny w pierwszych m' krokach przebiega wg metody potęgowej, gdy $m > m'$ wg metody Richardsona [61, 100].

Ulepszony wektor w procesie iteracyjnym otrzymuje się tutaj z dwustopniowego wzoru rekurencyjnego:

- pierwszy stopień (wewnętrzny) (podprogram RICH)

$$\{v_i\} = [(1 + \delta_i \mu^*)[I] - \delta_i [A]] \{\tilde{v}_{i-1}\} \xrightarrow{df} \Gamma_i([A]) \{\tilde{v}_{i-1}\}, \quad (i = 1, \dots, k) \quad (6.14)$$

- drugi stopień (zewnętrzny)

$$\{v_k\} = \Gamma([A]) \cdot \{\tilde{v}_0\} = \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_k \{\tilde{v}_0\}, \quad (6.15)$$

gdzie:

k - stopień wielomianu Czebyszewa

$$\delta_i = \left[\frac{a + b - 2\mu^*}{2} - \frac{b - a}{2} \cos \left(\frac{2i - 1}{2k} \pi \right) \right]^{-1}, \quad (i = 1, \dots, k) \quad (6.16)$$

tutaj a i b są oszacowaniami widma wartości własnych macierzy $[A]$. Przy poszukiwaniu maksymalnej wartości własnej proponuje się [100] wprowadzić następujące oszacowania:

$$\mu^* = \mu_{\max} = \mu_m^n$$

$$a = \mu^{n-1} \cong \mu_m^n - \mu_m^n / (n - 1) \quad (6.17)$$

$$b = \mu_{\min} = 0$$

gdzie:

n - rząd macierzy $[A]$, również ilość wektorów i wartości własnych,

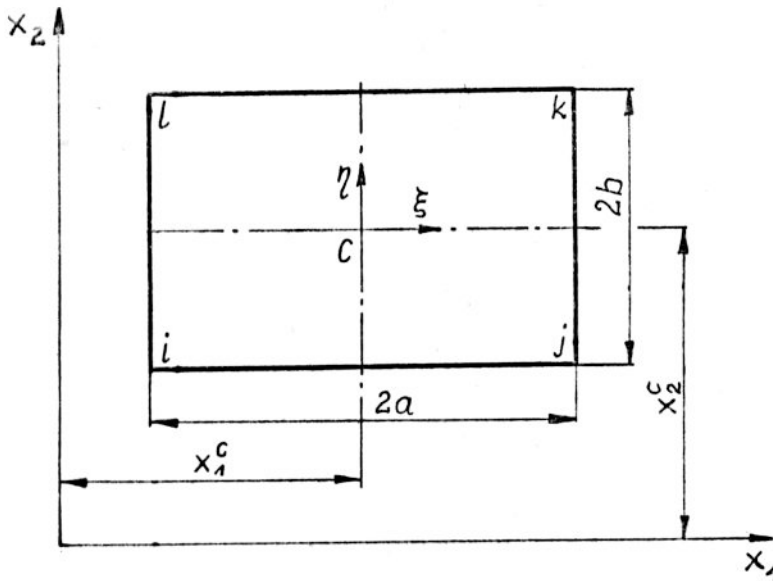
μ_m^n - n -ta wartość własna ($\mu^1 = \mu_{\min}$, $\mu^n = \mu_{\max}$),

μ_m^n - maksymalna wartość własna z m -tego kroku iteracyjnego.

W ten sposób przygotowany (poprawiony) wektor iterowany ponownie trafi do pętli podstawowej kroku potęgowego. Okazuje się, że takie postępowanie przyspiesza zbieżność procesu iteracyjnego. Porównania zbieżności obu metod oraz dowód zbieżności przedstawiono w pracy [100].

7. PROSTOKĄTNY TRÓJWARSTWOWY ELEMENT SKOŃCZONY

W punkcie 4 przedstawiono ogólnie koncepcję elementu skończonego w zastosowaniu do płyt trójwarstwowych. Obecnie przedstawimy w sposób jawny odpowiednie funkcje i macierze dla elementu prostokątnego (rys.7).



Rys.7.

Element prostokątny w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych

Wygodnie jest do dalszych rozważań wprowadzić współrzędne znormalizowane

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x_1 - x_1^c}{a}, & d\xi &= \frac{dx_1}{a}, \\ \eta &= \frac{x_2 - x_2^c}{b}, & d\eta &= \frac{dx_2}{b}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Jak podano wcześniej (4.4) pole przemieszczeń wewnątrz elementu trójwarstwowego opisuje funkcja

$$\{u\}_e = [\phi] \{r\}_e \quad (7.2)$$

gdzie:

$$\{u\}_e^T = \{u^{pl} \ ; \ u^q \ ; \ u_3\} \equiv \{u_1 \ u_2 \ ; \ \psi_1 \ \psi_2 \ ; \ u_3\}$$

jest wektorem przemieszczeń punktów elementu,

$$\{r\}_e^T = \{r_1, \dots, r_1\}$$

jest wektorem przemieszczeń węzłowych elementu,

$$[\phi] = [\phi_i, \dots, \phi_1]$$

są funkcjami kształtu.

Ilość składowych wektora przemieszczeń węzłowych (4.6) przyjęto równą 7 (lub 9). Składowe tego wektora możemy podzielić, na te które działają w płaszczyźnie płyty (stanu tarczowego) oraz te które są wynikiem ścinania i zginania płyty trójwarstwowej (stanu ścinania i stanu zginania) rys.8.

7.1. Element prostokątny w płaskim stanie naprężeń

Stan tarczowy w elemencie prostokątnym (rys.8) opisuje 8 (12) stopni swobody, przy pomocy których funkcje przemieszczeń wyrażamy w postaci

$$\{u^{pl}\} = [\phi^{pl}] \{r^{pl}\}, \quad (7.3)$$

gdzie:

$$[\phi^{pl}] = [\phi_i^{pl}, \dots, \phi_1^{pl}].$$

Dla elementu z ośmioma stopniami swobody najprościej jest jako funkcję interakcyjną wybrać wielomian biliniowy [73, 103]:

$$[\phi_i^{pl}] = \begin{bmatrix} \phi_{i11}^{pl} & 0 \\ 0 & \phi_{i22}^{pl} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, 1), \quad (7.4)$$

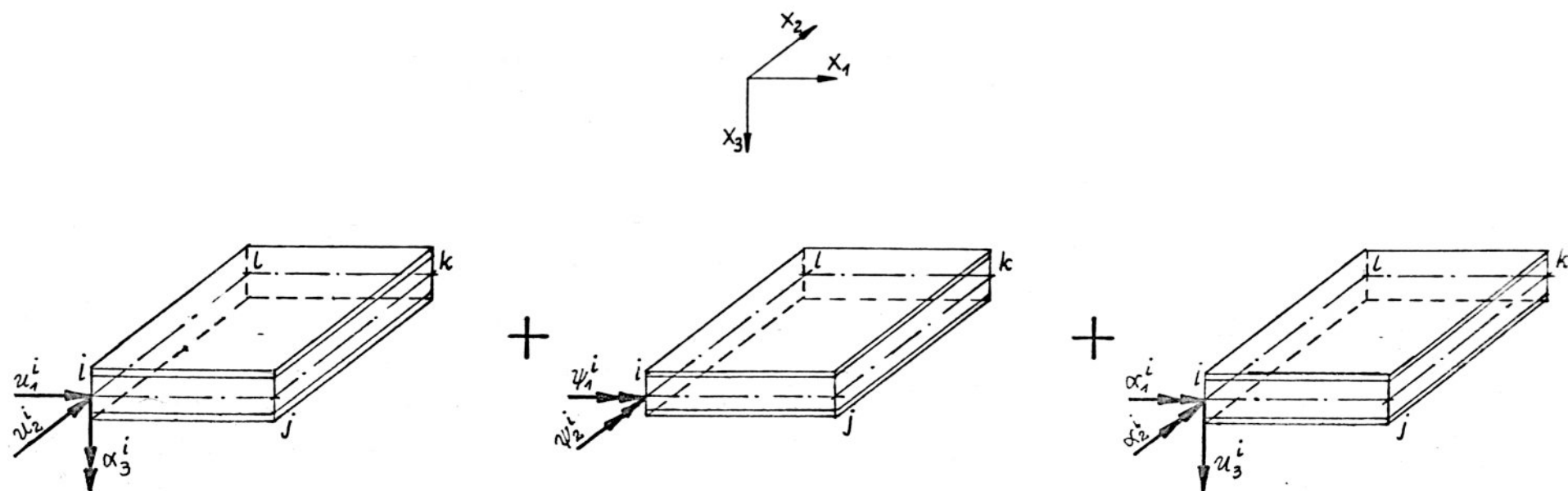
gdzie:

$$\phi_{i11}^{pl} = \phi_{i22}^{pl} = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0), \quad (i = 1, \dots, 1),$$

$$\xi_0 = \xi_i \xi, \quad \eta_0 = \eta_i \eta.$$

Natomiast dla elementu z dwunastoma stopniami swobody funkcją interpolacyjną jest wielomian trzeciego stopnia [1] w postaci:

$$[\phi_i^{pl}] = \begin{bmatrix} \phi_{i11}^{pl} & 0 & \phi_{i13}^{pl} \\ 0 & \phi_{i22}^{pl} & \phi_{i23}^{pl} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, 1), \quad (7.5)$$



stan tarczowy

$$\{r_i^{Pl}\}^T = \{u_1^i \ u_2^i \ \alpha_3^i\}$$

stan ścinania

$$\{r_i^q\} = \{\psi_1^i \ \psi_2^i\}$$

stan zginania

$$\{r_i^b\} = \{u_3^i \ \alpha_1^i \ \alpha_2^i\}$$

Rys.8. Element trójwarstwowy z wyróżnionymi stanami przemieszczeń

gdzie:

$$\phi_{111}^{pl} = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (2 - \eta_0) (1 + \eta_0)^2,$$

$$\phi_{122}^{pl} = \frac{1}{8} (1 + \eta_0) (2 - \xi_0) (1 + \xi_0)^2,$$

$$\phi_{113}^{pl} = -\frac{b}{16} \eta_i (1 + \xi_0) (1 - \eta^2) (1 + \eta_0),$$

$$\phi_{123}^{pl} = -\frac{a}{16} \xi_i (1 + \eta_0) (1 - \xi^2) (1 + \xi_0), \quad (i = 1, \dots, 1).$$

Pole odkształceń stanu tarczowego wyrażone przy pomocy przemieszczeń opisuje związek geometryczny (por. (3.10)):

$$\{\varepsilon^{pl}\} = [L^{pl}] \{u^{pl}\}, \quad (7.6)$$

gdzie:

$$[L^{pl}] = \begin{bmatrix} \partial_{,1} & 0 \\ 0 & \partial_{,2} \\ \partial_{,2} & \partial_{,1} \end{bmatrix}.$$

Jeśli pole przemieszczeń opiszemy przy pomocy zależności (7.3), wówczas pole odkształceń wyrazimy poprzez przemieszczenia węzłowe:

$$\{\varepsilon^{pl}\} = [B^{pl}] \{r^{pl}\}, \quad (7.7)$$

gdzie:

$$[B^{pl}] = [B_1^{pl}, \dots, B_1^{pl}].$$

W przypadku elementu z ośmioma stopniami swobody:

$$[B_i^{pl}] = \begin{bmatrix} B_{111}^{pl} & 0 \\ 0 & B_{122}^{pl} \\ B_{131}^{pl} & B_{132}^{pl} \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

$$B_{111}^{pl} = B_{132}^{pl} = \frac{1}{4a} \xi_i (1 + \eta_0),$$

(7.9)

$$B_{122}^{pl} = B_{131}^{pl} = \frac{1}{4b} \eta_i (1 + \xi_0),$$

a dla elementu z dwunastoma stopniami swobody:

$$[B_i^{pl}] = \begin{bmatrix} B_{i11}^{pl} & 0 & B_{i13}^{pl} \\ 0 & B_{i22}^{pl} & B_{i23}^{pl} \\ B_{i31}^{pl} & B_{i32}^{pl} & B_{i33}^{pl} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} B_{i11}^{pl} &= \frac{\xi_i}{8a} (2 - \eta_0)(1 + \eta_0)^2 \\ B_{i22}^{pl} &= \frac{\eta_i}{8b} (2 - \xi_0)(1 + \xi_0)^2 \\ B_{i31}^{pl} &= -\frac{b}{16a} \xi_i \eta_i (1 - \eta^2)(1 + \eta_0) \\ B_{i23}^{pl} &= -\frac{a}{16b} \xi_i \eta_i (1 - \xi^2)(1 + \xi_0) \\ B_{i31}^{pl} &= \frac{3}{8b} \eta_i (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \\ B_{i32}^{pl} &= \frac{3}{8a} \xi_i (1 + \eta_0)(1 - \xi^2) \\ B_{i33}^{pl} &= -\frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 - 3\xi_0)(1 + \eta_0) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Macierz sztywności elementu w płaskim stanie naprężeń określa wzór (4.24). Po podstawieniu macierzy $[B_i^{pl}]$ z (7.8) lub (7.10) i po scałkowaniu po powierzchni elementu otrzymamy:

→ dla elementu z ośmioma stopniami swobody:

$$[k_{rs}^{pl}] = \frac{1}{6} \begin{array}{|c|c|} \hline D_{11}^{pl} \frac{b}{a} \xi_r \xi_s (3 + \eta_r \eta_s) + \\ + D_{66}^{pl} \frac{a}{b} \eta_r \eta_s (3 + \xi_r \xi_s) & 3(D_{12}^{pl} \xi_r \eta_s + D_{66}^{pl} \eta_r \xi_s) \\ \hline 3(D_{12}^{pl} \eta_r \xi_s + D_{66}^{pl} \xi_r \eta_s) & D_{22}^{pl} \frac{a}{b} \eta_r \eta_s (3 + \xi_r \xi_s) + \\ + D_{66}^{pl} \frac{b}{a} \xi_r \xi_s (3 + \eta_r \eta_s) & \end{array} \quad (7.12)$$

$$(r, s = i, j, k, l)$$

- dla elementu z dwunastoma stopniami swobody

$$\begin{aligned} [k_{rs}^{pl}] &= \frac{1}{2520ab} [I_3] (D_{11}^{pl} [k_{11rs}^{pl}] + D_{22}^{pl} [k_{22rs}^{pl}] + D_{12}^{pl} [k_{12rs}^{pl}] + \\ &+ D_{66}^{pl} [k_{66rs}^{pl}]) [I_3] \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$(r, s = i, j, k, l)$$

$$[I_3] = \begin{bmatrix} a & b & ab \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$[k_{11rs}^{pl}] = d^{-2} \begin{bmatrix} 18\xi_r \xi_s (35+17\eta_r \eta_s) & | & 0 & | & 3\xi_r \xi_s (35\eta_s+9\eta_r) \\ 0 & | & 0 & | & 0 \\ 3\xi_r \xi_s (35\eta_r+9\eta_s) & | & 0 & | & 3\xi_r \xi_s (7\eta_r \eta_s+1) \end{bmatrix},$$

$$[k_{22rs}^{pl}] = d^2 \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 18\eta_r \eta_s (35+17\xi_r \xi_s) & | & 3\eta_r \eta_s (35\xi_s+9\xi_r) \\ 0 & | & 3\eta_r \eta_s (35\xi_r+9\xi_s) & | & 3\eta_r \eta_s (7\xi_r \xi_s+1) \end{bmatrix},$$

$$[k_{12rs}^{pl}] = \begin{bmatrix} 0 & | & 630\xi_r \eta_s & | & 105\xi_r \xi_s \eta_s \\ 630\eta_r \xi_s & | & 0 & | & 105\eta_r \eta_s \xi_s \\ 105\xi_r \xi_s \eta_r & | & 105\eta_r \eta_s \xi_r & | & 35\xi_r \xi_s \eta_r \eta_s \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

$$[k_{66rs}^{pl}] = \begin{bmatrix} 252\eta_r \eta_s (3+\xi_r \xi_s) & | & 630\xi_s \eta_r & | & -210\eta_r \xi_r \xi_s \\ 630\xi_r \eta_s & | & 252\xi_r \xi_s (3+\eta_r \eta_s) & | & 42\xi_r (3+\eta_r \eta_s) \\ -210\eta_s \xi_r \xi_s & | & 42\xi_s (3+\eta_r \eta_s) & | & 14(3+5\xi_r \xi_s)(3+\eta_r \eta_s) \end{bmatrix},$$

$$d = \frac{a}{b}$$

Zmieniając odpowiednio wskaźniki rs możemy otrzymać pełną macierz sztywności elementu:

$$[k^{pl}]^e = \begin{bmatrix} k_{11}, \dots, k_{1l} \\ \vdots \\ k_{l1}, \dots, k_{ll} \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

W wyniku odpowiedniego zbierania (sumowania) macierzy sztywności elementów otrzymujemy macierz sztywności całego układu (płyty):

$$[K^{pl}] = \sum_e [k^{pl}]^e \quad (7.16)$$

Teraz z równania (5.5) przy zadanym wektorze obciążenia $\{P_0\}$ i po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymamy wektor przemieszczeń węzłowych w płaskim stanie naprężenia. W celu otrzymania składowych pola naprężeń w obszarze płyty należy skorzystać z równania (5.8). Odpowiednie macierze naprężeń $[S^{pl}]$ mają postać:

$$[S^{pl}] = [S_i^{pl}, \dots, S_l^{pl}] \quad (7.17)$$

gdzie:

- dla elementu z ośmioma stopniami swobody:

$$S_i^{pl}] = \begin{bmatrix} D_{11}^{pl} \cdot B_{i11}^{pl} & D_{12}^{pl} \cdot B_{i22}^{pl} \\ D_{12}^{pl} \cdot B_{i11}^{pl} & D_{22}^{pl} \cdot B_{i22}^{pl} \\ D_{66}^{pl} \cdot B_{i22}^{pl} & D_{66}^{pl} \cdot B_{i11}^{pl} \end{bmatrix}, \quad (i = i, j, k, l), \quad (7.18)$$

gdzie:

$$B_{i11}^{pl}, B_{i22}^{pl}$$

określają wzory (7.9). Jak widać, składowe stanu naprężenia w obszarze elementu są liniowymi funkcjami współrzędnych ξ, η ;

- dla elementu z dwunastoma stopniami swobody

$$[S_i^{pl}] = \begin{bmatrix} D_{11}^{pl} \cdot B_{i11}^{pl} & D_{12}^{pl} \cdot B_{i22}^{pl} & D_{11}^{pl} B_{i13}^{pl} + D_{12}^{pl} B_{i23}^{pl} \\ D_{12}^{pl} \cdot B_{i11}^{pl} & D_{22}^{pl} \cdot B_{i22}^{pl} & D_{12}^{pl} B_{i13}^{pl} + D_{22}^{pl} B_{i23}^{pl} \\ D_{66}^{pl} \cdot B_{i13}^{pl} & D_{66}^{pl} \cdot B_{i32}^{pl} & D_{66}^{pl} \cdot B_{i33}^{pl} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

gdzie:

$$B_i^{pl}$$

określają wzory (7.11). Tutaj składowe stanu naprężenia są funkcjami trzeciego stopnia współrzędnych ξ, η .

7.2. Element prostokątny w zagadnieniu stateczności płyt trójwarstwowych

Pole przemieszczeń w elemencie prostokątnym trójwarstwowym powstałe w wyniku ugięcia płyty jest zdefiniowane przy pomocy przemieszczeń węzłowych i funkcji kształtu w następujący sposób:

$$\{u^{bq}\} = [\phi^{bq}] \{r^{bq}\} \quad (7.20)$$

gdzie:

$$[\phi^{bq}] = [\phi_i^{bq}, \dots, \phi_1^{bq}],$$

$$[\phi_i^{bq}] = \begin{bmatrix} \phi_i^q & 0 \\ 0 & \phi_i^b \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

$[\phi_i^q]$ jest macierzą funkcji kształtu, które opisują przemieszczenie ścinające $\{u^q\}$ w rdzeniu elementu trójwarstwowego w zależności od przemieszczeń węzłowych [60, 73]:

$$\{u^q\} = [\phi^q] \{r^q\} \quad (7.22)$$

gdzie:

$$[\phi^q] = [\phi_i^q, \dots, \phi_1^q],$$

$$\{r^q\}^T = \{r_i^q, \dots, r_1^q\},$$

natomiast

$$\{r_i^q\}^T = \{\psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i\},$$

lub w przypadku pominięcia dodatkowego stopnia swobody $\alpha_3^i(f)$

$$\{r_i^q\}^T = \{\psi_1^i, \psi_2^i\}.$$

Macierz funkcji kształtu ma postać

$$[\phi_i^q] = [\phi_i^{p1}] \quad (7.23)$$

gdzie:

$$[\phi_i^{p1}] \text{ określamy wg (7.4) lub (7.5).}$$

Macierz funkcji kształtu $[\phi_i^b]$ opisuje ugięcie płyty trójwarstwowej

w zależności od parametrów węzłowych [73, 103]:

$$u^b = [\phi^b] \{r^b\} \quad (7.24)$$

gdzie:

$$u^b = u_3$$

$$[\phi^b] = [\phi_{i1}^b, \dots, \phi_{i1}^b], \quad \{r^b\}^T = \{r_i^b, \dots, r_1^b\},$$

$$[\phi_i^b] = [\phi_{i1}^b, \phi_{i2}^b, \phi_{i3}^b], \quad \{r_i^b\} = \{u_{3,1}^i, -u_{3,2}^i, u_{3,1}^i\},$$

gdzie odpowiednie funkcje kształtu podane przez Melosha [51, 52, 103] mają postać:

$$\begin{aligned} \phi_{i1}^b &= \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2), \\ \phi_{i2}^b &= -\frac{1}{8} b \eta_i (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)^2 (\eta_0 - 1), \\ \phi_{i3}^b &= \frac{1}{8} a \xi_i (1 + \eta_0)(1 + \xi_0)^2 (\xi_0 - 1). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Funkcje te nie zapewniają ciągłości pochodnej normalnej wzdłuż linii podziału na elementy. Jest to tzw. element niedostosowany. W przypadku elementu dostosowanego ugięcie u_3 aproksymuje się pełnym wielomianem bisześciennym. W węzłach wprowadza się jednak nienaturalny stopień swobody $u_{3,12}^i$. Funkcje kształtu w takim przypadku określa się przy pomocy funkcji Hermite'a [103]. Pole odkształceń elementu trójwarstwowego określa związek geometryczny (3.10)

$$\{\varepsilon^{bq}\} = [L^{bq}] \{u^{bq}\} = [B^{bq}] \{r^{bq}\}, \quad (7.26)$$

gdzie:

$$[B^{bq}] = [L^{bq}][\phi^{bq}], \quad (7.27)$$

$[L^{bq}]$ jest macierzą operatorów różniczkowych postaci

$$[L^{bq}] = \begin{bmatrix} L^{p1} & 0 \\ 0 & L^b \\ -I & L^q \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

$$[L^b]^T = [-\vartheta_{,11}^2 \quad -\vartheta_{,22}^2 \quad -2\vartheta_{,12}^2], \quad [L^q]^T = \frac{c'}{c} [\vartheta_{,1} \quad \vartheta_{,2}],$$

$$[I] = [1 \quad 1],$$

oraz zgodnie z oznaczeniami (3.8) i (3.9)

$$\{\varepsilon^{bq}\}^T = \{\varkappa^c, \varkappa, \varepsilon^c\},$$

$$\{u^{bq}\}^T = \{\psi_1, \psi_2, u_3\}.$$

Działając operatorem różniczkowym (7.28) na macierz funkcji kształtu (7.21) otrzymamy macierz $[B_i^{bq}]$ w postaci:

$$[B_i^{bq}] = \begin{bmatrix} B_{i1}^{bq} & 0 \\ 0 & B_{i2}^{bq} \\ B_{i3}^{bq} & B_{i4}^{bq} \end{bmatrix}, \quad (7.29)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia podmacierzy:

$$[B_{i1}^{bq}] = [L^{p1}][\phi_i^q], \quad [B_{i3}^{bq}] = -[\phi_i^q], \quad (7.30)$$

$$[B_{i2}^{bq}] = [L^b][\phi_i^b], \quad [B_{i4}^{bq}] = [L^q][\phi_i^b].$$

Podstawiając (7.23), (7.5) lub (7.4) oraz (7.25) otrzymamy:

$$[B_{i1}^{bq}] = \begin{bmatrix} B_{i11}^{bq} & 0 & B_{i13}^{bq} \\ 0 & B_{i22}^{bq} & B_{i23}^{bq} \\ B_{i31}^{bq} & B_{i32}^{bq} & B_{i33}^{bq} \end{bmatrix}, \quad [B_{i2}^{bq}] = \begin{bmatrix} B_{i44}^{bq} & B_{i45}^{bq} & B_{i46}^{bq} \\ B_{i54}^{bq} & B_{i55}^{bq} & B_{i56}^{bq} \\ B_{i64}^{bq} & B_{i65}^{bq} & B_{i66}^{bq} \end{bmatrix},$$

$$[B_{i3}^{bq}] = \begin{bmatrix} B_{i71}^{bq} & 0 & B_{i73}^{bq} \\ 0 & B_{i82}^{bq} & B_{i83}^{bq} \end{bmatrix}, \quad [B_{i4}^{bq}] = \frac{c'}{c} \begin{bmatrix} B_{i74}^{bq} & B_{i75}^{bq} & B_{i76}^{bq} \\ B_{i84}^{bq} & B_{i85}^{bq} & B_{i86}^{bq} \end{bmatrix}, \quad (7.31)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
B_{111}^{bq} &= \frac{\xi_1}{8a} (2-\eta_0)(1+\eta_0)^2, & B_{144}^{bq} &= \frac{3}{4a^2} \xi_0 (1+\eta_0), & B_{145}^{bq} &= 0, \\
B_{122}^{bq} &= \frac{\eta_1}{8b} (2-\xi_0)(1+\xi_0)^2, & B_{146}^{bq} &= -\frac{\xi_1}{4a} (3\xi_0+1)(1+\eta_0), \\
B_{113}^{bq} &= -\frac{b}{16a} \xi_1 \eta_1 (1+\eta_0)(1-\eta^2), & B_{154}^{bq} &= \frac{3}{4b^2} \eta_0 (1+\xi_0), \\
B_{123}^{bq} &= -\frac{a}{16b} \xi_1 \eta_1 (1+\xi_0)(1-\xi^2), & B_{155}^{bq} &= \frac{\eta_1}{4b} (1+\xi_0)(1+3\eta_0), & B_{156}^{bq} &= 0, \\
B_{131}^{bq} &= \frac{3}{8b} \eta_1 (1+\xi_0)(1-\eta^2), & B_{164}^{bq} &= -\frac{1}{4ab} \xi_1 \eta_1 (4-3\xi^2-3\eta^2), \\
B_{132}^{bq} &= \frac{3}{8a} \xi_1 (1+\eta_0)(1-\xi^2), & B_{165}^{bq} &= \frac{\xi_1}{4a} (1+\eta_0)(3\eta_0-1), \\
B_{133}^{bq} &= -\frac{1}{8} (1+\xi_0)(1-3\xi_0)(1+\eta_0), & B_{166}^{bq} &= -\frac{\eta_1}{4b} (1+\xi_0)(3\xi_0-1). & & (7.32) \\
B_{171}^{bq} &= -\frac{1}{8} (1+\xi_0)(2-\eta_0)(1+\eta_0)^2, \\
B_{173}^{bq} &= \frac{b}{16} \eta_1 (1+\xi_0)(1+\eta_0)(1-\eta^2), \\
B_{182}^{bq} &= -\frac{1}{8} (1+\eta_0)(2-\xi_0)(1+\xi_0)^2, \\
B_{183}^{bq} &= \frac{a}{16} \xi_1 (1+\eta_0)(1+\xi_0)(1-\xi^2), \\
B_{174}^{bq} &= \frac{\xi_1}{8a} (1+\eta_0)(3+\eta_0-3\xi^2-\eta^2), \\
B_{175}^{bq} &= \frac{b}{8a} \xi_1 \eta_1 (1+\eta_0)(1-\eta^2), \\
B_{176}^{bq} &= \frac{1}{8} (1+\xi_0)(3\xi_0-1)(1+\eta_0), \\
B_{184}^{bq} &= \frac{\eta_1}{8b} (1+\xi_0)(3+\xi_0-3\eta^2-\xi^2), \\
B_{185}^{bq} &= -\frac{1}{8} (1+\xi_0)(1+\eta_0)(3\eta_0-1), \\
B_{186}^{bq} &= -\frac{a}{8b} \xi_1 \eta_1 (1+\xi_0)(1-\xi^2),
\end{aligned}$$

W przypadku użycia macierzy (7.4) (tzn. dla 5 stopni swobody w węzle), należy pominąć trzecią kolumnę w macierzach $[B_{11}^{bq}]$ i $[B_{13}^{bq}]$, a odpowiednie wyrazy mają postać:

$$\begin{aligned}
 B_{i11}^{bq} &= B_{i32}^{bq} = \frac{1}{4a} \xi_i (1 + \eta_0), \\
 B_{i22}^{bq} &= B_{i31}^{bq} = \frac{1}{4b} \eta_i (1 + \xi_0), \\
 B_{i71}^{bq} &= B_{i82}^{bq} = -\frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0).
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Macierz sztywności $[k^{bq}]$ elementu trójwarstwowego wyznaczono z wzorów (4.23)-(4.30), po podstawieniu (7.30)-(7.33):

$$[k_{1rs}] = 2c^2 [k_{rs}^{pl}] + [k_{rs}^q] \tag{7.34}$$

gdzie:

$[k_{rs}^{pl}]$ wg wzorów (7.12) lub (7.13), (7.14)

$$[k_{rs}^q] = \frac{1}{2520} \cdot [I_3] \cdot (D_{13}^q \cdot [k_{rs}^{13}] + D_{23}^q \cdot [k_{rs}^{23}]) \cdot [I_3] \tag{7.35}$$

$$[k_{rs}^{13}] = d^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c} 6(3+\xi_r\xi_s)(35+17\eta_r\eta_s) & 0 & -\eta_s(3+\xi_r\xi_s)(35+9\eta_r\eta_s) \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -\eta_r(3+\xi_r\xi_s)(35+9\eta_r\eta_s) & 0 & (3+\xi_r\xi_s)(1+7\eta_r\eta_s) \end{array} \right], \tag{7.36}$$

$$[k_{rs}^{23}] = d \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 6(3+\eta_r\eta_s)(35+17\xi_r\xi_s) & -\xi_s(3+\eta_r\eta_s)(35+9\xi_r\xi_s) \\ \hline 0 & -\xi_r(35+9\xi_r\xi_s)(3+\eta_r\eta_s) & (3+\eta_r\eta_s)(1+7\xi_r\xi_s) \end{array} \right];$$

$$[k_{12rs}] = \frac{1}{5040} \frac{c'}{c} [I_3] (D_{13}^q [k_{12rs}^{13}] + D_{23}^q [k_{12rs}^{23}]) [I_2] \tag{7.37}$$

$$[k_{12rs}^{13}] = d^{-1} \left[\begin{array}{c|c|c} -36\xi_s(35+17\eta_r\eta_s) & -6\xi_s\eta_s(35+9\eta_r\eta_s) & -42\xi_r\xi_s(5+2\eta_r\eta_s) \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 6\eta_r\xi_s(35+9\eta_r\eta_s) & 6\xi_s(1+7\eta_r\eta_s) & 7\xi_r\eta_r\xi_s(5+\eta_r\eta_s) \end{array} \right], \quad (7.38)$$

$$[k_{12rs}^{23}] = d \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -36\eta_s(35+17\xi_r\xi_s) & 42\eta_r\eta_s(5+2\xi_r\xi_s) & 6\xi_s\eta_s(35+9\xi_r\xi_s) \\ \hline 6\xi_r\eta_s(35+9\xi_r\xi_s) & -7\xi_r\eta_r\eta_s(5+\xi_r\xi_s) & -6\eta_s(1+7\xi_r\xi_s) \end{array} \right],$$

$$[I_2] = [1 \quad 2b \quad 2a];$$

$$[k_{2rs}] = 2 [k_{rs}^b] + [k_{2rs}^q] \quad (7.39)$$

$$[k_{rs}^b] = \frac{1}{240ab} \cdot [I_2] \cdot (D_{11}^b [k_{11rs}^b] + D_{22}^b [k_{22rs}^b] + D_{12}^b [k_{12rs}^b] + D_{66}^b [k_{66rs}^b]) \cdot [I_2] \quad (7.40)$$

gdzie:

$$[k_{11rs}^b] = d^{-2} \left[\begin{array}{c|c} 60\xi_r \xi_s (3+\eta_r \eta_s) & 0 \\ \hline 0 & -30\xi_r (3+\eta_r \eta_s) \\ \hline -30\xi_s (3+\eta_r \eta_s) & 0 \\ \hline & 0 & 5(3+\xi_r \xi_s)(3+\eta_r \eta_s) \end{array} \right],$$

$$[k_{22rs}^b] = d^2 \left[\begin{array}{c|c|c} 60\eta_r \eta_s (3+\xi_r \xi_s) & 30\eta_r (3+\xi_r \xi_s) & 0 \\ \hline 30\eta_s (3+\xi_r \xi_s) & 5(3+\xi_r \xi_s)(3+\eta_r \eta_s) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (7.41)$$

$$[k_{12rs}^b] = \begin{bmatrix} 120\xi_r\xi_s\eta_r\eta_s & | & 30\xi_r\xi_s(\eta_r+\eta_s) & | & -30\eta_r\eta_s(\xi_r+\xi_s) \\ 30\xi_r\xi_s(\eta_r+\eta_s) & | & 0 & | & -15(\xi_r+\xi_s)(\eta_r+\eta_s) \\ -30\eta_r\eta_s(\xi_r+\xi_s) & | & -15(\xi_r+\xi_s)(\eta_r+\eta_s) & | & 0 \end{bmatrix},$$

$$[k_{66rs}^b] = \begin{bmatrix} 336\xi_r\xi_s\eta_r\eta_s & | & 24\xi_r\xi_s\eta_r & | & -24\xi_r\eta_r\eta_s \\ 24\xi_r\xi_s\eta_s & | & 4\xi_r\xi_s(5\eta_r\eta_s+3) & | & 0 \\ -24\xi_s\eta_r\eta_s & | & 0 & | & 4\eta_r\eta_s(5\xi_r\xi_s+3) \end{bmatrix},$$

$[k^b]$ - jest znaną macierzą sztywności elementu płytowego prostokątnego [50, 103].

$$[k_{2rs}^q] = \frac{1}{5040} \left(\frac{c'}{c}\right)^2 [I_2] \{D_{13}^q [k_{2rs}^{13}] + D_{23}^q [k_{2rs}^{23}]\} [I_2] \quad (7.42)$$

gdzie:

$$[k_{2rs}^{13}] = d^{-1} \begin{bmatrix} 24\xi_r\xi_s(63+29\eta_r\eta_s) & | & 6\xi_r\xi_s\eta_s(35+9\eta_r\eta_s) & | & -42\xi_r(3+\eta_r\eta_s) \\ 6\xi_r\xi_s\eta_r(35+9\eta_r\eta_s) & | & 6\xi_r\xi_s(7\eta_r\eta_s+1) & | & 0 \\ -42\xi_s(3+\eta_r\eta_s) & | & 0 & | & 7(3+5\xi_r\xi_s)(3+\eta_r\eta_s) \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

$$[k_{2rs}^{23}] = d \begin{bmatrix} 24\eta_r\eta_s(63+29\xi_r\xi_s) & | & 42\eta_r(3+\xi_r\xi_s) & | & -6\xi_s\eta_r\eta_s(35+9\xi_r\xi_s) \\ 42\eta_s(3+\xi_r\xi_s) & | & 7(3+\xi_r\xi_s)(3+5\eta_r\eta_s) & | & 0 \\ -6\xi_r\eta_r\eta_s(35+9\xi_r\xi_s) & | & 0 & | & 6\eta_r\eta_s(7\xi_r\xi_s+1) \end{bmatrix}$$

W przypadku 5 stopni swobody w węźle:

$$[k_{1rs}^q] = \frac{ab}{36} [D_q] \begin{bmatrix} (3+\xi_r\xi_s)(3+\eta_r\eta_s) & | & 0 \\ 0 & | & 3+\xi_r\xi_s)(3+\eta_r\eta_s) \end{bmatrix}, \quad (7.44)$$

$$[k_{12rs}] = \frac{1}{720} \frac{c'}{c} [D_q] ([I_2^*] [k_{12rs}^q] [I_2]), \quad (7.45)$$

$$[k_{12rs}^a] = \begin{bmatrix} -18\xi_s(5+2\eta_r\eta_s) & -3\xi_s(5\eta_s+\eta_r) & -5\xi_r\xi_s(3+\eta_r\eta_s) \\ -18\eta_s(5+2\xi_r\xi_s) & 5\eta_r\eta_s(3+\xi_r\xi_s) & 3\eta_s(5\xi_s+\xi_r) \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

$$[I_2^*] = [2b \quad 2a]$$

Macierz naprężeń początkowych (4.33), (4.16) przy założeniu jednorodnego pola naprężeń wewnątrz elementu możemy przedstawić w następujący sposób:

$$[k_{6rs}^b] = \frac{1}{5040} [I_2] (N_{11} [k_{6rs}^{11}] + N_{22} [k_{6rs}^{22}] + N_{12} [k_{6rs}^{12}]) [I_2] \quad (7.47)$$

gdzie:

$$[k_{6rs}^{11}] = d^{-1} \begin{bmatrix} 24\xi_r\xi_s(63+29\eta_r\eta_s) & 6\xi_r\xi_s(35\eta_s+9\eta_r) & -42\xi_r(3+\eta_r\eta_s) \\ 6\xi_r\xi_s(35\eta_r+9\eta_s) & 6\xi_r\xi_s(1+7\eta_r\eta_s) & 0 \\ -42\xi_s(3+\eta_r\eta_s) & 0 & 7(3+\eta_r\eta_s)(3+5\xi_r\xi_s) \end{bmatrix},$$

$$[k_{6rs}^{22}] = d \begin{bmatrix} 24\eta_r\eta_s(63+29\xi_r\xi_s) & 42\eta_r(3+\xi_r\xi_s) & -6\eta_r\eta_s(35\xi_s+9\xi_r) \\ 42\eta_s(3+\xi_r\xi_s) & 7(3+\xi_r\xi_s)(5\eta_r\eta_s+3) & 0 \\ -6\eta_r\eta_s(35\xi_r+9\xi_s) & 0 & 6\eta_r\eta_s(1+7\xi_r\xi_s) \end{bmatrix},$$

$$[k_{6rs}^{12}] = 7 \begin{bmatrix} 360\xi_r\xi_s & -36\eta_r\eta_s(\xi_r-\xi_s) & -36\xi_r\xi_s(\eta_s-\eta_r) \\ -36\eta_r\eta_s(\xi_s-\xi_r) & 3(\xi_r-\xi_s)(\eta_r-\eta_s) & -10\xi_r\xi_s\eta_r\eta_s \\ -36\xi_r\xi_s(\eta_r-\eta_s) & -10\xi_r\xi_s\eta_r\eta_s & 3(\xi_r-\xi_s)(\eta_r-\eta_s) \end{bmatrix}$$

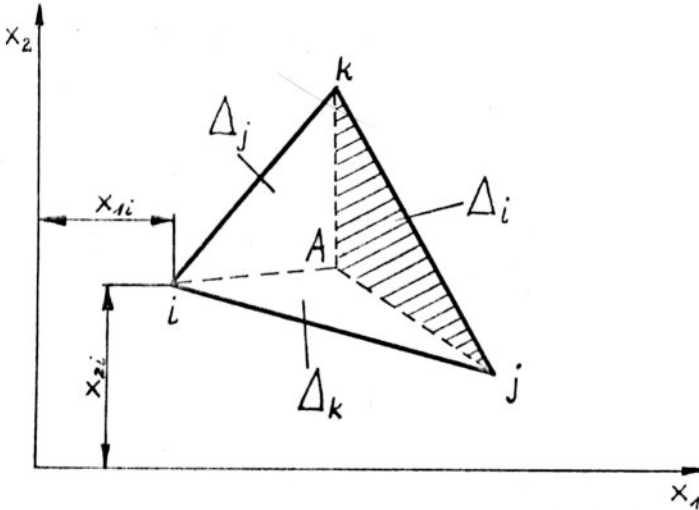
(7.48)

Macierz $[k_6^b]$ elementu trójwarstwowego jest tutaj identyczna z macierzą naprężeń początkowych elementu płyty cienkiej [103].

Wartości składowych naprężeń $N_{\alpha\beta}$ określimy z rozwiązania płaskiego stanu naprężeń (5.5), (5.8) dla rozpatrywanej płyty przy obciążeniu jednostkowym $\{P_0\}$ i przy określonych warunkach brzegowych.

8. TRÓJKATNY TRÓJWARSTWOWY ELEMENT SKOŃCZONY

Obecnie przedstawimy podobnie jak w punkcie 7 odpowiednie funkcje i macierze dla elementu trójkątnego (rys.9).



Rys.9.

Element trójkątny w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych

$$L_i^A = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Tutaj przy opisie funkcji przemieszczeń wewnątrz elementu wykorzystamy, tzw. współrzędne powierzchniowe określone poprzez liniową zależność od współrzędnych kartezjańskich [103]:

$$L_i = (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) / 2\Delta, \quad (i = i, j, k) \quad (8.1)$$

gdzie:

Δ - pole trójkąta

$$2\Delta = (x_{1j} - x_{1i})(x_{2k} - x_{2i}) - (x_{1k} - x_{1i})(x_{2j} - x_{2i}),$$

$$a_i = x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j},$$

$$b_i = x_{2j} - x_{2k},$$

$$c_i = x_{1k} - x_{1j},$$

(8.2)

$(x_{1i}, x_{2i}), (x_{1j}, x_{2j}), (x_{1k}, x_{2k})$ - współrzędne kartezjańskie wierzchołków trójkąta.

Pole przemieszczeń elementu trójwarstwowego trójkątnego opisuje funkcja:

$$\{u\}_e = [\phi] \{r\}_e \quad (8.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \{r\}_e^T &= \{r_i \quad r_j \quad r_k\}, \\ [\phi] &= [\phi_i \quad \phi_j \quad \phi_k], \\ \{u\}_e^T &= \{u^{pl} \quad u^q \quad u_3\}. \end{aligned}$$

Jako parametry węzłowe przyjęto tutaj przemieszczenia translacyjne u_i ($i = 1, 2, 3$), obroty normalnej do okładzin $u_{3,\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) oraz obroty normalnej rdzenia ψ_α ($\alpha = 1, 2$) w następującym porządku:

$$\{r_i\}^T = \{u_1^i \quad u_2^i \quad \psi_1^i \quad \psi_2^i \quad u_3^i \quad \alpha_1^i \quad \alpha_2^i\},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_1^i &= -u_{3,2}, \\ \alpha_2^i &= u_{3,1}. \end{aligned}$$

8.1. Element trójkątny w płaskim stanie naprężenia

Pole przemieszczeń w płaskim stanie naprężenia opisano przy pomocy funkcji liniowej

$$\{u^{pl}\} = [\phi^{pl}] \{r^{pl}\}, \quad (8.4)$$

gdzie:

$$[\phi_i^{pl}] = \begin{bmatrix} \phi_{i11}^{pl} & 0 \\ 0 & \phi_{i22}^{pl} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, j, k)$$

$$\phi_{i11}^{pl} = \phi_{i22}^{pl} = L_i. \quad (8.5)$$

Pole odkształceń w płaskim stanie naprężenia opisuje związek (7.7)

$$\{\epsilon^{pl}\} = [B^{pl}] \{r^{pl}\}, \quad (8.6)$$

gdzie:

$$[B^{pl}] = [B_i^{pl}, B_j^{pl}, B_k^{pl}],$$

$$[B_i^{pl}] = \begin{bmatrix} B_{i11}^{pl} & 0 \\ 0 & B_{i22}^{pl} \\ B_{i31}^{pl} & B_{i32}^{pl} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

$$B_{i11}^{pl} = B_{i32}^{pl} = \frac{b_i}{2\Delta}$$

$$B_{i22}^{pl} = B_{i31}^{pl} = \frac{c_i}{2\Delta}$$

Skąd widać, że pole odkształceń wewnątrz elementu jest stałe. Macierz sztywności w płaskim stanie naprężeń zgodnie z (4.24) otrzymamy w postaci:

$$[k_{rs}^{pl}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} D_{11}^{pl} \cdot b_r \cdot b_s + D_{66}^{pl} \cdot c_r \cdot c_s & | & D_{12}^{pl} \cdot b_r \cdot c_s + D_{66}^{pl} \cdot c_r \cdot b_s \\ \vdots & | & \vdots \\ D_{12}^{pl} \cdot c_r \cdot b_s + D_{66}^{pl} \cdot b_r \cdot c_s & | & D_{22}^{pl} \cdot c_r \cdot c_s + D_{66}^{pl} \cdot b_r \cdot b_s \end{bmatrix}, \quad (8.8)$$

$$(r, s = i, j, k).$$

Pełną macierz sztywności elementu w płaskim stanie naprężeń otrzymamy wg schematu:

$$[k^{pl}] = \begin{bmatrix} k_{ii}^{pl} & k_{ij}^{pl} & k_{ik}^{pl} \\ k_{ji}^{pl} & k_{jj}^{pl} & k_{jk}^{pl} \\ k_{ki}^{pl} & k_{kj}^{pl} & k_{kk}^{pl} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Podobnie jak poprzednio z równania (5.5) otrzymamy przemieszczenia węzłów w stanie tarczowym płyty trójwarstwowej. Składowe wektora naprężeń w elemencie otrzymamy z równania (5.8), gdzie macierz naprężeń ma postać:

$$[s]^{pl} = [s_i^{pl} \quad s_j^{pl} \quad s_k^{pl}],$$

$$[s_i^{pl}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i \cdot D_{11}^{pl} & c_i \cdot D_{12}^{pl} \\ b_i \cdot D_{12}^{pl} & c_i \cdot D_{22}^{pl} \\ c_i \cdot D_{66}^{pl} & b_i \cdot D_{66}^{pl} \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

8.2. Element trójkątny w zagadnieniu stateczności płyt trójwarstwowych

Pole przemieszczeń ugiętej płyty trójwarstwowej opisujemy w następujący sposób

$$\{u^{bq}\} = [\phi^{bq}] \{r^{bq}\}, \quad (8.11)$$

gdzie:

$$[\phi^{bq}] = [\phi_i^{bq}, \phi_j^{bq}, \phi_k^{bq}]$$

$$[\phi_i^{bq}] = \begin{bmatrix} \phi_i^q & 0 \\ 0 & \phi_i^b \end{bmatrix}, \quad [\phi_i^q] = \begin{bmatrix} \phi_{i11}^q & \\ & \phi_{i22}^q \end{bmatrix}, \quad (i = i, j, k)$$

$$[\phi_i^b] = [\phi_{i1}^b, \phi_{i2}^b, \phi_{i3}^b].$$

Odpowiednie funkcje kształtu dla elementu trójkątnego przyjęto w postaci [103]:

- dla przemieszczeń ścinających:

$$\phi_{i11}^q = \phi_{i22}^q = L_i \quad (8.12)$$

- dla przemieszczeń zginających:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i1}^b &= L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_k - L_i L_j^2 - L_i L_k^2, \\ \phi_{i2}^b &= b_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_j (L_k L_i^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_k), \\ \phi_{i3}^b &= c_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_j (L_k L_i^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_k). \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Są to tzw. elementy niedostosowane. Dla większości praktycznych przypadków inżynierskich dokładność wynikająca z zastosowania elementów trójkątnych niedostosowanych jest wystarczająca [103]. Pole odkształceń elementu trójwarstwowego opisujemy przy pomocy podobnych wzorów (7.26)-(7.30). Wskaźnik "i" w tym przypadku przyjmuje wartość (i, j, k). Elementy podmacierzy macierzy $[B_i^{bq}]$ (7.29) mają tutaj następującą postać: - podmacierz $[B_{i1}^{bq}]$ (7.30)

$$\begin{aligned} B_{i11}^{bq} &= B_{i32}^{bq} = \frac{b_i}{2\Delta}, \\ B_{i22}^{bq} &= B_{i31}^{bq} = \frac{c_i}{2\Delta}; \end{aligned} \quad (8.14)$$

- podmacierz $[B_{i2}^{bq}]$ (7.30)

$$\begin{aligned} B_{i44}^{bq} &= \frac{1}{4\Delta^2} [2(2b_i^2 + b_j^2 + b_k^2) L_i + 2b_i(2b_j - b_i)L_j + 2b_i(2b_k - b_i)L_k], \\ B_{i45}^{bq} &= \frac{1}{4\Delta^2} [b_j b_k (b_j - b_k)L_i + b_i b_k (3b_j + b_k)L_j - b_i b_j (3b_k + b_j)L_k], \\ B_{i46}^{bq} &= \frac{1}{4\Delta^2} \{ [b_j c_k (4b_j + 3b_k) - b_k c_j (4b_k + 3b_j)] L_i + \\ &+ b_i (b_k c_j - 2b_i c_k - b_k c_k)L_j + b_i (b_j c_j + 2b_i c_j - b_j c_k)L_k \}, \\ B_{i54}^{bq} &= \frac{1}{4\Delta^2} [2(2c_i^2 + c_j^2 + c_k^2)L_i + 2c_i(2c_j - c_i)L_j + 2c_i(2c_k - c_i)L_k], \\ B_{i55}^{bq} &= \frac{1}{4\Delta^2} \{ [c_k b_j (4c_i + c_j) - c_j b_k (4c_i + c_k)] L_i + \\ &+ c_i (c_k b_j - 2c_i b_k - c_k b_k)L_j + c_i (c_j b_j + 2c_i b_j - c_j b_k)L_k \}, \\ B_{i56}^{bq} &= \frac{1}{4\Delta^2} [c_j c_k (c_j - c_k)L_i + c_i c_k (3c_j + c_k)L_j - c_i c_j (3c_k + c_j)L_k], \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} B_{i64}^{bq} &= \frac{1}{4\Delta^2} [4(2b_i c_i + b_j c_j + b_k c_k)L_i + 4(b_i c_j + b_j c_i - b_i c_i)L_j + \\ &+ 4(b_i c_k + b_k c_i - b_i c_i)L_k], \end{aligned}$$

$$B_{165}^{bq} = \frac{1}{4\Delta^2} \{ [b_k c_j (5b_j + 3b_k) - b_j c_k (5b_k + 3b_j)] L_i + \\ + [b_i c_k (b_j - b_k) + b_k c_i (5b_j + 3b_k)] L_j + \\ + [b_i c_j (b_j - b_k) - b_j c_i (5b_k + 3b_j)] L_k \};$$

$$B_{166}^{bq} = \frac{1}{4\Delta^2} \{ [c_k b_j (5c_j + 3c_k) - b_k c_j (5c_k + 3c_j)] L_i + \\ + [c_i b_k (c_j - c_k) + c_k b_i (5c_j + 3c_k)] L_j + \\ + [c_i b_j (c_j - c_k) - b_i c_j (5c_k + 3c_j)] L_k \};$$

- podmacierz $[B_{173}^{bq}]$ (7.30)

$$B_{171}^{bq} = B_{182}^{bq} = -L_i; \quad (8.16)$$

- podmacierz $[B_{174}^{bq}]$ (7.30)

$$B_{174}^{bq} = \frac{1}{2\Delta} [b_i (1 + 2L_i L_j + 2L_i L_k - L_j^2 - L_k^2) + b_j (L_i^2 - 2L_i L_j) + \\ + b_k (L_i^2 - 2L_i L_k)];$$

$$B_{175}^{bq} = \frac{1}{2\Delta} [b_k (\frac{5}{2} b_i + b_k) L_i L_j + \frac{1}{2} b_i (b_k - b_j) L_j L_k + \\ - b_j (\frac{5}{2} b_i + b_j) L_i L_k];$$

$$B_{176}^{bq} = \frac{1}{2\Delta} [b_i c_k (2L_i L_j + \frac{1}{2} L_j L_k) + b_i c_j (2L_k L_i + \frac{1}{2} L_j L_k) + \\ + b_j c_k (L_i^2 + \frac{1}{2} L_i L_k) - \frac{1}{2} b_j c_j L_i L_k + \frac{1}{2} b_k c_k L_i L_j + \\ - b_k c_j (L_i^2 + \frac{1}{2} L_i L_j)];$$

$$B_{184}^{bq} = \frac{1}{2\Delta} [c_1(1 + 2L_iL_j + 2L_iL_k - L_j^2 - L_k^2) + c_j(L_i^2 - 2L_iL_j) + c_k(L_i^2 - 2L_iL_k)], \quad (8.17)$$

$$B_{185}^{bq} = \frac{1}{2\Delta} [c_i b_k (2L_iL_j + \frac{1}{2} L_jL_k) - c_i b_j (2L_kL_i + \frac{1}{2} L_jL_k) + c_j b_k (L_i^2 + \frac{1}{2} L_i L_k) - \frac{1}{2} c_j b_j L_iL_k + \frac{1}{2} c_k b_k L_iL_j - c_k b_j (L_i^2 + \frac{1}{2} L_iL_j)],$$

$$B_{186}^{bq} = \frac{1}{2\Delta} [c_k (\frac{5}{2} c_i + c_k) L_iL_j + \frac{1}{2} c_i (c_k - c_j) L_jL_k - c_j (\frac{5}{2} c_i + c_j) L_iL_k].$$

W celu obliczenia podmacierzy sztywności $[k^{bq}]$ (4.23) zastosowano całkowanie numeryczne po polu trójkąta [103] wyrażeń (4.25-4.30).

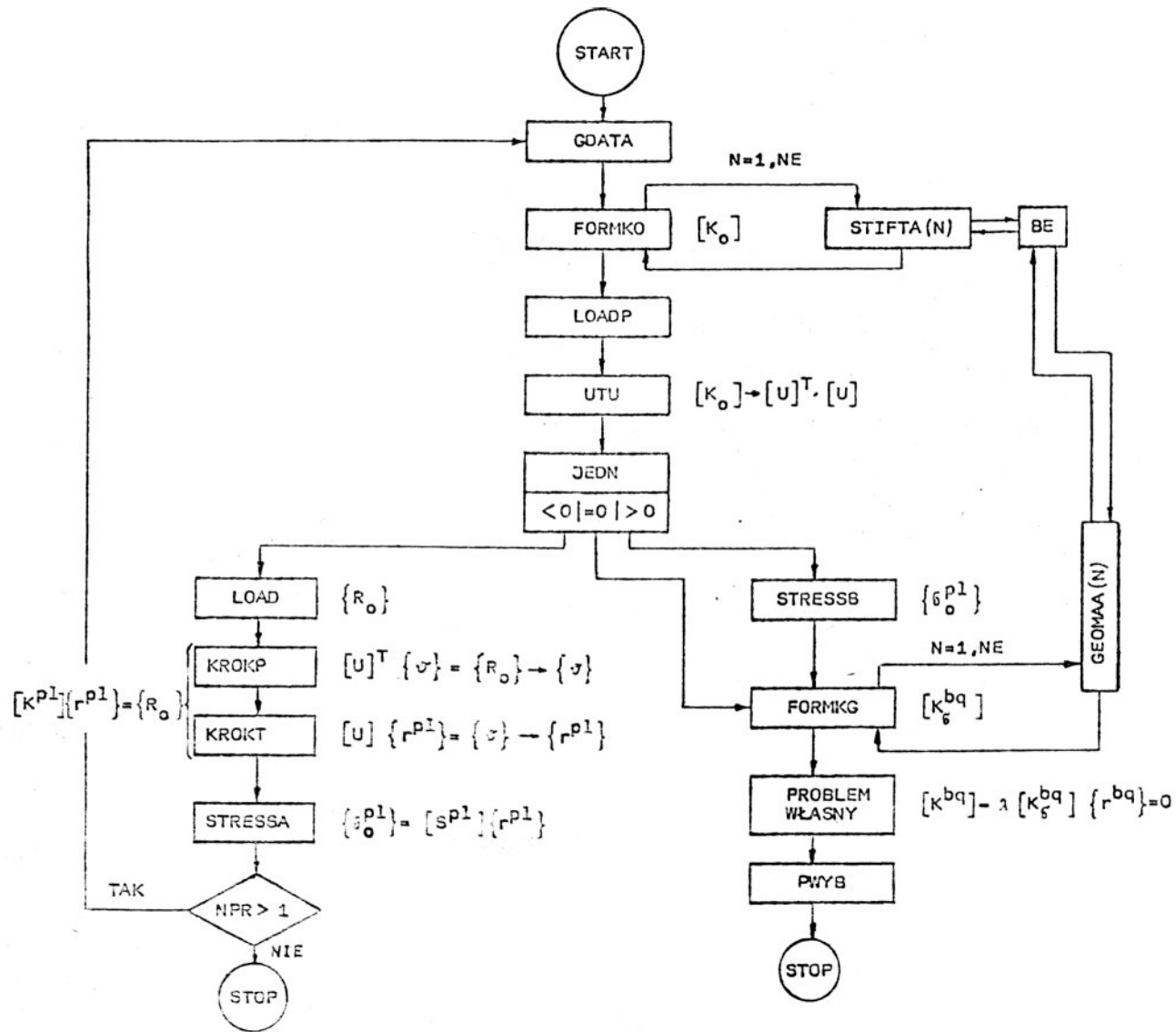
Macierz naprężeń początkowych obliczono z równań (4.33), (4.16), gdzie pochodne cząstkowe funkcji kształtu przedstawiają wyrazy podmacierzy $[B_{i4}^{bq}]$ (8.17). Tutaj również zastosowano całkowanie numeryczne po polu trójkąta z zastosowaniem siedmiu punktów całkowania wewnątrz elementu.

9. ALGORYTM OBLICZANIA STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ NIEJEDNOSPÓJNYCH PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH

Rozwiązanie zadania stateczności sprężystej niejednostopólnych płyt trójwarstwowych obejmuje dwa etapy. Pierwszy to rozwiązanie płaskiego stanu naprężeń, a drugi to właściwe zagadnienie stateczności, które w tym przypadku sprowadza się do rozwiązania problemu własnego. Schemat blokowy programu przedstawiono na rys.10.

Na schemacie podano podstawowe kroki algorytmu i nazwy odpowiednich podprogramów.

Podprogram GDATA służy do wczytywania podstawowych zbiorów danych tzn.:



Rys.10. Schemat blokowy rozwiązania zadania stateczności niejednorodnych płyt

- współrzędne węzłów,
- własności materiału warstw,
- relacje przylegania (nr elementu - nrnr węzłów),
- warunki brzegowe (unieruchomione stopnie swobody).

W podprogramie FORMKO tworzy się globalną macierz sztywności układu $[K_0]$ z jednoczesnym uwzględnieniem warunków brzegowych. W przypadku rozwiązywania płaskiego stanu naprężeń tworzy się macierz $[K^{pl}]$ (por. rozdział 7.1, 8.1). Natomiast, gdy rozwiązujemy właściwe zagadnienie stateczności jest to macierz $[K^{bc}]$ (por. rozdział 7.2 i 8.2). Podprogram FORMKO wywołuje podprogram STIFTA(N), który buduje macierz sztywności elementu N ($N = 1, NE$). Ten z kolei korzysta z biblioteki BE, w której zlokalizowane są informacje charakterystyczne dla danego elementu (w postaci podprogramów).

Podprogram LOADP modyfikuje macierz sztywności $[K_0]$ i wektor obciążeń $\{P_0\}$ wg pomysłu Payne'a i Ironsa [103] w przypadku wymuszeń kinematycznych (kinematyczne warunki brzegowe).

W podprogramie UTU wykonywany jest rozkład macierzy $[K_0]$ na dwie macierze trójkątne metodą Choleskiego (zwanej również metodą Banachiewicza lub metodą pierwiastków kwadratowych) [41, 74, 90, 99].

Dalszy przebieg programu zależy od wartości parametru JEDN. Jeżeli wartość $JEDN < 0$ rozwiązywany jest płaski stan naprężeń. Wówczas w podprogramie LOAD buduje się wektor obciążenia z jednoczesnym uwzględnieniem unieruchomionych stopni swobody. Rozwiązanie układu równań (5.5) zrealizowano korzystając z rozkładu macierzy $[K^{pl}]$ na czynniki trójkątne. Mianowicie za pomocą podprogramów KROKT i KROKP (por. rys.6) rozwiązujemy następujące układy równań równoważne układowi (5.5):

$$[U]^T \{v\} = \{P_0\},$$

$$[U] \{r^{pl}\} = \{v\}.$$

Dalej działając na otrzymany wektor przemieszczeń $\{r^{pl}\}$ macierzą naprężeń $[S^{pl}]$ (w podpr. STRESSA) otrzymamy poszukiwany rozkład naprężeń

$$\{\sigma_0^{pl}\} = [S^{pl}] \{r^{pl}\}$$

Gdy celem zadania realizowanego przez program było tylko określenie przemieszczeń i naprężeń w płaskim stanie naprężeń wówczas należy dodatkowo przyjąć wartość parametru $NPR = 1$ i zadanie zostanie zakończone.

Jeżeli natomiast od razu po rozwiązaniu płaskiego stanu naprężeń jest rozwiązywane zadanie stateczności należy przyjąć $NPR > 1$ i przy kolejnym wczytywaniu danych $JEDN = 0$. Wtedy wyniki pierwszego etapu zostają zachowane i wykorzystane w etapie drugim.

W przypadku, gdy rozwiązywanie dwuwymiarowego zadania teorii sprężystości nie jest konieczne np. dla jednorodnego pola naprężeń lub gdy wektor naprężeń jest wczytywany w postaci tablicy, wtedy należy przyjąć $JEDN > 0$. A odpowiedni wektor naprężeń zbuduje podprogram STRESSB. W podprogramie FORMKG buduje się globalną macierz naprężeń początkowych układu $[K_5^{bq}]$ z jednoczesnym uwzględnieniem warunków brzegowych. Podprogram ten wywołuje podprogram GEOMAA(N), który tworzy macierz naprężeń początkowych elementu N ($N = 1, NE$). Ten z kolei korzysta również z biblioteki BE.

Rozwiązanie problemu własnego (5.4) przedstawiono w rozdziale 6. W celu otrzymania postaci wyboczenia rzeczywistej konstrukcji należy w wektorze własnym uwzględnić dodatkowo warunki brzegowe co jest realizowane w podprogramie PWYB.

Program wyposażony został w pakiet podprogramów wyznaczających plan warstwicy funkcji dwóch zmiennych. Dzięki temu można w sposób przejrzysty otrzymywać rozkłady przemieszczeń, naprężeń oraz postać wyboczenia analizowanej płyty.

W celu sprawdzenia działania programu jak i koncepcji elementu trójwarstwowego przeprowadzono szereg testów kontrolnych. Obecnie przedstawimy wyniki obliczeń kilku przykładów rozwiązanych za pomocą tego programu z zastosowaniem zarówno elementu trójkątnego jak i prostokątnego. Do rozwiązania płaskiego zadania teorii sprężystości zastosowano elementy z dwoma lub z trzema stopniami swobody w węźle (por. rozdz. 7.1). Element z trzema stopniami swobody w węźle stosowano w tym przypadku, gdy wykorzystano symetrię układu. Wynika to z faktu, że wówczas dokładniej można zamodelować warunki brzegowe na osiach symetrii.

Do rozwiązania zagadnienia stateczności wykorzystano element z pięcioma stopniami swobody w węźle, co okazało się w praktyce wystarczające. W trakcie testowania jest element z sześcioma stop-

niami swobody w węźle, jak również całkowanie rozkładu naprężeń wewnątrz elementu, w przypadku wyznaczania macierzy naprężeń początkowych. Jednak celowość tych zabiegów jak wskazują autorzy [71, 103] nie jest w większości przypadków konieczna.

b Aktualnie w programie w bibliotece elementów BE dostępne są następujące elementy skończone:

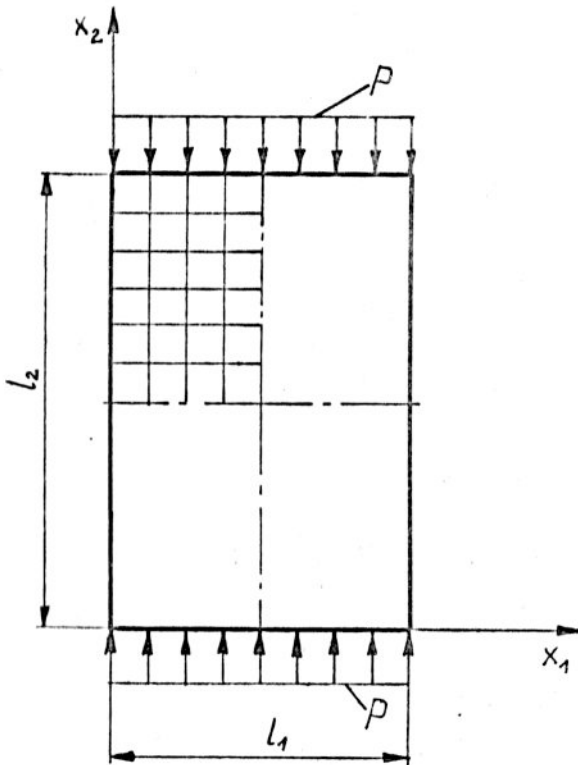
- 1) element prostokątny tarczowy z 2 ssw (stopniami swobody w węźle)
- 2) element prostokątny płytowy z 3 ssw, gdzie funkcje kształtu przyjęto wg [103]
- 3) element prostokątny tarczowy z 3 ssw
- 4) element prostokątny płytowy z 3 ssw, gdzie funkcje kształtu oparto na wielomianach Hermite'a wg [1]
- 5) element prostokątny tarczowy trójwarstwowy, opisany w oparciu o element 1)
- 6) element prostokątny płytowy trójwarstwowy z 5 ssw, gdzie funkcje kształtu przyjęto wg [103]
- 7) element prostokątny płytowy z możliwością całkowania numerycznego rozkładu naprężeń wewnątrz elementu w przypadku wyznaczania macierzy naprężeń początkowych *)
- 8) jak 7) dla elementu trójwarstwowego *)
- 9) element trójkątny tarczowy z 2 ssw
- 10) element trójkątny płytowy z 3 ssw
- 11) element trójkątny trójwarstwowy płytowy z 5 ssw
- 12) element prostokątny trójwarstwowy płytowy z 6 ssw, gdzie funkcje kształtu przyjęto wg [1] *)
- 13) jak 12) z 5 ssw *)
- 14) jak 12), gdzie funkcje kształtu przyjęto wg [103] *).

*) W trakcie testowania.

10. PRZYKŁADY LICZBOWE

Przykład 10.1

Wyznaczyć obciążenie krytyczne płyty prostokątnej cienkiej $l_2/l_1 = 3/2$ ściskanej siłą równomiernie rozłożoną p , jak na rys.11, wolno podpartej na całym brzegu. Zbadać wpływ dyskretyzacji na dokładność otrzymywanych wyników, w porównaniu z rozwiązaniem klasycznym [92].



Rys.11.

Płyta prostokątna obciążona siłą ściskającą równomiernie rozłożoną z przyjętym sposobem dyskretyzacji

Rozwiązanie

Ze względu na symetrię układu w obliczeniach rozważano tylko czwartą część płyty, badając symetryczne i asymetryczne postacie wybożenia względem osi symetrii płyty. Ze względu na jednorodny stan naprężeń nie ma konieczności rozwiązywania dwuwymiarowego zadania teorii sprężystości *) $N_{11} = N_{12} = 0, N_{22} = -p$.

*) Mimo to dla dyskretyzacji (4x6) rozwiązano to zadanie w celu sprawdzenia poprawności przyjęcia warunków brzegowych na osiach symetrii, co ma istotne znaczenie dla płyty z otworem (por. przykład 10.6).

Parametr obciążenia krytycznego C zdefiniowano w następujący sposób [92]:

$$P_{kr} = C \frac{\pi^2 \cdot D}{l_2^2} \quad (10.1)$$

gdzie:

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad C = \left[n_2 + \frac{1}{n_2} \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right]^2$$

n_2 - jest ilością półfal jaka wystąpi w chwili utraty stateczności.
Dla płyty $l_2/l_1 = 3/2$ minimalna wartość parametru

$$C = \frac{625}{64} = 9,765625 \quad \text{dla} \quad n_2 = 2.$$

W tabeli 1 przedstawiono wartości parametru C otrzymane przy zastosowaniu elementów prostokątnych i kwadratowych w zależności od stopnia zagęszczenia podziału.

T a b e l a 1

Wartości parametru obciążenia krytycznego płyty prostokątnej cienkiej, ściskanej siłą równomiernie rozłożoną, w zależności od sposobu dyskretyzacji

| Elementy kwadratowe | | | Elementy prostokątne | | |
|---------------------|----------|----------|----------------------|----------|----------|
| Dyskretyzacja | C | Błąd w % | Dyskretyzacja | C | Błąd w % |
| 2 x 3 *) | 7,5264 | 23 | 3 x 3 *) | 8,2526 | 15,5 |
| 4 x 6 | 9,0239 | 7,6 | 4 x 4 | 8,7585 | 10,3 |
| 8 x 12 | 9,5624 | 2,1 | 8 x 8 | 9,4647 | 3,1 |
| Dokładnie | 9,765625 | - | Dokładnie | 9,765625 | - |

*) Dla tej dyskretyzacji w obliczeniach rozważano całą płytę, a nie jej czwartą część. Oznaczenie dyskretyzacji tutaj i dalej np. (2 x 3) oznacza podział płyty w kierunku osi x_1 na dwie części, a w kierunku osi x_2 na trzy.

W obliczeniach wykorzystano macierz sztywności elementu płytowego prostokątnego (7.40), (7.41) oraz macierz naprężeń początkowych (7.47), (7.48). Jak widać (tabela 1) wartość parametru C otrzymujemy z niedomiarem i dla dyskretyzacji opartej na siatce (8 x 12) błąd tej wartości w stosunku do dokładnej równy 2,1 % jest już dopuszczalny w obliczeniach praktycznych.

Postać wybożenia otrzymaną z obliczeń jest zgodna z tą jaką otrzymujemy wg wzoru (10.1), tzn. jedna półfala w kierunku osi x_1 i dwie półfale w kierunku osi x_2 .

Zbieżność wyników przy zagęszczaniu siatki podziału w przypadku niedostosowanych elementów prostokątnych została sprawdzona w pracy [103].

Otrzymane wyniki potwierdzają prawidłowość wyprowadzenia odpowiednich macierzy, jak i dobre działanie programu, a w szczególności rozwiązanie problemu wartości własnych.

Przykład 10.2

Zbadać wpływ sposobu dyskretyzacji na wartość parametru obciążenia krytycznego, ściskanej płyty cienkiej kwadratowej, wolno podpartej na całym brzegu, jak na rys.11, przy zastosowaniu elementu płytowego trójkątnego.

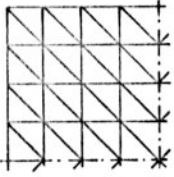
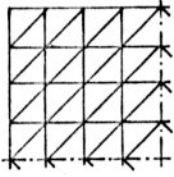
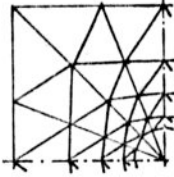
Rozwiązanie

Wartości parametru obciążenia krytycznego C dla trzech różnych sposobów dyskretyzacji przedstawiono w tabeli 2 (NE - oznacza ilość elementów). W obliczeniach wykorzystano element płytowy trójkątny, którego macierz sztywności opisują wzory (4.29), (7.30) i (8.15), a macierz naprężeń początkowych - (4.33), (4.16), (8.17). Wynik otrzymany przy dyskretyzacji a) tab. 2 jest identyczny z podanym w pracy [103]. Sposób dyskretyzacji c) tab. 2 zaczerpnięto z pracy [33], gdzie badano stateczność płyt kwadratowych z centralnym kołowym otworem przy obciążeniu ścinającym.

Jak widać sposób dyskretyzacji może mieć znaczny wpływ na wartość parametru obciążenia krytycznego. Również i w tym przypadku wyniki otrzymujemy z niedomiarem.

T a b e l a 2

Wartości parametru obciążenia krytycznego płyty kwadratowej cienkiej ściskanej siłą równomiernie rozłożoną w zależności od sposobu dyskretyzacji

| Dyskretyzacja | C | Błąd w % |
|--|--------|----------|
| a/  NE=32 | 3,9106 | 2,2 |
| b/  NE=32 | 3,8752 | 3,1 |
| c/  NE=36 | 3,5915 | 10,2 |
| Dokładnie | 4 | - |

Przykład 10.3

Wyznaczyć obciążenie krytyczne płyty prostokątnej trójwarstwowej ($l_2/l_1 = 3/2$) obciążonej i podpartej jak w przykładzie 10.1. Warstwy są izotropowe o następujących parametrach fizycznych i geometrycznych:

$$t = 0,001 \text{ m}$$

$$2c = 0,02 \text{ m}$$

$$E = 70534 \text{ MPa}$$

$$G_c = 23,5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\nu_c = 0,17$$

$$l_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$\frac{cE_c}{tE} = 0,0078 \quad (\text{rdzeń miękki})$$

$$l_2 = 0,3 \text{ m}$$

Zbadać wpływ dyskretyzacji na dokładność otrzymywanych wyników w porównaniu z rozwiązaniem otrzymanym metodą Ritza.

Rozwiązanie

Korzystając z kryterium statycznego utraty stateczności obciążenie krytyczne możemy wyznaczyć z równania (2.10), przyjmując funkcję ugięcia u_3 w postaci pojedynczej sinusoidy w kierunku osi x_1 i x_2 , spełniającej warunki brzegowe swobodnego podparcia

$$u_3 = u_3^0 \sin\alpha_1 x_1 \sin\alpha_2 x_2, \quad (10.2)$$

gdzie:

$$\alpha_1 = \frac{n_1 \pi}{l_1}, \quad \alpha_2 = \frac{n_2 \pi}{l_2},$$

oraz jednorodny stan naprężeń $N_{11} = N_{12} = 0$, $N_{22} = -p$.

Otrzymamy wówczas następujący wzór na obliczenie siły krytycznej

$$p = \frac{2D(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2}{\alpha_2^2} + \frac{2B(c + \frac{t}{2})^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2}{\alpha_2^2 \left[1 + \frac{c \cdot B}{G_c} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right]} \quad (10.3)$$

Wartość minimalna tej siły ze względu na ilość półfal n_1 i n_2 stanowi praktycznie ważne obciążenie krytyczne

$$p_{kr} = \min_{n_1, n_2} p(n_1, n_2) \quad (10.4)$$

Z uwagi na to, że p jest funkcją uwikłaną zmiennych n_1 i n_2 zadanie (10.4) rozwiązano numerycznie. Dla powyższych danych otrzymano:

$$P_{kr} = 601320 \text{ N/m} \quad \text{przy} \quad n_1 = 1 \quad \text{i} \quad n_2 = 5$$

W tabeli 3 przedstawiono wyniki obliczeń otrzymane metodą elementów skończonych, przy zastosowaniu elementu prostokątnego trójwarstwowego opisanego w rozdziale 7.2.

T a b e l a 3

Wartości obciążenia krytycznego oraz postać wybożenia płyty prostokątnej trójwarstwowej ściskanej siłą równomiernie rozłożoną w zależności od sposobu dyskretyzacji

| Elementy kwadratowe | | | | | Elementy prostokątne | | | | |
|---------------------|-------|-------|----------|------|----------------------|-------|-------|----------|-------|
| Dyskretyzacja | n_1 | n_2 | P_{kr} | Błąd | Dyskretyzacja | n_1 | n_2 | P_{kr} | Błąd |
| | | | N/m | % | | | | N/m | % |
| 2 x 3 | 1 | 1 | 564410 | 6,14 | 3 x 3 | 1 | 1 | 596640 | 0,78 |
| 4 x 6 | 1 | 5 | 591460 | 1,64 | 4 x 4 | 1 | 3 | 596760 | 0,76 |
| 8 x 12 | 1 | 5 | 600160 | 0,2 | 8 x 8 | 1 | 5 | 601750 | -0,07 |
| Dokładnie | 1 | 5 | 601320 | | Dokładnie | 1 | 5 | 601320 | |

Jak widać błąd otrzymanych wartości obciążenia krytycznego w porównaniu z wynikami otrzymanymi dla płyty jednowarstwowej (tab.1) przy tej samej dyskretyzacji jest tutaj znacznie mniejszy. Wyniki te potwierdzają prawidłowość doboru odpowiednich funkcji kształtu (rozd.7.2), jak i samą koncepcję budowy macierzy sztywności i macierzy naprężeń początkowych elementu trójwarstwowego. Podobnie jak dla elementu płytowego jednowarstwowego wartość obciążenia krytycznego otrzymujemy z niedomiarem i przy stosunkowo grubym podziale otrzymujemy wyniki z wystarczającą dla praktyki dokładnością. W miarę zagęszczania podziału płyty otrzymano postać wybożenia zgodną z tą jaką podaje rozwiązanie metodą Ritza (por. plan warstwicowy rys.25 w załączniku).

Przykład 10.4

Zbadać wpływ sposobu dyskretyzacji na wartość obciążenia krytycznego płyty trójwarstwowej kwadratowej, ściskanej siłą równomiernie rozłożoną i podpartą jak w przykładzie 10.1, przy zastosowaniu elementu trójwarstwowego trójkątnego.

Warstwy są izotropowe o następujących parametrach fizycznych i geometrycznych:

$$\begin{aligned}
 t &= 0,001 \text{ m} & 2c &= 0,006 \text{ m} \\
 E &= 70600 \text{ MPa} & G_c &= 25 \text{ MPa} \\
 \nu &= 0,3 & \nu_c &= 0 \\
 l_1 = l_2 = l &= 1 \text{ m} & \frac{c E_c}{t E} &= 0,002 \text{ (rdzeń miękki)} \\
 k &= \frac{\pi^2 \cdot B \cdot c}{l_1^2 \cdot G_c} = 0,092
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

Ze wzorów (10.3) i (10.4) otrzymano następującą wartość obciążenia krytycznego

$$P_{kr} = 63901 \text{ N/m} \quad \text{przy} \quad n_1 = n_2 = 1.$$

W obliczeniach metodą elementów skończonych zastosowano element trójwarstwowy trójkątny opisany w rozdz.8.2. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 4 przy dyskretyzacji a) i c) z tabeli 2.

Postać wyboczenia otrzymano zgodną z wynikiem dokładnym tzn.

$n_1 = n_2 = 1$. Wyniki wskazują na szybką zbieżność do wyniku dokładnego, jednak wartości otrzymujemy tutaj z niedomiarem. Przy dyskretyzacji 8×8 a) błąd otrzymanej wartości obciążenia krytycznego jest już dopuszczalny w praktyce inżynierskiej. Otrzymane wyniki potwierdzają prawidłowość wyznaczania macierzy sztywności i naprężeń początkowych elementu trójkątnego, a szczególnie zastosowania tam całkowania numerycznego. Należy zauważyć, że sposób dyskretyzacji podany w tabeli 2c ma tutaj znacznie mniejszy wpływ na dokładność otrzymanej wartości obciążenia krytycznego niż w przypadku płyty cienkiej (przykład 10.2).

Wartość obciążenia krytycznego płyty kwadratowej trójwarstwowej ściskanej siłą równomiernie rozłożoną w zależności od sposobu dyskretyzacji

| Elementy trójkątne | | |
|--------------------|------------------|----------|
| Dyskretyzacja | p_{kr} , [N/m] | Błąd [%] |
| 2 x 2 a) | 155217 | 143 |
| 4 x 4 a) | 72245 | 13 |
| 8 x 8 a) | 65665 | 2,76 |
| c) | 66260 | 3,69 |
| Dokładnie | 63901 | - |

Przykład 10.5.

Płyta prostokątna trójwarstwowa swobodnie podparta na brzegu zewnętrznym obciążona siłą ściskającą równomiernie rozłożoną na brzegach $x_2 = 0$ i $x_2 = l_2$ o intensywności p_0 (rys.11). Celem obliczeń jest zbadanie elementu trójwarstwowego dla różnych wartości parametru sprężysto-geometrycznego "k" płyty trójwarstwowej

$$k = \frac{\pi^2 \cdot B \cdot c}{l_1^2 \cdot G_c} \quad (10.5)$$

Obliczenia przeprowadzono dla płyty trójwarstwowej, której warstwy są izotropowe o następujących parametrach fizycznych i geometrycznych:

$$\begin{aligned} t &= 0,001 \text{ m} & 2c &= 0,006 \text{ m} \\ E &= 70600 \text{ MPa} & \nu_u &= 0 \\ \nu &= 0,3 & l_1 &= 0,2 \text{ m} \\ & & l_2 &= 0,3 \text{ m} \end{aligned}$$

W tabeli 5 przedstawiono wartości modułu sprężystości poprzecznej rdzenia G_c dla badanych płyt trójwarstwowych oraz odpowiadające mu wartości parametru k i $c E_c / t E$. Rdzenie o takich parametrach możemy zaliczyć do miękkich [95] (por. rozdz. 2.2).

T a b e l a 5

Wartości modułu sprężystości postaciowej rdzenia oraz współczynniki sprężysto-geometryczne płyty trójwarstwowej przyjęte do obliczeń

| | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| G_c [MPa] | 1344,5 | 672 | 336 | 168 | 96 | 67,2 | 57,4 |
| k | 0,0427 | 0,0854 | 0,171 | 0,342 | 0,598 | 0,8546 | 1,0 |
| cE_c/tE | 0,1143 | 0,0571 | 0,0286 | 0,0143 | 0,0082 | 0,0057 | 0,0049 |

W tabeli 6 przedstawiono wyniki otrzymane MES przy zastosowaniu elementu prostokątnego (z dyskretyzacją opartą na siatce 8×8), które porównano z wynikami otrzymanymi:

- I. metodą Ritz'a wg wzorów (10.3) i (10.4) bez uwzględnienia sztywności na zginanie okładzin ($D = 0$),
- II. j.w. przy uwzględnieniu sztywności na zginanie okładzin ($D \neq 0$),
- III. metodą przedstawioną w pracy [84], gdzie uwzględnia się wpływ poprzecznej ściśliwości rdzenia.

Jak widać błąd wartości otrzymanych MES nie przekracza 2,3%, dla szerokiego przedziału zmienności parametru k . Ponadto uzyskano pełną zgodność postaci wyboczenia. Porównanie z pracą [84] pokazuje, że wpływ ściśliwości rdzenia dla takich parametrów płyty jest pomijalny.

Dla parametru k bliskiego jedności błąd wynikający z pominięcia sztywności giętej okładzin przekracza 7%.

Przykład 10.6.

Płyta prostokątna trójwarstwowa swobodnie podparta na brzegach $x_2 = 0$, $x_2 = 1$ (pozostałe brzegi są swobodne) jest ściskana siłą równomiernie rozłożoną jak na rys.11.

Wyznaczyć obciążenie krytyczne i porównać z wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi przedstawionymi w pracy [84].

Parametry fizyczne i geometryczne płyty są następujące:

$$\begin{aligned}
 t &= 0,0005 \text{ m} & 2c &= 0,003; \quad 0,005; \quad 0,010; \quad 0,015 \text{ m} \\
 E &= 68694,79 \text{ MPa} & G_c &= 25,162 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

T a b e l a 6

Wartości obciążenia krytycznego płyty prostokątnej trójwarstwowej ściskanej siłą równomiernie rozłożoną otrzymane metodą Ritza, wg [84] oraz metodą elementów skończonych dla różnych wartości parametru sprężysto-geometrycznego k

| k | metoda Ritza (D=0) | | | metoda Ritza (D≠0) | | | [84] (D≠0) | | | MES (8x8), (D≠0) | | | $\frac{ p_{kr}^{IV} - p_{kr}^{II} }{p_{kr}^{II}}$ | $\frac{ p_{kr}^I - p_{kr}^{II} }{p_{kr}^{II}}$ |
|--------|----------------------|-------|-------|-------------------------|-------|-------|--------------------------|-------|-------|-------------------------|-------|-------|---|--|
| | p_{kr}^I [kN/m] | n_1 | n_2 | p_{kr}^{II} [kN/m] | n_1 | n_2 | p_{kr}^{III} [kN/m] | n_1 | n_2 | p_{kr}^{IV} [kN/m] | n_1 | n_2 | x100% | x100% |
| 0,0427 | 1820 | 1 | 2 | 1834 | 1 | 2 | 1832 | 1 | 2 | | | | | 0,76 |
| 0,0854 | 1645 | 1 | 2 | 1659 | 1 | 2 | 1658 | 1 | 2 | 1696 | 1 | 2 | 2,23 | 0,84 |
| 0,1710 | 1380 | 1 | 2 | 1394 | 1 | 2 | 1393 | 1 | 2 | 1420 | 1 | 2 | 1,87 | 1,00 |
| 0,3420 | 1044 | 1 | 2 | 1058 | 1 | 2 | 1057 | 1 | 2 | 1072 | 1 | 2 | 1,32 | 1,32 |
| 0,5980 | 734 | 1 | 3 | 754 | 1 | 3 | 753 | 1 | 3 | 768 | 1 | 3 | 1,86 | 2,65 |
| 0,8546 | 546 | 1 | 5 | 576 | 1 | 3 | 575 | 1 | 3 | 583 | 1 | 3 | 1,22 | 5,21 |
| 1,0 | 469 | 1 | >30 | 506 | 1 | 4 | 505 | 1 | 4 | | | | | 7,31 |

$$\begin{aligned} \gamma &= 0,3 \\ l_1 &= 0,185 \text{ m} \\ l_2 &= 0,285 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\gamma_c = 0,17$$

Rozwiązanie

W obliczeniach metodą elementów skończonych zastosowano element prostokątny trójwarstwowy opisany w rozdz.7.2.

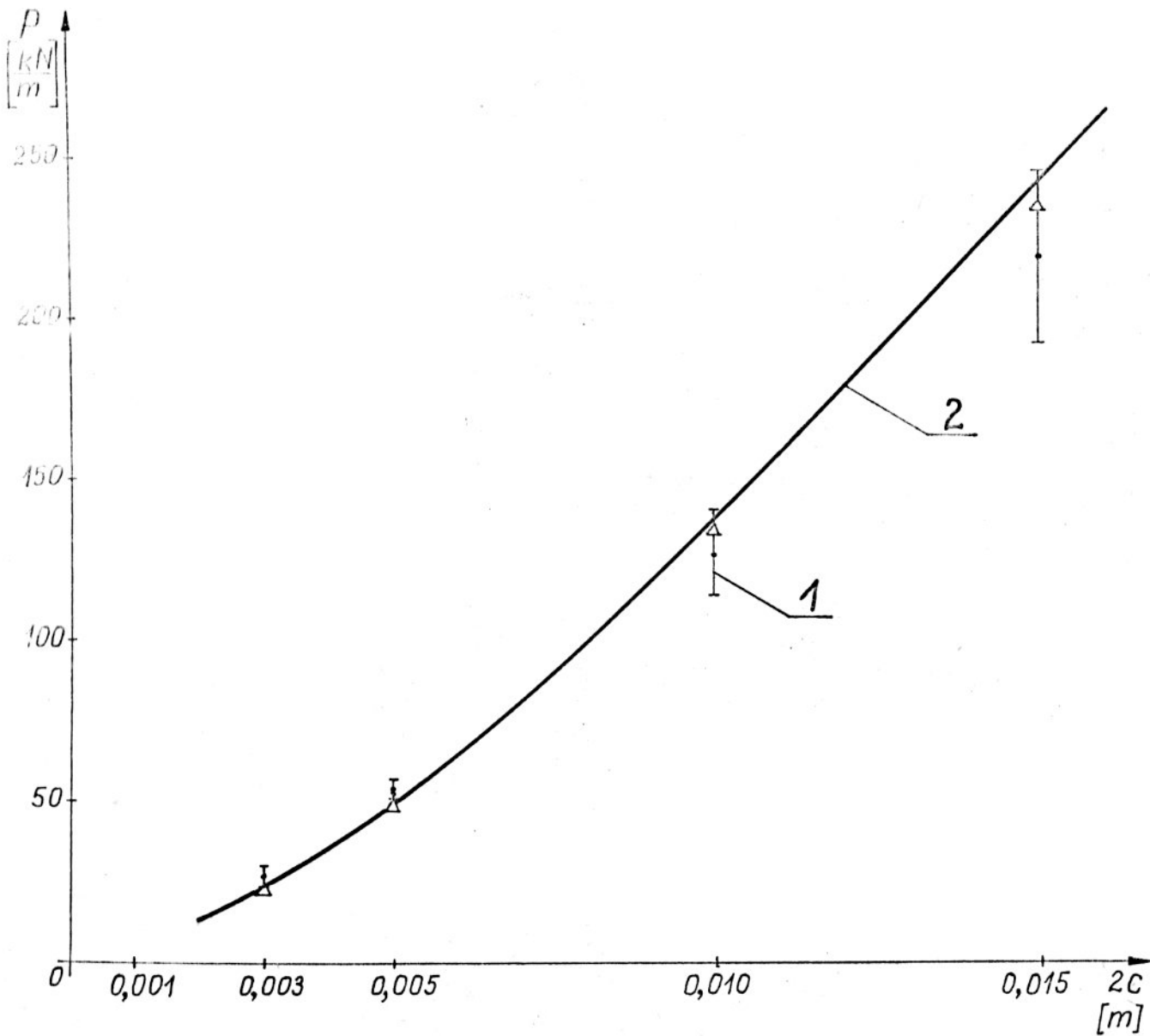
Wyniki przedstawiono w tab.7 i na rys.12 dla symetrycznej i asymetrycznej postaci wyboczenia względem poziomej osi symetrii (rys.11), przy dyskretyzacji opartej na ciatce (8 x 12).

W celu porównania przedstawiono wyniki uzyskane z doświadczenia [84]. Wartość P_d jest średnią arytmetyczną obciążenia krytycznego z serii pomiarów, a δ^* jest odchyleniem standardowym.

T a b e l a 7

Wartości obciążenia krytycznego płyty prostokątnej trójwarstwowej ściskanej siłą równomiernie rozłożoną otrzymane w doświadczeniach i teoretycznie wg [84] oraz metodą elementów skończonych dla różnych wartości grubości rdzenia $2c$

| 2c | [84] | | MES (8 x 12) | | |
|-------|---------------|------------|--------------|---------|---------|
| | doświadczenie | | teoria | sym. | asym. |
| | P_d | δ^* | P_t | P_s | P_a |
| m | kN/m | kN/m | kN/m | kN/m | kN/m |
| 0,003 | 26,514 | 3,3 | 23,120 | 22,350 | 55,023 |
| 0,005 | 53,759 | 2,9 | 49,580 | 48,032 | 99,861 |
| 0,010 | 125,886 | 13,6 | 136,969 | 132,860 | 219,528 |
| 0,015 | 217,284 | 26,6 | 240,372 | 233,506 | 342,670 |



Rys.12. Wykres obciążenia krytycznego płyty prostokątnej trójwarstwowej ściskanej siłą równomiernie rozłożoną w zależności od grubości rdzenia $2c$:

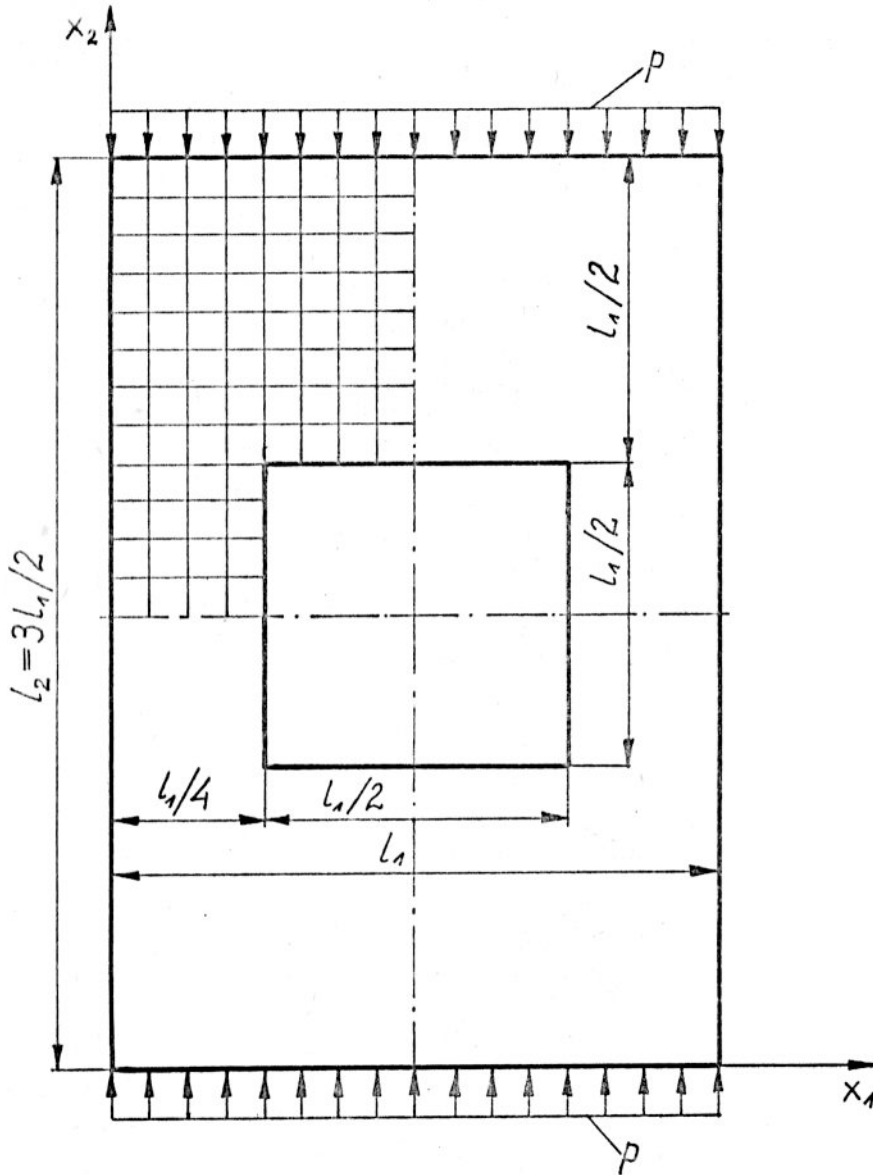
1 - z doświadczenia [84],

2 - z teorii [84],

Δ - MES (8 x 12)

Przykład 10.7.

Płyta prostokątna cienka z otworem kwadratowym (rys.13) jest obciążona siłą ściskającą równomiernie rozłożoną na brzegach $x_2 = 0$ i $x_2 = l_2$ o intensywności $p_0 = 1$ kN/m. Parametry fizyczne i geometryczne są następujące:



Rys.13. Płyta prostokątna z kwadratowym otworem obciążona siłą ściskającą równomiernie rozłożoną, z przyjętym sposobem dyskretyzacji (16 x 24)

$$\begin{array}{ll}
 t = 0,001 \text{ m} & l_1 = 0,2 \text{ m} \\
 E = 70534 \text{ MPa} & l_2 = 0,3 \text{ m} \\
 \nu = 0,3 &
 \end{array}$$

Rozwiązać dwuwymiarowe zadanie teorii sprężystości oraz obliczyć obciążenie krytyczne dla płyty swobodnie podpartej na brzegu zewnętrznym (brzeg wewnętrzny swobodny).

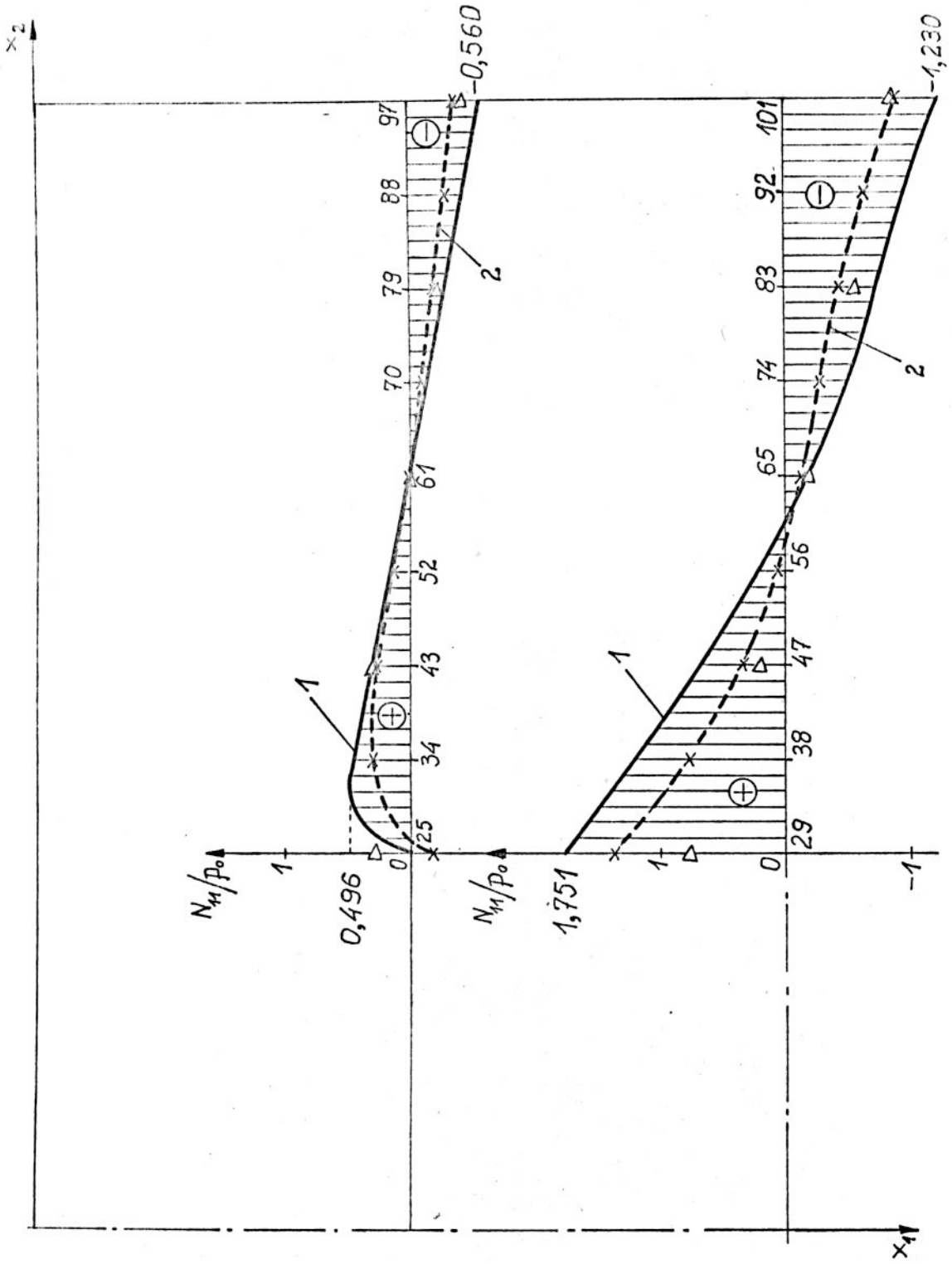
Rozwiązanie

Dwuwymiarowe zadanie rozwiązano metodą elementów skończonych przy zastosowaniu elementu prostokątnego opisanego w rozdz.7.1 z 12 stopniami swobody. Ze względu na symetrię uwzględniono tylko 1/4 część płyty pokazaną na rys.13. Otrzymane wyniki przedstawiono na wykresach składowych stanu naprężenia $N_{\alpha\beta}$ w wybranych przekrojach płyty (rys.14) oraz (tab.8). Obliczenia przeprowadzono przy różnej gęstości podziału płyty, opartej na siatkach (4 x 6), (8 x 12) i (16 x 24). Dla porównania przedstawiono wyniki otrzymane metodą różnic skończonych [19] przy siatce (24 x 36), dla składowych N_{11} i N_{22} i przy siatce (8 x 12) dla N_{12} . Widać wyraźną zgodność charakteru zmian odpowiednich składowych stanu naprężenia, a istniejące różnice ilościowe wynikają ze stosunkowo grubego podziału obszaru na elementy. Pełny obraz rozkładu naprężeń przedstawiono w postaci planów warstwicznych (zob. plany warstwiczne rys.26 w zał.).

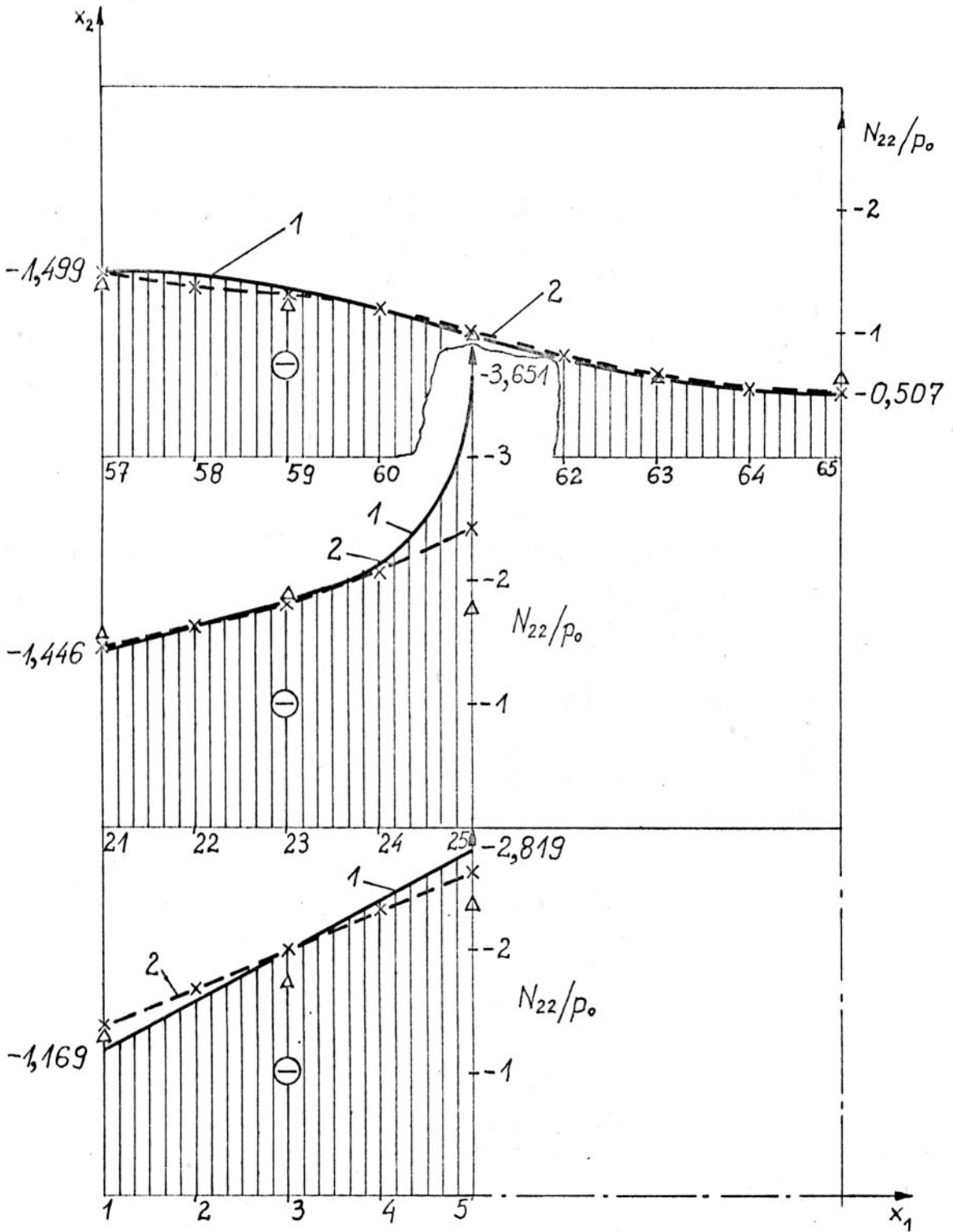
Obciążenie krytyczne obliczono MES przy zastosowaniu elementu płytowego prostokątnego (por. rozdz.7.2). Ze względu na symetrię rozważano 1/4 część płyty badając symetryczne i asymetryczne postaci wyboczenia względem poziomej osi symetrii. Wyniki obliczeń obciążenia krytycznego dla obu postaci wyboczenia przy różnym stopniu zagęszczenia podziału przedstawiono w tab. 9.

Wartość minimalną obciążenia krytycznego otrzymano dla asymetrycznej postaci wyboczenia (por. plan warstwiczny rys.33 w zał.), tzn. podobnie jak dla płyty bez otworu (por. przykład 10.1).

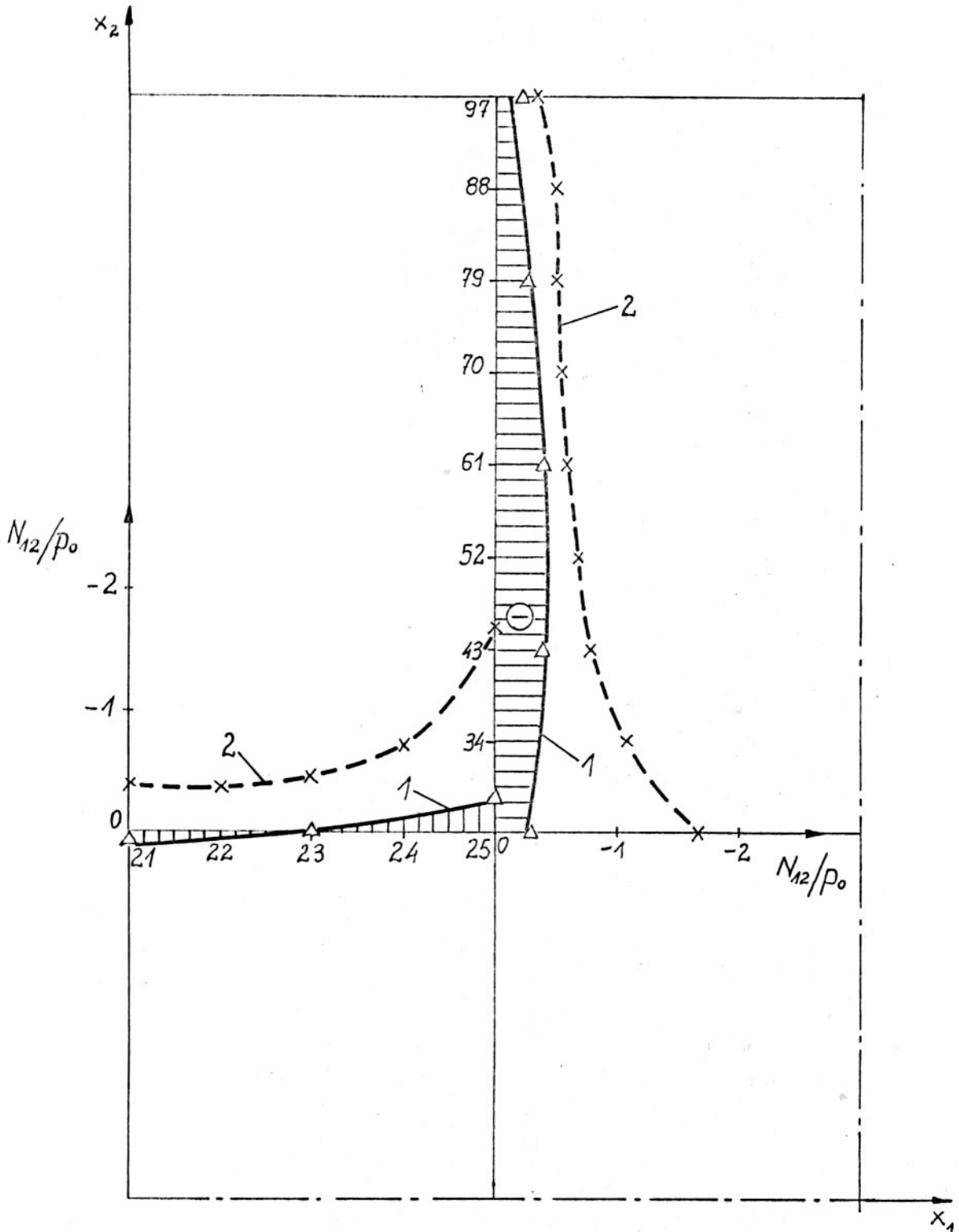
Współczynnik k^* oznacza stosunek obciążenia krytycznego dla płyty z otworem obliczonego metodą elementów skończonych (p_{kr}^{MES}) do obciążenia krytycznego dla płyty bez otworu obliczonego wg wzoru 10.1 (p_{kr}^{bo}). Wartość tego współczynnika otrzymana MRS [19] tab.9 różni się o około 1,2%. Wyniki obliczeń tego typu płyt przedstawiono również w pracach [69, 72], gdzie dla tych samych parametrów otrzymano $k^* = 0,667$. Różnica około 12-15 % wynika stąd, że w obliczeniach wg modelu ciągłego (por. rozdz.2.1) płyty z otworem nie uwzględnia się niejednorodności dokrytycznego stanu naprężeń. Sposób ten nie pozwala między innymi uchwycić lokalnego charakteru wyboczenia płyty z otworem.



Rys. 14a.



Rys. 14b.



Rys. 14c.

Rys. 14. Wykresy parametru naprężeń jednostkowych $N_{\alpha\beta}/p_0$ w wybranych przekrojach płyty prostokątnej z otworem:

1 - MRS (24 x 36) [19],

2 - MES (16 x 24),

Δ - MES (8 x 12) element trójkątny (patrz uwaga pod tabelą 8a i 8c)

T a b e l a 8a

Wartości parametru naprężeń jednostkowych $N_{\alpha\beta}/p_0$ w wybranych przekrojach rys.14 otrzymanych MES i MRS przy różnych sposobach dyskretyzacji

| Nr węzła | N_{11}/p_0 | | | | | | |
|----------|------------------|----------------------------|----------|---------|-------------------------------|---------|---------|
| | MES el.trójk. | MES element prostokątny | | | MRS [19] siatka kwadratowa | | |
| | 8 x 12 | 4 x 6 | 8 x 12 | 16 x 24 | 8 x 12 | 16 x 24 | 24 x 36 |
| 25 | 0,2866 | 0,1386 | 0,0395 | -0,1839 | 0,346 | | 0*) |
| 34 | - | - | - | 0,3090 | - | 0,475 | |
| 43 | 0,3110 | - | 0,1973 | 0,2661 | 0,284 | | |
| 52 | - | - | - | 0,1358 | - | | |
| 61 | 0,0121 | -0,06282 | -0,00088 | 0,0138 | 0,015 | | |
| 70 | - | - | - | -0,0977 | - | | |
| 79 | -0,2124 | - | -0,1971 | -0,1982 | -0,235 | | |
| 88 | - | - | - | -0,2891 | - | | |
| 97 | -0,4119 | -0,3452 | -0,3677 | -0,3732 | -0,473 | | -0,560 |
| 29 | 0,7893 | 0,7658 | 1,283 | 1,360 | 1,468 | 1,715 | 1,751 |
| 38 | - | - | | 0,7675 | - | | |
| 47 | 0,2008 | - | 0,2595 | 0,3468 | 0,375 | | |
| 56 | - | - | | 0,0692 | - | | |
| 65 | -0,1886 | -0,06128 | -0,1204 | -0,1171 | -0,123 | | |
| 74 | - | - | | -0,2661 | - | | |
| 83 | -0,5501 | - | -0,3690 | -0,4180 | -0,480 | | |
| 92 | - | - | | -0,6100 | - | | |
| 101 | -0,8351 | -0,5019 | -0,7743 | -0,8936 | -1,014 | -1,187 | -1,230 |

*) w punkcie kątowym nie podano naprężeń N_{11} , lecz wartość punktu przyległego, gdyż w punkcie kątowym napr. N_{11} szybko maleje [19]

T a b e l a 8b

| Nr węzła | N_{22}/p_0 | | | | | | |
|-------------|------------------|----------------------------|--------|---------|-------------------------------|---------|---------|
| | MES el.trójk. | MES element prostokątny | | | MRS [19] siatka kwadratowa | | |
| | 8 x 12 | 4 x 6 | 8 x 12 | 16 x 24 | 8 x 12 | 16 x 24 | 24 x 36 |
| 1 | -1,295 | -1,375 | -1,336 | -1,363 | -1,356 | -1,202 | -1,169 |
| 2 | - | - | - | -1,680 | - | | |
| 3 | -1,716 | - | -1,965 | -2,000 | -1,981 | | |
| 4 | - | - | - | -2,324 | - | | |
| 5 | -2,390 | -2,776 | -2,641 | -2,611 | -2,682 | -2,799 | -2,819 |
| 21 | -1,579 | -1,407 | -1,486 | -1,491 | -1,475 | -1,450 | -1,446 |
| 22 | - | - | - | -1,635 | - | | |
| 23 | -1,888 | - | -1,759 | -1,803 | -1,862 | | |
| 24 | - | - | - | -2,059 | - | | |
| 25 | -1,794 | -1,655 | -1,988 | -2,416 | -2,800 | 3,292 | -3,651 |
| 57 | -1,392 | -1,344 | -1,419 | -1,463 | -1,405 | | -1,499 |
| 58 | - | - | - | -1,384 | - | | |
| 59 | -1,255 | - | -1,315 | -1,318 | -1,303 | | |
| 60 | - | - | - | -1,213 | - | | |
| 61 | -1,006 | -1,101 | -1,063 | -1,044 | -1,053 | | |
| 62 | - | - | - | -0,840 | - | | |
| 63 | -0,687 | - | -0,668 | -0,664 | -0,668 | | |
| 64 | - | - | - | -0,557 | - | | |
| 65 | -0,648 | -0,531 | -0,531 | -0,524 | -0,545 | | -0,507 |

| Nr węzła | N_{12}/p_0 | | | | |
|-------------|----------------------|----------------------------|--------|---------|---|
| | MES el. trójkątny | MES element prostokątny | | | MRS [19] ^{*)} siatka kwadrat. |
| | 8 x 12 | 4 x 6 | 8 x 12 | 16 x 24 | 8 x 12 |
| 21 | 0,0958 | -0,378 | -0,394 | -0,397 | - |
| 22 | - | - | - | -0,386 | 0,0547 |
| 23 | -0,0203 | - | -0,480 | -0,462 | - |
| 24 | - | - | - | -0,709 | -0,141 |
| 25 | -0,286 | -0,826 | -1,196 | -1,653 | - |
| 34 | - | - | - | -1,085 | -0,347 |
| 43 | -0,382 | - | -0,763 | -0,785 | - |
| 52 | - | - | - | -0,674 | -0,421 |
| 61 | -0,362 | -0,479 | -0,487 | -0,581 | - |
| 70 | - | - | - | -0,523 | -0,346 |
| 79 | -0,246 | - | -0,481 | -0,478 | - |
| 88 | - | - | - | -0,492 | -0,183 |
| 97 | -0,184 | -0,0697 | -0,222 | -0,316 | - |

*) w cytowanej pracy nie podano naprężeń N_{12}/p_0 , wartości podane tutaj w tabelicy autor obliczył na podstawie funkcji naprężeń, którą podano w pracy [19] jedynie dla siatki (8 x 12)

T a b e l a 9

Wartości obciążenia krytycznego dla symetrycznej i asymetrycznej postaci wyboczenia płyty prostokątnej cienkiej z kwadratowym otworem w zależności od sposobu dyskretyzacji

| Dyskretyzacja | sym. | | asym. | | k^* MRS [19] |
|---|-------------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------------|-------------------|
| | P_{kr}^{MES} [N/m] | $k^* = P_{kr}^{MES}/P_{kr}^{bo}$ | P_{kr}^{MES} [N/m] | $k^* = P_{kr}^{MES}/P_{kr}^{bo}$ | |
| 4 x 6 | 3669 | 0,530 | 3827 | 0,553 | |
| 8 x 12 | 4751 | 0,687 | 4049 | 0,585 | 0,578 |
| 16 x 24 | 4746 | 0,686 | 4122 | 0,596 | |
| $P_{kr}^{bo} = 6917 \text{ N/m}$ wg wzoru 10.1 dla $n_1 = 1, n_2 = 2$ | | | | | |

Przykład 10.8.

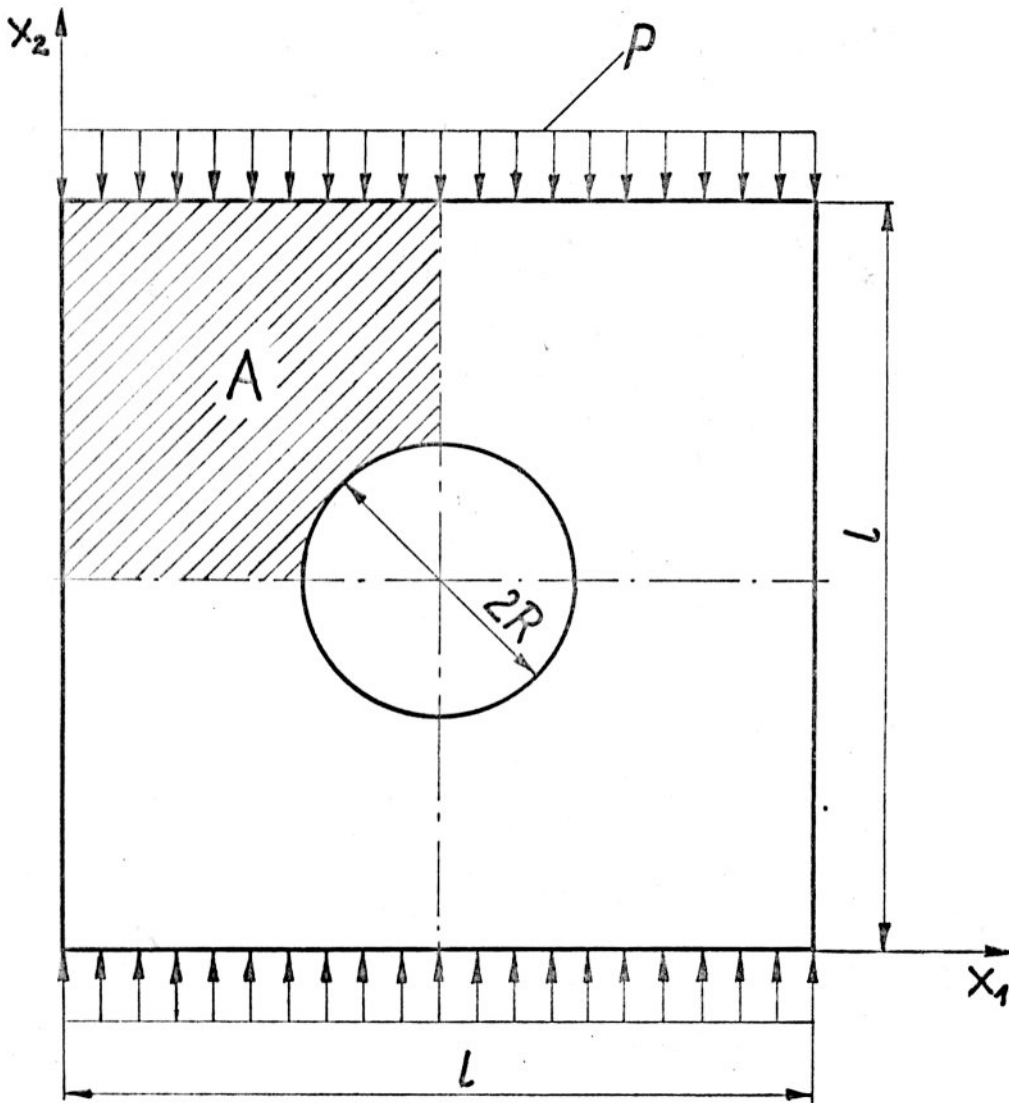
Płyta kwadratowa jednowarstwowa cienka ($l_1 = l_2$) jest obciążona siłą ściskającą:

- równomiernie rozłożoną na brzegach $x_2 = 0$ i $x_2 = l_2$ lub
- zapewniającą równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów.

W środku płyty znajduje się kołowy otwór o średnicy $2R/l = 0,2, 0,4, 0,6$ (rys.15). Rozwiązać płaski stan naprężeń oraz obliczyć obciążenie krytyczne płyty swobodnie podpartej ($E = 70,6 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $t = 0,001 \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$, $R = 0; 0,1; 0,2; 0,3 \text{ m}$).

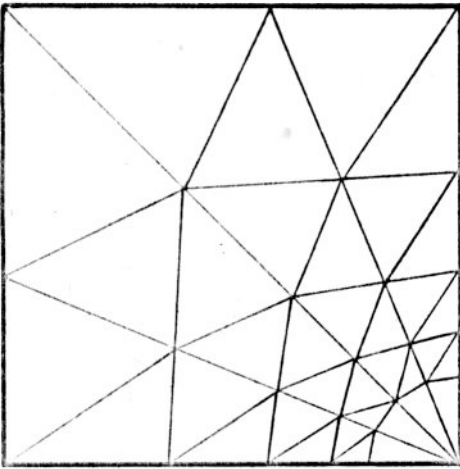
Dyskretyzację przeprowadzono tak jak pokazuje rys.16 (por. [33]). Rozkład naprężeń $N_{\alpha\beta}$ w obszarze płyty przedstawiono na planach warstwicznych odpowiednio

- rys. 27-29, załącznik
- rys. 30-32, załącznik.

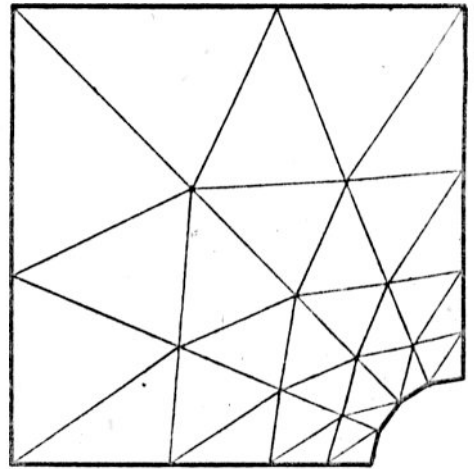


Rys.15. Płyta kwadratowa z kołowym otworem obciążona siłą ściskającą równomiernie rozłożoną
 A - obszar płyty przyjęty do obliczeń

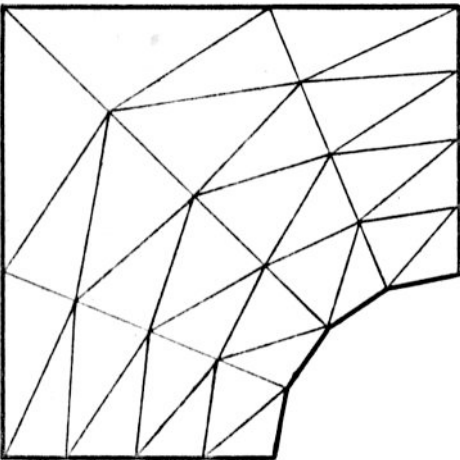
Na rys.17, w tabeli 10 przedstawiono wartości parametru naprężenia $N_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta}/p_0$ odniesione do obciążenia zewnętrznego w przekrojach symetrii płyty dla przypadku a) i na rys.18, w tabeli 11 dla przypadku b). W obliczeniach zastosowano element trójkątny przedstawiony w rozdziale 8.



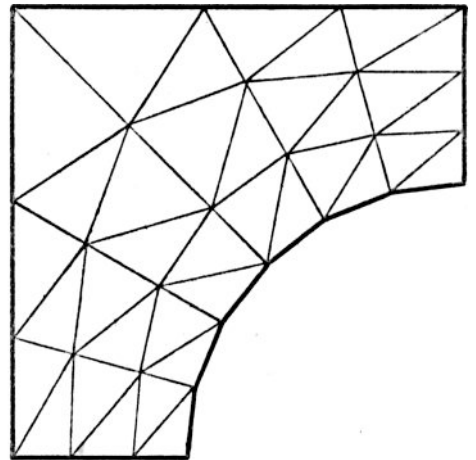
a. bez otworu



b. $2R/l=0,2$



c. $2R/l=0,4$



d. $2R/l=0,6$

Rys.16. Sposób dyskretyzacji płyty kwadratowej z kołowym otworem

T a b e l a 10

Wartości parametru naprężeń jednostkowych $N_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta}/p_0$ w przekrojach symetrii rys.17 dla płyty kwadratowej z kołowym otworem obciążonej siłą ściskającą równomiernie rozłożoną

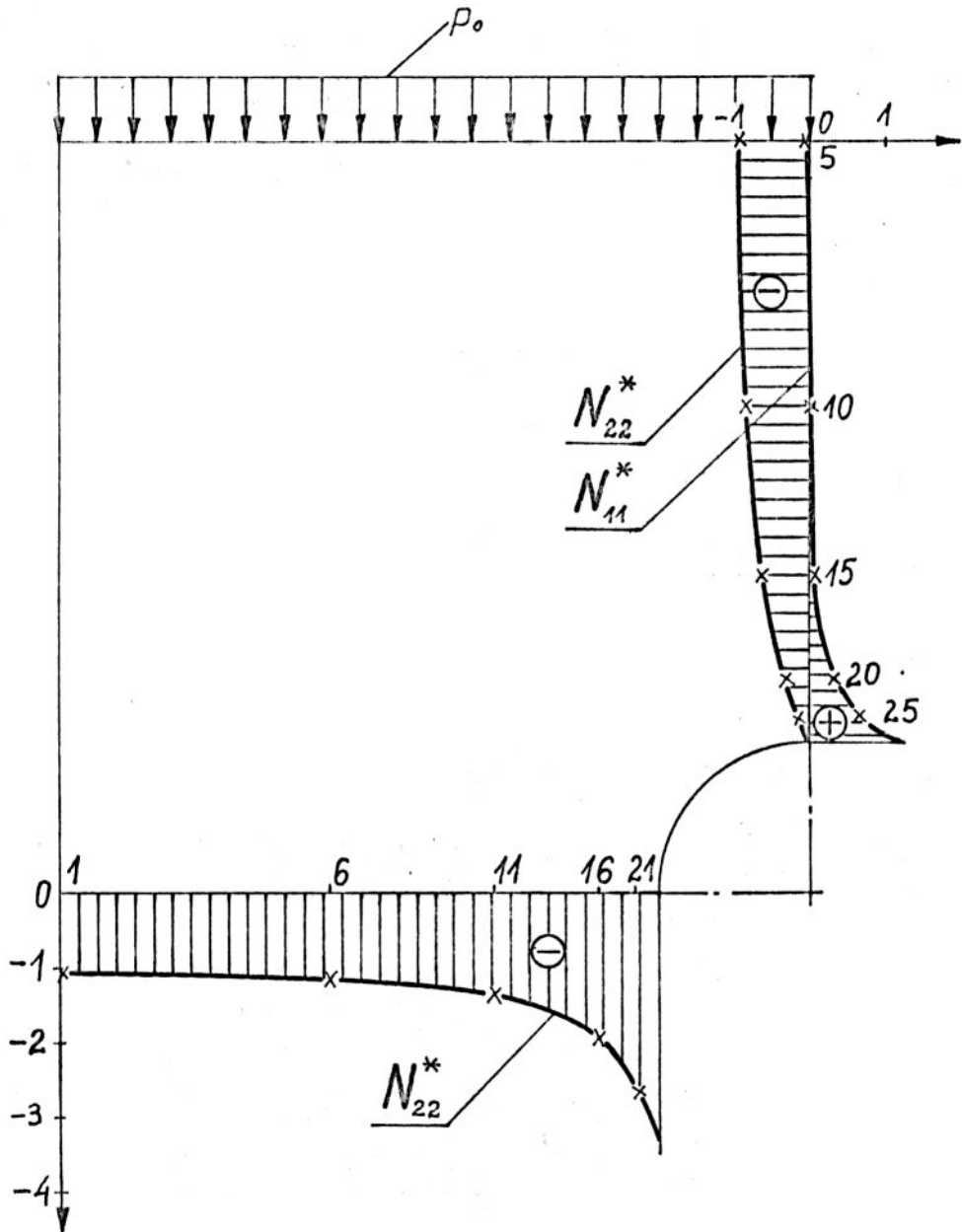
| 2R/l = 0,2 | | | 2R/l = 0,4 | | | 2R/l = 0,6 | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Nr węzła | N_{11}^* | N_{22}^* | Nr węzła | N_{11}^* | N_{22}^* | Nr węzła | N_{11}^* | N_{22}^* |
| 1 | | -1,0224 | 1 | | -0,8931 | 1 | | -0,3158 |
| 6 | | -1,1296 | 6 | | -1,1730 | 2 | | -2,0355 |
| 11 | | -1,3428 | 11 | | -1,6074 | 3 | | -4,5100 |
| 16 | | -1,9151 | 16 | | -2,4671 | 4 | | -6,8210 |
| 21 | | -2,6920 | 21 | | -3,5672 | | | |
| 5 | -0,08185 | -0,9730 | 5 | -0,5267 | -0,9881 | 25 | -2,0282 | -0,9716 |
| 10 | -0,02286 | -0,8780 | 10 | -0,2642 | -0,8951 | 26 | -0,2805 | -0,6732 |
| 15 | 0,04166 | -0,6456 | 15 | 0,0545 | -0,6535 | 27 | 1,9863 | -0,2599 |
| 20 | 0,3002 | -0,3082 | 20 | 0,6179 | -0,3072 | 28 | 3,9842 | -0,3233 |
| 25 | 0,6672 | -0,1941 | 25 | 1,2921 | -0,2323 | | | |

Naprężenia w węzłach przyjęto jako średnią arytmetyczną wartości naprężeń z elementów przylegających do danego węzła.

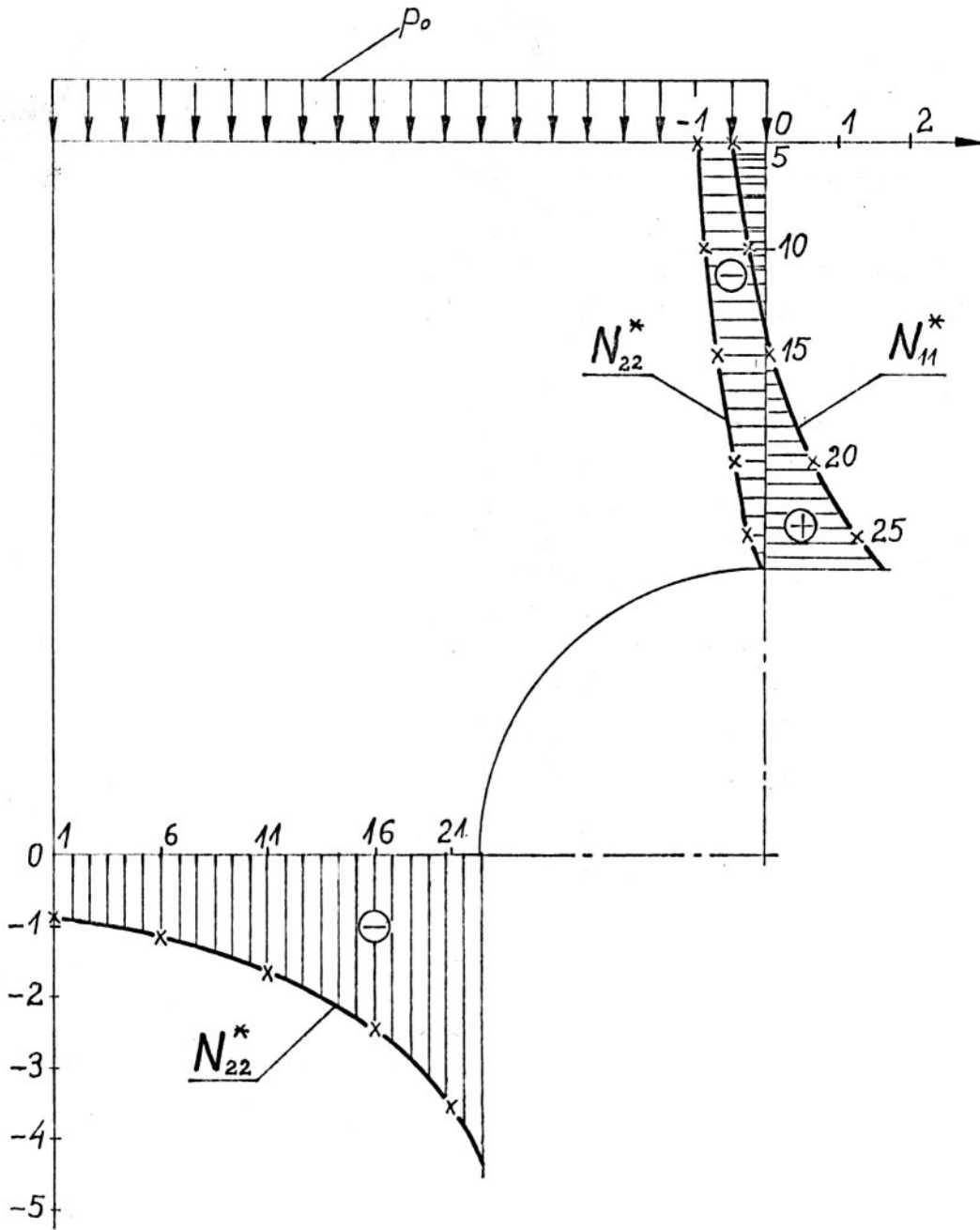
Wartość parametru obciążenia krytycznego dla płyty z otworem do wartości parametru obciążenia krytycznego dla płyty bez otworu $k^* = C_{kr}/C_{kr}^{bo}$ przedstawiono w tabeli 12 i 13 oraz na wykresach rys.19 i 20 odpowiednio dla przypadku obciążenia a i b. Dla porównania przedstawiono wyniki otrzymane w pracach [39, 43, 45, 48, 57, 78, 87, 102]. Dla przypadku b) całkowite obciążenie zewnętrzne obliczono wg wzoru:

$$p_0 = \frac{1}{l} \int_0^l p(x_1) dx_1 \quad (10.6)$$

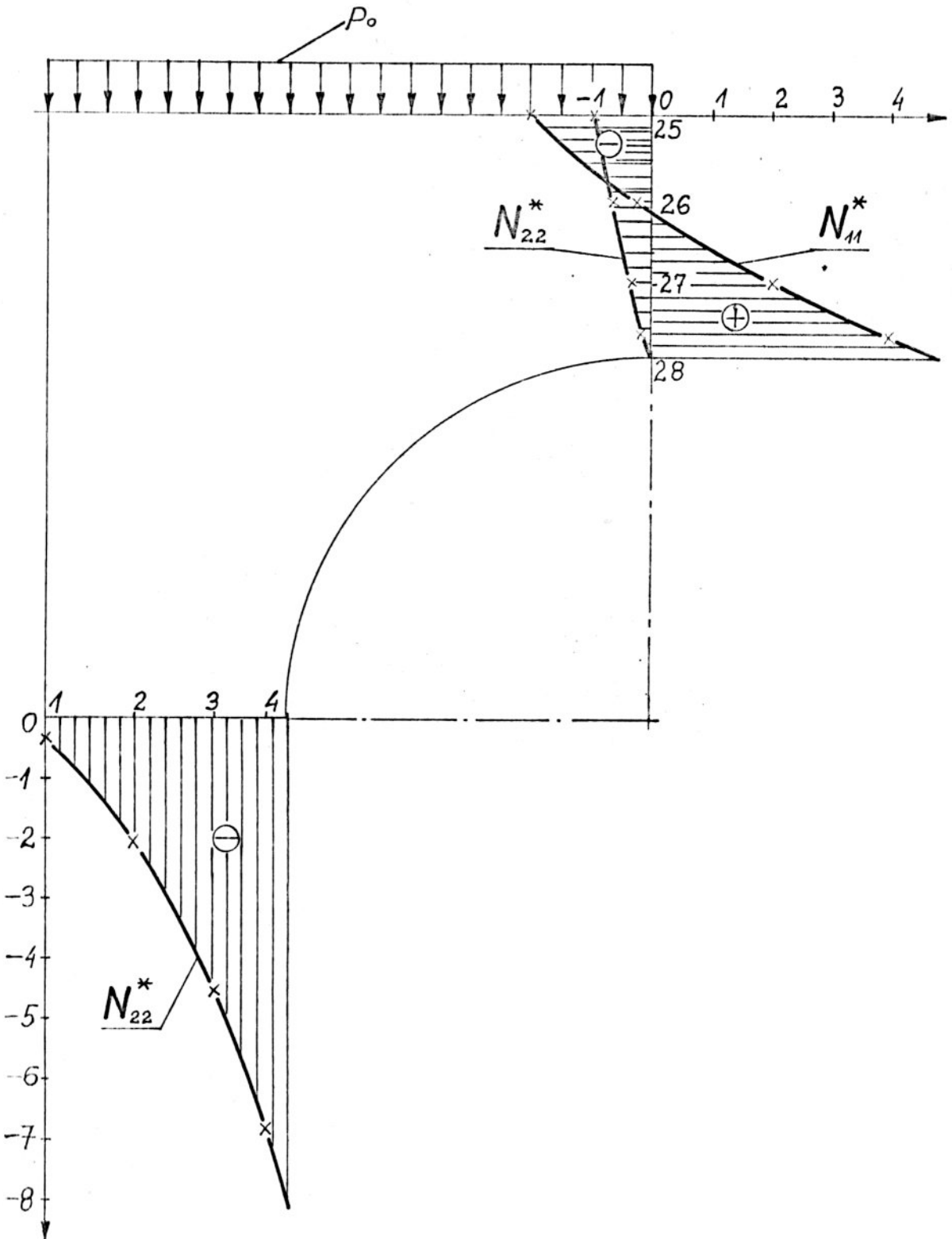
gdzie: $p(x_1)$ jest obciążeniem rozłożonym zapewniającym równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów.



Rys.17a.



Rys. 17b.



Rys.17c.

Rys.17. Wykres parametru naprężeń jednostkowych $N_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta}/P_0$ dla płyty kwadratowej z kołowym otworem $2R/l = 0,2; 0,4; 0,6$ obciążonej siłą ściskającą równomiernie rozłożoną

T a b e l a 11

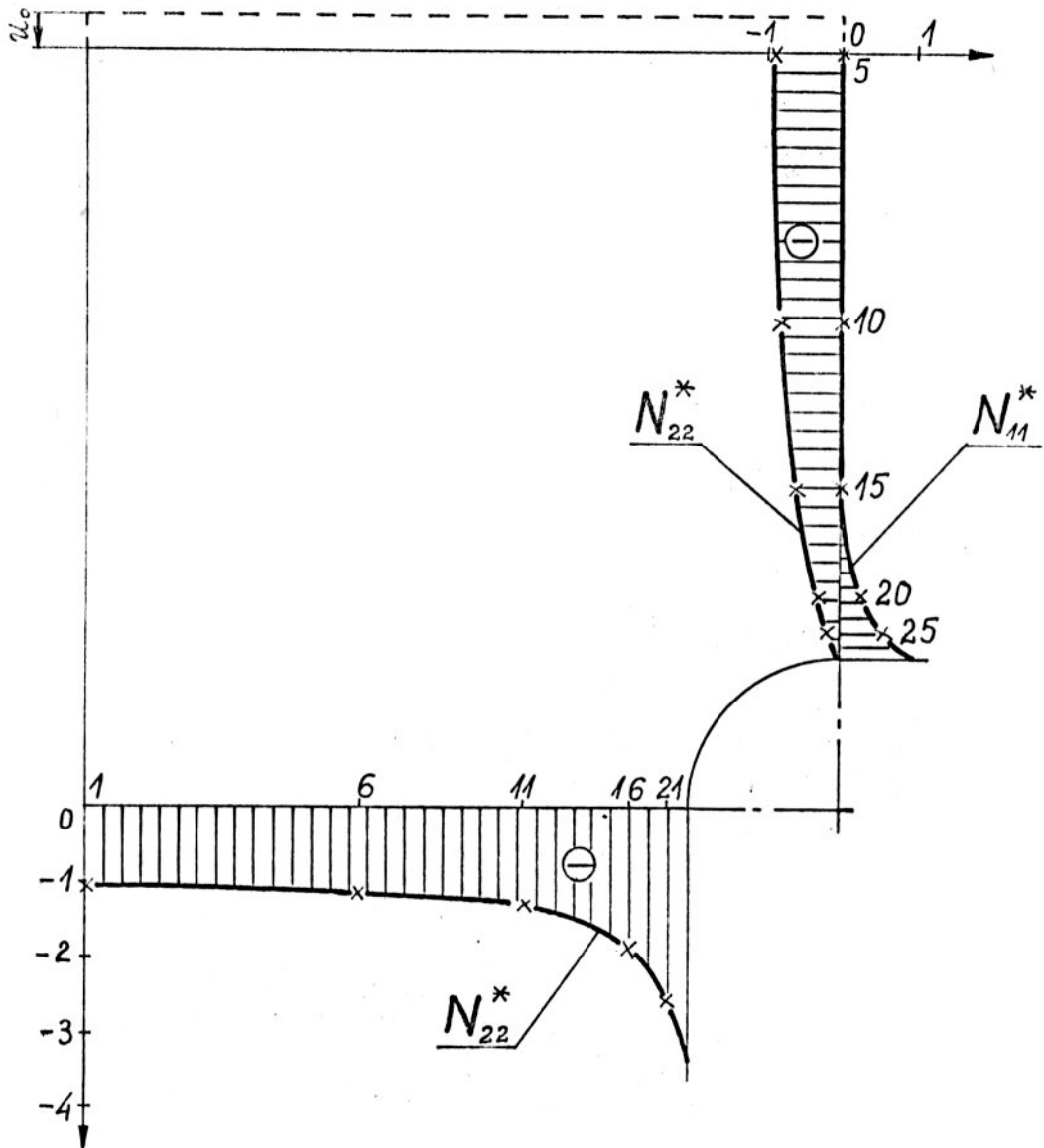
Wartości parametru naprężeń jednostkowych $N_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta}/p_0$ w przekrojach symetrii rys.18 dla płyty kwadratowej z kołowym otworem obciążonej siłą ściskającą zapewniającą równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów

| 2R/l = 0,2 | | | 2R/l = 0,4 | | | 2R/l = 0,6 | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Nr węzła | N_{11}^* | N_{22}^* | Nr węzła | N_{11}^* | N_{22}^* | Nr węzła | N_{11}^* | N_{22}^* |
| 1 | | 1,0676 | 1 | | -1,2503 | 1 | | -1,7646 |
| 6 | | 1,1291 | 6 | | -1,3608 | 2 | | -2,2506 |
| 11 | | 1,3048 | 11 | | -1,5639 | 3 | | -3,1164 |
| 16 | | 1,8348 | 16 | | -2,1082 | 4 | | -4,0706 |
| 21 | | 2,5649 | 21 | | -2,8878 | | | |
| 5 | -0,0400 | -0,9014 | 5 | -0,1306 | -0,6918 | 25 | -0,1914 | -0,1104 |
| 10 | -0,0364 | -0,8138 | 10 | -0,0935 | -0,5672 | 26 | -0,0679 | -0,0151 |
| 15 | 0,0011 | -0,6091 | 15 | -0,0253 | -0,4201 | 27 | 0,2002 | 0,0067 |
| 20 | 0,2228 | -0,2953 | 20 | 0,2131 | -0,2011 | 28 | 0,4962 | -0,0108 |
| 25 | 0,5449 | -0,1866 | 25 | 0,54884 | -0,1437 | | | |

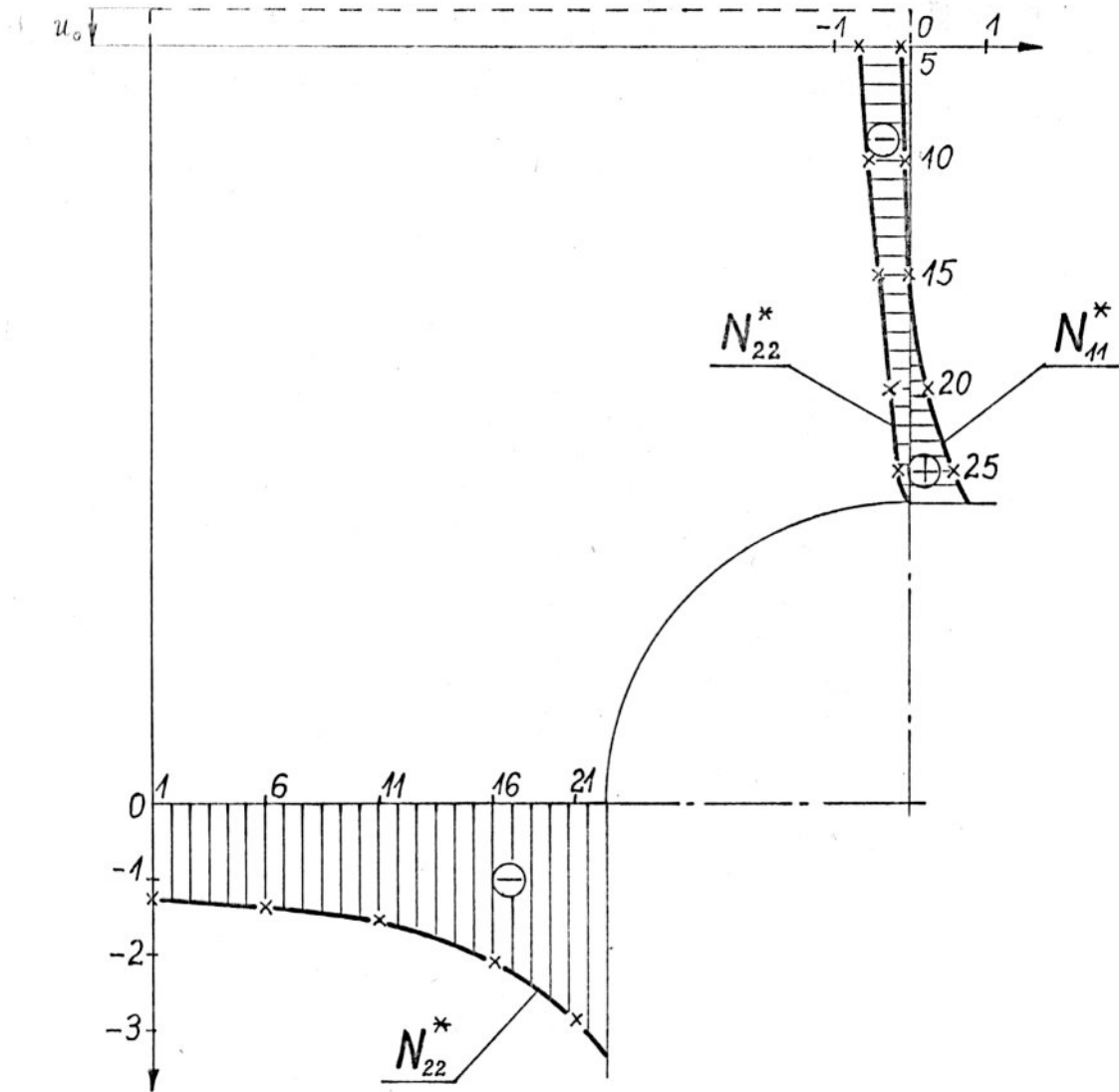
Różnice w parametrze obciążenia k^* w porównaniu z pracami [39, 78] dla obu przypadków obciążenia wynoszą maksymalnie około 15%.

Dla płyty bez otworu różnica ta wynika ze stosunkowo niekorzystnego podziału na elementy (por. tabela 2), a dla płyty z otworem z powodu grubego podziału na elementy.

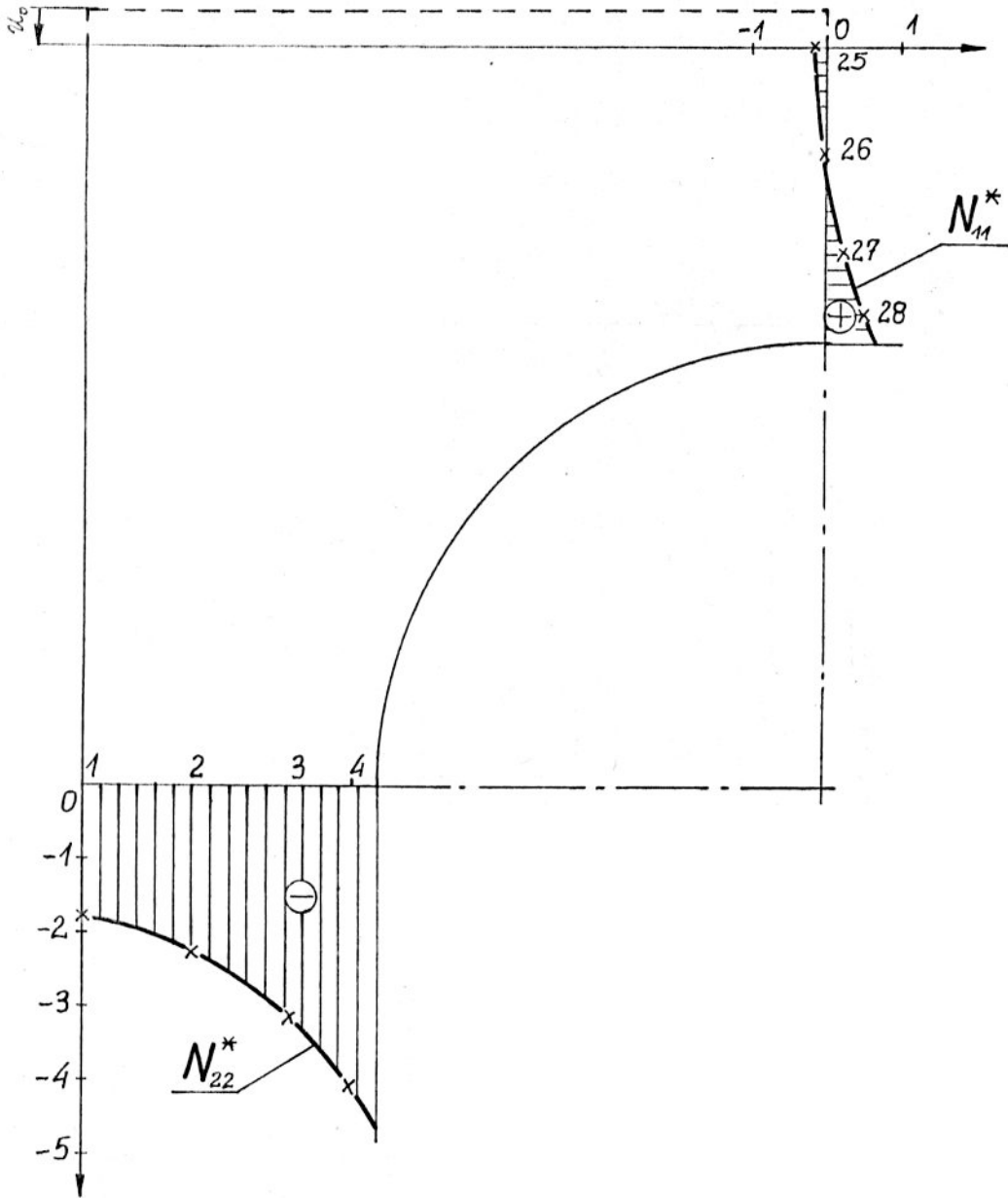
Kształt płyty po wyboczeniu (por. plany warstwiczne rys.34, 35, zał.) zbliżony jest do jednej półfali w kierunku osi x_1 i x_2 . W okolicy otworu można dodatkowo zaobserwować charakterystyczne pofalowanie płyty.



Rys. 18a.

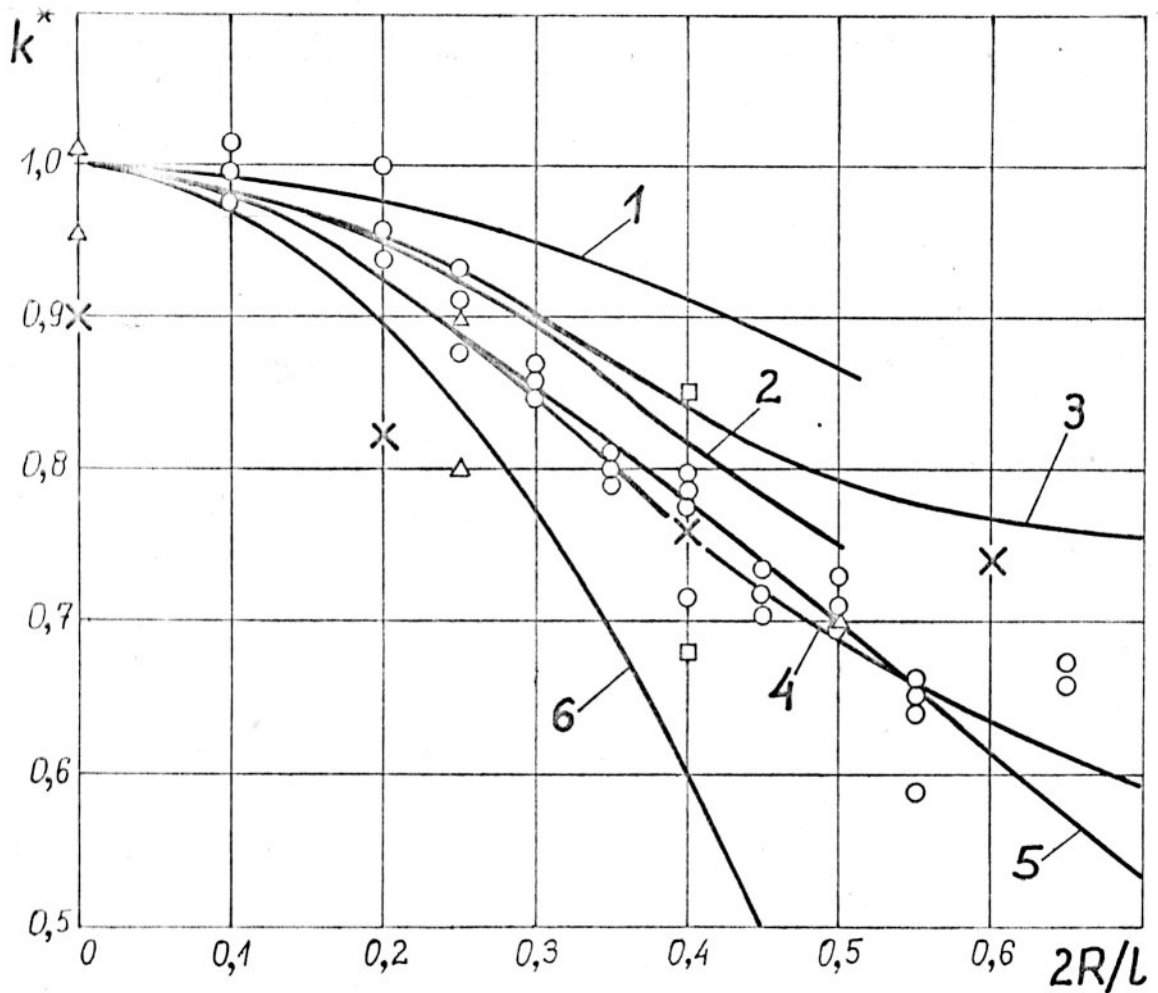


Rys. 18b.

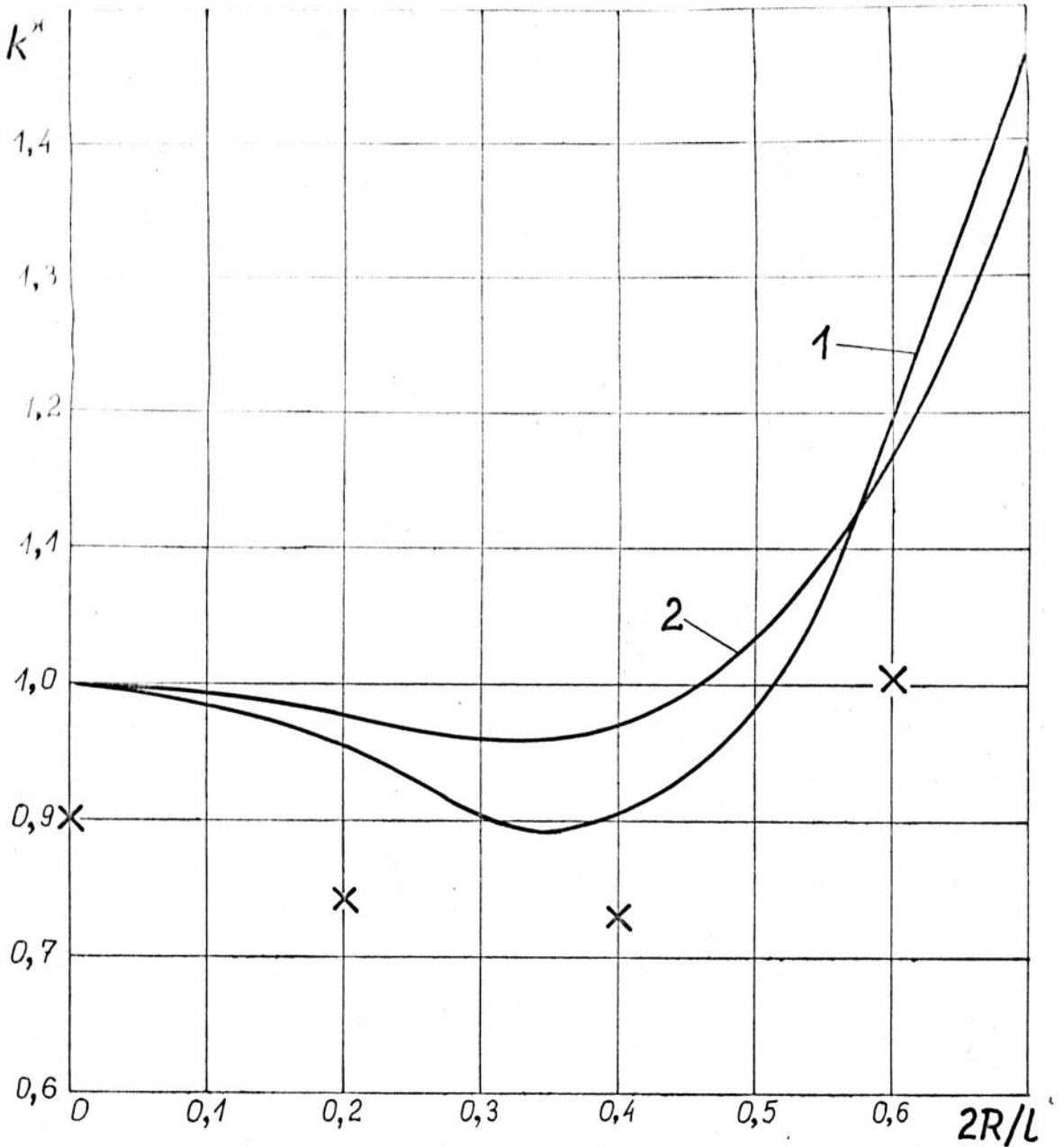


Rys.18c.

Rys.18. Wykres parametru naprężeń jednostkowych $N_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta}/p_0$ dla płyty kwadratowej z kołowym otworem $2R/l = 0,2, 0,4, 0,6$ obciążonej siłą ściskającą zapewniającą równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów



Rys.19. Wykres parametru obciążenia krytycznego $k^* = p_{kr}/p_{kr}^{bo}$ w funkcji parametru wielkości otworu przy obciążeniu płyty siłą ściskającą równomiernie rozłożoną.
 Teoretycznie: 1 - [48], 2 - [43], 3 - [39], 4 - [78],
 5 - [87], 6 - [45],
 x - autor, doświadczalnie: o - [43], \square - [57], Δ - [102]



Rys.20. Wykres parametru obciążenia krytycznego $k^* = p_{kr}/p_{kr}^{bo}$ w funkcji parametru wielkości otworu przy obciążeniu płyty siłą ściskającą zapewniającą równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów:
 1 - [39], 2 - [78], x - autor

Wartości parametru obciążenia krytycznego k^* w zależności od wielkości otworu otrzymane MES oraz wg [78] i [39] przy obciążeniu płyty siłą ściskającą równomiernie rozłożoną

| 2R/1 | sym. | | asym. | | k^* [78] | $\frac{k^*[78] - k_{\min}^*}{k^*[78]} \times 100\%$ | k^* [39] | $\frac{k^*[39] - k_{\min}^*}{k^*[39]} \times 100\%$ |
|------|----------------|------------------------------------|----------------|------------------------------------|---------------|---|---------------|---|
| | C_{kr}^{MES} | $k^* = C_{kr}^{MES} / C_{kr}^{bo}$ | C_{kr}^{MES} | $k^* = C_{kr}^{MES} / C_{kr}^{bo}$ | | | | |
| 0 | 3,59 | 0,90 | 5,78 | 1,44 | 1,0 | 10,0 | 1,0 | 10,0 |
| 0,2 | 3,28 | 0,82 | 5,89 | 1,47 | 0,92 | 10,9 | 0,95 | 13,7 |
| 0,4 | 3,02 | 0,76 | 5,66 | 1,42 | 0,76 | 0,0 | 0,84 | 9,5 |
| 0,6 | 2,97 | 0,74 | 4,38 | 1,09 | 0,64 | 15,6 | 0,77 | 3,9 |

$$C_{kr}^{bo} = 4 \quad \text{dla} \quad n_2 = 1 \quad (\text{wg wzoru 10.1})$$

$$C_{kr}^{bo} = 6,25 \quad \text{dla} \quad n_2 = 2$$

T a b e l a 13

Wartości parametru obciążenia krytycznego k^* w zależności od wielkości otworu otrzymane MES dla symetrycznej i asymetrycznej postaci wyboczenia oraz wg [78] i [39] przy obciążeniu płyty siłą ściskającą zapewniającą równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów

| 2R/1 | sym. | | asym. | | k^* [78] | $\frac{k^*[78]-k_{\min}}{k^*[78]}$ x 100% | k^* [39] | $\frac{k^*[39]-k_{\min}}{k^*[39]}$ x 100% |
|------|----------------|----------------------------------|----------------|----------------------------------|---------------|--|---------------|--|
| | C_{kr}^{MES} | $k^* = C_{kr}^{MES}/C_{kr}^{bo}$ | C_{kr}^{MES} | $k^* = C_{kr}^{MES}/C_{kr}^{bo}$ | | | | |
| 0 | 3,59 | 0,90 | 5,78 | 1,45 | 1,0 | 10,0 | 1,0 | 10,0 |
| 0,2 | 3,34 | 0,84 | 6,06 | 1,52 | 0,98 | 14,3 | 0,95 | 11,6 |
| 0,4 | 3,31 | 0,83 | 6,38 | 1,60 | 0,97 | 14,4 | 0,90 | 7,8 |
| 0,6 | 4,15 | 1,04 | 6,30 | 1,58 | 1,16 | 10,3 | 1,20 | 13,3 |

Dla przypadku b) obciążenie obliczano wg wzoru (10.6).

11. PRZYKŁADY OBLICZEŃ STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ PŁYTY TROJWARSTWOWYCH Z OTWOREM METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Przykład 11.1.

Płyta trójwarstwowa prostokątna ($l_2/l_1 = 3/2$) z otworem kwadratowym jest obciążona siłą równomiernie rozłożoną na brzegach $x_2 = 0$ i $x_2 = l_2$ (rys.13), wolno podparta na zewnętrznym brzegu. Własności fizyczne i geometryczne warstw jak w przykładzie 10.3 i 10.7. Obliczyć obciążenie krytyczne i zbadać postać wyboczenia.

Rozwiązanie

W obliczeniach zastosowano element trójwarstwowy prostokątny opisany w rozdziale 7. Niejednorodny dokrytyczny stan naprężeń przyjęto taki, jaki otrzymano w przykładzie 10.7. Ze względu na symetrię w obliczeniach uwzględniono tylko 1/4 część płyty, analizując symetryczne i asymetryczne postacie wyboczenia względem poziomej osi symetrii. Przyjęto symetryczną postać wyboczenia względem pionowej osi symetrii.

T a b e l a 14

Wartości obciążeń krytycznych ściskanej płyty trójwarstwowej z kwadratowym otworem p_{kr} i bez otworu p_{kr}^{bo}

| Dyskretyzacja | p_{kr} [N/m] | | p_{kr}^{bo} [N/m] | $\frac{p_{kr}^{bo}}{p_{kr}}$ |
|---------------|----------------|--------|---------------------|------------------------------|
| | asym. | sym. | sym. | |
| 4 x 6 | 197640 | 176950 | 591460 | 0,299 |
| 8 x 12 | 163340 | 156370 | 600160 | 0,260 |

Obciążenie krytyczne analizowanej płyty przedstawiono w tabeli 14, które porównano z obciążeniem krytycznym dla płyty bez otworu p_{kr}^{bo} (por. przykład 10.3, tabela 3) przy tej samej dyskretyzacji. Postać wyboczenia przedstawiono na planie warstwicowym rys.36, zał.,

na którym widać, że w wyboczeniu płyty trójwarstwowej bierze udział w zasadzie tylko rejon w okolicy poziomej osi symetrii. Natomiast pozostały obszar, powyżej i poniżej otworu pozostaje niemal płaski. Porównując z postacią wyboczenia płyty jednowarstwowej (plan warstwowy rys. 53, zał.) widać, że charakter wyboczenia obu płyt jest odmienny. W przypadku płyty jednowarstwowej ma charakter globalny.

Przykład 11.2.

Płyta trójwarstwowa prostokątna ($l_2/l_1 = 3/2$) z otworem kwadratowym jest obciążona siłą równomiernie rozłożoną na brzegach $x_2 = 0$ i $x_2 = l_2$ (rys. 13), wolno podparta na całym zewnętrznym brzegu. Własności fizyczne i geometryczne warstw przyjęto jak w przykładzie 10.5. Celem obliczeń jest zbadanie wpływu parametru sprężysto-geometrycznego k płyty trójwarstwowej na obciążenie krytyczne i porównanie z pracą [104], gdzie zadanie to rozwiązano MRS przy siatce (8 x 12).

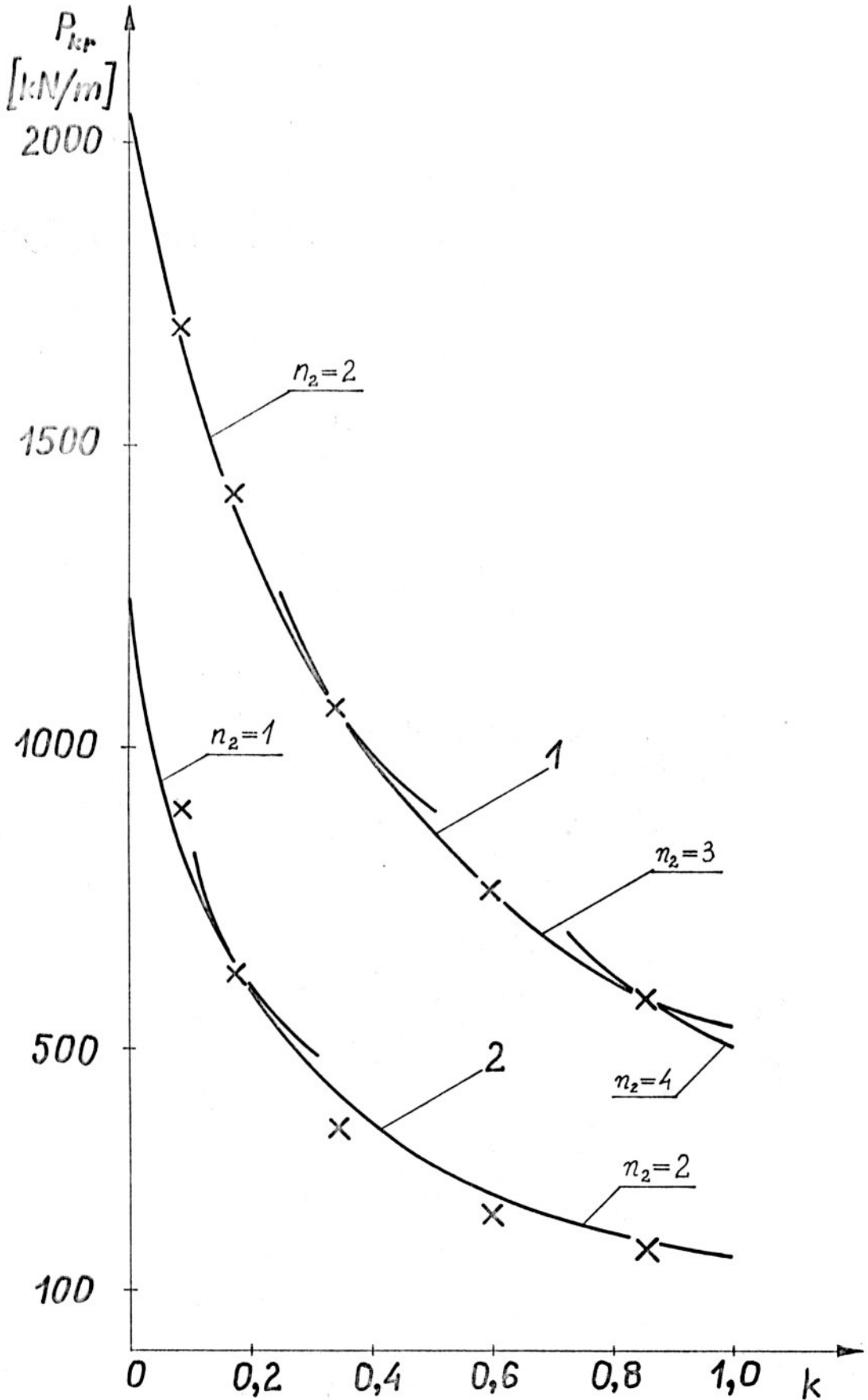
Rozwiązanie

W obliczeniach zastosowano element trójwarstwowy prostokątny opisany w rozdziale 7. Niejednorodny dokrytyczny stan naprężeń rozwiązano w przykładzie 10.7. Dyskretyzację płyty oparto na siatce (8 x 12).

T a b e l a 15

Wartości obciążeń krytycznych i postać wyboczenia ściskanej płyty trójwarstwowej z kwadratowym otworem dla różnych wartości parametru sprężysto-geometrycznego k otrzymane MES i MRS

| k | MES ($D \neq 0$) | | | MRS [104] ($D = 0$) | | | |
|--------|--------------------|------|----------------------|-----------------------|-------|-------|----------------------|
| | P_{kr} [kN/m] | | P_{kr}/P_{kr}^{bo} | P_{kr} [kN/m] | n_1 | n_2 | P_{kr}/P_{kr}^{bo} |
| | asym. | sym. | | | | | |
| 0,0854 | 898 | 938 | 0,529 | 830 | 1 | 1 | 0,480 |
| 0,1710 | 672 | 622 | 0,438 | 640 | 1 | 1 | 0,457 |
| 0,3420 | 404 | 366 | 0,341 | 420 | 1 | 2 | 0,385 |
| 0,5980 | 247 | 226 | 0,294 | 240 | 1 | 2 | 0,316 |
| 0,8546 | 167 | 164 | 0,281 | 190 | 1 | 2 | 0,345 |



Rys.21. Wykres obciążeń krytycznych w funkcji parametru sprężysto-geometrycznego k przy ściskaniu siłą równomiernie rozłożoną
 1 - dla płyty trójwarstwowej bez otworu otrzymany metodą Ritz'a,
 2 - dla płyty trójwarstwowej z kwadratowym otworem otrzymany MRS [104]
 x - wyniki otrzymane przez autora MRS przy siatce podziału (8×12) , (n_2 - oznacza ilość półfal w kierunku osi x_2 ,
 (13))

Wyniki obliczeń obciążenia krytycznego dla symetrycznej i asymetrycznej postaci wyboczenia względem poziomej osi symetrii przedstawiono w tabeli 15 i na rys.21, gdzie dla porównania przedstawiono wyniki z pracy [104]. Maksymalna różnica wyników między obu metodami nie przekracza 14%. (Wartości podane w tabeli 15 dla MRS odczytano z wykresu zamieszczonego w pracy [104], gdzie 1 mm odpowiada 95 kN/m).

Przykład 11.3.

Płyta trójwarstwowa kwadratowa ($l_2 = l_1 = 1$) z centralnie rozmieszczonym otworem kołowym o średnicy $2R/l = 0,2, 0,4$ i $0,6$ (rys.15) obciążona:

- a) siłą równomiernie rozłożoną na brzegach $x_2 = 0$ i $x_2 = 1$,
lub
- b) siłą rozłożoną w sposób zapewniający równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów (tzn. wymuszenie kinematyczne).

Parametry fizyczne i geometryczne warstw przyjęto jak w przykładzie 10.4. Obliczyć obciążenie krytyczne ściskające płytę swobodnie podpartą na całym brzegu zewnętrznym [16].

Rozwiązanie

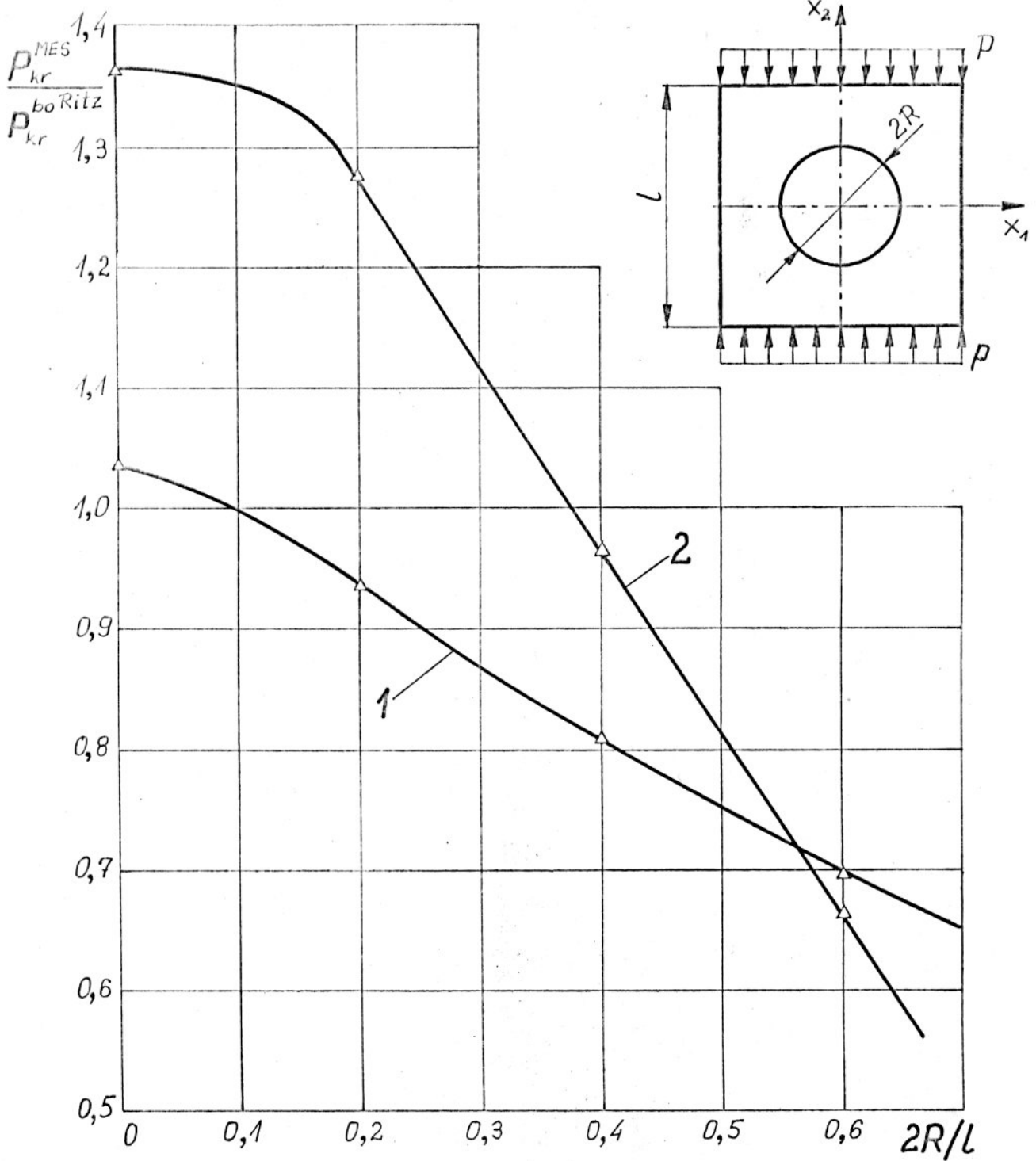
W obliczeniach MES zastosowano element trójkątny trójwarstwowy opisany w rozdziale 8. Dyskretyzację obszaru płyty przedstawiono na rys.16. Niejednorodny dokrytyczny stan naprężeń rozwiązano w przykładzie 10.8. Ze względu na symetrię w obliczeniach uwzględniono tylko 1/4 część płyty. Analizowano symetryczne i asymetryczne postaci wyboczenia względem poziomej osi symetrii.

Wyniki obliczeń obciążenia krytycznego oraz porównanie z obciążeniem krytycznym dla płyty bez otworu ($p_{kr}^{bo} = 63901$ N/m dla $n_1 = n_2 = 1$ wg wzorów 10.3 i 10.4) przedstawiono w tabeli 16 oraz na rys.22 i 23 dla obu postaci wyboczenia odpowiednio dla pierwszego i drugiego przypadku obciążenia. Dokładnie postać wyboczenia przedstawiono na planach warstwicowych odpowiednio rys.37 i 38 w zał. Porównując z postacią wyboczenia płyty jednowarstwowej tutaj nie obserwuje się pofalowania powierzchni w okolicy otworu. Jak widać na rys.22, 23 dla otworu $2R/l \times 0,6$ następuje zmiana postaci wyboczenia z symetrycznej na asymetryczną.

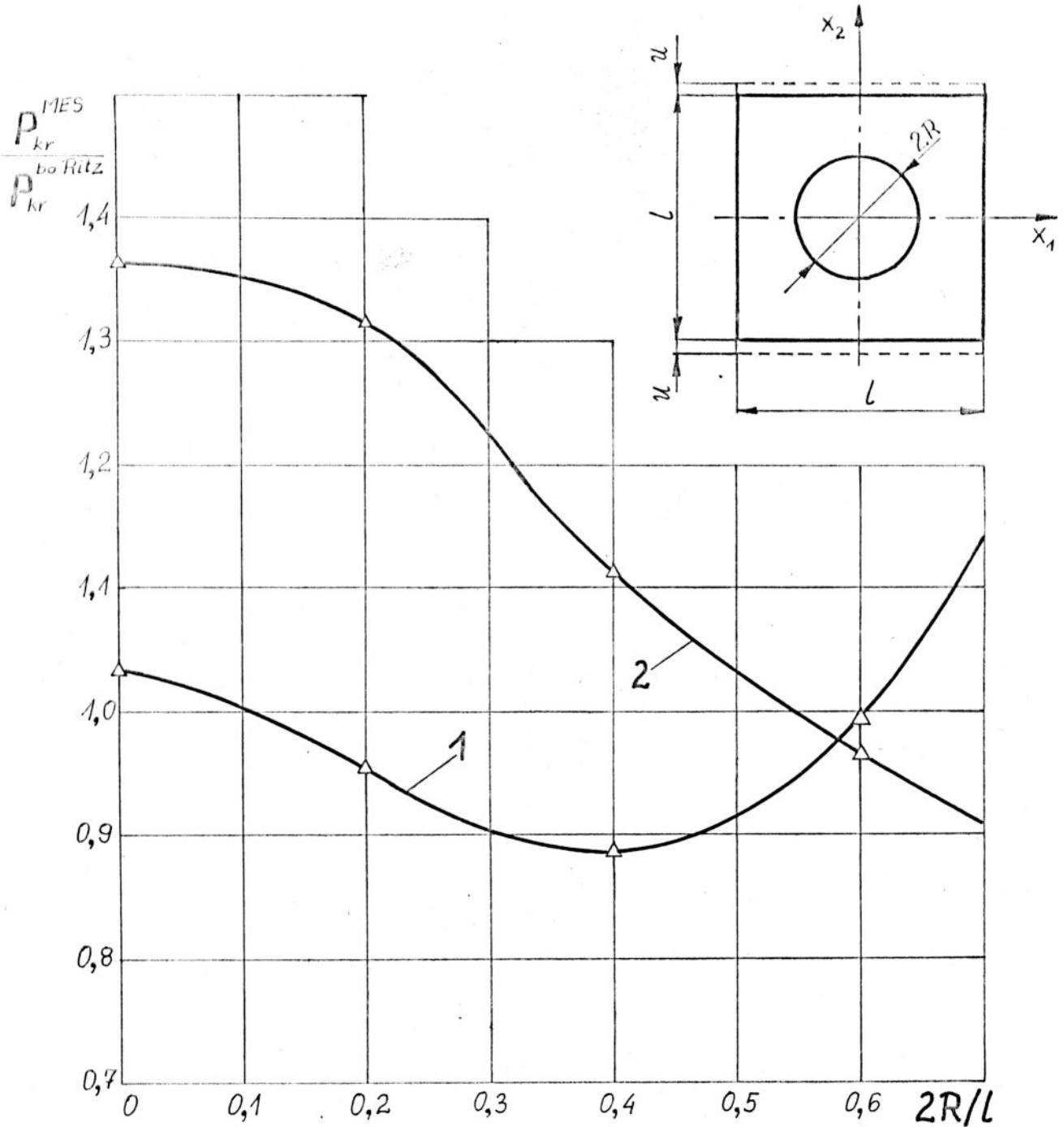
T a b e l a 16

Wartości obciążeń krytycznych ściskanej płyty trójwarstwowej z kołowym otworem w zależności od wielkości otworu dla symetrycznej i asymetrycznej postaci wyboczenia

| 2R/l | a) obciążenie kinetyczne | | | | b) obciążenie kinematyczne | | | |
|------|--------------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| | sym. | | asym. | | sym. | | asym. | |
| | P_{kr}^{MES} [N/m] | P_{kr}^{MES}/P_{kr}^{bo} | P_{kr}^{MES} [N/m] | P_{kr}^{MES}/P_{kr}^{bo} | P_{kr}^{MES} [N/m] | P_{kr}^{MES}/P_{kr}^{bo} | P_{kr}^{MES} [N/m] | P_{kr}^{MES}/P_{kr}^{bo} |
| 0 | 66260 | 1,037 | 88144 | 1,364 | 66260 | 1,037 | 87144 | 1,364 |
| 0,2 | 59827 | 0,936 | 81675 | 1,278 | 60901 | 0,953 | 84110 | 1,316 |
| 0,4 | 51680 | 0,809 | 61600 | 0,964 | 56775 | 0,888 | 71057 | 1,112 |
| 0,6 | 44556 | 0,697 | 42423 | 0,664 | 63527 | 0,994 | 61518 | 0,963 |



Rys.22. Wykres parametru obciążenia krytycznego $\frac{P_{kr}^{MES}}{P_{kr}^{bo Ritz}}$ w funkcji parametru wielkości otworu dla postaci wyboczenia
 1 - symetrycznej względem osi x_1 i x_2 ,
 2 - asymetrycznej względem osi x_1 i symetrycznej względem osi x_2 przy obciążeniu płyty siłą ściskającą równomiernie rozłożoną



Rys.23. Wykres parametru obciążenia krytycznego $\frac{P_{kr}^{MES}}{P_{kr}^{bo Ritz}}$ w funkcji parametru wielkości otworu dla postaci wyboczenia

- 1 - symetrycznej względem osi x_1 i x_2 ,
- 2 - asymetrycznej względem osi x_1 i symetrycznej względem osi x_2 przy obciążeniu płyty trójwarstwowej siłą ściskającą zapewniają równomierne przemieszczenie obciążonych brzegów

12. ANALIZA DOKŁADNOŚCI I WNIOSKI

W pracy przedstawiono analizę zlinearyzowanego, bifurkacyjnego problemu stateczności sprężystej niejednostopólnych prostokątnych płyt trójwarstwowych metodą elementów skończonych. Rozważania ograniczono jedynie do płyt trójwarstwowych cienkich z miękkim rdzeniem. Założono, że materiał warstw jest liniowo-sprężysty do momentu utraty stateczności, tzn. nie uwzględniono na przykład uplastycznienia materiału w miejscach znacznych koncentracji naprężeń oraz nielinowości fizycznej materiału warstw.

Nie uwzględniono również nielinowości odkształceń w płaskim stanie naprężeń, która może mieć istotne znaczenie w pewnych przypadkach [85]. Dla niektórych materiałów stosowanych na rdzenie istotne znaczenie mogą mieć również zjawiska reologiczne [84], których tutaj nie analizowano. Ponadto założono, że płyta jest idealnie płaska do momentu utraty stateczności. W rzeczywistych konstrukcjach zawsze istnieją pewne niedokładności kształtu niejednorodności materiału, które w istotny sposób mogą wpłynąć na nośność danego elementu [15]. Dopiero analiza nieliniowa tak pod względem fizycznym jak i geometrycznym konstrukcji z imperfekcjami, z możliwością uplastycznienia materiału warstw pozwoliłaby dokładniej opisać powyższe zjawiska.

Dlatego przedstawiony zlinearyzowany problem stateczności może mieć zastosowanie tylko wtedy, gdy efekty te nie występują lub wpływ ich na ostateczny wynik jest niewielki. W przeciwnym wypadku otrzymany wynik obarczony jest błędem i może być jedynie oszacowaniem rzeczywistej wartości.

Dokładność metody elementów skończonych, jak wiadomo, zależy od funkcji aproksymujących przemieszczenia wewnątrz elementu (tzw. funkcji kształtu) oraz od stopnia zagęszczenia podziału na elementy. Aby zbieżność wyników do dokładnych była zapewniona przy zagęszczaniu podziału funkcje kształtu muszą spełniać odpowiednie kryteria zbieżności [103].

Zagadnienie stateczności niejednostopólnych płyt jest dwuetapowe (por. rozdz. 2.1), z których każdy rozwiązywany jest za pomocą odmiennych elementów skończonych. Do płaskiego zadania teorii sprężystości zastosowano trójkątne i czworokątne elementy dwuwymiarowe. Przy zagęszczaniu podziału rozwiązanie płaskiego problemu sprężystości przy zastosowaniu tego typu elementów zdąża do ścisłego [103].

Jednak na każdym stopniu zagęszczenia otrzymuje się rozwiązanie przybliżone. Dla całego obszaru przemieszczenia i siły obliczone są z niedomiarem, lecz nie oznacza to, że jest to słuszne dla każdego punktu obszaru [103] (por. również przykład 10.7, tabela 8). Naprężenia w węzłach wyznaczono tutaj przez obliczenie wartości średniej naprężeń elementów sąsiadujących z danym węzłem. W przypadku dużych gradientów naprężeń, przy stosunkowo grubym podziale na elementy otrzymane wyniki mogą znacznie odbiegać od rzeczywistych. Widać to wyraźnie w przykładzie 10.7, rys.14c, że zastosowana siatka elementów trójkątnych jest zbyt rzadka.

Dokładność otrzymanych wyników możemy określić porównując wartości otrzymane z dwóch ostatnich stopni zagęszczenia podziału.

Przy tym zbieżność monotoniczną otrzymamy wtedy, gdy siatka gęściejsza powstaje na bazie siatki grubszej [103]. Błąd otrzymanego rozkładu naprężeń możemy wyznaczyć lokalnie w dowolnym punkcie obszaru (tutaj w węźle):

$$\vartheta_l = \frac{|\sigma_i^m - \sigma_i^{m-1}|}{|\sigma_i^m|} \cdot 100\% \quad (12.1)$$

lub globalnie, licząc średnie odchylenie kwadratowe względne dla całego obszaru lub jego fragmentu

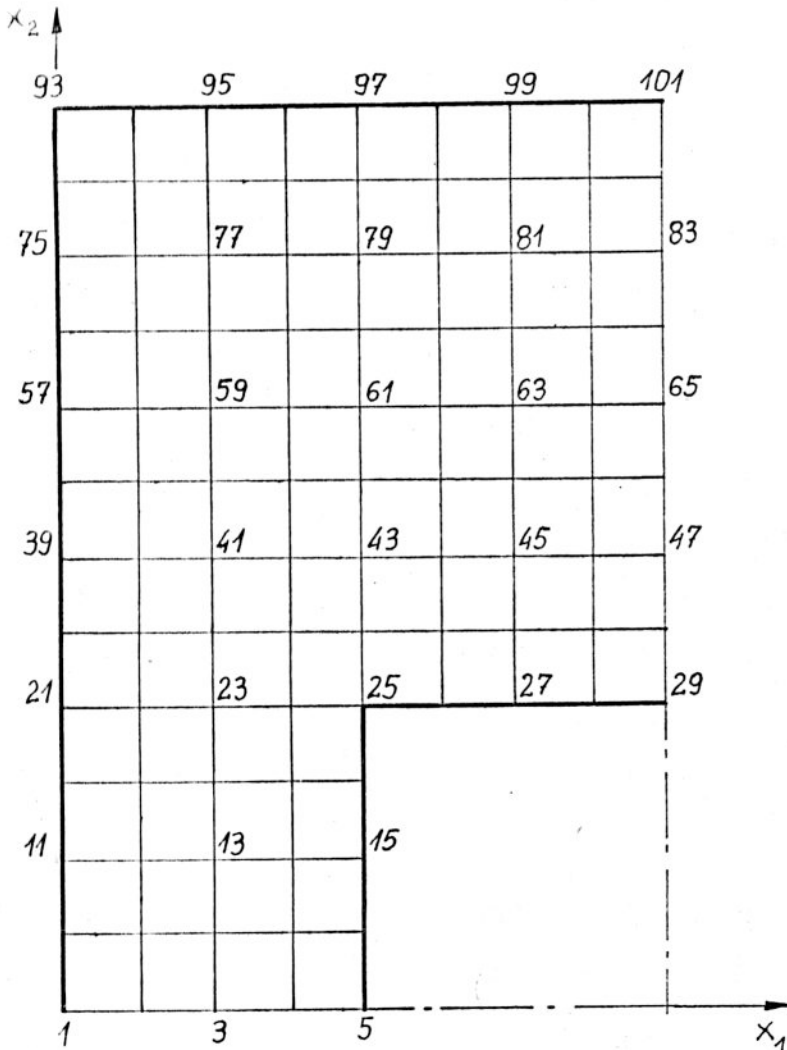
$$\vartheta_g = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma_i^m - \sigma_i^{m-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma_i^m)^2}} \cdot 100\% \quad (12.2)$$

gdzie:

- m - stopień zagęszczenia podziału,
- i - nr węzła siatki grubszej, (m - 1)-szej, (i = 1, n)
- n - ilość węzłów siatki grubszej w analizowanym obszarze,
- σ_i^m - wartość naprężenia w węźle "i" siatki gęściejszej "m",
- σ_i^{m-1} - j.w. dla siatki grubszej (m - 1)-szej.

Dla przykładu obliczono powyższe błędy dla płyty prostokątnej z kwadratowym otworem (por. przykład 10.7). Porównano wyniki otrzymane przy dyskretyzacji opartej na siatce (8 x 12) i (16 x 24) rys.24, tabela 17).

Błąd wyznaczony lokalnie w węźle wg wzoru (12.1) jest bardzo duży szczególnie w okolicach punktów narożnych oraz na brzegu wewnętrznym i zewnętrznym. Dlatego też w celu dokładniejszego wyznaczenia rozkładu naprężeń należałoby w tych obszarach mocniej zagęścić podział na elementy. Błąd wyznaczony za pomocą wzoru (12.1) nie zawsze jest dobrą miarą dokładności np. gdy wartością dokładną w danym punkcie jest zero. I tak w węźle 57 (tabela 17a) dla naprężenia prostopadłego do krawędzi otrzymano błąd $\varphi_1 = 1077\%$, chociaż naprężenie to dla siatki (16 x 24) niewiele różni się już od zera, w porównaniu z jednością.



Rys.24.

Fragment płyty prostokątnej z otworem kwadratowym przyjęty do obliczeń z zaznaczoną siatką podziału (16 x 24) i numerami węzłów pokrywającymi się z węzłami siatki (8 x 12)

T a b e l a 17a

Wartości parametru naprężeń jednostkowych N_{11}/p_0 w węzłach siatki (8 x 12) i (16 x 24) dla płyty prostokątnej z kwadratowym otworem ściskanej siłą równomiernie rozłożoną z podaniem różnicy względnej obliczonej lokalnie i globalnie

| Nr węzła i | N_{11}/p_0 | | $\frac{ N_{11}^{*3} - N_{11}^{*2} }{ N_{11}^{*3} } \times 100\%$ | $(N_{11}^{*3})^2$ | $(N_{11}^{*3} - N_{11}^{*2})^2$ |
|---------------|---------------------------|----------------------------|--|-------------------|---------------------------------|
| | N_{11}^{*2} (8 x 12) | N_{11}^{*3} (16 x 24) | | | |
| 1 | 0,0798 | 0,0412 | 93,7 | 0,001697 | 0,001490 |
| 3 | 0,0124 | -0,0072 | 272,2 | 0,000052 | 0,000384 |
| 5 | -0,0692 | -0,0436 | 58,7 | 0,001901 | 0,000655 |
| 11 | 0,0314 | 0,0253 | 24,1 | 0,000640 | 0,000037 |
| 13 | -0,0470 | -0,0603 | 22,1 | 0,003636 | 0,000177 |
| 15 | -0,2768 | -0,0518 | 434,4 | 0,002683 | 0,050625 |
| 21 | 0,0317 | 0,0135 | 134,8 | 0,000182 | 0,000331 |
| 23 | -0,0214 | -0,0465 | 54,0 | 0,002162 | 0,000630 |
| 25 | 0,0395 | -0,1839 | 121,5 | 0,033819 | 0,049908 |
| 27 | 0,9989 | 1,2869 | 22,4 | 1,656112 | 0,082944 |
| 29 | 1,2832 | 1,3600 | 5,65 | 1,849600 | 0,005898 |
| 39 | 0,0779 | 0,0177 | 340,1 | 0,000313 | 0,003624 |
| 41 | 0,1687 | 0,1607 | 4,98 | 0,025824 | 0,000064 |
| 43 | 0,1973 | 0,2661 | 25,9 | 0,070809 | 0,004733 |
| 45 | 0,2698 | 0,2599 | 3,8 | 0,067548 | 0,000098 |
| 47 | 0,2595 | 0,3468 | 25,2 | 0,120270 | 0,007621 |
| 57 | 0,0127 | -0,0013 | 1076,9 | 0,000002 | 0,000196 |
| 59 | 0,0248 | 0,0433 | 42,7 | 0,001875 | 0,000342 |
| 61 | -0,0009 | 0,0138 | 106,5 | 0,000190 | 0,000216 |
| 63 | -0,0631 | -0,0777 | 18,8 | 0,006037 | 0,000213 |
| 65 | -0,1204 | -0,1171 | 2,82 | 0,013712 | 0,000011 |
| 75 | -0,0426 | -0,0161 | 164,6 | 0,000259 | 0,000702 |
| 77 | -0,0818 | -0,0662 | 23,6 | 0,004382 | 0,000243 |
| 79 | -0,1971 | -0,1982 | 0,55 | 0,039283 | 0,000001 |
| 81 | -0,3145 | -0,3504 | 10,2 | 0,122780 | 0,001289 |
| 83 | -0,3690 | -0,4180 | 11,7 | 0,174724 | 0,002401 |
| 93 | -0,0231 | 0,0335 | 169,0 | 0,001122 | 0,003204 |
| 95 | -0,1078 | -0,0352 | 206,3 | 0,001239 | 0,005271 |
| 97 | -0,3677 | -0,3731 | 1,45 | 0,139204 | 0,000029 |
| 99 | -0,6547 | -0,7380 | 11,3 | 0,544644 | 0,006939 |
| 101 | -0,7743 | -0,8936 | 13,4 | 0,798521 | 0,014232 |
| | | | \sum | 5,685222 | 0,244508 |
| | | | $\sqrt{\sum}$ | 2,3844 | 0,4945 |
| | | | ξ_g | 20,7% | |

T a b e l a 17b

Wartości parametru naprężeń jednostkowych N_{22}/p_0 w węzłach siatki (8 x 12) i (16 x 24) dla płyty prostokątnej z kwadratowym otworem ściskanej siłą równomiernie rozłożoną z podaniem różnicy względnej obliczonej lokalnie i globalnie

| Nr węzła i | N_{22}/p_0 | | $\frac{ N_{122}^{*3} - N_{122}^{*2} }{ N_{122}^{*3} } \times 100\%$ | $(N_{122}^{*3})^2$ | $(N_{122}^{*3} - N_{122}^{*2})^2$ |
|------------------|----------------------------|-----------------------------|---|--------------------|-----------------------------------|
| | N_{122}^{*2} (8 x 12) | N_{122}^{*3} (16 x 24) | | | |
| 1 | -1,3357 | -1,3635 | 2,04 | 1,859132 | 0,000773 |
| 3 | -1,9046 | -2,0005 | 1,79 | 4,002000 | 0,001289 |
| 5 | -2,6409 | -2,6110 | 1,15 | 6,817321 | 0,000894 |
| 11 | -1,3901 | -1,3752 | 1,08 | 1,891175 | 0,000222 |
| 13 | -1,9111 | -1,9435 | 1,67 | 3,777192 | 0,001050 |
| 15 | -2,9371 | -2,7308 | 7,55 | 7,457269 | 0,042560 |
| 21 | -1,4864 | -1,4910 | 0,31 | 2,223081 | 0,000021 |
| 23 | -1,7589 | -1,8030 | 2,45 | 3,250809 | 0,001945 |
| 25 | -1,9877 | -2,4163 | 17,7 | 5,838506 | 0,183698 |
| 27 | -0,0221 | 0,0617 | 135,8 | 0,003807 | 0,007022 |
| 29 | 0,0829 | 0,0643 | 28,9 | 0,004134 | 0,000346 |
| 39 | -1,5175 | -1,6028 | 5,32 | 2,568968 | 0,007276 |
| 41 | -1,5192 | -1,5796 | 3,92 | 2,495136 | 0,003648 |
| 43 | -1,2341 | -1,2083 | 2,14 | 1,459989 | 0,000666 |
| 45 | -0,3667 | -0,3384 | 8,36 | 0,114515 | 0,000801 |
| 47 | -0,2697 | -0,2061 | 30,9 | 0,042477 | 0,004045 |
| 57 | -1,4189 | -1,4634 | 3,04 | 2,141540 | 0,001930 |
| 59 | -1,3154 | -1,3181 | 0,205 | 1,737388 | 0,000007 |
| 61 | -1,0629 | -1,0441 | 1,80 | 1,090145 | 0,000353 |
| 63 | -0,6678 | -0,6636 | 0,63 | 0,440365 | 0,000018 |
| 65 | -0,5313 | -0,5243 | 1,34 | 0,274890 | 0,000049 |
| 75 | -1,2187 | -1,1963 | 1,87 | 1,431134 | 0,000502 |
| 77 | -1,1363 | -1,1194 | 1,51 | 1,253056 | 0,000286 |
| 79 | -1,0152 | -1,0033 | 1,19 | 1,006611 | 0,000142 |
| 81 | -0,8589 | -0,8745 | 1,78 | 0,764750 | 0,000243 |
| 83 | -0,7859 | -0,8182 | 3,95 | 0,669451 | 0,001043 |
| 93 | -1,1027 | -1,0294 | 7,12 | 1,059664 | 0,005373 |
| 95 | -1,0578 | -1,0089 | 4,85 | 1,017879 | 0,002391 |
| 97 | -1,0282 | -1,0115 | 1,65 | 1,023132 | 0,000279 |
| 99 | -1,0013 | -1,0154 | 1,39 | 1,031037 | 0,000199 |
| 101 | -0,9853 | -1,0165 | 3,07 | 1,033272 | 0,000973 |
| | | | \sum_i | 59,779825 | 0,270094 |
| | | | $\sqrt{\sum}$ | 7,7317 | 0,5197 |
| | | | ρ_g | 6,72% | |

Tabela 17c

Wartości parametru naprężeń jednostkowych N_{12}/p_0 w węzłach siatki (8 x 12) i (16 x 24) dla płyty prostokątnej z kwadratowym otworem ściskanej siłą równomiernie rozłożoną z podaniem różnicy względnej obliczonej lokalnie i globalnie

| Nr węzła i | N_{12}/p_0 | | $\frac{ N_{112}^{*2} - N_{112}^{*3} }{ N_{112}^{*3} } \times 100\%$ | $(N_{112}^{*3})^2$ | $(N_{112}^{*3} - N_{112}^{*2})^2$ |
|---------------|----------------------------|-----------------------------|---|--------------------|-----------------------------------|
| | N_{112}^{*2} (8 x 12) | N_{112}^{*3} (16 x 24) | | | |
| 1 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | -0,2337 | -0,2335 | 0,086 | 0,05452 | 0,00000 |
| 13 | -0,2605 | -0,2665 | 2,25 | 0,07102 | 0,00004 |
| 15 | -0,0901 | -0,1920 | 53,1 | 0,03686 | 0,01038 |
| 21 | -0,3943 | -0,3965 | 0,55 | 0,15721 | 0,00000 |
| 23 | -0,4604 | -0,4616 | 4,07 | 0,21308 | 0,00035 |
| 25 | -1,1964 | -1,6527 | 27,6 | 2,73142 | 0,20821 |
| 27 | -0,3672 | -0,4710 | 22,0 | 0,22184 | 0,01077 |
| 29 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| 39 | -0,4277 | -0,4304 | 0,63 | 0,18524 | 0,00001 |
| 41 | -0,5455 | -0,5653 | 3,50 | 0,31956 | 0,00039 |
| 43 | -0,7633 | -0,7848 | 2,74 | 0,61591 | 0,00046 |
| 45 | -0,6294 | -0,5614 | 12,1 | 0,31517 | 0,00462 |
| 47 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| 57 | -0,3922 | -0,3646 | 7,57 | 0,13293 | 0,00076 |
| 59 | -0,5039 | -0,5193 | 2,97 | 0,26967 | 0,00024 |
| 61 | -0,4869 | -0,5812 | 16,2 | 0,33779 | 0,00889 |
| 63 | -0,3425 | -0,3955 | 13,4 | 0,15642 | 0,00281 |
| 65 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| 75 | -0,3525 | -0,3225 | 9,30 | 0,10401 | 0,00090 |
| 77 | -0,4626 | -0,4514 | 2,48 | 0,203762 | 0,000125 |
| 79 | -0,4806 | -0,4783 | 0,48 | 0,228771 | 0,000005 |
| 81 | -0,3066 | -0,3120 | 1,73 | 0,097344 | 0,000029 |
| 83 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| 93 | -0,2436 | -0,3127 | 22,1 | 0,097781 | 0,004775 |
| 95 | -0,2638 | -0,3467 | 23,9 | 0,120201 | 0,006872 |
| 97 | -0,2217 | -0,3167 | 30,0 | 0,100299 | 0,009025 |
| 99 | -0,1223 | -0,1917 | 36,2 | 0,036749 | 0,004816 |
| 101 | 0,0000 | 0,0000 | 0 | 0 | 0 |
| | | | \sum_i | 6,807573 | 0,274494 |
| | | | \sum | 2,6091 | 0,5239 |
| | | | ρ_E | 20,1% | |

W przypadku badania globalnej postaci wyboczenia wydaje się, że bardziej miarodajnym sposobem określenia dokładności rozkładu naprężeń jest wartość otrzymana wg wzoru (12.2). Dla naprężeń ściskających pokrywających się z kierunkiem obciążenia błąd ten wynosi $\delta_g = 6,72\%$. Brak rozwiązania zamkniętego dla tego przypadku nie pozwala w sposób bezwzględny określić błędów otrzymanych wyników. Do rozwiązania właściwego zadania stateczności zastosowano, tzw. niedostosowane elementy płytowe trójkątne i prostokątne w odniesieniu do okładzin. Elementy te nie zapewniają ciągłości odkształceń na krawędziach podziału. Jednak dokładność i zbieżność otrzymywanych wyników w obliczeniach praktycznych jest wystarczająca [103] (por. przykłady). W zagadnieniu stateczności zbieżność monotoniczną otrzymujemy wtedy, gdy siatka gęściejsza powstaje na bazie siatki grubszej oraz gdy postać wyboczenia już nie zmienia się. Dopiero wtedy możemy porównywać wyniki ostatnich dwóch stopni zagęszczania podziału.

W przypadku obszarów wielospójnych, gdy w miarę zagęszczania pojawiają się lokalne postacie wyboczenia należy stosunkowo gęsto dzielić obszar na elementy. Podobnie należy postąpić w przypadku płyt trójwarstwowych ze stosunkowo grubym miękkim rdzeniem (tzn. ze wzrostem parametru k), gdzie podczas wyboczenia pojawia się duża ilość półfal.

W związku z powyższym możemy wysunąć następujące wnioski:

- Opisany trójwarstwowy element skończony może być zastosowany do obliczeń obciążenia krytycznego niejednostopójnych cienkich płyt trójwarstwowych z miękkim rdzeniem ($cE_c/tE < 0,1$), przy nieobecności znacznych koncentracji naprężeń.
- W opisie elementu skończonego uwzględniono sztywność na zginanie okładzin, co ma istotne znaczenie w obliczeniach płyt trójwarstwowych, których parametr sprężysto-geometryczny "k" jest bliski jedności (por. tabela 6).
- Sposób dyskretyzacji ma mniejszy wpływ na wartość obciążenia krytycznego płyt trójwarstwowych w porównaniu z płytami cienkimi jednowarstwowymi (por. tabelę 1 z tabelą 3 oraz tabelę 2 z tabelą 4).
- Przy zagęszczaniu podziału wyniki obciążeń krytycznych są zbieżne dla elementu prostokątnego trójwarstwowego od dołu, a dla elementu trójkątnego - od góry (por. tab.3 i tab.4).

- Dla ściskanej płyty trójwarstwowej kwadratowej z kołowym otworem przy wzroście promienia otworu następuje zmiana postaci wyboczenia z symetrycznej na asymetryczną (przykł. 11.3).
- Ze wzrostem parametru sprężysto-geometrycznego płyty trójwarstwowej k postać wyboczenia płyty prostokątnej z otworem kwadratowym zmienia się z typu globalnego na lokalny, (przykł. 11.2).
- Dokładność otrzymywanych wyników w porównaniu z rezultatami innych metod teoretycznych dla których istnieją zamknięte rozwiązania oraz w porównaniu z wynikami doświadczalnymi okazała się praktycznie wystarczająca (por. przykł. 10.3, 10.4, 10.5, 10.6).

LITERATURA

- [1] Akkoush E.A.: Bifurcation, pre-and postbuckling analysis of frame structures, C and S ^{*}), vol. 8, 1978, pp. 667-678.
- [2] Ałfutov N.A., Bałabuch Ł.I.: O vozmożnosti rešenija zadač ustojčivosti płastrin bez predvaritel'nowo opredelenija načal'nowo napražennowo sostojanija, PMM, 1967, t. 31, vyp. 4, s. 716-722.
- [3] Ałfutov N.A., Bałabuch Ł.I.: Energetičeskij kriterij ustojčivosti uprugich tež ne trebujuščij opredelenija načalnowo naprjaženno-deformirovannowo sostojanija, PMM, 1968, t. 32, vyp. 4, s. 703-707.
- [4] Ambarcumjan S.A.: Obščaja teorija anizotropnych obołoček, M., Nauka, 1974.
- [5] Anderson R.G., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.: Vibration and stability of plates using finite elements, IJ. SS, 1968, 4, s. 1031-1055.
- [6] Argyris J.H., König M., Nagy D.A., Haase M., Malejannakis G.: Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej, Ossolineum, PAN, 1977, s.163-234.
- [7] Ašmarin Ju. A., Guz' A.M.: Ustojčivost' obołoček osłablennych otverstijami, PM, 1973, 9, N^o 4, s. 3-15.

^{*}) wykaz skrótów znajduje się na końcu spisu literatury

- [8] Bakulin V.N., Demidov V.I.: Trechskojnyj konečnyj element estestvennoj krivizny, Izv. vuz., M., 1978, N^o 5, s. 5-10.
- [9] Baratov A.: Issledovanie ustojčivosti uprugich prjamougolnych płaštin s prjamougol'nym otverstiem, Doklady AN UzSSR, 1962, N^o 12, s. 10-15.
- [10] Baratov A.: Issledovanie ustojčivosti uprugich prjamougolnych płaštin s prjamougol'nym otverstiem, zaščemlennych po vnešnemu i vnutrennemu konturam, TVKTOP IV, 1962, s. 219-225.
- [11] Barg A.A., Livšic A.L., Livšic V.L.: K rešeniju pervoj osnovnoj ploskoj zadači teorii uprugosti, SMTS, vyp. 8, 1969, s. 30-33.
- [12] Berar C.: A constant shear theory of isotropic plane sandwich plates, RRST, SMA, 1980, 25, N^o 2, s. 255-267.
- [13] Brebbia C.A., Connor J.J.: Fundamentals of finite element techniques, Butterworths, London 1973.
- [14] Cook R.D.: Finite element buckling analysis of homogeneous and sandwich plates, IJ. NME, 1975, 9, s. 39-50.
- [15] Czmochowski J., Romanów F.: Nieliniowa teoria stateczności powłok przekładkowych z uwzględnieniem poprzecznej odkształcalności rdzenia, MTS, N^o 3-4, 1982, s. 271-284.
- [16] Czmochowski J., Romanów F.: Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy stateczności płyt trójwarstwowych z otworem VI Konferencja "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji", Białystok 8-11.06.1983 r., t. 2, s. 245-246.
- [17] Davies G., Ford B., Mullord P., Snell C.: Application of an irregular mesh finite difference approximation to the plate buckling problem, Variational Methods in Engineering, ed. C.A. Brebbia, H. Tottenham, Southampton Univ., Press, 1973, 11/1-12.
- [18] Dittrich H.: Berechnung von Sandwichplatten mittels gemischten finiter Elemente, Diss. Dokt., Ing. Univ. Stuttgart (Techn. Hochsch), 1979.
- [19] Džugač M.I.: Metod setok v smiešannoj ploskoj zadače teorii uprugosti, Kiev, Izd. "Naukova dumka", 1964.
- [20] Dundrova V., Kovařik V., Šlapák P.: Nichtlineare Biegunstheorie von Sandwich-Platten, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae t. 57, 1-2, p. 19-33 (1967).

- [21] Dziemidowicz-Tkacz L.: Element przestrzenny płytowy, Praca doktorska, Gdańsk 1978.
- [22] Fazio P.P., Ha K.H.: Sandwich Plate Structure Analysis by Finite Element, Proc. ASCE, 1974, v. 100, ST6, s. 1243-1262.
- [23] Fel'dman M.R.: Rešenie nekotorych zadač ustojčivosti i kolebanij płastin peremennoj tołšćiny i płastin s otverstijami na elektronnych cifrovych i počnoklavišnych vyčislitel'nych mašinach, Primenenie elektronno-vyčislitel'nych mašin v stroitel'noj mehanike, Kiev, Naukova Dumka, 1968, s. 374-381.
- [24] Galimov N.K.: K postroeniju utočnennykh uravnenij dinamiki trechskojnykh płastin i obočoček pri srednem izgibe, Issledovanija po teorii obočoček, Trudy seminar, vyp. 10, Kazan', 1978, s. 18-36.
- [25] Galimov N.K.: K postroeniju utočennoj teorii srednevo izgiba trechskojnykh płastin i obočoček, Statika i dinamika obočoček, Trudy seminar, vyp. 12, Kazan', 1979, s. 31-52.
- [26] Goldenvejzer A.L.: Metody obosnovanija i utočnenija teorii obočoček. (Obzor poslednich rezul'tatov), PMM, t. 32, vyp. 4, 1968, s. 684-695.
- [27] Goodir I.N., Neou J.M.: The evaluation of theoretical critical compression in sandwich plates, J. of the Aeronautical Sciences, 18, 1951, N^o 10, p. 649-656.
- [28] Grigoljuk E.I., Fil'stinskij L.A.: Perforirovannye płastiny i obočočki, M., 1970, "Nauka".
- [29] Grigoljuk E.I., Čulkov P.P.: Ustojčivost i kolebanija trechskojnykh obočoček, Mašinostrojenie, Moskva, 1973.
- [30] Grigoljuk E.I., Kułakov N.A.: Ob ustrojčivosti płastin s otverstijami, Doklady AN SSSR, 1975, 224, N^o 4, s. 790-793.
- [31] Grigoljuk E.I., Kornev V.M.: K asimptotičeskomu analizu uravnenij teorii trechskojnykh płastin i obočoček, Izv. AN SSSR, MTT, 1976, N^o 4, s. 148-154.
- [32] Grigoljuk E.I., Kułakov N.A.: Ustojčivost' płastin s otverstiem, RPK, vyp. 17, 1977, s. 108-112.
- [33] Grosskurth J.F., White R.N., Gallagher R.H.: Shear buckling of square perforated plates, Proc. ASCE, EM6, 102(1976), p. 1025-1040.
- [34] Guz' A.N.: O postanovke zadač ustojčivosti płastin i obočoček, oslăblennykh otverstijami, Koncentracija napraženij, 1971, vyp. 3, s. 51-53.

- [35] Guz' A.N. i in.: Teorija tonkich obožoček, osłablennyh otverstijami, Metody rasčeta obožoček, t. 1, "Naukova Dumka", Kiev 1980.
- [36] Guz' A.N., Dyšel' M.S., Kuliev G.G., Mikovanova O.B.: Razrušenie i lokal'naja poterja ustojčivosti tonkostennyh tel s vyrezami, PM, 1981, 17, N^o 8, s. 3-24.
- [37] Heinze K., Schmidt H.: Spannungs- und Beulwertberechnung von gelochten Rechteckplatten, Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Otto von Guericke Magdeburg, 1974, 18, Heft 4, s. 413-415.
- [38] Katsuhiko Murase, Tohru Nishimura: Analysis of Sandwich Plates by Finite Element Method and Its Applications, Bulletin of the JSME, vol. 20, N^o 144, June, 1977, s. 680-687.
- [39] Kawai T., Ohtsubo H.: A method of solution for the complicated buckling problems of elastic plates with combined use of Rayleigh-Ritz's procedure in the finite element method, Proc. of the Second Air Force Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, AFFDL TR68-150, Oct., 1968, p. 967-994.
- [40] Kikuo Arita, Yukio Fujiwara: Instability of Plates with Circular Holes (1st Report), The Moire' Method for Studying Buckling of Plates, Report of Ship Research Institute, March 1972, vol. 9, N^o 2, s.1-15 (43-57).
- [41] Kowalczyk B.: Macierze i ich zastosowania, WNT, W-wa 1976.
- [42] Kroll W.D.: Instability in shear of simply supported square plates with reinforced hole, Research Paper RP2037, J. RNBS, vol. 43, 1949, N^o 5, p. 465-472.
- [43] Kumai T.: Elastic stability of the square plate with a central circular hole under edge thrust, Reports of the Research Institute for Applied Mechanics, vol. 1, Apr., 1952, N^o 2, s. 1-10.
- [44] Kurant P., Hilbert D.: Metody matematičeskoj fiziki, M., Gostechizdat 1951.
- [45] Kuršin L.M., Matveev K.A.: Primenenie énergičeskowo metoda k zadačam ustojčivosti płastin s otverstiem, Izv. AN SSSR, MTT, 1974, N^o 6, s. 114-119.

- [46] Kuršin L.M., Matveev K.A.: K issledovaniju ustojčivosti prjamougolnych pľastin s vyrezami, Izv. AN SSSR, MTT, 1978, N^o 6, s. 162-163.
- [47] Legras J.: Praktyczne metody analizy numerycznej. WNT, W-wa 1974.
- [48] Levy S., Woolley R.M., Kroll W.D.: Instability of supported square plate with reinforced circular hole in edge compression, Research Paper RP 1849, J. RNBS, 1947, 39, N^o 6, p. 571-577.
- [49] Livšic A.L., Livšic V.L.: Ustojčivost' odnosvjaznykh i neodnosvjaznykh prjamougol'nykh pľastin sžatykh proizvol'noj nagruzkoj, Izv. AN Arm SSR, Mechanika, 1971, 24, s. 52-60.
- [50] Mc Glenn J., Hartz B.J.: Finite element analysis of plywood plates, Proc. ASCE, 1968, ST2, p. 551-563.
- [51] Melosh R.J.: A Stiffness Matrix for thin plates in bending. J. of the Aeronautical Sciences, vol. 28, Jan., 1961, N^o 1.
- [52] Melosh R.J.: Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, AIAA J., vol. 1, 1963, p. 1631-1637.
- [53] Monforton G.R., Ibrahim I.M.: Modified stiffness formulation of unbalanced anisotropic sandwich plates, IJ. MS, 1977, 19, s. 335-343.
- [54] Monforton G.R.: Stiffness matrix for sandwich beams with thick anisotropic laminated faces, C and S, vol. 10, 1979, N^o 3, s. 547-551.
- [55] Muschelišvili N.J.: Nekotorye osnovnye zadači matematičeskoj teorii uprugosti, M., "Nauka", 1966.
- [56] Muzyčenko Ju.N.: Izgib i ustojčivost' prjamougolnych pľastin, osľablennykh prjamougol'nymi vyrezami, TVKTOP IV, 1962, s. 724-732.
- [57] Nałoev V.G.: Ustojčivost' pľastin s vyrezami, TVKTOP IX, 1975, s. 138-140.
- [58] Neuber H.: Theorie der Druckstabilität der Sandwichplatte, ZAMM, Teil I, Band 32, Heft 11/12, 1952, s. 325-337, Teil II, Band 33, Heft 1/2, 1953, s. 10-26.
- [59] Nowacki W.: Mechanika budowli, t. III, PWN, W-wa, 1966.
- [60] Olga Martin: Analysis of the elastic sandwich plates by the finite element method, RRST, SMA, 1977, 22, N^o 5, s. 725-732.

- [61] Orkisz J., Wrana B.: Zastosowanie metody Richardsona do obliczania największej i najmniejszej wartości i wektorów własnych macierzy, Materiały II Konferencji "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji", Gdańsk 25-27.11.1975 r., s.152-154.
- [62] Pickett G.: Bending, buckling and vibration of plates with holes, Developments in Theoret. Appl. Mech., vol. 2, Pergamon Press, 1965, p. 9-22.
- [63] Plechanov A.V., Prusakov A.P.: O postroenii teorii izgiba trechskojnykh platin srednej tołšciny energoasimptotičeskim metodom, Izv. vuz., SA, 1977, N^o 7.
- [64] Plechanov A.V.: O postroenii utočnennoj teorii połogich trechskojnykh obołoček, SMTS, vyp. 15, 1979, s. 125-128.
- [65] Popova T.A.: Nekotorye voprosy statičeskoj raboty plastinki s kvadratnym otverstiem v svoej płoskosti, Issledovanie pročnosti, žestkosti i ustojčivosti krupnpanel'nykh konstrukcij, 1954, s. 129-175.
- [66] Potaš A.L.: Uravnenija obščej teorii izgiba ortotropnykh trechskojnykh platin konečnowo progiba s legkim zapołnitelem, Izv. vuz., SA, 1979, N^o 1, s. 46-52.
- [67] Preobraženskij I.N.: Ustojčivost' prjamougol'nykh platinok s krugovymi otverstijami, Četvertaja Vsesojuz. konf. po problemam ustojčivosti v stroitelnoj mechanike, Tezisy dokł., 1972, s. 65-67.
- [68] Preobraženskij I.N.: Ustojčivost' i kolebanija tonkostennykh konstrukcij s otverstijami. Izv. AN SSSR, MTT, 1972, N^o 2, s. 190-198.
- [69] Preobraženskij I.N.: Ustojčivost' obołoček i platinok s otverstijami, TVKTOP VIII, 1973, s. 329-333.
- [70] Preobraženskij I.N.: Ustojčivost' ortotropnykh platinok s otverstijami, Tr. MAI, 1974, vyp. 289, s. 37-47.
- [71] Preobraženskij I.N.: Ob issledovanijach ustojčivosti tonkostennykh platinok s vyrezami, PM, 1980, 16, N^o 7, s. 3-25.
- [72] Preobraženskij I.N.: Ustojčivost' i kolebanija platinok i obołoček s otverstijami, M, 1981.
- [73] Pryor C.W., Barker R.M.: A finite element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates, AIAA J., 1971, 9, N^o 5, s. 912-917.

- [74] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, W-wa, 1971.
- [75] Rasskazov A.O.: K teorii mnogoskojnych ortotropnych obołoczek, PM, 1976, 12, N^o 11, s. 50-56.
- [76] Reissner E.: Finite deflections of sandwich plates, J. of the Institute of Aeronautical Sciences, vol. 15, July, 1948, p. 435-440.
- [77] Rikards R.B., Čate A.K.: Izoparametričeskij treugol'nyj konečnyj element mnogoskojnoj obołocžki po sdvigovoj teorii Timoshenko, Mechanika kompozitych materialov, 1981, N^o 3, s. 453-460.
- [78] Ritchie D., Rhodes J.: Buckling and post-buckling behaviour of plates with holes, The Aeronautical Quarterly, 1975, 26, N^o 4, p. 281-296.
- [79] Rockey K.C., Anderson R.G., Cheung Y.K.: The behaviour of square shear webs having a circular hole, Thin Walled Steel Structures, London, K.C. Rockey and H.V. Hill, eds. Gordon and Breach, 1968, p. 48-172.
- [80] Romanenko F.A.: Ustojčivost' płaštin s prjamougol'nymi vyrezami, TVKTOP V, 1965, s. 52.
- [81] Romanenko F.A.: Ustojčivost' ploskoj formy ravnovesija nieodnosvjaznych płaštin pri dejstvii diskretnych nagruzok, PM, 1966, t. 2, N^o 1, s. 78-82.
- [82] Romanów F., Stricker L., Teisseyre J.: Stateczność konstrukcji przekładowych, Wyd. PWr., Skrypt, Wrocław 1972.
- [83] Romanów F.: Naprężenia krytyczne wolnopodpartyh ścinanych płyt przekładowych, MTS, 2, 16(1978), s. 199-213.
- [84] Romanów F.: Obciążenia krytyczne konstrukcji wielowarstwowych, Prace Naukowe IKiEM, PWr., Seria: Monografie 36,8, Wrocław 1979.
- [85] Savin G.N.: Raspredelenie naprjaženij około otverstij, Kiev "Naukova Dumka", 1968.
- [86] Schlack A.L.: Elastic stability of pierced squar plates, Exp., Mech., 1964, 4, N^o 6, p. 167-172.
- [87] Schlack A.L.: Experimental critical loads for perforated square plates, Exp. Mech., 1968, 8, N^o 2, p. 69-74.
- [88] Smith M.I.: A finite element analysis for "moderately thick" rectangular plates in bending, IJ. MS, 1968, vol. 10, p. 563-570.

- [89] Ter-Enmanuil'jan: Ustojčivost' ortotropnoj gibkoj kvadratnoj pľastinki s kvadratnym otverstiem, *Mechanika Polimerov*, 1971, N^o 3, s. 482-488.
- [90] Tewarson R.P.: Sparse matrices, Academic Press, New York and London 1973 (Tłum. ros.: T'juarson R.: Razrežennye matricy, Izd. Mir, M. 1977).
- [91] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.: Teoria pľyt i powłok, Arkady, W-wa 1962.
- [92] Timoshenko S.P., Gere I.M.: Teoria stateczności sprężystej Arkady, W-wa, 1963.
- [93] Ugodčikov A.G., DługačM.I., Stepanov A.E.: Rešenje kraevych zadač pľoskoj teorii uprugosti na cifrovych i analogovych mašinach, Izd. Vysšaja Škoła, M. 1970.
- [94] Varvak P.M.: Ustojčivost' kvadratnoj pľastinki, Sbornik trudov Kiev. inž.-stroit. in-ta, vyp. 7, 1945, s. 21-28.
- [95] Vol'mir A.S.: ustojčivost' dieformirujemych sistiem, M. "Nauka", 1967.
- [96] Vol'mir E.A., Mameeva E.N., Sidorenko A.S.: Issledovanie ustojčivosti prjamougol'noj pľastinki s prjamougol'nym vyrezom pod dejstviem sžimajuščej nagruzki, PP, 1980, N^o 6, s. 89-91.
- [97] Vorobkova N.Ł., Preobraženskij I.N.: Obzor issledovanij po ustojčivosti pľastinok i obołoček osłablennyh otverstijami, RPK, 1973, vyp. 15, s. 89-112.
- [98] Waszczyszyn Z.: Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych, Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, 1981, s. 341-380.
- [99] Wilkinson J.H.: The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, London and New York, 1965 (Tłum. ros. Uilkinson Dž. Ch. Algebraičeskaja problema sobstvennych značenij, "Nauka", M., 1970).
- [100] Wrana B.: Zastosowanie metody iteracji podprzestrzennych do obliczania wybranych częstotści i postaci drgań własnych dużych układow konstrukcyjnych, Praca doktorska, PK, Kraków, 1977.
- [101] Wei-Wen Yu., Davis Ch. S.: Cold-formed steel members with perforated elements, *Proc. ASCE*, 99(1973), ST10, s. 2061-2077.
- [102] Yoshiki M., Fujita Y., Kawamura A., Arai H.: Instability of

- plates with holes (First Report), Proceedings of the Society of Naval Architects of Japan, 1967, N^o 122, December, p.46-53.
- [103] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, W-wa, 1972.
- [104] Zinenko G.P.: Ustojčivost' i kolebanija prjamougol'nych trechsłojnych płastin s bol'simi vyrezami, PM, 1966, 2, N^o 8, s. 59-66.
- [105] Zinenko G.P.: Ustojčivost' prjamougol'nych trechsłojnych płastin s bol'simi vyrezami pod dejstviem kasatel'nych nagruzok, SMTS, 1970, vyp. 11, s. 77-86.
- [106] Życzkowski M.: Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych, Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, 1981, s. 7-80.

WYKAZ SKRÓTÓW UŻYTYCH W SPISIE LITERATURY

| | |
|------------|---|
| AIAA J. | - Journal of the American Institute of Aeronautics |
| C and S | - Computers and Structures |
| Exp. Mech. | - Experimental Mechanics |
| Izv. vuz. | - Izvestija vuzov: |
| SA | - Stroitelstvo i architektura |
| M | - Mašinostroenie |
| AT | - Aviacionnaja technika |
| IJ | - International Journal: |
| SS | - of Solids and Structures |
| NME | - for Numerical Methods in Engineering |
| MS | - of Mechanical Sciences |
| J. RNBS | - Journal of Research of the National Bureau of Standards |
| JSME | - Japan Society of Mechanical Engineers |
| MTS | - Mechanika teoretyczna i stosowana |
| MTT | - Mechanika tverdowo teła |
| PM | - Prikładnaja mechanika |
| PMM | - Prikładnaja matematika i mechanika |
| PP | - Problemy pročnosti |

- Proc. ASCE - Proceedings of the American Society of Civil Engineers:
- EM - Journal of the Engineering Mechanics Division
- ST - Journal of the Structural Division
- RPK - Rasčet prostranstvennych konstrukcij
- RRST - Revue roumaine des sciences techniques:
- SMA - Série de mécanique appliqués
- SMES - Soprotivlenie materialov i teorija sooruzenij
- Tr. MAI - Trudy moskovskovo aviacionnovo instituta
- TVKTOP - Trudy vsesojuznoj konferencii po teorii obošček i pļastinok
- ZAMM - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

Mgr inż. Jerzy Czmochowski

Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn

Politechniki Wrocławskiej

Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Pracę złożono w Redakcji Instytutu 29.08.1983 r.

ODBIORCY:

- | | |
|--|---|
| 1. Komisja Rady Naukowo-Dydaktycznej Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn d/s Przewodów Doktorskich | 2 |
| 2. Doc. dr inż. Franciszek Romanów | 1 |
| 3. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej | 1 |
| 4. Biblioteka i Ośrodek Informacji Inst.KEM | 1 |
| 5. Redakcja I-16 | 1 |
| 6. Autor | 2 |



INSTYTUT KONSTRUKCJI I EKSPLOATACJI MASZYN
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport Serii PREPRINTY Nr 006/83

Praca doktorska

ANALIZA STATECZNOŚCI
NIEJEDNOSPÓJNYCH PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH
(załącznik)

Jerzy Czmochowski

Promotor: doc. dr inż. Franciszek Romanów

Słowa kluczowe:
stateczność,
płyty trójwarstwowe,
metoda elementów
skończonych,
płyty z otworami

Wrocław 1983

PL17 INSTYTUTY PŁYK I ZWIĘZNY
OPRACZYTYCH WYKONAWCZYCH

WZROST
WYKONAWCZY

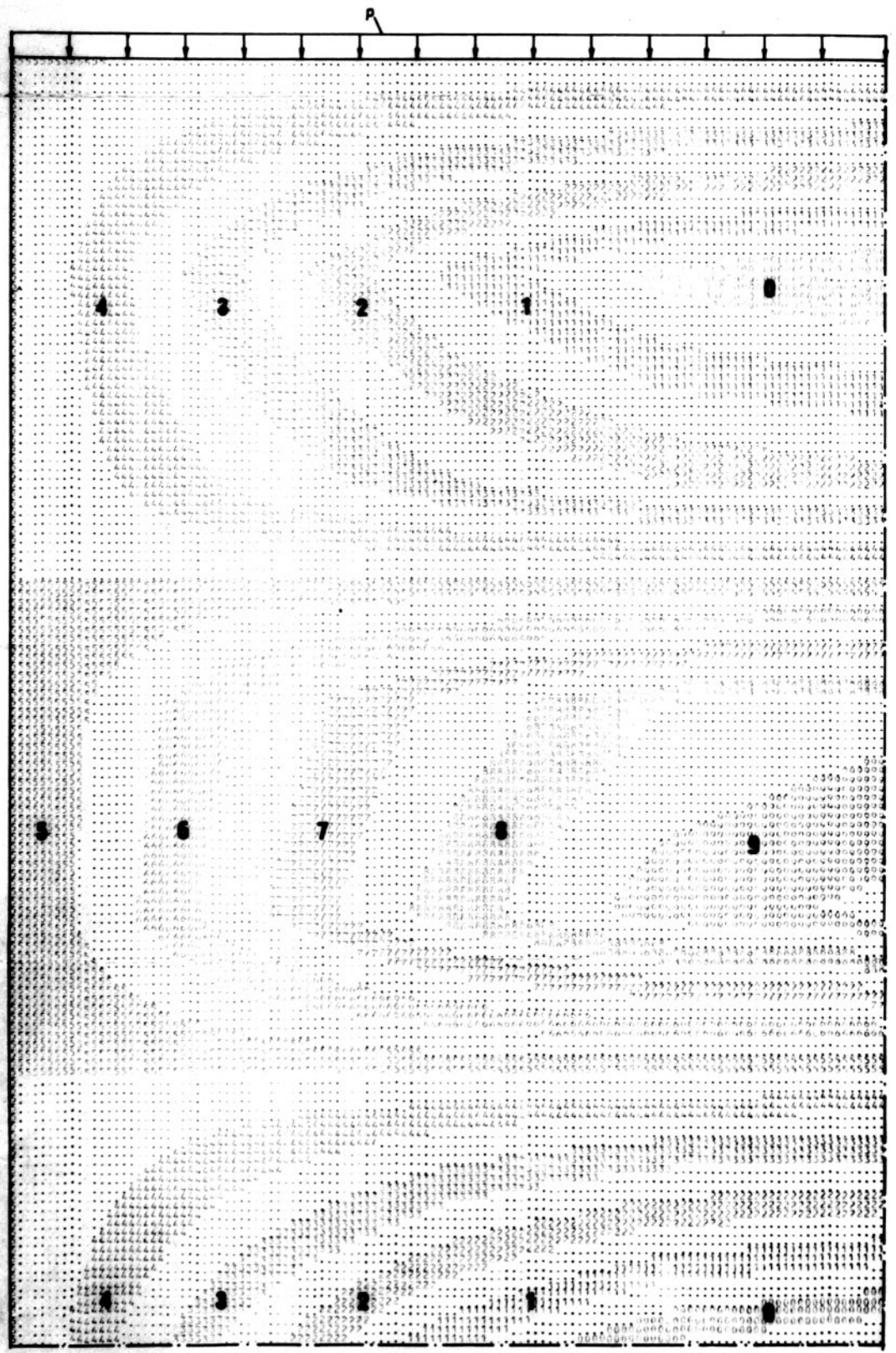
WYKONAWCZY I WYKONAWCZY

| | | | | | |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 2 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 3 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 6 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 7 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 8 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Rys.25. Postać wyboczenia płyty prostokątnej trójwarstwowej, przykład 10.3

$P_{kr} = 600,16 \text{ kN/m}$

dyskretyzacja (8 x 12)



YMIN= 0,00000000E 00 YMAX= 0,00000000E 00
XMAX= 0,10000000E 01 XMIN= 0,10000000E 01

WYRAZ SYMBOLI I ODPWIADAJACE IM ZAKRESY WIERZUKOWANEJ FUNKCJI

| | | | |
|---|----------|----------|---|
| M | -904,000 | -701,000 | ? |
| A | -904,000 | -701,000 | ? |
| 1 | -678,000 | -485,000 | ? |
| 2 | -539,000 | -350,000 | ? |
| 3 | -426,000 | -228,000 | ? |
| 4 | -313,000 | -112,000 | ? |
| 5 | -199,000 | 0,000 | ? |
| 6 | 112,000 | 112,000 | ? |
| 7 | 226,000 | 228,000 | ? |
| 8 | 339,000 | 350,000 | ? |
| 9 | 452,000 | 485,000 | ? |
| 0 | 565,000 | 620,000 | ? |
| 1 | 678,000 | 755,000 | ? |
| 2 | 791,000 | 890,000 | ? |
| 3 | 904,000 | 1025,000 | ? |
| 4 | 1017,000 | 1160,000 | ? |
| 5 | 1130,000 | 1295,000 | ? |
| 6 | 1243,000 | 1430,000 | ? |
| 7 | 1356,000 | 1565,000 | ? |
| 8 | 1469,000 | 1700,000 | ? |

Rys.26. Rozkład naprężeń (N/m),
przykt. 10,7, 11.1.

$p = 1000 \text{ N/m}$
dyskretyzacja (16 x 24)

a) $N_{11} [N/m]$



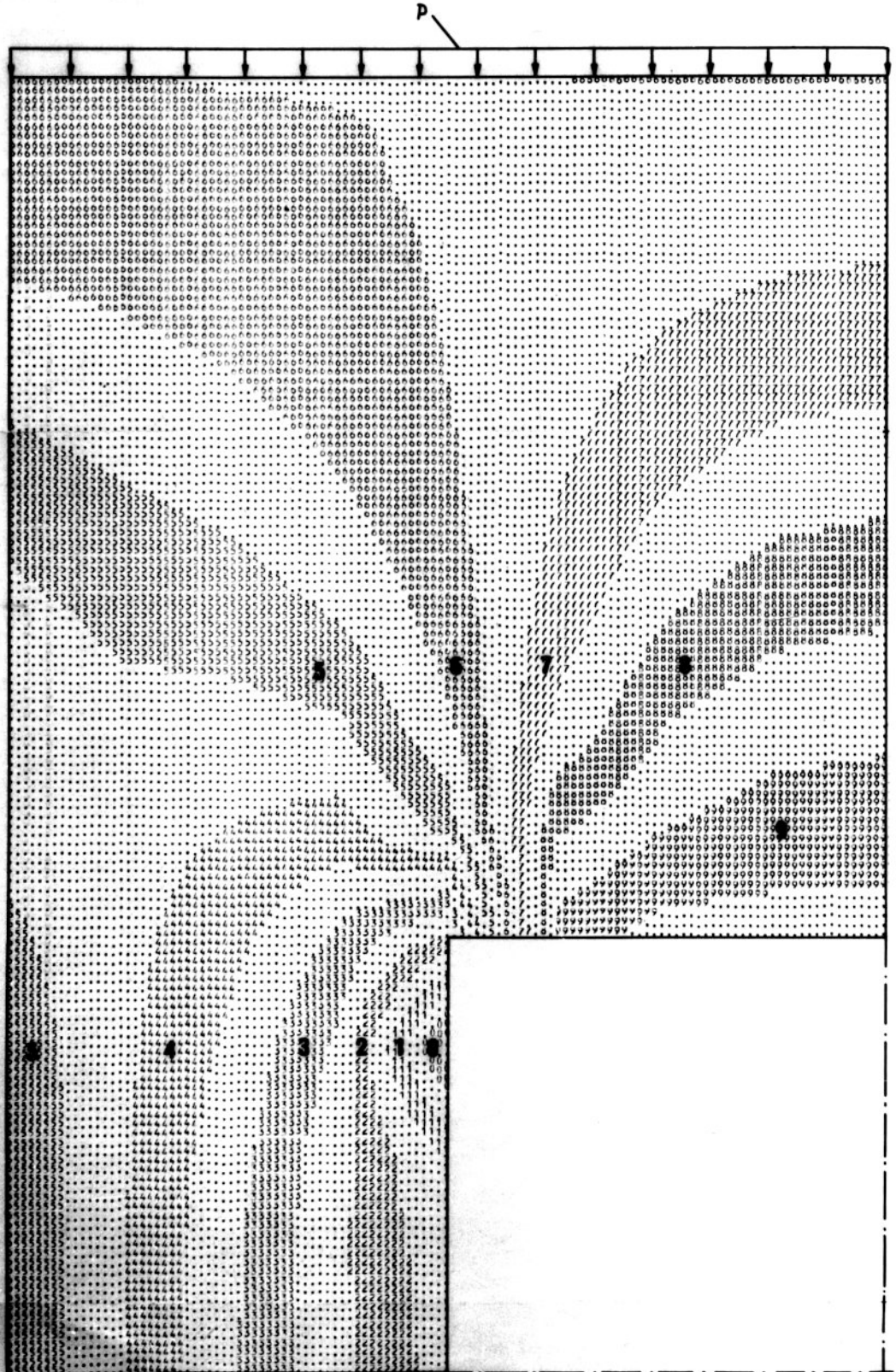
PLAN WARTYŚCIŁY FUNKCJI - UBSZANZE
 ORAZ CZYNNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

YMIN# 0,0000000000 00 YMAX# 0,0000000000 00
 XMIN# 0,1000000000 YMAX# 0,1000000000

WYRAZ SYMBOLI I WSPÓŁCZYNNIKÓW W ZAKRESY UNWZGLĘDNIANEJ FUNKCJI

| | | | | | | | | | |
|---|---|---------|--|--|--|--|--|--|--|
| M | = | -338,00 | | | | | | | |
| A | = | -321,00 | | | | | | | |
| I | = | -304,00 | | | | | | | |
| 3 | = | -287,00 | | | | | | | |
| 4 | = | -270,00 | | | | | | | |
| 5 | = | -253,00 | | | | | | | |
| 6 | = | -236,00 | | | | | | | |
| 7 | = | -219,00 | | | | | | | |
| 8 | = | -202,00 | | | | | | | |
| 9 | = | -185,00 | | | | | | | |
| 0 | = | -168,00 | | | | | | | |
| 1 | = | -151,00 | | | | | | | |
| 2 | = | -134,00 | | | | | | | |
| 3 | = | -117,00 | | | | | | | |
| 4 | = | -100,00 | | | | | | | |
| 5 | = | -83,00 | | | | | | | |
| 6 | = | -66,00 | | | | | | | |
| 7 | = | -49,00 | | | | | | | |
| 8 | = | -32,00 | | | | | | | |
| 9 | = | -15,00 | | | | | | | |
| 0 | = | 0,00 | | | | | | | |

b) N_{22} [N/m]



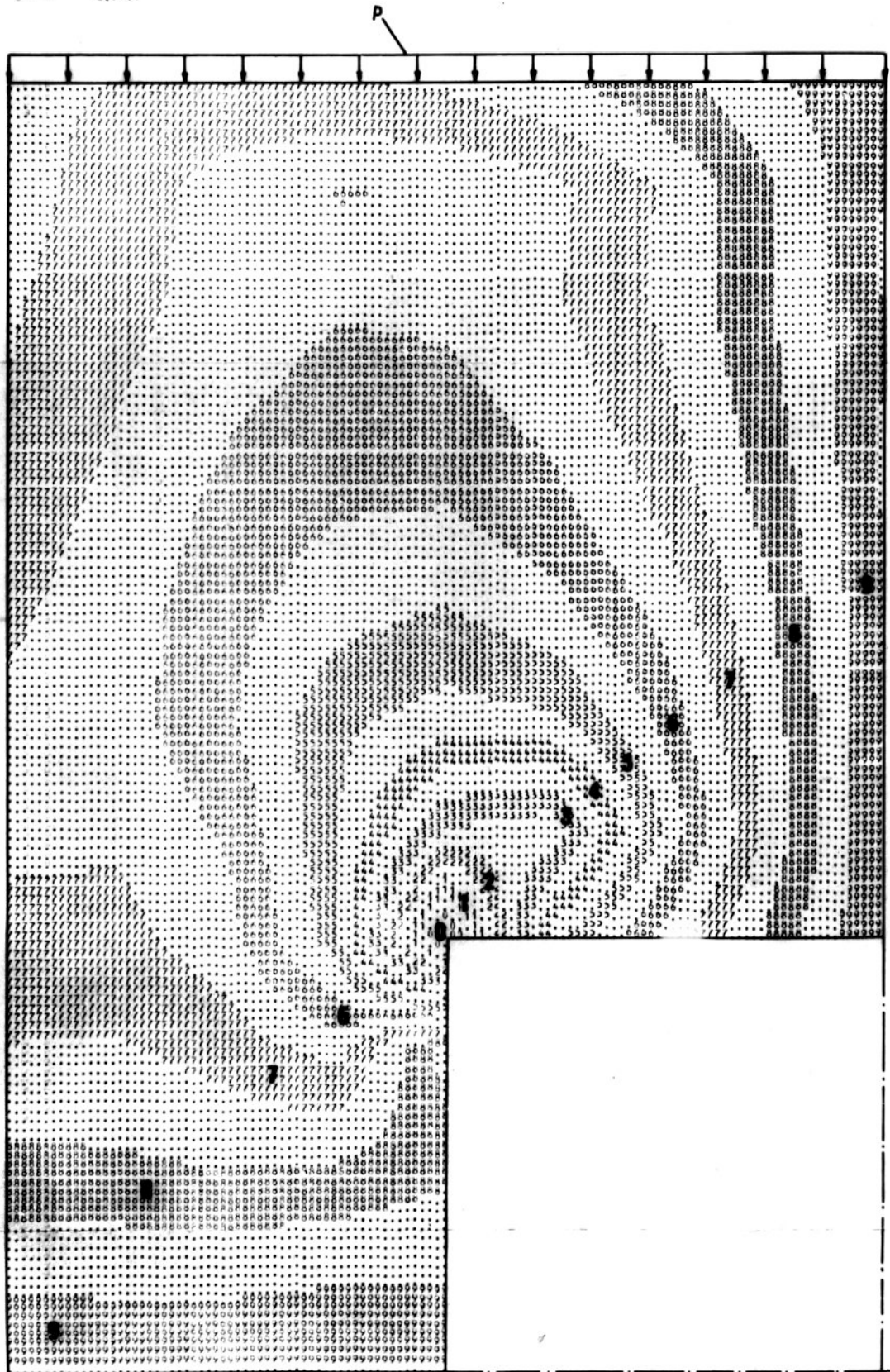
PLAN UAST-ICELI FUNKCJI CIĄGŁYCH
URZĄDZONYCH WSPÓŁWZĘSZNIE

| | | | |
|-------|---------------|-------|-----------------|
| XHTA* | 0,10000000 00 | F(HT) | 0,1000000000 00 |
| XHTB* | 0,10000000 00 | F(HT) | 0,1000000000 00 |

JAKĄZ SYMBEŁI I WYKREŚLĄZKI JEZELI IZYWY BRZURDYWANEJ FUNKCJI

| | | | |
|-----|----|----------|--|
| H = | 0 | -1064,00 | |
| A = | 1 | -1054,00 | |
| F = | 2 | -1044,00 | |
| S = | 3 | -1034,00 | |
| B = | 4 | -1024,00 | |
| Z = | 5 | -1014,00 | |
| K = | 6 | -1004,00 | |
| A = | 7 | -994,00 | |
| F = | 8 | -984,00 | |
| S = | 9 | -974,00 | |
| B = | 10 | -964,00 | |
| Z = | 11 | -954,00 | |
| K = | 12 | -944,00 | |
| A = | 13 | -934,00 | |
| F = | 14 | -924,00 | |
| S = | 15 | -914,00 | |
| B = | 16 | -904,00 | |
| Z = | 17 | -894,00 | |
| K = | 18 | -884,00 | |
| A = | 19 | -874,00 | |
| F = | 20 | -864,00 | |
| S = | 21 | -854,00 | |
| B = | 22 | -844,00 | |
| Z = | 23 | -834,00 | |
| K = | 24 | -824,00 | |
| A = | 25 | -814,00 | |
| F = | 26 | -804,00 | |
| S = | 27 | -794,00 | |
| B = | 28 | -784,00 | |
| Z = | 29 | -774,00 | |
| K = | 30 | -764,00 | |

c) N_{93} [N/m]



PLAN WAPSTWICOWY FUNKCJI I OGRANICZONYM WSPRZERNYMI

YMIN= 0.000000000E 00 YMAX= 0.000000000E 00
 XMAX= 1.000000000 YMAX= 1.000000000

WYKAZ SYMBLIT I ODPWIADAJACE TM ZAKRESY ODMIOWYMANEJ FUNKCJI

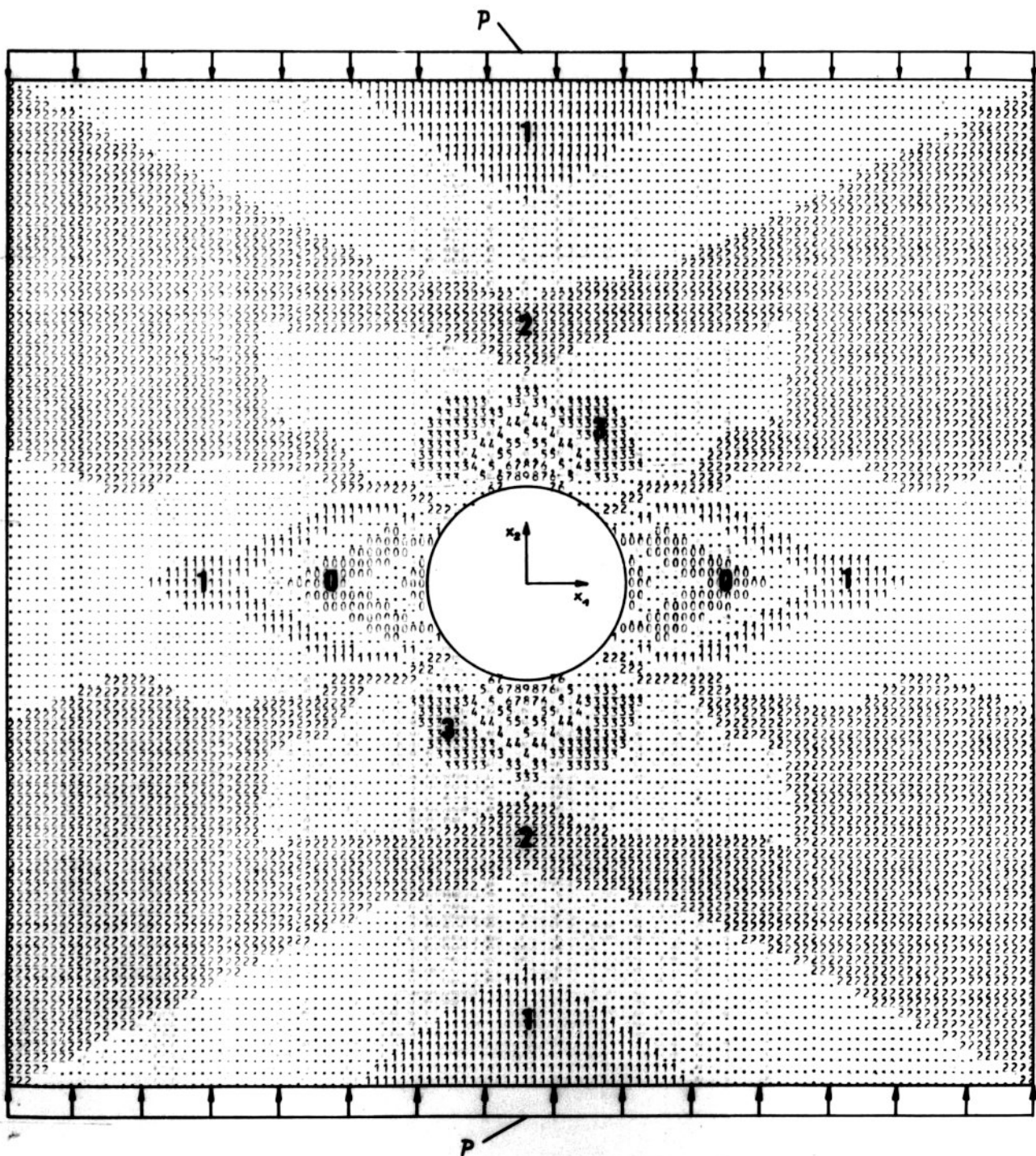
| | | |
|---|-----------------|----------|
| M | -215.000 | -172.000 |
| 1 | -215.000 | -172.000 |
| 1 | -172.000 | -86.000 |
| 1 | -86.000 | -43.000 |
| 3 | -43.000 | -21.500 |
| 3 | 0.000000000E 00 | 43.000 |
| 3 | 43.000 | 86.000 |
| 3 | 86.000 | 129.000 |
| 2 | 129.000 | 172.000 |
| 2 | 172.000 | 215.000 |
| 5 | 215.000 | 258.000 |
| 5 | 258.000 | 301.000 |
| 2 | 301.000 | 344.000 |
| 2 | 344.000 | 387.000 |
| 3 | 387.000 | 430.000 |
| 3 | 430.000 | 473.000 |
| A | 473.000 | 516.000 |
| 6 | 516.000 | 559.000 |
| 6 | 559.000 | 602.000 |
| 6 | 602.000 | 645.000 |
| 6 | 645.000 | 688.000 |

Rys.27. Rozkład naprężeń przykt. 10.8a, 11.3a

$p = 1000 \text{ N/m}$

$2R/L = 0,2$

a) $N_{41} \text{ [N/m]}$

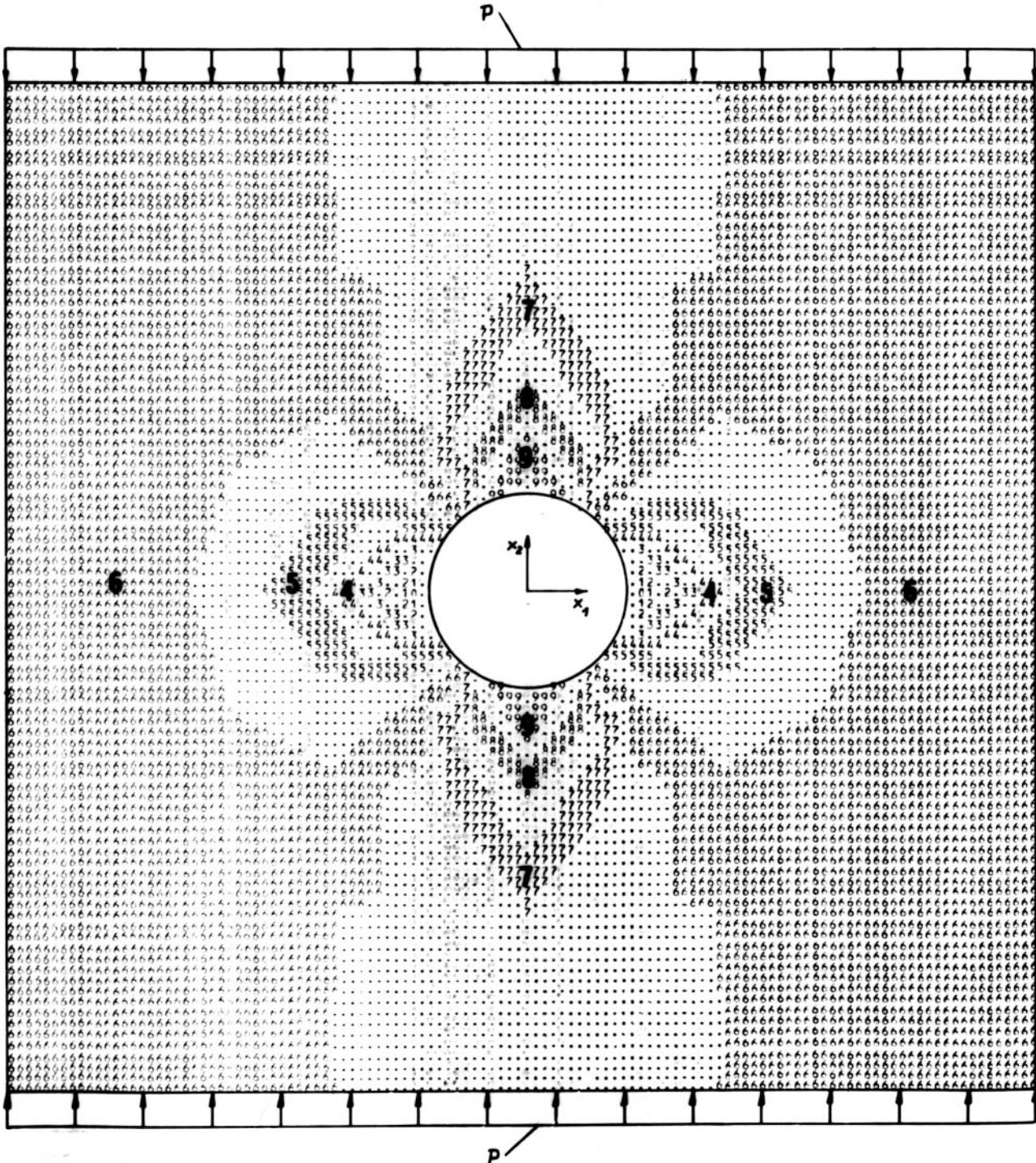


XMAX= 1.00000000 YMAX= 1.00000000

WYKAZ SYMBLI I ODPWIEDZAJACE IM ZAKRESY ODWZOROWYMANEJ FUNKCJI

| | | | | | |
|---|---|----------|--|--|--|
| M | < | -2750.00 | | | |
| | < | -2750.00 | | | |
| | < | -2425.00 | | | |
| | < | -2100.00 | | | |
| 1 | < | -2175.00 | | | |
| | < | -2250.00 | | | |
| 2 | < | -2125.00 | | | |
| | < | -2100.00 | | | |
| 3 | < | -1875.00 | | | |
| | < | -1750.00 | | | |
| 4 | < | -1625.00 | | | |
| | < | -1500.00 | | | |
| 5 | < | -1175.00 | | | |
| | < | -1250.00 | | | |
| 6 | < | -1125.00 | | | |
| | < | -1100.00 | | | |
| 7 | < | -875.00 | | | |
| | < | -750.00 | | | |
| 8 | < | -625.00 | | | |
| | < | -500.00 | | | |
| 9 | < | -375.00 | | | |
| | < | -250.00 | | | |
| 0 | < | -125.00 | | | |
| | > | -125.00 | | | |

b) N_{22} [N/m]



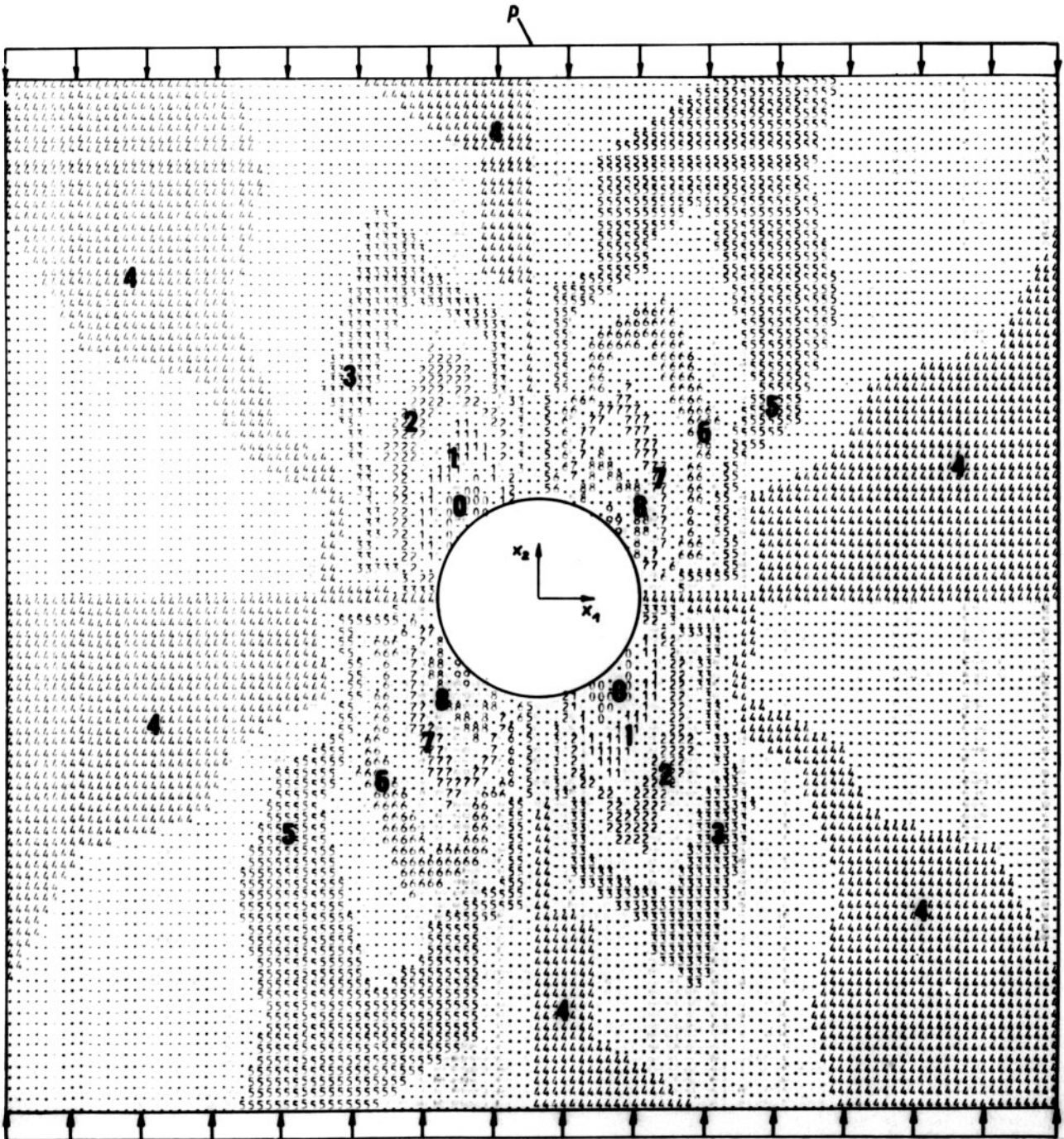
PLAN WŁASZCZYKOWY FUNKCJI I OBRZARZE
 OGRANICZONYM WSPÓŁCZYNIAKI

xMIN= 0.00000000E 00 yMIN= 0.00000000E 00
 xMAX= 1.00000000E 00 yMAX= 1.00000000E 00

WYKAZ SYMOLI I OZNACZENIACH W ZAKRESY OGRANICZONYM FUNKCJI

| | | | | | |
|---|---|--------------|--|--------------|---|
| 1 | < | -204.300 | | -204.300 |) |
| 1 | < | -204.000 | | -204.000 |) |
| 1 | < | -244.000 | | -244.000 |) |
| 1 | < | -245.200 | | -245.200 |) |
| 1 | < | -215.000 | | -215.000 |) |
| 2 | < | -174.400 | | -174.400 |) |
| 2 | < | -117.000 | | -117.000 |) |
| 3 | < | -88.000 | | -88.000 |) |
| 3 | < | -58.800 | | -58.800 |) |
| 3 | < | -20.400 | | -20.400 |) |
| 4 | < | 0.000000E 00 | | 0.000000E 00 |) |
| 4 | < | 50.400 | | 50.400 |) |
| 4 | < | 88.000 | | 88.000 |) |
| 4 | < | 117.000 | | 117.000 |) |
| 4 | < | 147.000 | | 147.000 |) |
| 4 | < | 174.400 | | 174.400 |) |
| 4 | < | 244.000 | | 244.000 |) |
| 4 | < | 245.200 | | 245.200 |) |
| 4 | < | 204.000 | | 204.000 |) |
| 4 | < | 204.300 | | 204.300 |) |
| 4 | < | 215.000 | | 215.000 |) |

c) N_{12} [N/m]



PLAN MESHKOWY FUNKCJI I OBRZARZE
 OGRANICZONYM USPOKRZENYM

XMIN= 0.000000000E 00 YMIN= 0.000000000E 00

XMAX= 1.000000000E 00 YMAX= 1.000000000E 00

WYKAZ SYMBOLI I ODPOWIADAJACE IM ZAKRESY ODMIAROWANEJ FUNKCJI

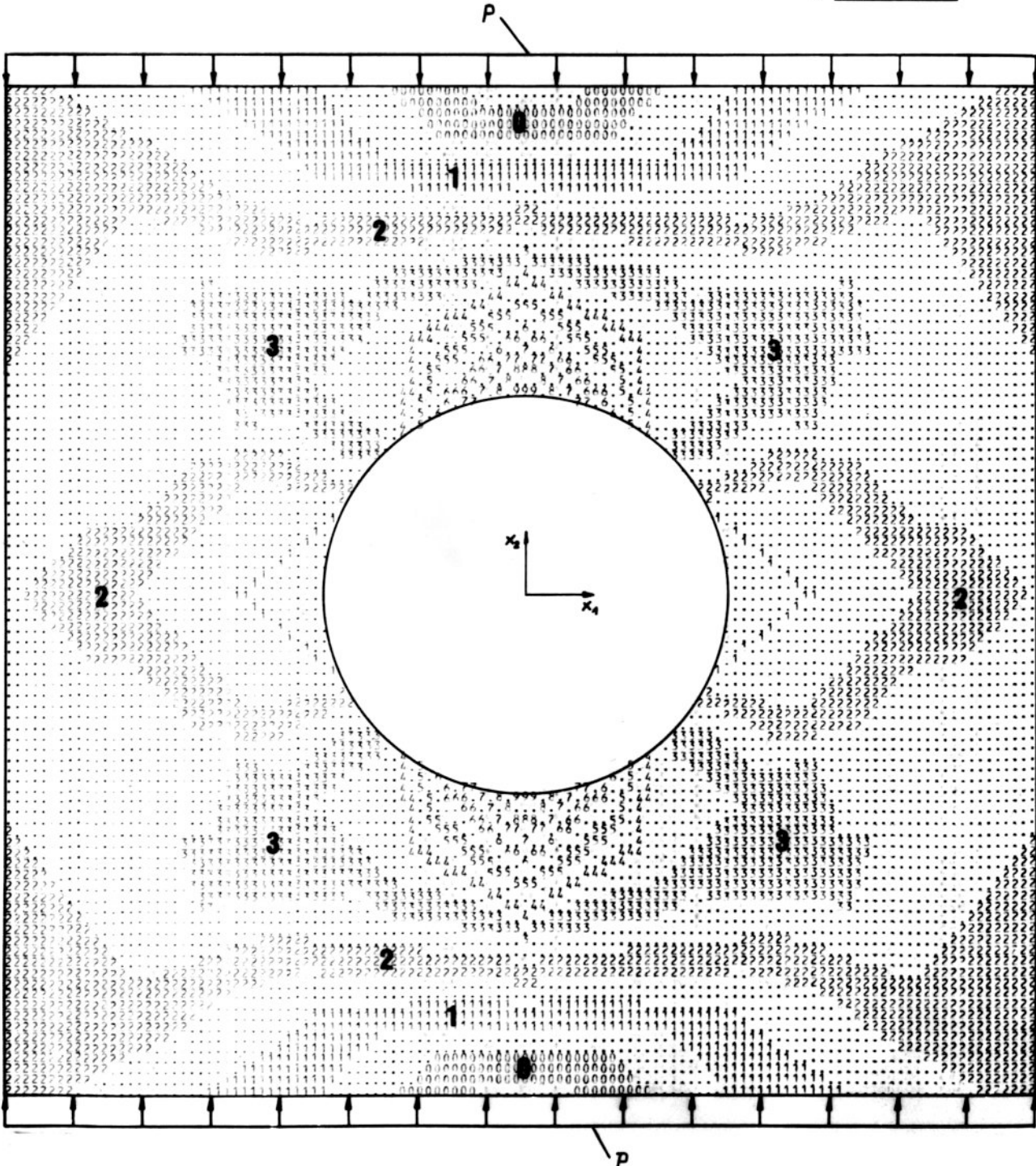
| | | |
|---|----------|----------|
| M | -546.000 | -477.000 |
| L | -344.000 | -273.000 |
| 1 | -273.000 | -219.000 |
| 2 | -142.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 182.000 |
| 4 | 142.000 | 273.000 |
| 5 | 273.000 | 344.000 |
| 6 | 344.000 | 477.000 |
| A | 477.000 | 546.000 |
| 7 | 546.000 | 619.000 |
| R | 619.000 | 773.000 |
| 8 | 773.000 | 910.000 |
| 9 | 910.000 | 1092.000 |
| 0 | 1092.000 | 1274.000 |
| 1 | 1274.000 | 1465.000 |

Rys.28 Rozkład naprężen
 przykt. 10.8a, 11.3a

$p = 1000 \text{ N/m}$

$2R/L = 0,4$

a) N_n [N/m]



PLAN I NASTĘPNOJ FUNKCJI I OBCZARZE
 OGRANICZENY I NASTĘPNOJ FUNKCJI

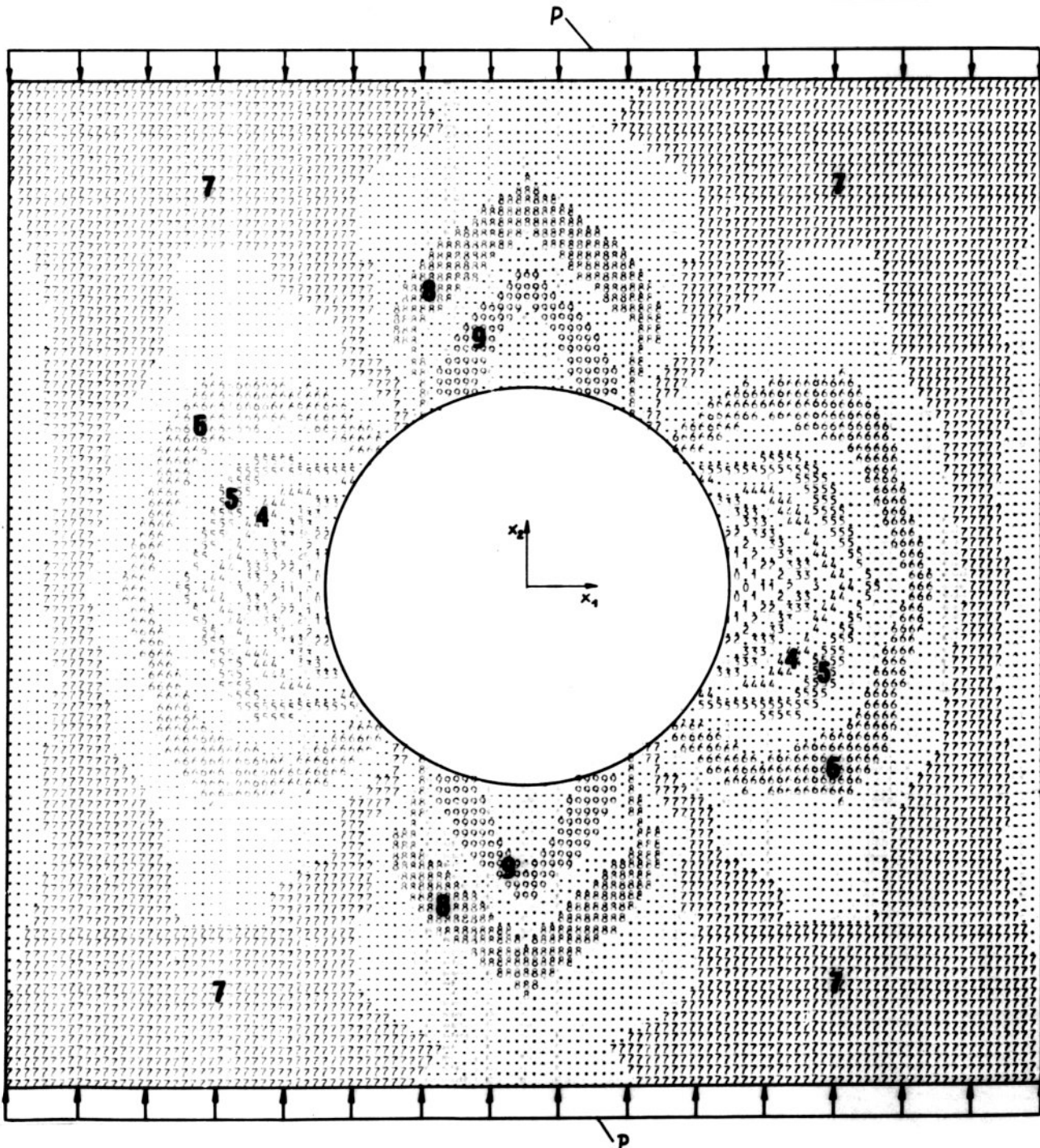
XMIN = 0,00000000E 00 YMIN = 0,00000000E 00

XMAX = 1,00000000E 00 YMAX = 1,00000000E 00

WYKAZ SYMBLI I GROMADZIE W ZAKRESY OGRANICZONYCH FUNKCJI

| | | | | | | |
|----|---|---|-----------|---|---------|---|
| 0 | - | - | 3424,00 | - | 3507,00 |) |
| 1 | - | - | 4276,00 | - | 3340,00 |) |
| 2 | - | - | 5577,00 | - | 3173,00 |) |
| 3 | - | - | 7328,00 | - | 3006,00 |) |
| 4 | - | - | 9529,00 | - | 2839,00 |) |
| 5 | - | - | 12180,00 | - | 2672,00 |) |
| 6 | - | - | 15281,00 | - | 2505,00 |) |
| 7 | - | - | 18832,00 | - | 2338,00 |) |
| 8 | - | - | 22833,00 | - | 2171,00 |) |
| 9 | - | - | 27284,00 | - | 2004,00 |) |
| 10 | - | - | 32185,00 | - | 1837,00 |) |
| 11 | - | - | 37536,00 | - | 1670,00 |) |
| 12 | - | - | 43437,00 | - | 1503,00 |) |
| 13 | - | - | 49888,00 | - | 1336,00 |) |
| 14 | - | - | 56889,00 | - | 1169,00 |) |
| 15 | - | - | 64440,00 | - | 1002,00 |) |
| 16 | - | - | 72541,00 | - | 835,00 |) |
| 17 | - | - | 81292,00 | - | 668,00 |) |
| 18 | - | - | 90693,00 | - | 501,00 |) |
| 19 | - | - | 100744,00 | - | 334,00 |) |
| 20 | - | - | 112445,00 | - | 167,00 |) |

b) N_{22} [N/m]



PLAN PRZEŚCIEŃNY FUNKCJI MBSZARZE
OGRANICZONYCH WSPÓŁCZYNIAJĄCYMI

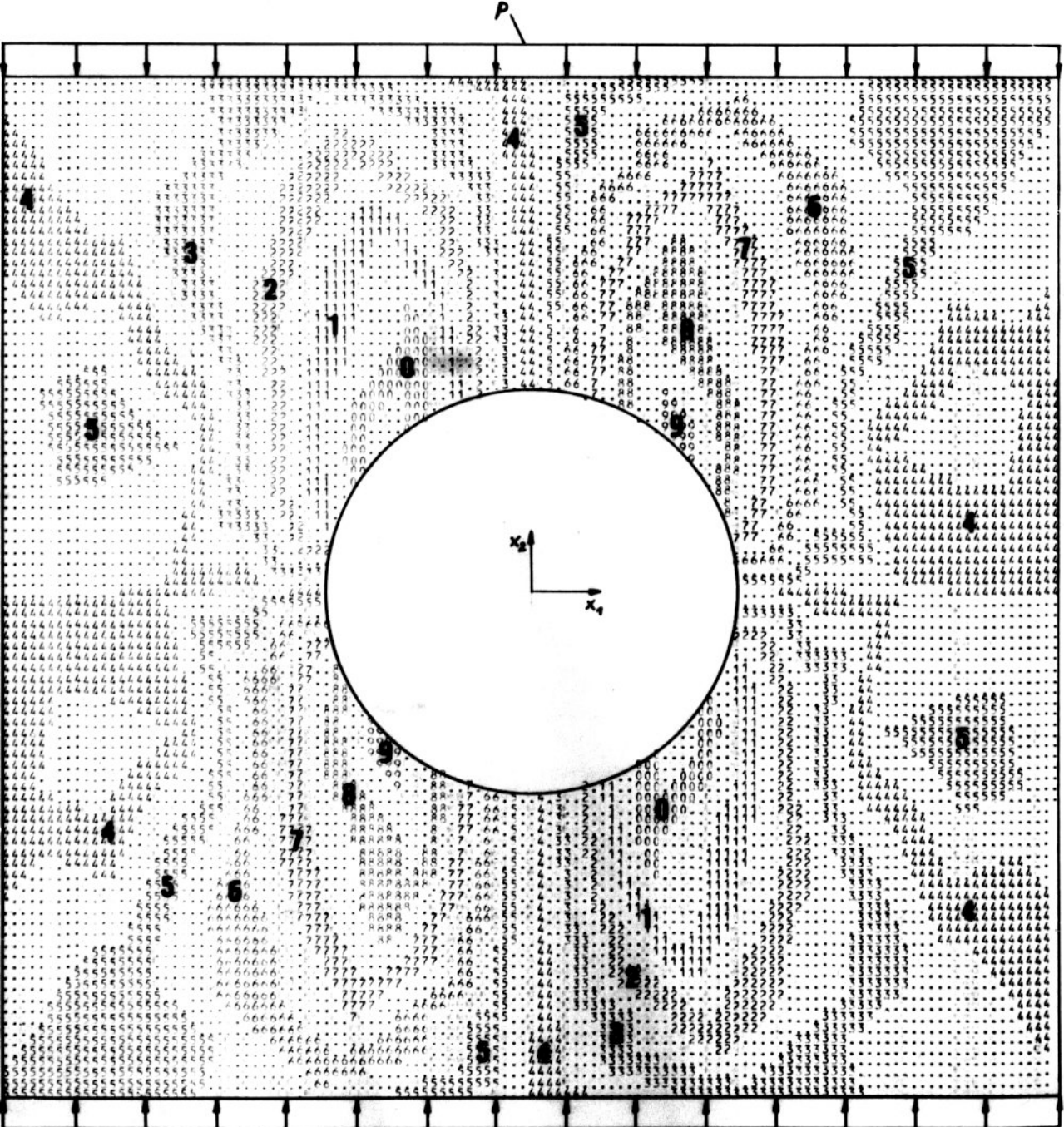
xMIN= 0.00000000E+00 yMIN= 0.00000000E+00

xMAX= 1.00000000E+00 yMAX= 1.00000000E+00

WYKAZ WYŚCIEŃ I OBRÓTIW DŁUŻY W ZAKRESY PRZEPŁYWANEJ FUNKCJI

| M | K | X | Y | Z |
|---|----|----------|----------|-------|
| 1 | 1 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 2 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 3 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 4 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 5 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 6 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 7 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 8 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 9 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 10 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 11 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 12 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 13 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 14 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 15 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 16 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 17 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 18 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 19 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 20 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 21 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 22 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 23 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 24 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 25 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 26 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 27 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 28 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 29 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 30 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 31 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 32 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 33 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 34 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 35 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 36 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 37 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 38 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 39 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 40 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 41 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 42 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 43 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 44 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 45 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 46 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 47 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 48 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 49 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |
| 1 | 50 | -348.000 | -515.000 | 0.000 |

c) $N_{12} [N/m]$



PLAN WARTOŚCI I WZROSTU WSKAZAŃ
 OGRANICZONYM WSPÓŁCZYNIAJĄCYM

YMIN= 0,000000000000000000 YMAX= 0,000000000000000000
 XMAX= 1,000000000000000000 YMAX= 1,000000000000000000

WYKAZ SYMBOLI I DŁUGOŚCI WZROSTU WZROSTU WSKAZAŃ WZROSTU WSKAZAŃ

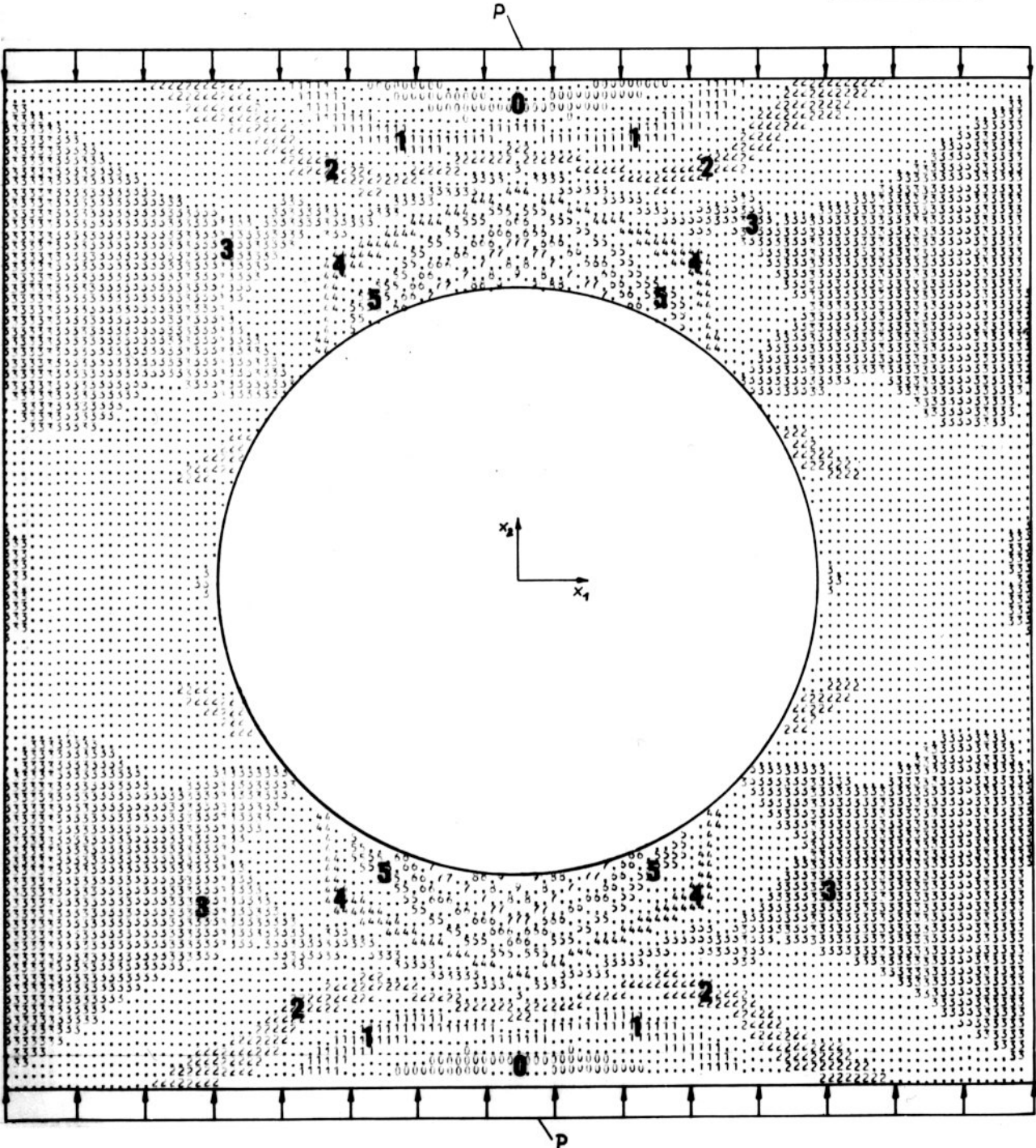
| | | | | | | |
|---|---|---|----------|---|----------|---|
| M | - | < | -2107,00 | 1 | -1907,00 | 1 |
| A | - | < | -2107,00 | 1 | -1907,00 | 1 |
| A | - | < | -1505,00 | 1 | -1205,00 | 1 |
| 1 | - | < | -1204,00 | 1 | -903,00 | 1 |
| 3 | - | < | -903,00 | 1 | -602,00 | 1 |
| 5 | - | < | -602,00 | 1 | -301,00 | 1 |
| 7 | - | < | -301,00 | 1 | 0,00 | 1 |
| 9 | - | < | 0,00 | 1 | 301,00 | 1 |
| 1 | - | < | 301,00 | 1 | 602,00 | 1 |
| 2 | - | < | 602,00 | 1 | 903,00 | 1 |
| 4 | - | < | 903,00 | 1 | 1204,00 | 1 |
| 6 | - | < | 1204,00 | 1 | 1505,00 | 1 |
| 8 | - | < | 1505,00 | 1 | 1806,00 | 1 |
| 1 | - | < | 1806,00 | 1 | 2107,00 | 1 |
| 3 | - | < | 2107,00 | 1 | 2408,00 | 1 |
| 5 | - | < | 2408,00 | 1 | 2709,00 | 1 |
| 7 | - | < | 2709,00 | 1 | 3010,00 | 1 |
| 9 | - | < | 3010,00 | 1 | 3311,00 | 1 |
| 1 | - | < | 3311,00 | 1 | 3612,00 | 1 |
| 3 | - | < | 3612,00 | 1 | 3913,00 | 1 |
| 5 | - | < | 3913,00 | 1 | 4214,00 | 1 |
| 7 | - | < | 4214,00 | 1 | | |
| 9 | - | < | | 1 | | |

Rys.29. Rozkład naprężeń przykt. 10.8a, 11.3a

$p = 1000 \text{ N/m}$

$2R/L = 0,6$

a) $N_{11} [N/m]$

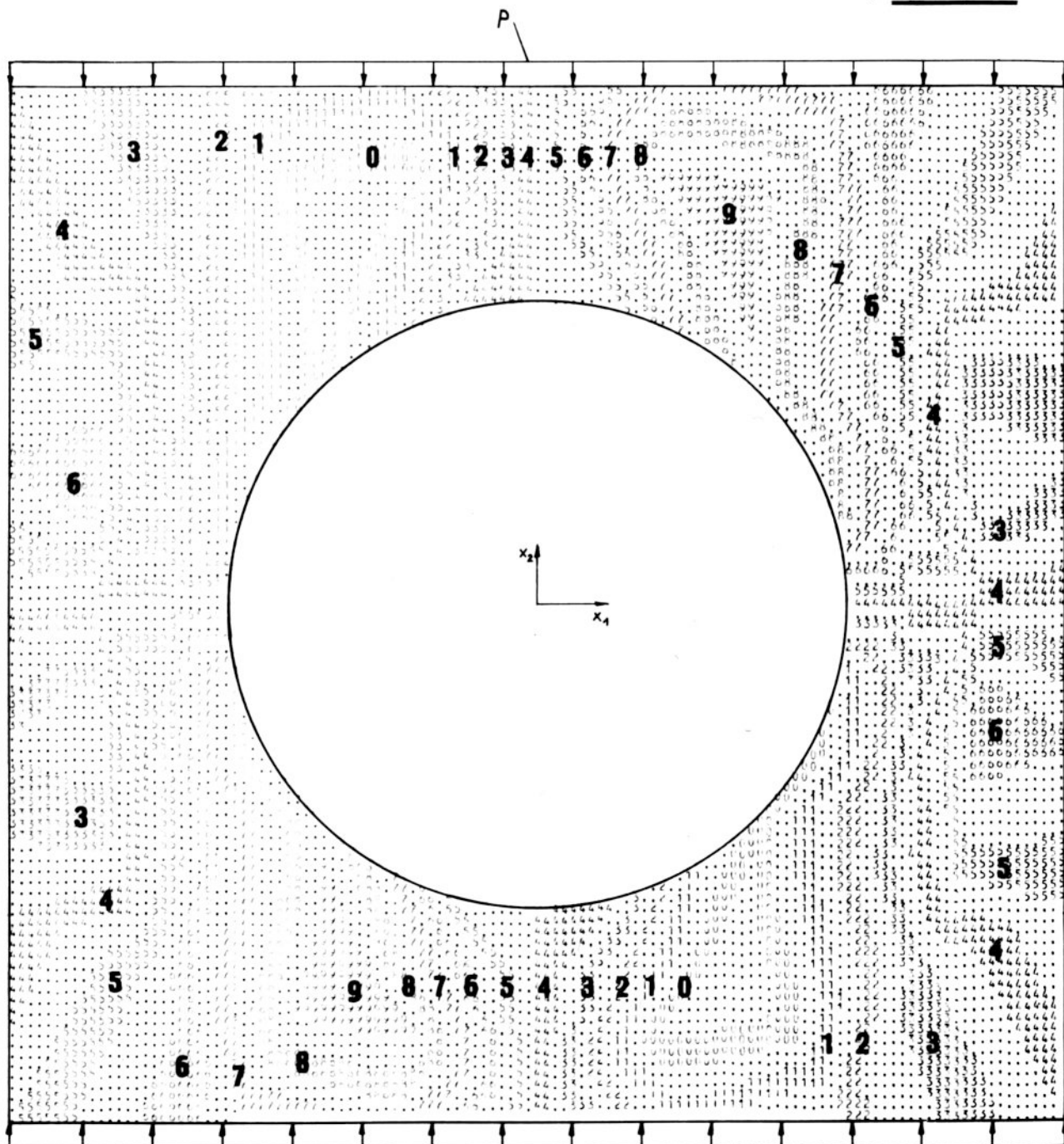


1. Die Spannung σ_{xx} ist in der x_1 - x_2 -Ebene durch die Formel

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{2\pi r_0} \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{r_0^2} - \frac{2x_1 x_2}{r_0^2} \right)$$
 beschrieben, wobei r_0 der Radius des zentralen Lochs ist.



c) N_{xx} [N/m]



PLAN WARSTWICOWY FUNKCJI W OBRZARZE
OGRANICZONYM WSPÓLNIEJYM

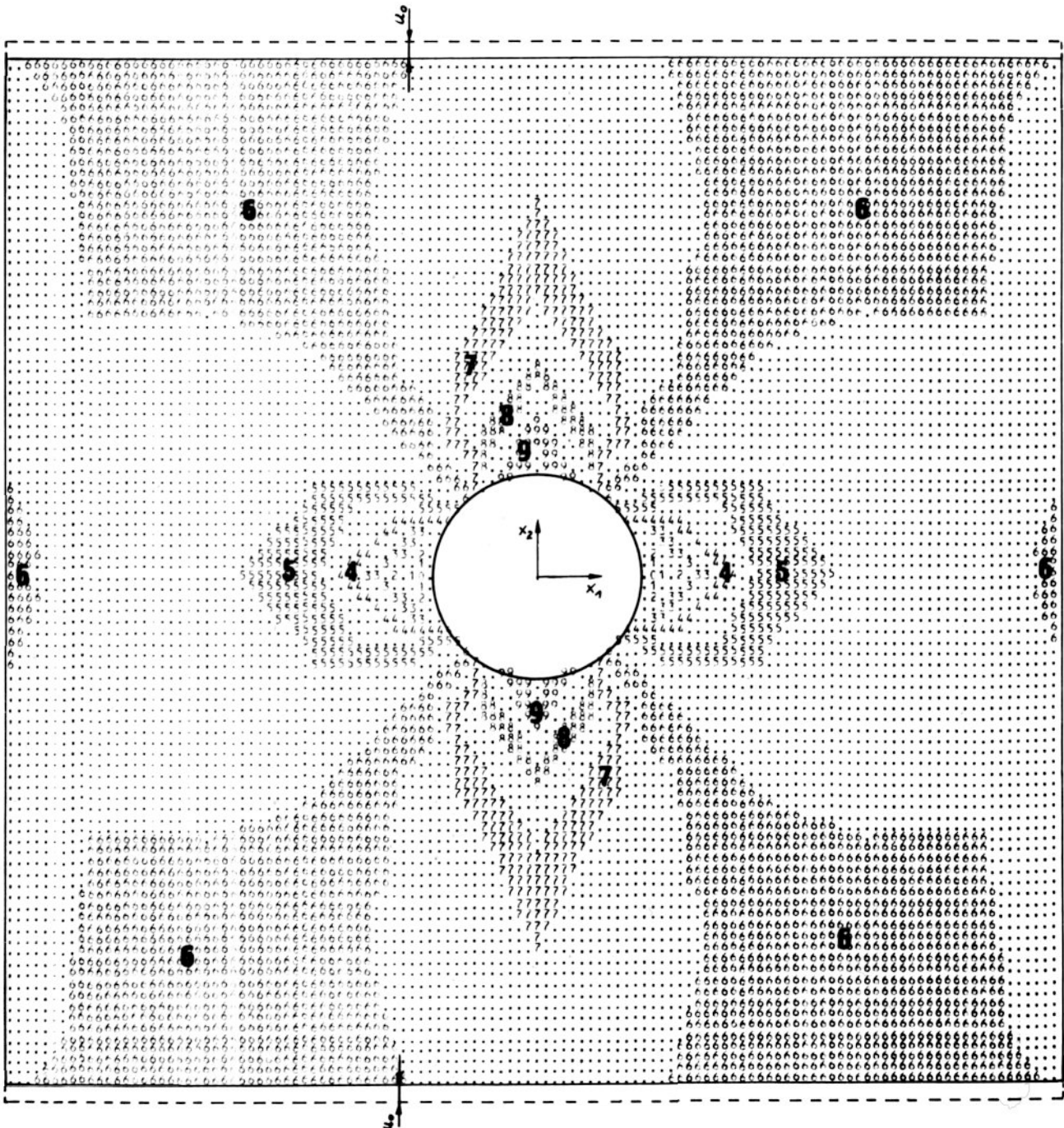
XMIN= 0.00000000E 00 YMIN= 0.00000000E 00

XMAX= 1.00000000E 00 YMAX= 1.00000000E 00

WYKAZ SYMBLI I ODPWIADAJACE IM ZAKRESY ODWZOPOWYWANEJ FUNKCJI

| | | | | | |
|---|---|---|---|------------|---|
| M | - | (| - | 1.00000000 |) |
| 1 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 1 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 2 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 3 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 4 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 5 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 6 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 7 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 8 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 9 | - | (| - | 0.99999999 |) |
| 0 | - | (| - | 0.99999999 |) |

b) N_{22} [N/m]



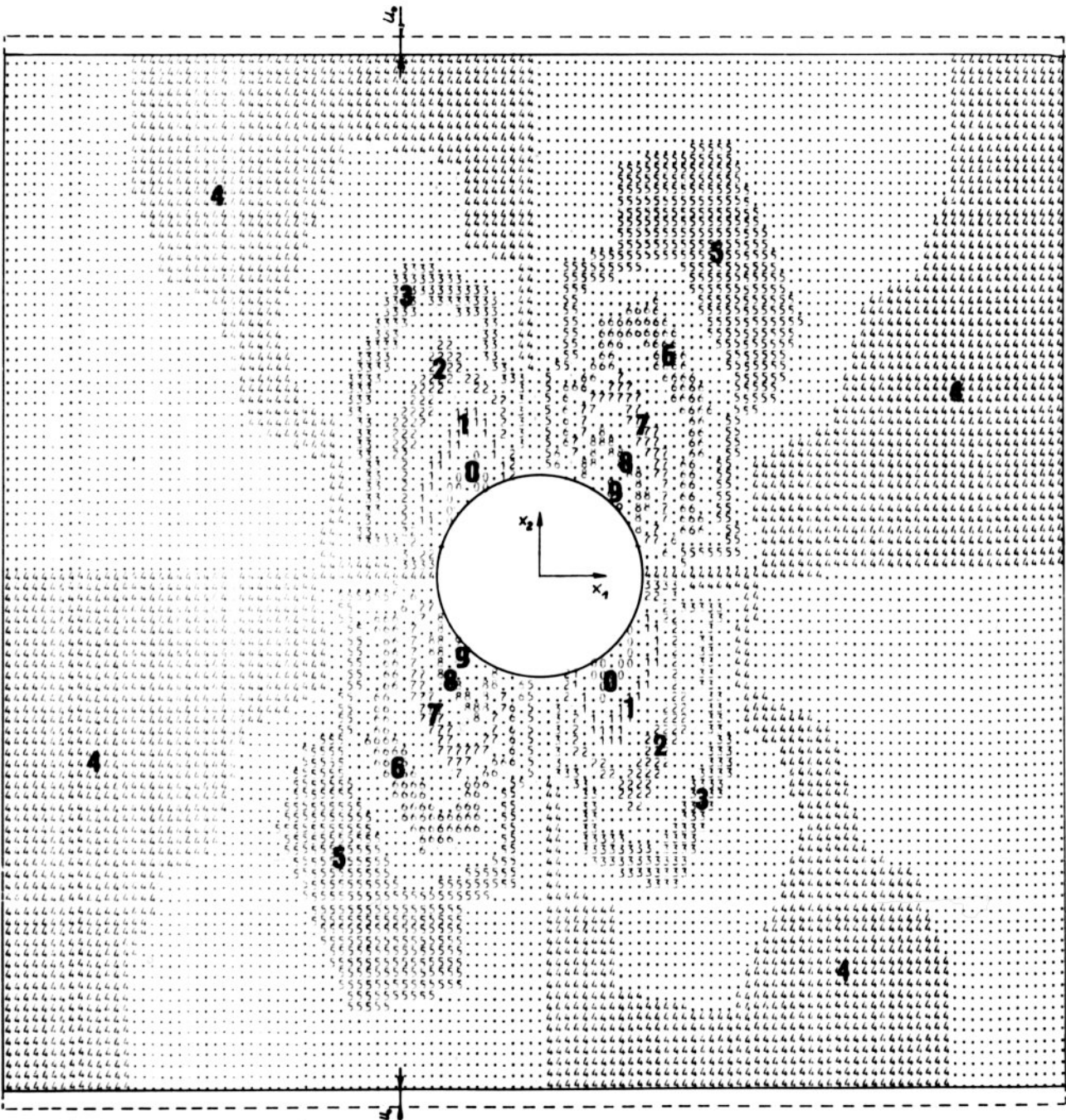
PLAN WARSTWICOWY FUNKCJI OBSZARZE
 OGRANICZONYM WIERZBIENIEM

XMIN= 0.00000000E+00 YMIN= 0.00000000E+00
 XMAX= 1.00000000E+00 YMAX= 1.00000000E+00

WYKAZ SYMPLI I ODRZUTOWYCH W ZAKRESY ODRZUTOWYCH FUNKCJI

| | | | | | | |
|---|---|------|-----|--|--|--|
| 0 | X | -747 | 000 | | | |
| 1 | X | -747 | 000 | | | |
| 1 | X | -566 | 000 | | | |
| 1 | X | -566 | 000 | | | |
| 2 | X | -444 | 000 | | | |
| 2 | X | -322 | 000 | | | |
| 3 | X | -149 | 000 | | | |
| 2 | X | -74 | 000 | | | |
| 0 | Y | 0 | 000 | | | |
| 5 | X | 74 | 000 | | | |
| 5 | X | 149 | 000 | | | |
| 3 | X | 322 | 000 | | | |
| 2 | X | 444 | 000 | | | |
| 1 | X | 566 | 000 | | | |
| 1 | X | 747 | 000 | | | |
| 0 | Y | 0 | 000 | | | |

c) N_{12} [N/m]



PLAN WARTYŚCIOWY FUNKCJI W OBSZARZE
GARANICZONYM WSPÓLNIEJMI

XMIN# 0,000000000E 00 YMIN# 0,000000000E 00
XMAX# 1,000000000 YMAX# 1,000000000

WYKAZ SYMBOLI I ODPOWIEDAJĄCE IM ZAKRESY OKREŚLONYCH FUNKCJI

| | | | |
|----|---|----------|----------|
| 4 | < | -577,300 | -302,000 |
| 3 | < | -377,300 | -202,000 |
| 2 | < | -302,000 | -151,000 |
| 1 | < | -226,300 | -75,500 |
| 0 | < | -151,000 | -75,500 |
| 1 | > | 75,500 | 151,000 |
| 2 | > | 151,000 | 226,300 |
| 3 | > | 226,300 | 302,000 |
| 4 | > | 302,000 | 377,300 |
| 5 | > | 377,300 | 452,000 |
| 6 | > | 452,000 | 527,000 |
| 7 | > | 527,000 | 602,000 |
| 8 | > | 602,000 | 677,300 |
| 9 | > | 677,300 | 752,000 |
| 10 | > | 752,000 | 827,000 |
| 11 | > | 827,000 | 902,000 |
| 12 | > | 902,000 | 977,300 |
| 13 | > | 977,300 | 1052,000 |
| 14 | > | 1052,000 | 1127,000 |
| 15 | > | 1127,000 | 1202,000 |

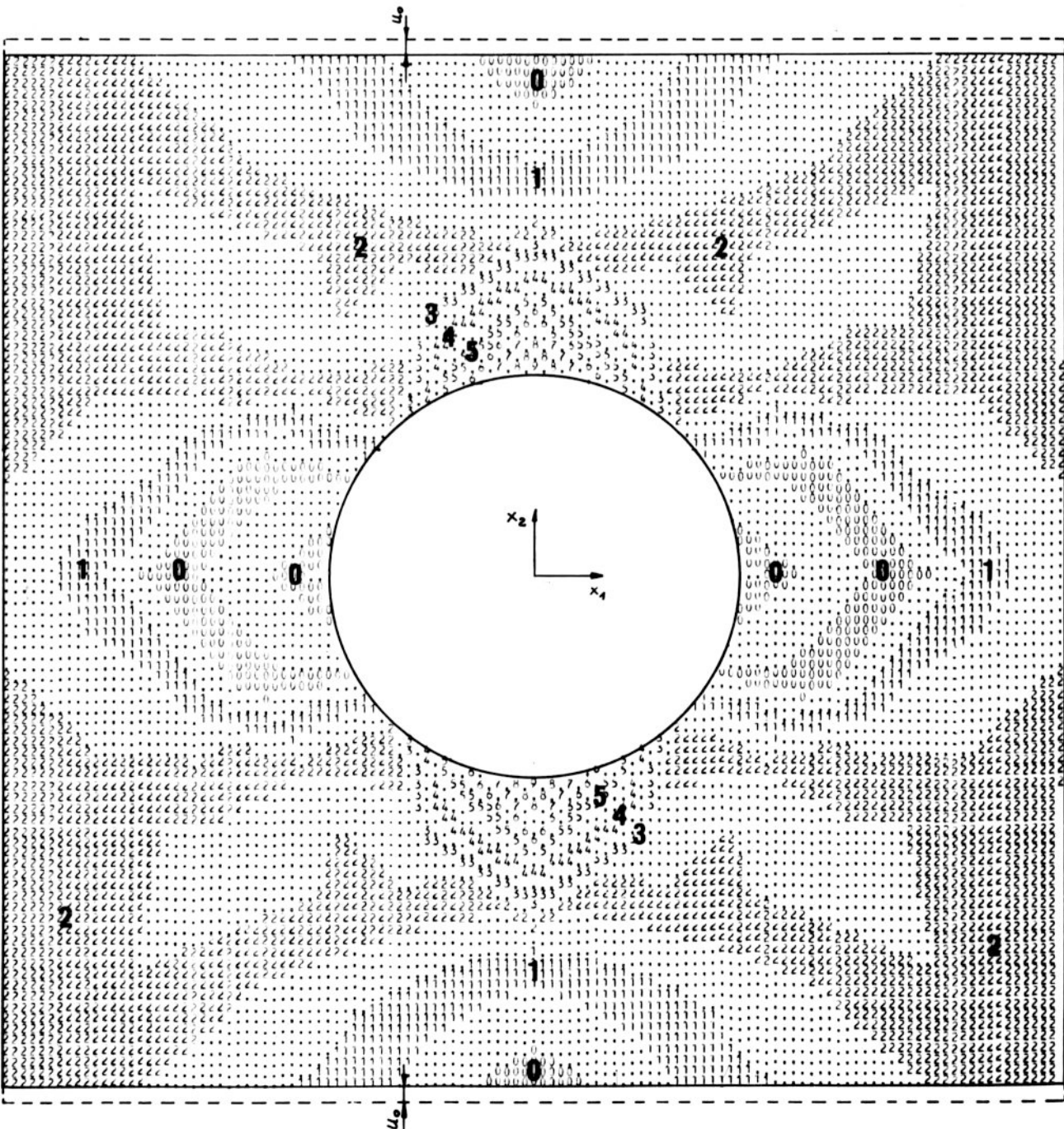
Rys. 31. Rozkład naprężeń przykt. 10.8 b, 11.3 b

$u_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$p_0 = 2099 \text{ N/m}$ (wg wzoru (10.6))

$2R/l = 0,4$

a) N_H [N/m]



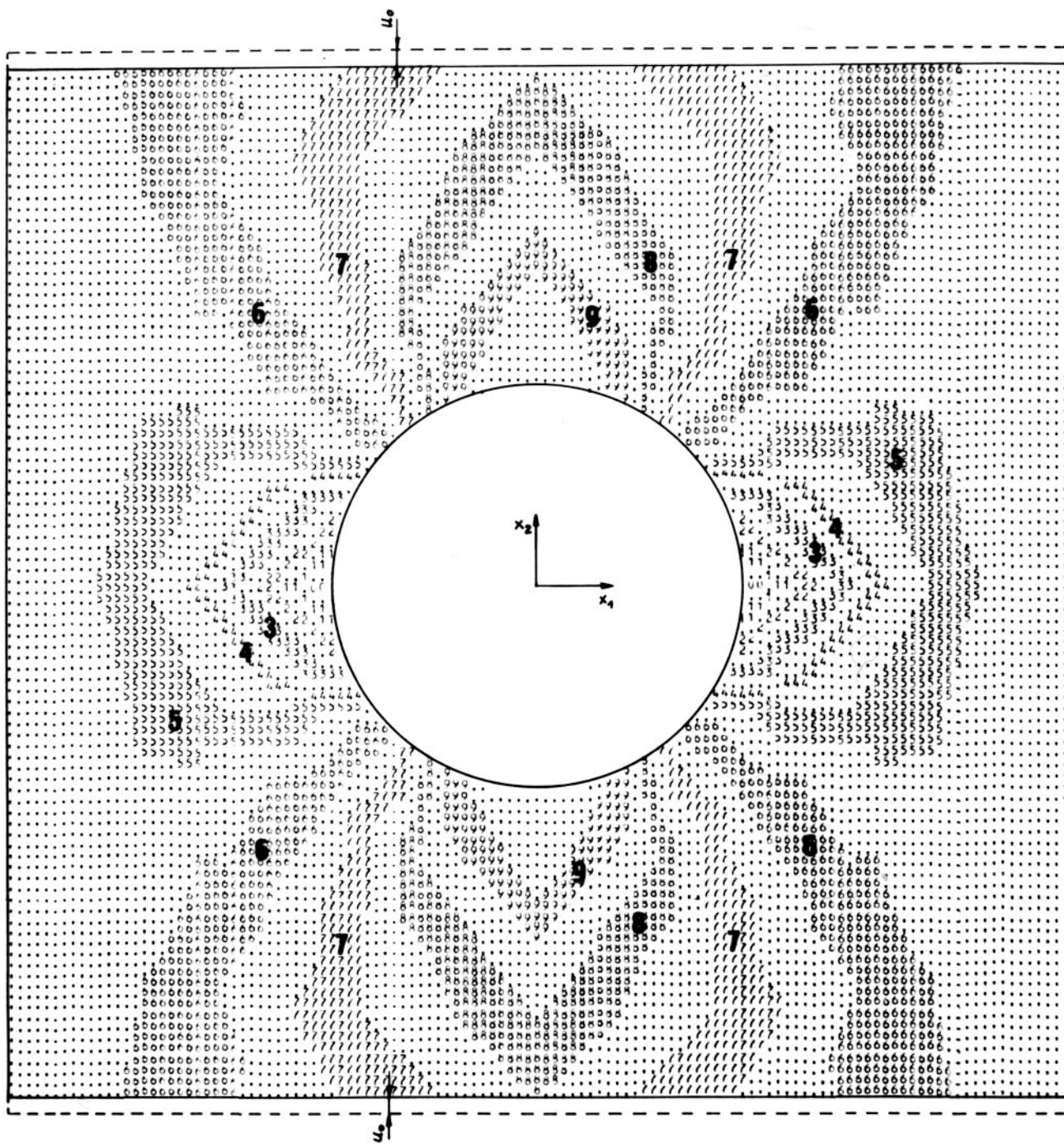
PLAN WARSTWICOWY FUNKCJI U OGRANICZENIE
 OGRANICZONYM WSPERKZEPNYM

YMIN= 0.00000000E 00 YMAX= 0.00000000E 00
 XMAX= 1.00000000E 00 YMAX= 1.00000000E 00

WYKAZ SYMBOLI I ODPORIEDAJACE IM ZAKRESY ODZROKOWYMANEJ FUNKCJI

| | | | | | |
|---|----|----------|--|----------|---|
| M | -< | -6336.00 | | | |
| A | -< | -6336.00 | | -6048.00 |) |
| 1 | -< | -5760.00 | | -5792.00 |) |
| 1 | -< | -5472.00 | | -5184.00 |) |
| 3 | -< | -5184.00 | | -4896.00 |) |
| 3 | -< | -4896.00 | | -4608.00 |) |
| 5 | -< | -4608.00 | | -4320.00 |) |
| 5 | -< | -4320.00 | | -4032.00 |) |
| 7 | -< | -4032.00 | | -3744.00 |) |
| 7 | -< | -3744.00 | | -3456.00 |) |
| 9 | -< | -3456.00 | | -3168.00 |) |
| 9 | -< | -3168.00 | | -2880.00 |) |
| A | -< | -2880.00 | | -2592.00 |) |
| A | -< | -2592.00 | | -2304.00 |) |
| B | -< | -2304.00 | | -2016.00 |) |
| B | -< | -2016.00 | | -1728.00 |) |
| C | -< | -1728.00 | | -1440.00 |) |
| C | -< | -1440.00 | | -1152.00 |) |
| D | -< | -1152.00 | | -864.00 |) |
| D | -< | -864.00 | | -576.00 |) |
| E | -< | -576.00 | | -288.00 |) |
| E | -< | -288.00 | | 0.00 |) |

b) N_{22} [N/m]



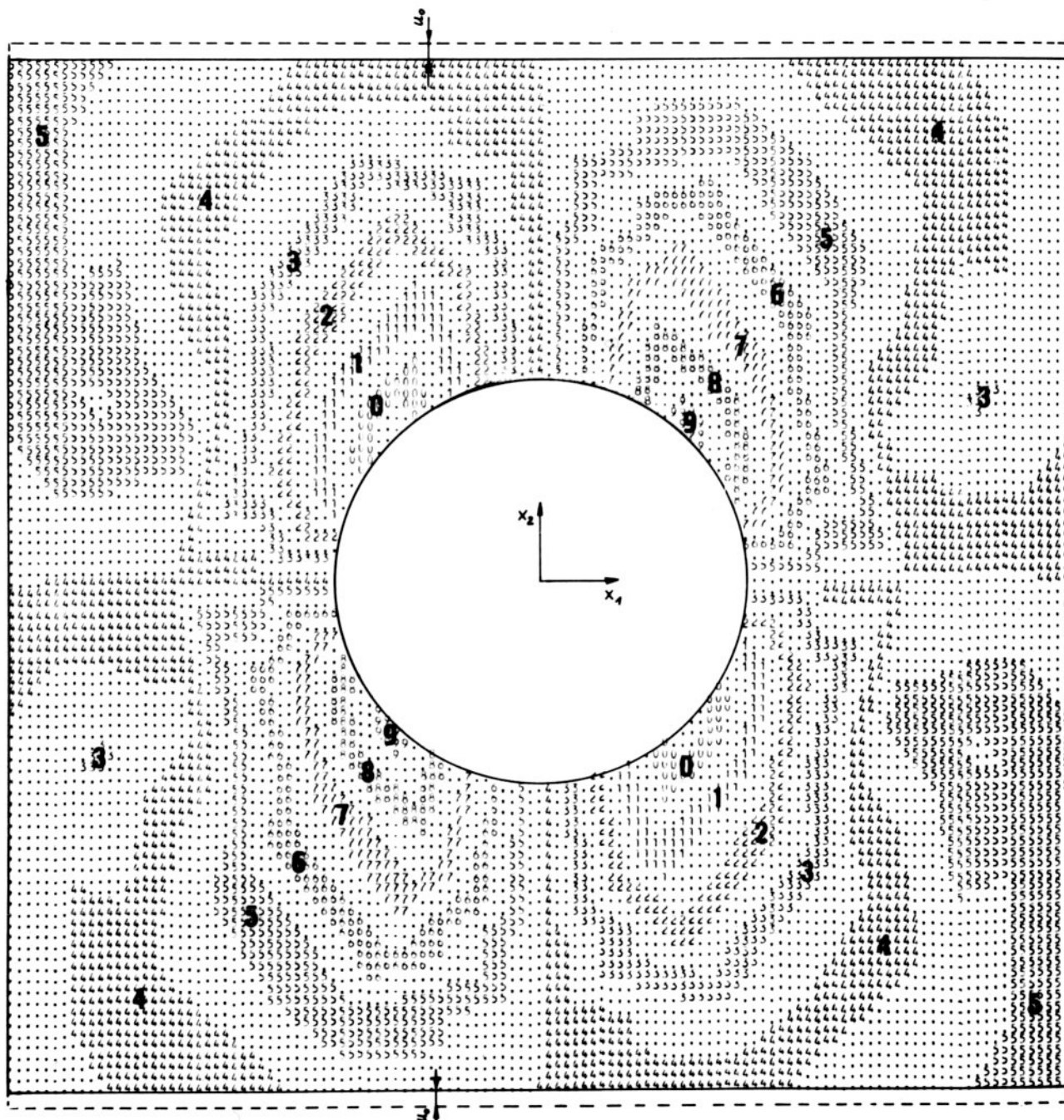
PLAN WARSTWICOWY FUNKCJI I ODSZARZE
URRANTYCZNYM WSPÓŁCZYNAMI

XMIN= 0,000000000000000000 YMIN= 0,000000000000000000
XMAX= 1,000000000000000000 YMAX= 1,000000000000000000

WYKAZ SYMBOLI I ODPÓWIEDAJĄCE IM ZAKRESY ODWZROBIONYCH FUNKCJI

| | | | | | | |
|---|---|---|-------------|--|--------------|---|
| 1 | - | < | -557,000 | | -528,300 |) |
| 1 | - | f | -567,000 | | -419,000 |) |
| 1 | - | f | -329,300 | | -419,000 |) |
| 1 | - | f | -409,500 | | -358,200 |) |
| 1 | - | f | -410,700 | | -203,300 |) |
| 1 | - | f | -332,400 | | -274,000 |) |
| 1 | - | f | -275,300 | | -176,100 |) |
| 1 | - | f | -254,000 | | -117,400 |) |
| 1 | - | f | -176,100 | | -58,700 |) |
| 1 | - | f | -117,400 | | 0 |) |
| 2 | - | < | -70,7000 | | 0,825763E-10 |) |
| 2 | - | f | 0,000000E 0 | | 58,7000 |) |
| 2 | - | f | 56,7000 | | 117,400 |) |
| 2 | - | f | 117,4000 | | 176,100 |) |
| 2 | - | f | 176,100 | | 254,000 |) |
| 2 | - | f | 254,000 | | 329,300 |) |
| 2 | - | f | 275,300 | | 352,400 |) |
| 2 | - | f | 329,300 | | 410,700 |) |
| 2 | - | f | 409,500 | | 469,500 |) |
| 2 | - | f | 410,700 | | 528,300 |) |
| 2 | - | f | 557,000 | | 587,000 |) |
| 2 | - | > | 643,700 | | 643,700 |) |
| 3 | - | > | 643,700 | | |) |

c) N_{12} [N/m]



PLAN KARSTROJOWY PRZYKŁAD 10.8
 GRANICZNYM WSPÓRZĘDNYMI

YMIN= 1,00000000E+01 YMAX= 1,00000000E+01
 XMAX= 1,00000000E+01 XMIN= 1,00000000E+00

ZKĄT SKŁADNI I LUKI IZOLACJE I IZOLACJE GRANICZNE PLANU PRZYKŁAD 10.8

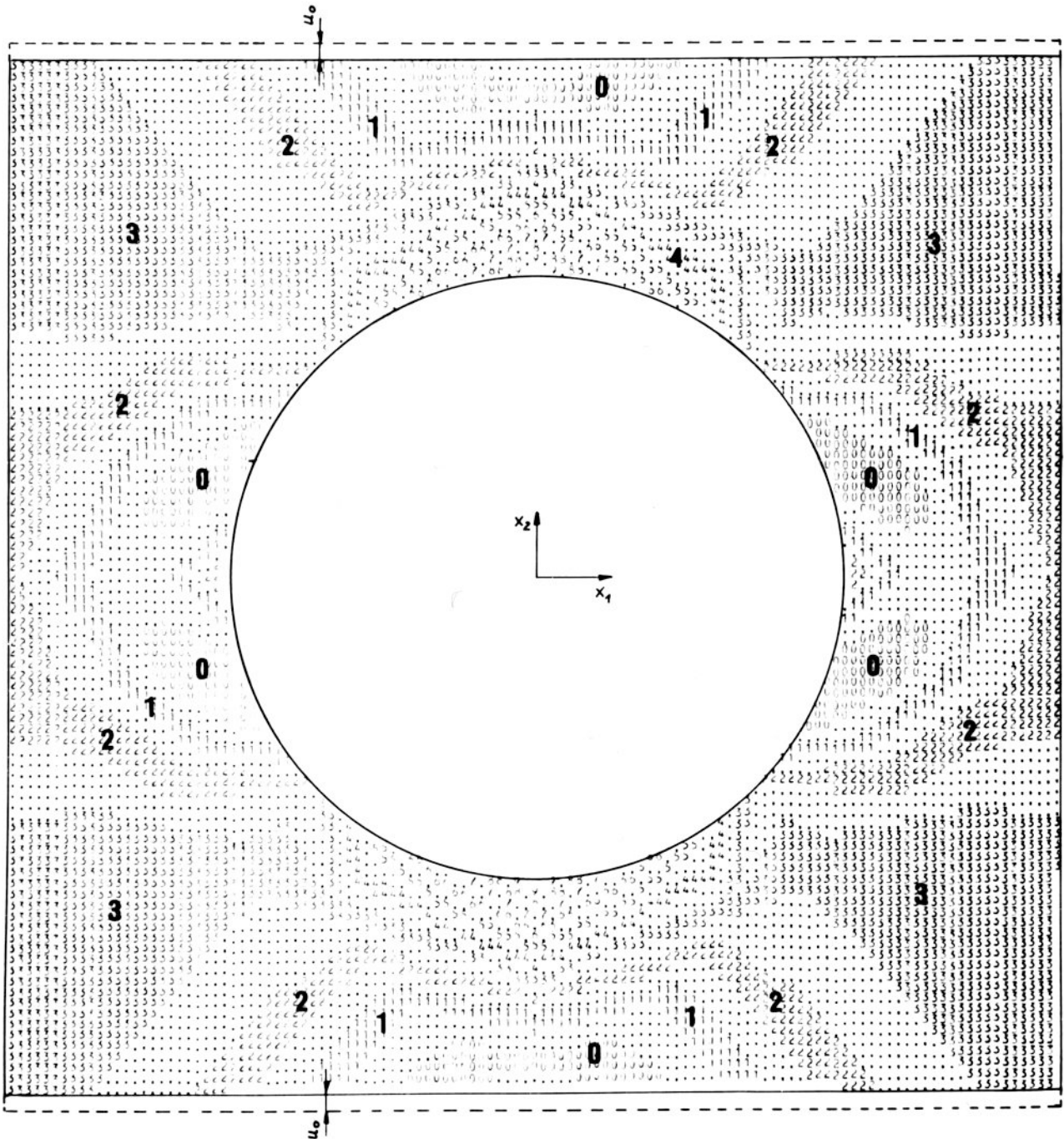
| | | |
|---|---------------|----------|
| 1 | -295,400 | -664,500 |
| 1 | -244,200 | -145,500 |
| 1 | -175,500 | -27,000 |
| 1 | -97,500 | 167,500 |
| 5 | -45,000 | 442,500 |
| 1 | 1,370,000E+01 | 77,500 |
| 1 | 40,000 | 167,500 |
| 1 | 175,500 | 442,500 |
| 1 | 244,200 | 145,500 |
| 2 | 273,000 | 52,500 |
| 2 | 342,000 | 357,500 |
| 5 | 371,000 | 44,000 |
| 1 | 440,000 | 167,500 |
| 1 | 495,000 | 442,500 |
| 5 | 557,000 | 35,000 |
| 5 | 632,000 | 167,500 |
| 1 | 700,000 | 442,500 |
| 1 | 755,000 | 167,500 |

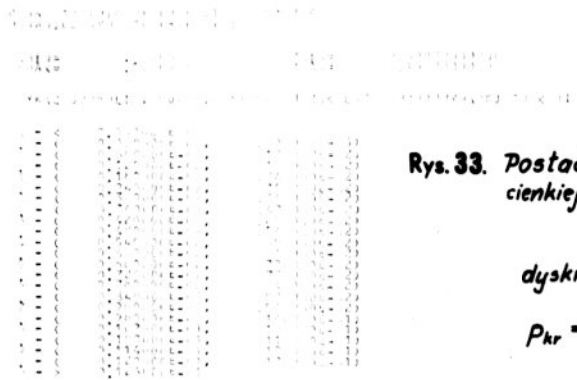
Rys.32. Rozkład naprężeń przykt. 10.8 b, 11.3 b

$u_0 = 20 \cdot 10^{-6} m$
 $p_0 = 1421 N/m$ (wg wzoru (10.6))

$2R/L = 0,6$

a) N_{11} [N/m]

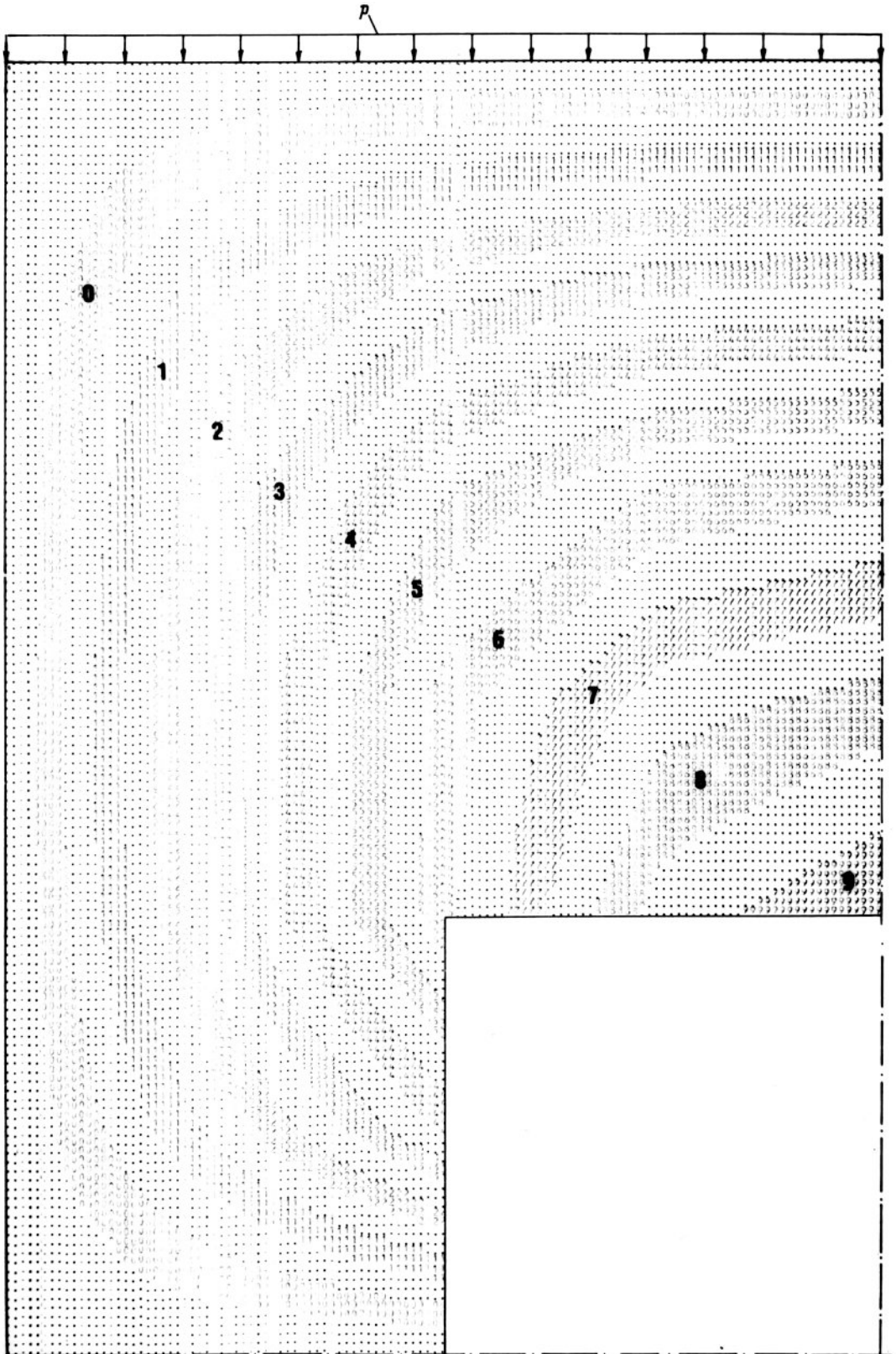




Rys. 33. Postać wyboczenia płyty jednowarstwowej cienkiej z otworem, przykł. 10.7

dyskretyzacja (16 × 24)

$P_{kr} = 4122 \text{ N/m}$

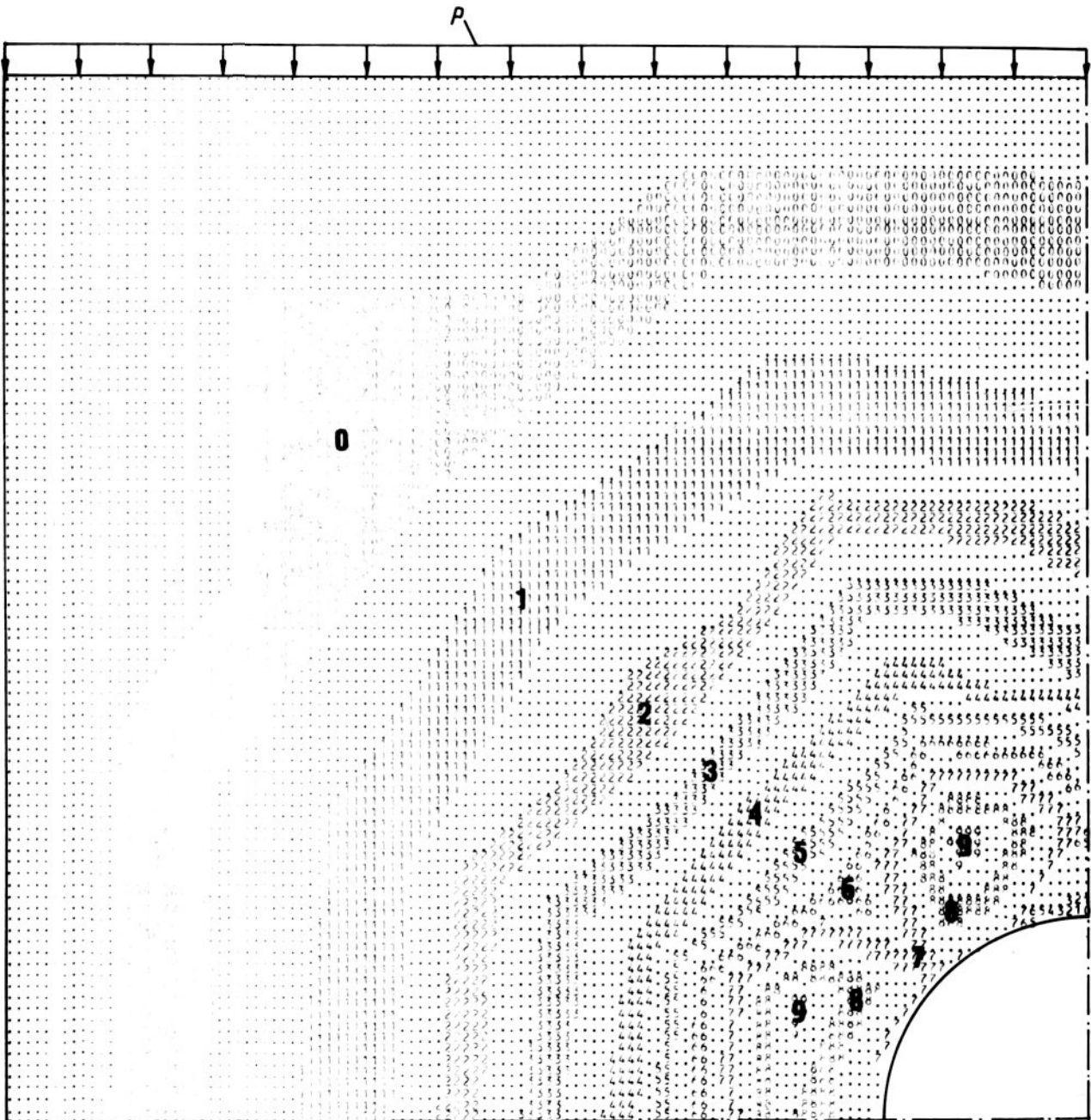


PLAKI
 UCZESTKOWY
 KONTUR
 WYKRES
 WYKRES

Rys.34. Postać wyboczenia płyty jednowarstwowej cienkiej, przykt. 10.8 a

$$C_{kr} = 3,28$$

$$a) 2R/l = 0,2$$



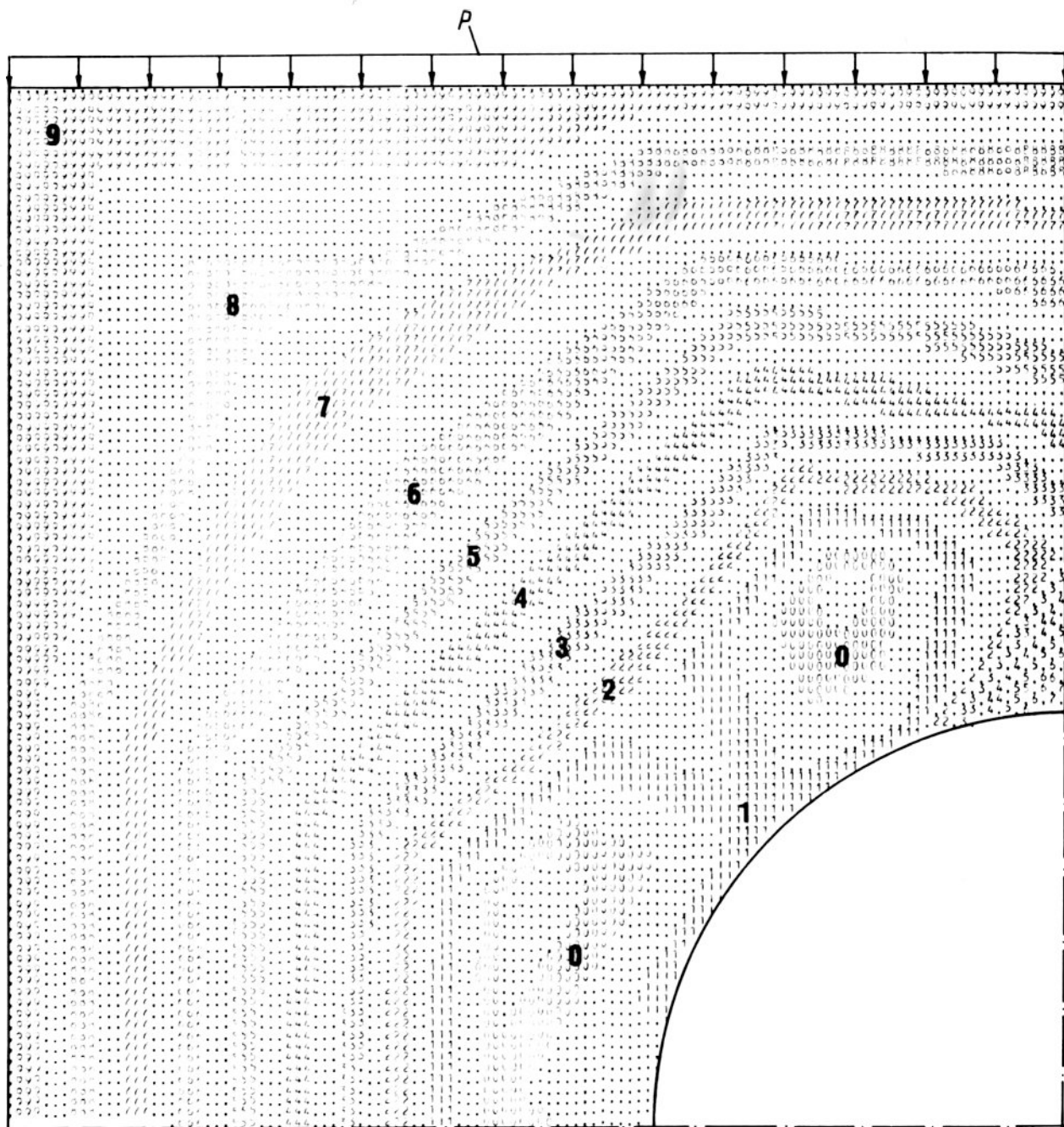
PLAN PRZESIECI PRZY PŁYTY JEDNOWARSTWOWEJ
 GWIAZDZIECIOPOLNEJ (OBLÓWKA)

KNINE 0,0000000 11,1000000 0,0000000 0,0000000 0,0000000 11,1000000 0,0000000 0,0000000
 VPAXE 0,0000000 0,0000000 11,1000000 11,1000000 0,0000000 0,0000000 11,1000000 11,1000000
 (YKAZ SIECIKI FUNKCJONALNEJ, WZGLĘDNEJ IZMISKOWO, WZGLĘDNO DO PUNKTU)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | - |
| 1 | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | - |
| 3 | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - |
| 8 | - | - | - | - | - |
| 9 | - | - | - | - | - |
| 0 | - | - | - | - | - |
| 1 | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | - |
| 3 | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - |
| 8 | - | - | - | - | - |
| 9 | - | - | - | - | - |

b) Postać wybożenia płyty jednowarstwowej
 cienkiej z otworem $2R/L = 0,4$, przykt. 10.8a

$C_{kr} = 3,02$



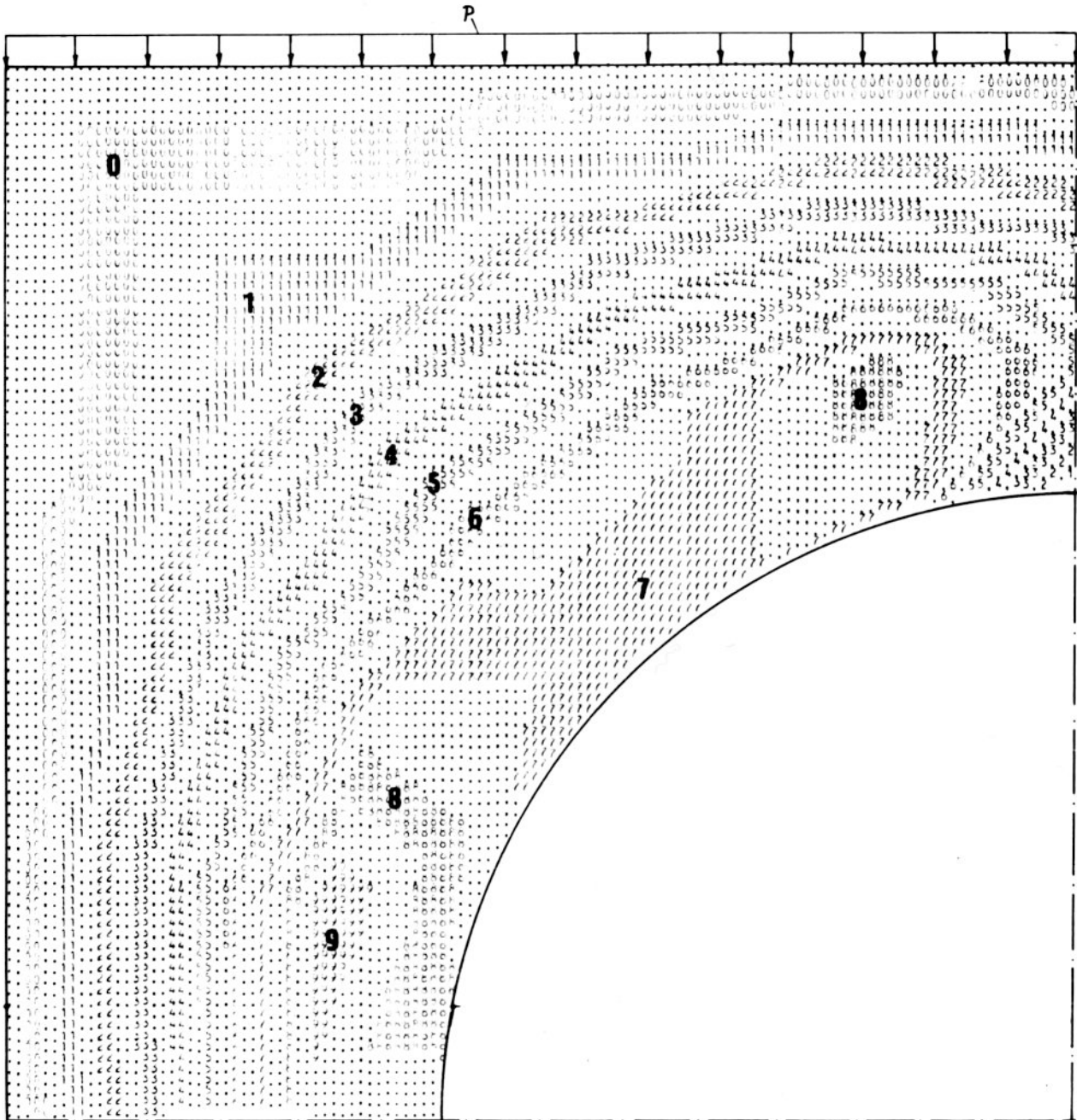
PLAN PRZEKROJU PRACOTWÓRNEGO

KONSTRUKCJA: ...
 MATERIAŁ: ...
 WYMIARY: ...

| | | | |
|-----|----------|----------|----------|
| 1 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 2 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 3 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 4 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 5 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 6 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 7 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 8 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 9 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 10 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 11 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 12 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 13 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 14 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 15 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 16 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 17 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 18 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 19 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 20 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 21 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 22 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 23 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 24 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 25 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 26 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 27 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 28 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 29 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 30 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 31 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 32 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 33 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 34 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 35 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 36 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 37 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 38 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 39 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 40 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 41 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 42 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 43 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 44 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 45 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 46 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 47 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 48 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 49 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 50 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 51 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 52 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 53 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 54 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 55 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 56 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 57 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 58 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 59 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 60 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 61 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 62 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 63 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 64 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 65 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 66 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 67 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 68 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 69 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 70 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 71 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 72 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 73 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 74 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 75 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 76 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 77 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 78 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 79 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 80 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 81 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 82 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 83 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 84 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 85 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 86 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 87 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 88 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 89 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 90 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 91 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 92 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 93 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 94 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 95 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 96 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 97 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 98 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 99 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 100 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |

c) Postać wyboczenia płyty jednowarstwowej cienkiej z otworem $2R/L = 0,6$, przykt. 10.8a

$$C_{kr} = 2,97$$



PLAT LUB STABILNY FUNKCJE I WYKRESY
 WARIANTOWYCH CIENIEZY IYKI

YMIN# 0,000000000000 YMAX# 0,000000000000
 XMIN# 0,000000000000 XMAX# 0,000000000000

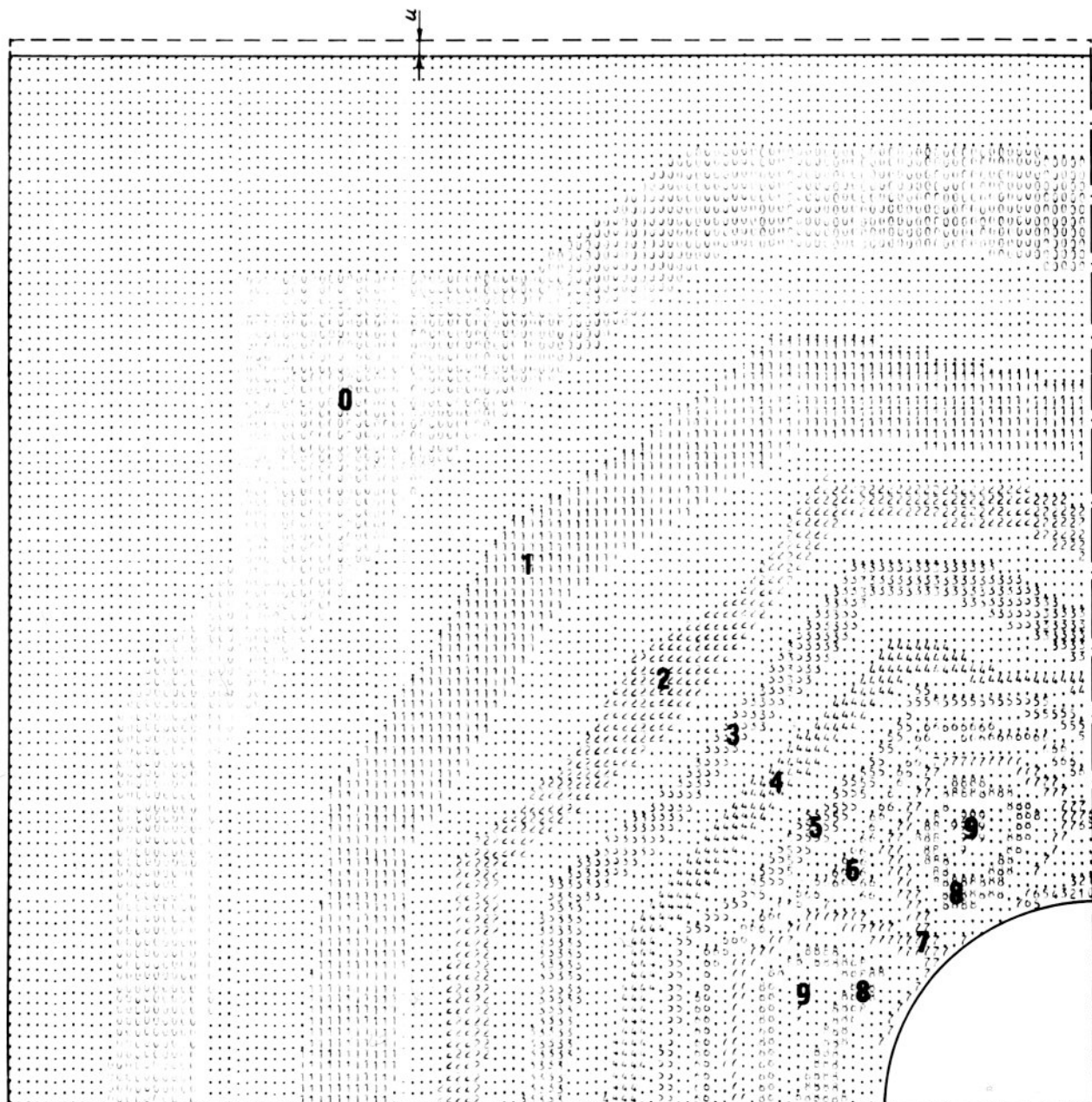
ZYKAZ SYMULI I YKU PRINAJC IY ZAKRESY WYKRESOWYKAZEK FUNKCJI

| | | | | |
|---|---|---|-----------------|-----------------|
| 1 | - | x | 1,000000000000 | 1,110000000000 |
| 1 | - | y | 1,000000000000 | 2,200000000000 |
| 1 | - | z | 5,000000000000 | 2,200000000000 |
| 1 | - | t | 5,000000000000 | 2,200000000000 |
| 1 | - | u | 5,000000000000 | 2,200000000000 |
| 1 | - | v | 5,000000000000 | 2,200000000000 |
| 1 | - | w | 5,000000000000 | 2,200000000000 |
| 1 | - | x | 11,000000000000 | 12,100000000000 |
| 1 | - | y | 14,000000000000 | 14,200000000000 |
| 1 | - | z | 14,000000000000 | 15,200000000000 |
| 1 | - | t | 15,000000000000 | 16,200000000000 |
| 1 | - | u | 15,000000000000 | 17,200000000000 |
| 1 | - | v | 16,000000000000 | 18,200000000000 |
| 1 | - | w | 16,000000000000 | 19,200000000000 |
| 1 | - | x | 20,000000000000 | 22,100000000000 |
| 1 | - | y | 23,000000000000 | 24,100000000000 |

Rys. 35a. Postać wyboczenia płyty jednowarstwowej cienkiej z otworem $2R/l = 0,2$, przykł. 10.8b

$$C_{kr} = 3,34$$

$$u_{kr} = 1,6303 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$



PLAN WYBIEŻENIA WYKRESZKI
 WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI

WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI

WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI

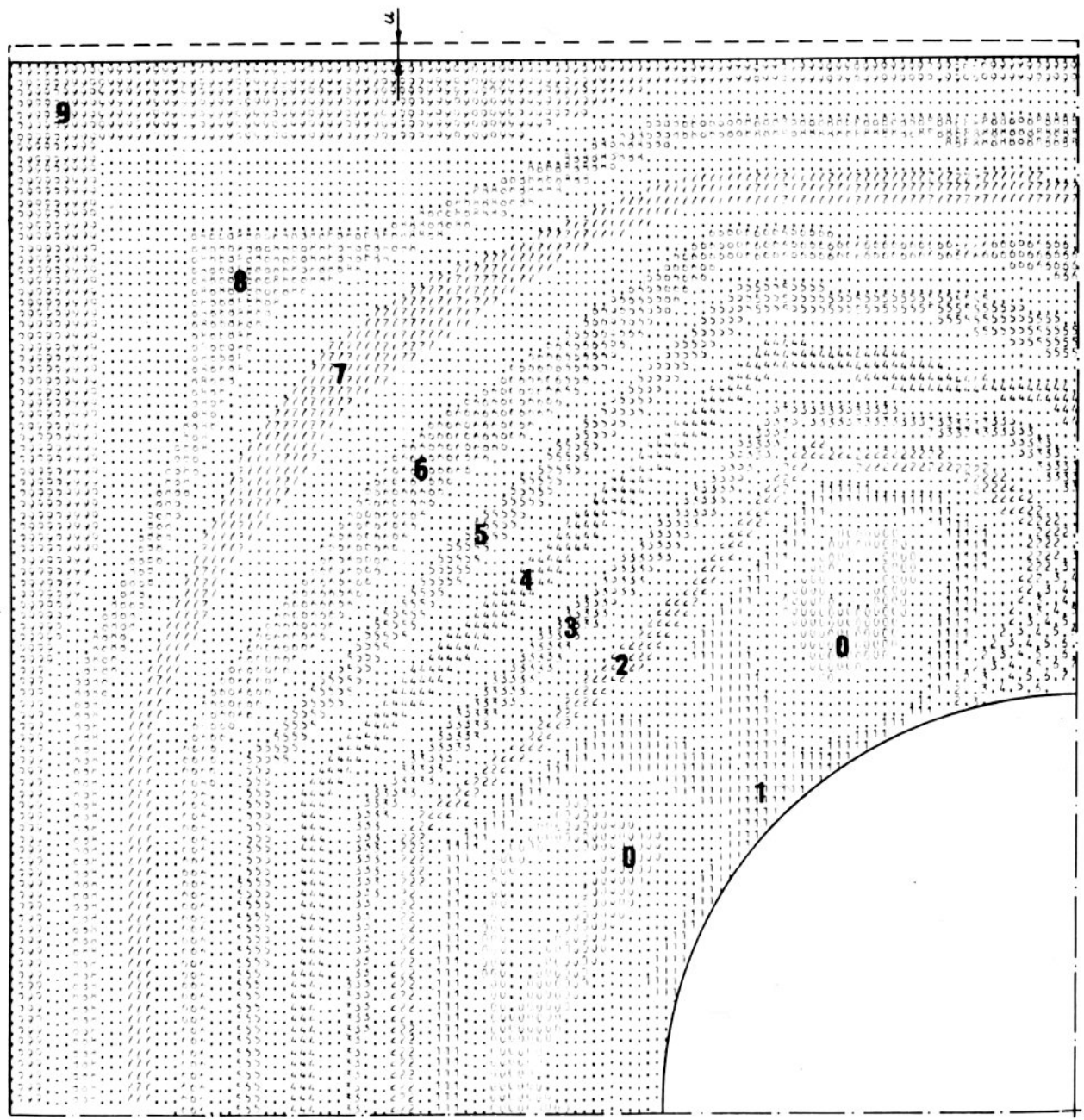
WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI WYKRESZKI

| | | |
|-----|-----------|---------|
| 1 | -10,3000 | -7,7500 |
| 2 | -11,7500 | -7,7500 |
| 3 | -13,2000 | -7,7500 |
| 4 | -14,6500 | -7,7500 |
| 5 | -16,1000 | -7,7500 |
| 6 | -17,5500 | -7,7500 |
| 7 | -19,0000 | -7,7500 |
| 8 | -20,4500 | -7,7500 |
| 9 | -21,9000 | -7,7500 |
| 10 | -23,3500 | -7,7500 |
| 11 | -24,8000 | -7,7500 |
| 12 | -26,2500 | -7,7500 |
| 13 | -27,7000 | -7,7500 |
| 14 | -29,1500 | -7,7500 |
| 15 | -30,6000 | -7,7500 |
| 16 | -32,0500 | -7,7500 |
| 17 | -33,5000 | -7,7500 |
| 18 | -34,9500 | -7,7500 |
| 19 | -36,4000 | -7,7500 |
| 20 | -37,8500 | -7,7500 |
| 21 | -39,3000 | -7,7500 |
| 22 | -40,7500 | -7,7500 |
| 23 | -42,2000 | -7,7500 |
| 24 | -43,6500 | -7,7500 |
| 25 | -45,1000 | -7,7500 |
| 26 | -46,5500 | -7,7500 |
| 27 | -48,0000 | -7,7500 |
| 28 | -49,4500 | -7,7500 |
| 29 | -50,9000 | -7,7500 |
| 30 | -52,3500 | -7,7500 |
| 31 | -53,8000 | -7,7500 |
| 32 | -55,2500 | -7,7500 |
| 33 | -56,7000 | -7,7500 |
| 34 | -58,1500 | -7,7500 |
| 35 | -59,6000 | -7,7500 |
| 36 | -61,0500 | -7,7500 |
| 37 | -62,5000 | -7,7500 |
| 38 | -63,9500 | -7,7500 |
| 39 | -65,4000 | -7,7500 |
| 40 | -66,8500 | -7,7500 |
| 41 | -68,3000 | -7,7500 |
| 42 | -69,7500 | -7,7500 |
| 43 | -71,2000 | -7,7500 |
| 44 | -72,6500 | -7,7500 |
| 45 | -74,1000 | -7,7500 |
| 46 | -75,5500 | -7,7500 |
| 47 | -77,0000 | -7,7500 |
| 48 | -78,4500 | -7,7500 |
| 49 | -79,9000 | -7,7500 |
| 50 | -81,3500 | -7,7500 |
| 51 | -82,8000 | -7,7500 |
| 52 | -84,2500 | -7,7500 |
| 53 | -85,7000 | -7,7500 |
| 54 | -87,1500 | -7,7500 |
| 55 | -88,6000 | -7,7500 |
| 56 | -90,0500 | -7,7500 |
| 57 | -91,5000 | -7,7500 |
| 58 | -92,9500 | -7,7500 |
| 59 | -94,4000 | -7,7500 |
| 60 | -95,8500 | -7,7500 |
| 61 | -97,3000 | -7,7500 |
| 62 | -98,7500 | -7,7500 |
| 63 | -100,2000 | -7,7500 |
| 64 | -101,6500 | -7,7500 |
| 65 | -103,1000 | -7,7500 |
| 66 | -104,5500 | -7,7500 |
| 67 | -106,0000 | -7,7500 |
| 68 | -107,4500 | -7,7500 |
| 69 | -108,9000 | -7,7500 |
| 70 | -110,3500 | -7,7500 |
| 71 | -111,8000 | -7,7500 |
| 72 | -113,2500 | -7,7500 |
| 73 | -114,7000 | -7,7500 |
| 74 | -116,1500 | -7,7500 |
| 75 | -117,6000 | -7,7500 |
| 76 | -119,0500 | -7,7500 |
| 77 | -120,5000 | -7,7500 |
| 78 | -121,9500 | -7,7500 |
| 79 | -123,4000 | -7,7500 |
| 80 | -124,8500 | -7,7500 |
| 81 | -126,3000 | -7,7500 |
| 82 | -127,7500 | -7,7500 |
| 83 | -129,2000 | -7,7500 |
| 84 | -130,6500 | -7,7500 |
| 85 | -132,1000 | -7,7500 |
| 86 | -133,5500 | -7,7500 |
| 87 | -135,0000 | -7,7500 |
| 88 | -136,4500 | -7,7500 |
| 89 | -137,9000 | -7,7500 |
| 90 | -139,3500 | -7,7500 |
| 91 | -140,8000 | -7,7500 |
| 92 | -142,2500 | -7,7500 |
| 93 | -143,7000 | -7,7500 |
| 94 | -145,1500 | -7,7500 |
| 95 | -146,6000 | -7,7500 |
| 96 | -148,0500 | -7,7500 |
| 97 | -149,5000 | -7,7500 |
| 98 | -150,9500 | -7,7500 |
| 99 | -152,4000 | -7,7500 |
| 100 | -153,8500 | -7,7500 |

b. Postać wybożenia płyty jednowarstwowej
 cienkiej z otworem $2R/L=0,4$, przykk. 10.8b

$$C_{kr} = 3,31$$

$$u_{kr} = 2,0104 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

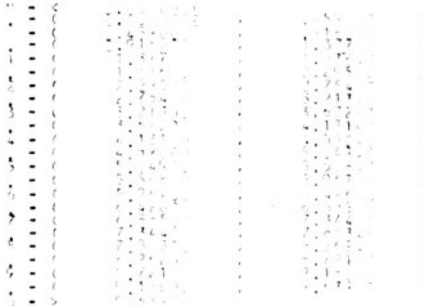


PLAN PRZEKROJU PRZYKŁADU WYKONANIA
 UPRASZCZONY

WYMIAR: 100 mm x 100 mm x 10 mm

WYMIAR: 100 mm x 100 mm x 10 mm

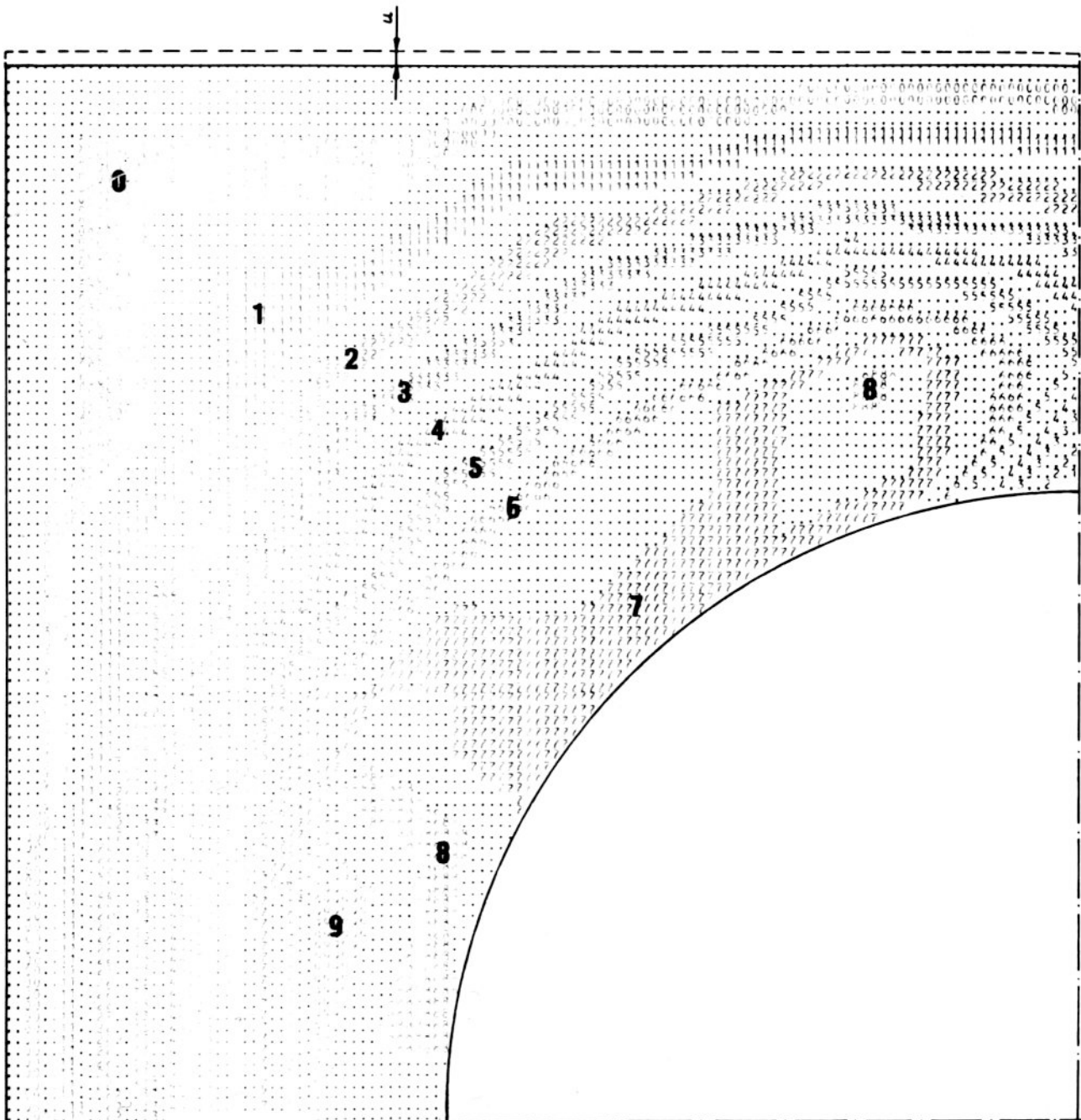
WYKAZ SIŁYCIŁA WYKONANIA WYKONANIA WYKONANIA



c. Postać wyboczenia płyty jednowarstwowej
 cienkiej z otworem $2R/L = 0,6$, przykt. 10.8b

$$C_{kr} = 4,15$$

$$u_{kr} = 3,7254 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

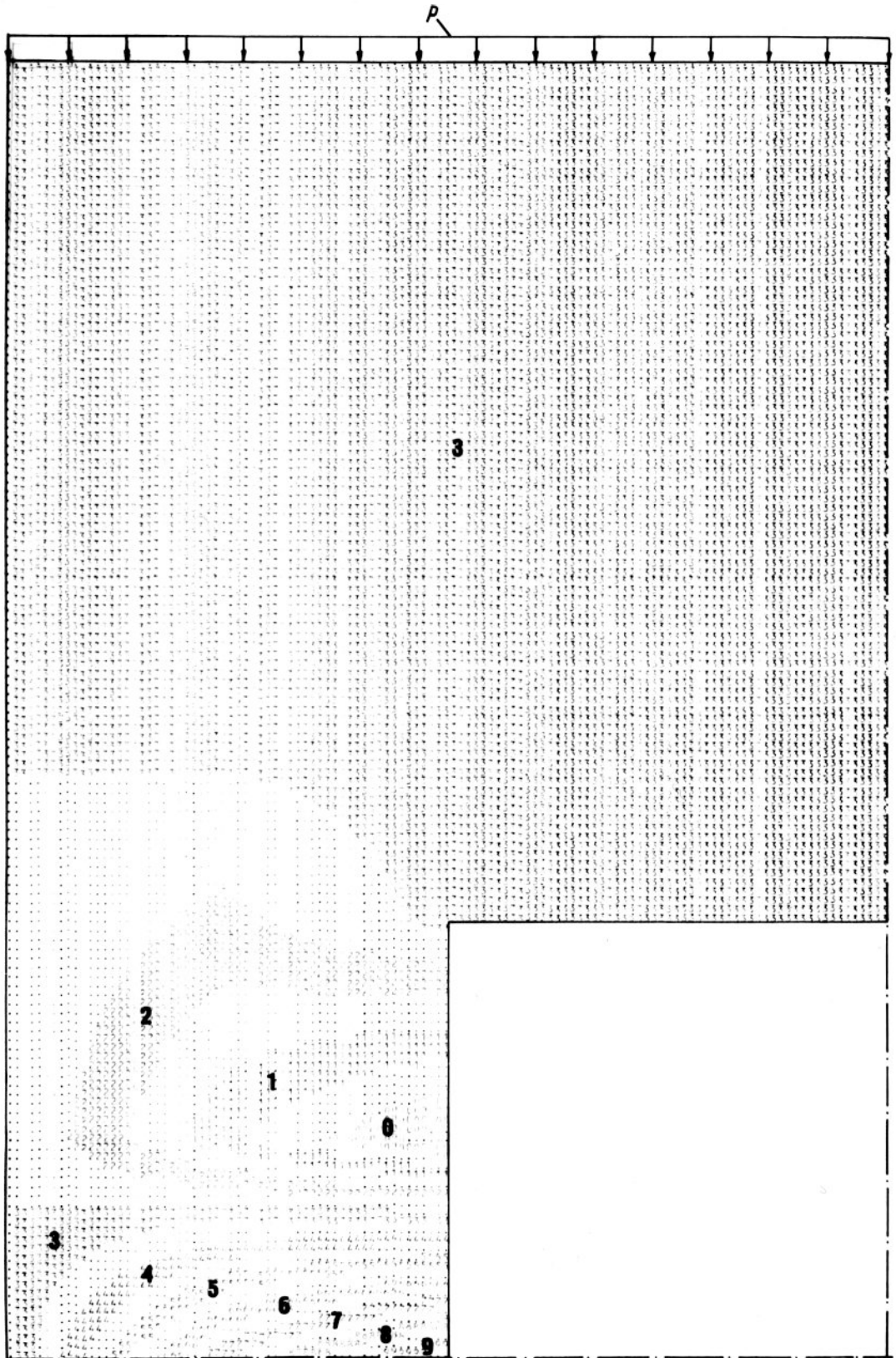




Rys. 36. Postać wyboczenia płyty trójwarstwowej z otworem, przykt. 11.1

$$P_{kr} = 156,370 \text{ kN/m}$$

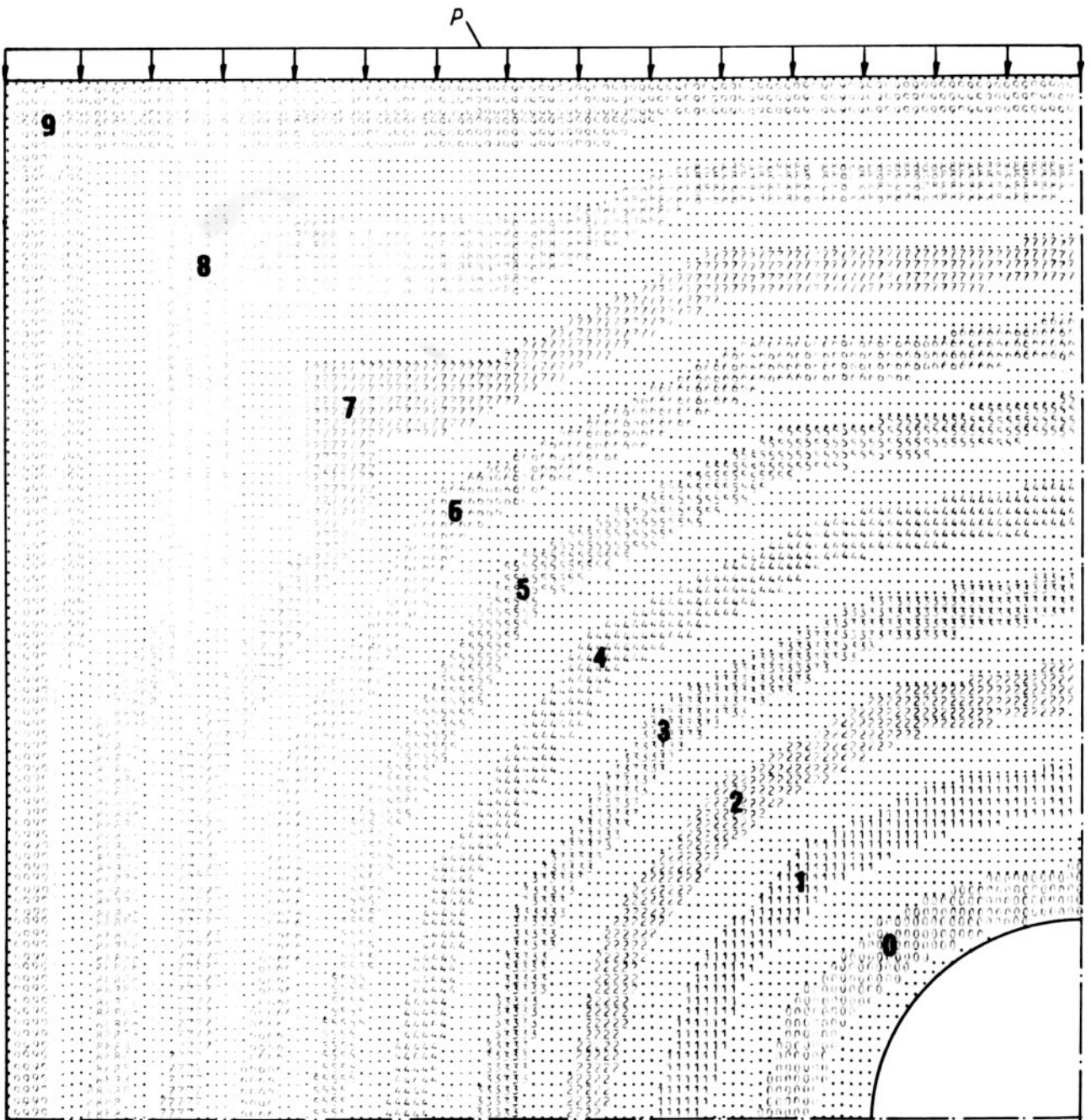
dyskretyzacja (8 x 12)



Rys. 37a. Postać wyboczenia płyty trójwarstwowej z otworem, przykł. 11.3a

$$p_{kr} = 59,827 \text{ kN/m}$$

$$2R/L = 0,2$$



PLAN PRZESZKONYBIENIA WYKRES
OPERACYJNY WYKRES

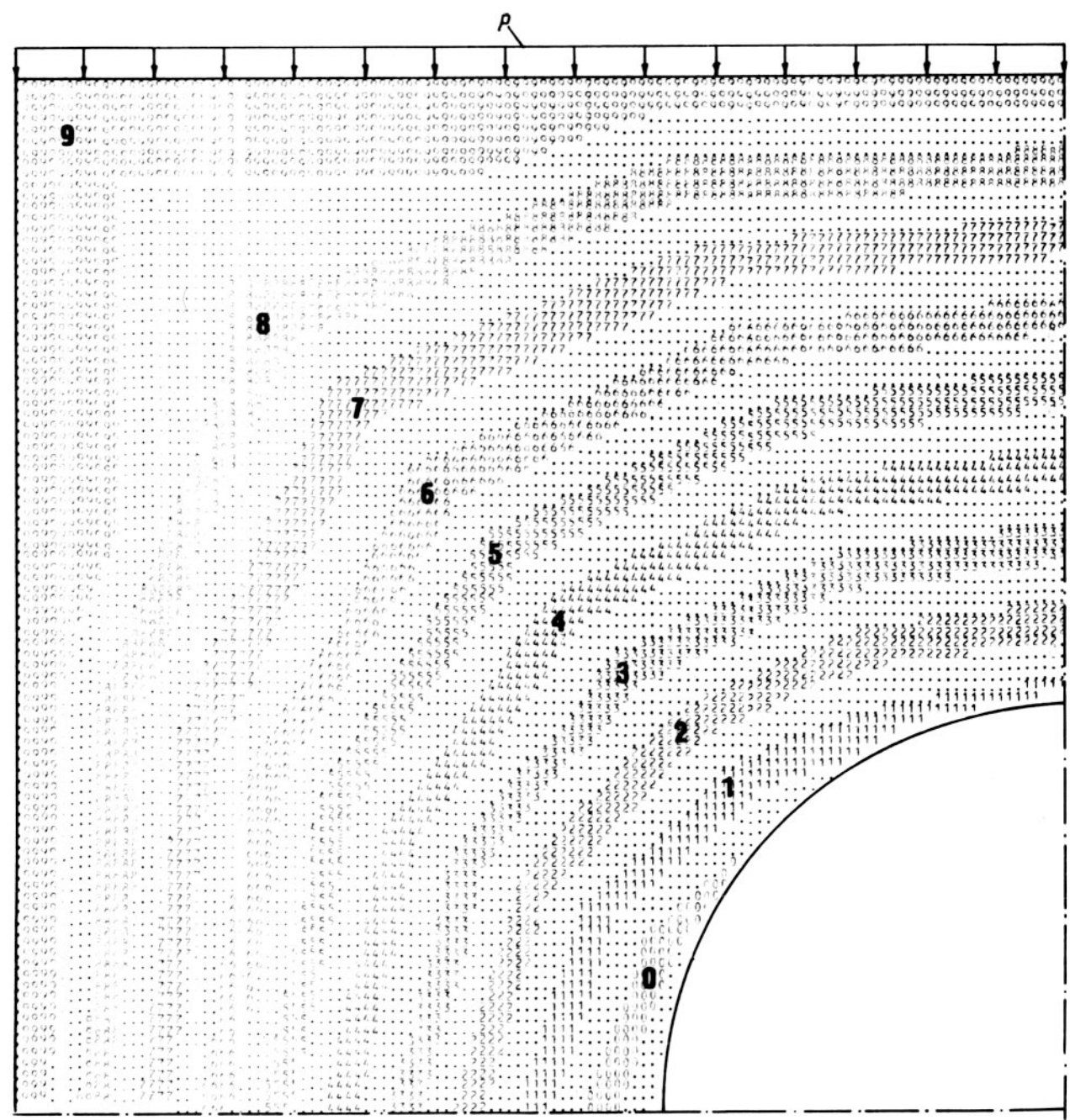
WYKRES PRZESZKONYBIENIA WYKRES
OPERACYJNY WYKRES
WYKRES PRZESZKONYBIENIA WYKRES
OPERACYJNY WYKRES

| S | L | ... |
|----|-----|-----|
| 1 | ... | ... |
| 2 | ... | ... |
| 3 | ... | ... |
| 4 | ... | ... |
| 5 | ... | ... |
| 6 | ... | ... |
| 7 | ... | ... |
| 8 | ... | ... |
| 9 | ... | ... |
| 10 | ... | ... |
| 11 | ... | ... |
| 12 | ... | ... |
| 13 | ... | ... |
| 14 | ... | ... |
| 15 | ... | ... |
| 16 | ... | ... |
| 17 | ... | ... |
| 18 | ... | ... |
| 19 | ... | ... |
| 20 | ... | ... |

Rys.37b. Postać wyboczenia płyty trójwarstwowej z otworem, przykt. 11.3a

$P_{kr} = 51,680 \text{ kN/m}$

$2R/L = 0,4$



PLAN DEFORMACJI KRÓTKOCZASOWYCH
ORGANIZOWANEJ W OŚRODKU

WIDOK: ...

WYKAZ: ...

WYKAZ: ...

| | | |
|----|-----|-----|
| 1 | ... | ... |
| 2 | ... | ... |
| 3 | ... | ... |
| 4 | ... | ... |
| 5 | ... | ... |
| 6 | ... | ... |
| 7 | ... | ... |
| 8 | ... | ... |
| 9 | ... | ... |
| 10 | ... | ... |
| 11 | ... | ... |
| 12 | ... | ... |
| 13 | ... | ... |
| 14 | ... | ... |
| 15 | ... | ... |
| 16 | ... | ... |
| 17 | ... | ... |
| 18 | ... | ... |
| 19 | ... | ... |
| 20 | ... | ... |
| 21 | ... | ... |
| 22 | ... | ... |
| 23 | ... | ... |
| 24 | ... | ... |
| 25 | ... | ... |
| 26 | ... | ... |
| 27 | ... | ... |
| 28 | ... | ... |
| 29 | ... | ... |
| 30 | ... | ... |
| 31 | ... | ... |
| 32 | ... | ... |
| 33 | ... | ... |
| 34 | ... | ... |
| 35 | ... | ... |
| 36 | ... | ... |
| 37 | ... | ... |
| 38 | ... | ... |
| 39 | ... | ... |
| 40 | ... | ... |
| 41 | ... | ... |
| 42 | ... | ... |
| 43 | ... | ... |
| 44 | ... | ... |
| 45 | ... | ... |
| 46 | ... | ... |
| 47 | ... | ... |
| 48 | ... | ... |
| 49 | ... | ... |
| 50 | ... | ... |

c. Postać wybożenia płyty trójwarstwowej z otworem, przykt. 11.3a

$$P_{kr} = 42,423 \text{ kN/m}$$

$$2R/L = 0,6$$

