

Agnieszka Przybylska-Mazur

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

ZASTOSOWANIE METODY AUTOREGRESJI W PROGNOZOWANIU CEN AKCJI FIRMY TELEKOMUNIKACYJNEJ

1. Wstęp

Ceny wielu towarów, walut obcych i papierów wartościowych podlegają w większości wpływom losowym. W artykule zaprezentowano testowanie prawidłowości hipotezy błędzenia losowego jako modelu opisującego zachowanie się cen na rynku spekulacyjnym. W tym celu testy statystyczne na badanie autokorelacji zostały zastosowane do pierwszych różnic cen akcji.

W artykule została wykorzystana jedna ze stochastycznych metod prognozowania – metoda autokorelacji. Obliczenia wykonano na dostępnych danych dotyczących kształtowania się cen akcji firmy telekomunikacyjnej notowanej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

2. Stacjonarność procesu stochastycznego

Proces stochastyczny jest stacjonarny w szerszym sensie jeżeli $E(X_t) = E(X(t)) = \bar{x} = const$, $V(X_t) = V(X(t)) = const$, a także jego funkcja autokowariancji $E[(x_t - E(x_t))(x_{t+k} - E(x_{t+k}))]$ zależy tylko od przesunięcia czasowego k i nie zależy od czasu t .

W przypadku niestacjonarności spowodowanej zmienną wartością średnią przed przystąpieniem do prognozowania należy zmiany niestacjonarne częściowo wyeliminować poprzez obliczenie jedno- lub wielokrotnych różnic szeregu czasowego.

Szereg niestacjonarny, który można sprowadzić do szeregu stacjonarnego, obliczając przyrosty d razy, nazywamy szeregiem zintegrowanym stopnia d . Szereg zintegrowany stopnia d najczęściej oznacza się w literaturze symbolem $x_t \sim I(d)$.

Jeżeli $x_t \sim I(0)$, to szereg x_t jest stacjonarny,

jeżeli $x_t \sim I(1)$, to pierwsze przyrosty szeregu x_t są stacjonarne,

jeżeli $x_t \sim I(2)$, to pierwsze przyrosty pierwszych przyrostów szeregu x_t są stacjonarne.

Metoda testowania stopnia integracji x_t w równaniu

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

została podana przez Dickeya i Fullera i zwana jest testem DF [3].

W teście DF weryfikujemy hipotezę $H_0: \rho = 1$ w równaniu (1), więc jest to tzw. test jednostkowego pierwiastka. Ten test jest oparty na estymacji równania równoważnego (1), a zatem równania:

$$\Delta x_t = \delta x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

które można również zapisać w postaci:

$$x_t = (1 + \delta)x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Ze względu na równanie (2) hipoteza H_0 przyjmuje postać $\delta = 0$.

Test Dickeya-Fullera polega na testowaniu ujemności δ w równaniu regresji (2), oszacowanej metodą najmniejszych kwadratów.

Odrzucenie hipotezy $H_0: \delta = 0$ na rzecz hipotezy alternatywnej $H_1: \delta < 0$ implikuje, że szereg x_t jest zintegrowany stopnia zero, czyli x_t jest szeregiem stacjonarnym.

Jeżeli obliczona wartość statystyki t -Studenta (iloraz oceny parametru δ otrzymanej metodą najmniejszych kwadratów i jej błędu standardowego obliczonego dla metody najmniejszych kwadratów) jest mniejsza niż dolna wartość krytyczna dla określonej liczby obserwacji N , to hipotezę H_0 należy odrzucić na rzecz hipotezy alternatywnej o stacjonarności szeregu x_t . Jeżeli obliczona wartość statystyki t -Studenta jest większa od górnej wartości krytycznej, to nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Między dolną i górną wartością krytyczną znajduje się przedział nieokreśloności, czyli nie wiadomo, czy hipotezę H_0 przyjąć, czy odrzucić.

Gdy nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 , zmienna x_t może być zintegrowana w stopniu wyższym niż zero lub może nie być w ogóle zintegrowana. W związku z tym następnie testujemy, czy stopień integracji jest równy jeden. Jeżeli $x_t \sim I(1)$, to $\Delta x_t \sim I(0)$. Zatem należy powtórzyć test Dickeya-Fullera, stosując Δx_t zamiast x_t . Równanie Dickeya-Fullera przyjmuje postać:

$$\Delta^2 x_t = \delta \Delta x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

i testujemy ujemność δ . Jeżeli odrzucamy hipotezę H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej $H_1: \delta < 0$, to szereg Δx_t jest stacjonarny i $x_t \sim I(1)$. Jeżeli nie ma podstaw do odrzucenia

hipotezy zerowej, to następnie testujemy, czy $x_t \sim I(2)$. Szacujemy następujące równanie regresji Dickeya-Fullera

$$\Delta^3 x_t = \delta \Delta^2 x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (4)$$

Proces ten kontynuujemy dopóty, dopóki nie stwierdzimy, jaki jest stopień integracji x_t lub do momentu, w którym dojdziemy do wniosku, że nie można sprowadzić zmiennej x_t do szeregu stacjonarnego, obliczając jej kolejne przyrosty.

W praktyce szeregi ekonomiczne nie są zintegrowane w stopniu wyższym niż dwa.

Aby obliczyć wartość statystyki t -Studenta, należy wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów ocenę $\hat{\delta}$ parametru δ i jej błąd standardowy. Ocena $\hat{\delta}$ parametru δ wyraża się wzorem

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{t=2}^N \Delta x_t \cdot x_{t-1}}{\sum_{t=2}^N x_{t-1}^2}. \quad (5)$$

Błąd średni szacunku parametru $\hat{\delta}$ obliczamy ze wzoru:

$$s(\hat{\delta}) = \sqrt{D^2(\hat{\delta})} = \sqrt{\frac{s_u^2}{\sum_{t=2}^N x_{t-1}^2}}, \quad (6)$$

gdzie s_u^2 jest wariancją składnika resztowego, która wyraża się następującym wzorem:

$$s_u^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N (\Delta x_t - \Delta \hat{x}_t)^2. \quad (7)$$

Przykład empiryczny

Biorąc pod uwagę ceny zamknięcia akcji TP SA w okresie od 3.01.2005 r. do 5.08.2005 r. (150 obserwacji), na podstawie obliczeń wykonanych na danych zawartych w tab. 1 oraz na rys. 1-3 można stwierdzić, że szereg cen zamknięcia akcji analizowanej spółki nie jest szeregiem stacjonarnym, empiryczna wartość statystyki jest liczbą dodatnią, zatem większą od górnej wartości krytycznej. Analizowany szereg cen akcji TP SA jest szeregiem zintegrowanym w stopniu jeden, tzn. że szereg pierwszych przyrostów jest stacjonarny. Na podstawie danych zawartych w poniższej tabeli obliczono: ocenę parametru $\hat{\delta} = -0,9699$ oraz średni błąd szacunku $s(\hat{\delta}) = 0,0819$. Zatem wartość empiryczna statystyki wynosi $-11,7266$ i jest ona mniejsza od dolnej wartości krytycznej dla dowolnego poziomu istotności, czyli hipotezę H_0 należy odrzucić na rzecz hipotezy alternatywnej o stacjonarności szeregu Δx_t . Dla poziomu istotności 1% i 150 obserwacji dolna wartość krytyczna wynosi [Akaike 1974] $-2,68$, górna wartość krytyczna $-2,37$;

dla poziomu istotności 5% i 150 obserwacji dolna wartość krytyczna wynosi $-2,01$ górna wartość krytyczna $-1,87$; dla poziomu istotności 10% i 150 obserwacji dolna wartość krytyczna wynosi $-1,68$ górna wartość krytyczna $-1,54$.

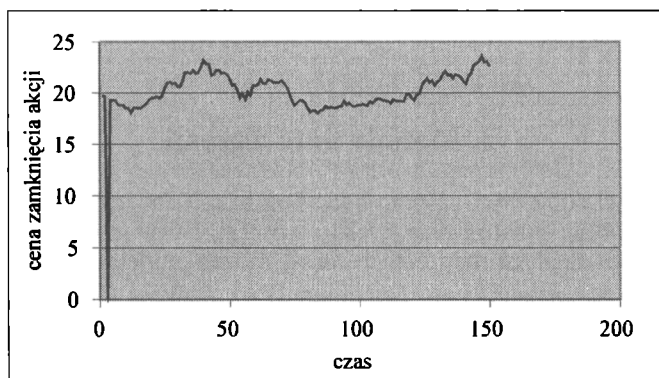
Tabela 1. Kurs zamknięcia oraz szereg pierwszych i drugich przyrostów

Lp.	Data	Kurs zamknięcia	I przyrosty Δx_t	II przyrosty $\Delta^2 x_t$	Lp.	Data	Kurs zamknięcia	I przyrosty Δx_t	II przyrosty $\Delta^2 x_t$
1	3.01.2005	19,75			76	21.04.2005	19,00	0,20	0,70
2	4.01.2005	19,70	-0,05		77	22.04.2005	19,25	0,25	0,05
3	5.01.2005	19,40	-0,30	-0,25	78	25.04.2005	19,25	0,00	-0,25
4	6.01.2005	19,30	-0,10	0,20	79	26.04.2005	19,05	-0,20	-0,20
5	7.01.2005	19,30	0,00	0,10	80	27.04.2005	18,55	-0,50	-0,30
6	10.01.2005	19,25	-0,05	-0,05	81	28.04.2005	18,15	-0,40	0,10
7	11.01.2005	18,85	-0,40	-0,35	82	29.04.2005	18,25	0,10	0,50
8	12.01.2005	18,80	-0,05	0,35	83	2.05.2005	18,25	0,00	-0,10
9	13.01.2005	18,80	0,00	0,05	84	4.05.2005	18,00	-0,25	-0,25
10	14.01.2005	18,50	-0,30	-0,30	85	5.05.2005	18,30	0,30	0,55
11	17.01.2005	18,50	0,00	0,30	86	6.05.2005	18,40	0,10	-0,20
12	18.01.2005	18,05	-0,45	-0,45	87	9.05.2005	18,70	0,30	0,20
13	19.01.2005	18,55	0,50	0,95	88	10.05.2005	18,55	-0,15	-0,45
14	20.01.2005	18,55	0,00	-0,50	89	11.05.2005	18,65	0,10	0,25
15	21.01.2005	18,50	-0,05	-0,05	90	12.05.2005	18,55	-0,10	-0,20
16	24.01.2005	18,55	0,05	0,10	91	13.05.2005	18,55	0,00	0,10
17	25.01.2005	18,75	0,20	0,15	92	16.05.2005	18,65	0,10	0,10
18	26.01.2005	18,95	0,20	0,00	93	17.05.2005	18,70	0,05	-0,05
19	27.01.2005	19,35	0,40	0,20	94	18.05.2005	19,15	0,45	0,40
20	28.01.2005	19,50	0,15	-0,25	95	19.05.2005	18,85	-0,30	-0,75
21	31.01.2005	19,50	0,00	-0,15	96	20.05.2005	19,00	0,15	0,45
22	1.02.2005	19,65	0,15	0,15	97	23.05.2005	18,80	-0,20	-0,35
23	2.02.2005	19,50	-0,15	-0,30	98	24.05.2005	18,70	-0,10	0,10
24	3.02.2005	19,70	0,20	0,35	99	25.05.2005	18,80	0,10	0,20
25	4.02.2005	20,40	0,70	0,50	100	27.05.2005	18,80	0,00	-0,10
26	7.02.2005	21,00	0,60	-0,10	101	30.05.2005	18,90	0,10	0,10
27	8.02.2005	21,10	0,10	-0,50	102	31.05.2005	18,85	-0,05	-0,15
28	9.02.2005	20,90	-0,20	-0,30	103	1.06.2005	18,75	-0,10	-0,05
29	10.02.2005	21,00	0,10	0,30	104	2.06.2005	19,15	0,40	0,50
30	11.02.2005	20,60	-0,40	-0,50	105	3.06.2005	19,00	-0,15	-0,55

31	14.02.2005	20,60	0,00	0,40	106	6.06.2005	19,30	0,30	0,45
32	15.02.2005	21,20	0,60	0,60	107	7.06.2005	19,45	0,15	-0,15
33	16.02.2005	22,00	0,80	0,20	108	8.06.2005	19,40	-0,05	-0,20
34	17.02.2005	22,00	0,00	-0,80	109	9.06.2005	19,30	-0,10	-0,05
35	18.02.2005	21,90	-0,10	-0,10	110	10.06.2005	19,25	-0,05	0,05
36	21.02.2005	22,20	0,30	0,40	111	13.06.2005	19,20	-0,05	0,00
37	22.02.2005	21,90	-0,30	-0,60	112	14.06.2005	18,95	-0,25	-0,20
38	23.02.2005	22,00	0,10	0,40	113	15.06.2005	19,35	0,40	0,65
39	24.02.2005	22,50	0,50	0,40	114	16.06.2005	19,25	-0,10	-0,50
40	25.02.2005	23,20	0,70	0,20	115	17.06.2005	19,20	-0,05	0,05
41	28.02.2005	22,80	-0,40	-1,10	116	20.06.2005	19,20	0,00	0,05
42	1.03.2005	22,80	0,00	0,40	117	21.06.2005	19,15	-0,05	-0,05
43	2.03.2005	21,70	-1,10	-1,10	118	22.06.2005	19,85	0,70	0,75
44	3.03.2005	21,80	0,10	1,20	119	23.06.2005	19,95	0,10	-0,60
45	4.03.2005	22,20	0,40	0,30	120	24.06.2005	19,50	-0,45	-0,55
46	7.03.2005	22,20	0,00	-0,40	121	27.06.2005	19,25	-0,25	0,20
47	8.03.2005	21,90	-0,30	-0,30	122	28.06.2005	19,80	0,55	0,80
48	9.03.2005	22,00	0,10	0,40	123	29.06.2005	19,95	0,15	-0,40
49	10.03.2005	21,80	-0,20	-0,30	124	30.06.2005	20,70	0,75	0,60
50	11.03.2005	21,40	-0,40	-0,20	125	1.07.2005	21,10	0,40	-0,35
51	14.03.2005	20,70	-0,70	-0,30	126	4.07.2005	21,40	0,30	-0,10
52	15.03.2005	20,80	0,10	0,80	127	5.07.2005	21,00	-0,40	-0,70
53	16.03.2005	20,30	-0,50	-0,60	128	6.07.2005	21,20	0,20	0,60
54	17.03.2005	19,50	-0,80	-0,30	129	7.07.2005	20,70	-0,50	-0,70
55	18.03.2005	19,95	0,45	1,25	130	8.07.2005	21,10	0,40	0,90
56	21.03.2005	19,35	-0,60	-1,05	131	11.07.2005	21,30	0,20	-0,20
57	22.03.2005	20,10	0,75	1,35	132	12.07.2005	21,80	0,50	0,30
58	23.03.2005	19,75	-0,35	-1,10	133	13.07.2005	22,10	0,30	-0,20
59	24.03.2005	20,70	0,95	1,30	134	14.07.2005	21,70	-0,40	-0,70
60	29.03.2005	20,70	0,00	-0,95	135	15.07.2005	21,80	0,10	0,50
61	30.03.2005	20,80	0,10	0,10	136	18.07.2005	21,40	-0,40	-0,50
62	31.03.2005	21,30	0,50	0,40	137	19.07.2005	21,80	0,40	0,80
63	1.04.2005	20,90	-0,40	-0,90	138	20.07.2005	21,70	-0,10	-0,50
64	4.04.2005	20,90	0,00	0,40	139	21.07.2005	21,50	-0,20	-0,10
65	5.04.2005	21,30	0,40	0,40	140	22.07.2005	21,10	-0,40	-0,20
66	6.04.2005	21,20	-0,10	-0,50	141	25.07.2005	20,90	-0,20	0,20

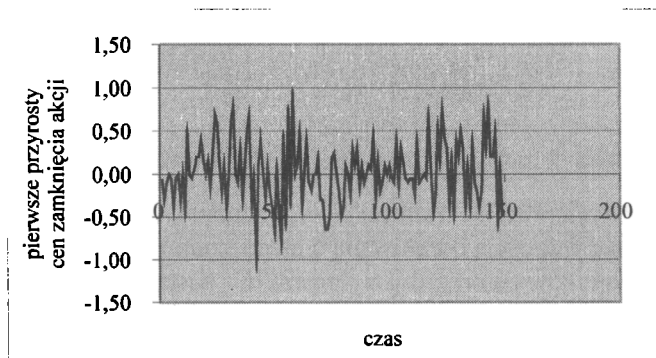
67	7.04.2005	21,00	-0,20	-0,10	142	26.07.2005	21,60	0,70	0,90
68	11.04.2005	21,00	0,00	0,20	143	27.07.2005	21,90	0,30	-0,40
69	12.04.2005	21,00	0,00	0,00	144	28.07.2005	22,70	0,80	0,50
70	13.04.2005	21,20	0,20	0,20	145	29.07.2005	22,90	0,20	-0,60
71	14.04.2005	20,90	-0,30	-0,50	146	1.08.2005	23,10	0,20	0,00
72	15.04.2005	20,60	-0,30	0,00	147	2.08.2005	23,60	0,50	0,30
73	18.04.2005	19,95	-0,65	-0,35	148	3.08.2005	23,00	-0,60	-1,10
74	19.04.2005	19,30	-0,65	0,00	149	4.08.2005	23,10	0,10	0,70
75	20.04.2005	18,80	-0,50	0,15	150	5.08.2005	22,60	-0,50	-0,60

Źródło: GPW w Warszawie, obliczenia własne.



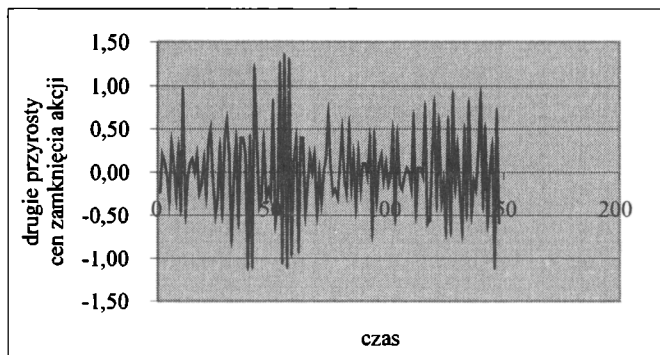
Rys. 1. Ceny zamknięcia akcji TP SA w okresie 03.01.2005-05.08.2005

Źródło: GPW w Warszawie.



Rys. 2. Pierwsze przyrosty cen zamknięcia akcji TP SA w okresie 03.01.2005-05.08.2005

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 3. Drugie przyrosty cen zamknięcia akcji TP SA w okresie 03.01.2005-05.08.2005

Źródło: obliczenia własne.

3. Metoda autoregresji

Stacjonarny szereg czasowy $x_t, t = 1, 2, \dots, N$ o wartości oczekiwanej równej zero, określony w równoodległych momentach czasu, można modelować za pomocą procesu autoregresji rzędu M następującym równaniem [Box, Jenkins 1976; Priestley 1981]:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_M x_{t-M} + \varepsilon_t, \quad (8)$$

gdzie: a_j – współczynniki autoregresji,

ε_t – biały szum.

Dla procesu autoregresji jego wartości w następnych momentach czasu $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+L}$ również spełniają równanie autoregresji:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + \dots + a_M x_{t-M+1} + \varepsilon_{t+1}, \\ x_{t+2} &= a_1 x_{t+1} + a_2 x_t + \dots + a_M x_{t-M+2} + \varepsilon_{t+2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$x_{t+L} = a_1 x_{t+L-1} + a_2 x_{t+L-2} + \dots + a_M x_{t-M+L} + \varepsilon_{t+L}.$$

W równaniach tych przyszłe wartości białego szumu $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots, \varepsilon_{t+L}$ są nieznane, zastępuje się je więc wartością oczekiwaną białego szumu $E(\varepsilon_t) = 0$. Ponadto nieznane wartości współczynników autoregresji a_j muszą być zastąpione ich estymatorami $\hat{a}_j$.

Znając rząd autoregresji M oraz estymatory współczynników autoregresji $\hat{a}_j$, prognozy oblicza się ze wzorów:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{N+1} &= \hat{a}_1 x_N + \hat{a}_2 x_{N-1} + \dots + \hat{a}_M x_{N-M+1}, \\ \hat{x}_{N+2} &= \hat{a}_1 x_{N+1} + \hat{a}_2 x_N + \dots + \hat{a}_M x_{N-M+2},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\hat{x}_{N+L} = \hat{a}_1 x_{N+L-1} + \hat{a}_2 x_{N+L-2} + \dots + \hat{a}_M x_{N-M+L}.$$

Problemem w prognozowaniu metodą autoregresji jest właściwe określenie rzędu M autoregresji oraz estymatorów $\hat{a}_j$ współczynników autoregresji. W związku z tym zostaną omówione metody wyznaczania rzędu M autoregresji.

3.1. Rząd autoregresji

Rząd autoregresji można wyznaczyć kryterium Akaike (AIC - Akaike's Information Criterion) [Akaike 1974]:

$$AIC(M) = \ln \hat{\sigma}^2(M) + \frac{2M}{N} \rightarrow \min, \quad (11)$$

gdzie: $\hat{\sigma}^2(M) = \hat{c}_0 - \hat{a}_1 \hat{c}_1 - \hat{a}_2 \hat{c}_2 - \dots - \hat{a}_M \hat{c}_M$ – estymator wariancji residuów otrzymany metodą największego prawdopodobieństwa opartą na modelu M parametrowym,
 $\hat{c}_0$ – wariancja residuów.

Innym sposobem wyznaczenia rzędu autoregresji jest kryterium końcowego błędu prognozy FPE (*final prediction error*):

$$FPE(M) = \sigma^2(M) \cdot \frac{N + M + 1}{N - M - 1} \rightarrow \min. \quad (12)$$

Do wyznaczenia rzędu autoregresji M można także zastosować zmodyfikowane kryterium Rovelli-Vulpiani [1983]:

$$M = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|\hat{c}_k|}{\hat{c}_0}, \quad (13)$$

gdzie: $\hat{c}_k^{(N)} = \frac{v_k}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k}$ – estymator autokowariancji, w którym v_k , jest oknem opóźnień, zwanym w literaturze również oknem wagowym, N jest liczbą danych, k jest przesunięciem czasowym.

W pracy zostały zastosowane okna wagowe Bartletta, określone następującym wzorem [Tretter 1976]:

$$v_k = 1 - \frac{k}{N} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (14)$$

Na ogół zmodyfikowane kryterium Rovelli-Vulpiani wyznacza wyższy rząd autoregresji niż inne kryteria. W związku z tym w pracy do wyznaczania rzędu autoregresji zostało zastosowane omówione wcześniej zmodyfikowane kryterium Rovelli-Vulpiani.

Należy wspomnieć, że estymator autokowariancji odgrywa główną rolę w autokowariancyjnej metodzie. Funkcja autokowariancji nieskończonego stacjonarnego ciągłego szeregu czasowego, którego wartość oczekiwana jest równa zero, jest określona następującym wzorem:

$$c_X(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)X(t+k)dt, \quad (15)$$

gdzie: k – przesunięcie czasowe.

Jednakże w praktyce szeregi czasowe są skończone i określone jedynie w punktach dyskretnych i zamiast funkcji autokowariancji posługujemy się jej estymatorem.

Idea autokowariancyjnej metody prognozowania jest znalezienie takiego estymatora pierwszego punktu prognozy $\hat{x}_{N+1}$, aby suma kwadratów różnic obciążonych estymatorów autokowariancji szeregu czasowego i autokowariancji szeregu czasowego z dodanym pierwszym punktem prognozy była jak najmniejsza

3.2. Estymatory współczynników autoregresji

Jeżeli rząd autoregresji procesu stochastycznego jest ustalony, to estymatory współczynników autoregresji można obliczyć z równań Yule'a-Walkera w następujący sposób [Box, Jenkins 1976]:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_{M-1} \\ \hat{c}_1 & \hat{c}_0 & \hat{c}_{M-2} \\ \hat{c}_{M-1} & \hat{c}_{M-2} & \hat{c}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_M \end{bmatrix}. \quad (16)$$

3.3. Przykład empiryczny

Mając dany szereg czasowy stacjonarny o wartości średniej równej zero, wyznaczony na podstawie danych zawartych w tab. 1 dotyczących cen akcji TP SA w okresie od 3.01.2005 r do 5.08.2005 r., na początku obliczono rząd autoregresji $M = 10$.

Następnie na podstawie wykonanych obliczeń otrzymano następujący wektor współczynników autoregresji:

$$\begin{bmatrix} 0,0435 \\ 0,2012 \\ -0,1041 \\ -0,0784 \\ 0,0172 \\ 0,0184 \\ 0,2191 \\ -0,0395 \\ -0,0732 \\ -0,0110 \end{bmatrix}.$$

Średnie błędy szacunku parametrów wynoszą odpowiednio: 0,0855; 0,0852; 0,0875; 0,0864; 0,0861; 0,0861; 0,0869; 0,0869; 0,2561; 0,0888.

Znając rząd autoregresji $M = 10$ oraz estymatory współczynników autoregresji $\hat{a}_j$, prognozy np. na dwa okresy, czyli $L = 2$, oblicza się ze wzorów:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta x}_{149+1} &= \tilde{\Delta x}_{150} = \hat{a}_1 \tilde{\Delta x}_{149} + \hat{a}_2 \tilde{\Delta x}_{148} + \dots + \hat{a}_{10} \tilde{\Delta x}_{140}, \\ \tilde{\Delta x}_{149+2} &= \tilde{\Delta x}_{151} = \hat{a}_1 \tilde{\Delta x}_{150} + \hat{a}_2 \tilde{\Delta x}_{149} + \dots + \hat{a}_{10} \tilde{\Delta x}_{141}, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\Delta x}_i$, $i = 140, 141, \dots, 149$ oznacza realizację szeregu stacjonarnego o średniej równej zero $\tilde{\Delta x}_i$ dla $i = 150, 151$ prognozy tego szeregu na okres 150, 151 odpowiednio.

Tabela 2. Obliczenia pomocnicze dla wyznaczenia prognoz

Numer okresu t	Lp.	Szereg	Szereg stacjonarny
		21,10	Δx_i
141	140	20,90	-0,20
142	141	21,60	0,70
143	142	21,90	0,30
144	143	22,70	0,80
145	144	22,90	0,20
146	145	23,10	0,20
147	146	23,60	0,50
148	147	23,00	-0,60
149	148	23,10	0,10
150	149	22,60	-0,50

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Wyznaczenie prognoz

Lp.	Prognozy	Średnia	Prognoza+średnia
	$\tilde{\Delta x}_j$		Δx_j
150	0,1394	0,0191	0,1585
151	-0,0659		-0,0468

Źródło: obliczenia własne.

Zatem prognozy cen akcji na okresy 151, 152 oszacowane metodą autoregresji wynoszą

$$\hat{x}_{151} = x_{150} + \Delta x_{150} = 22,60 + 0,1585 = 22,7585 \approx 22,80,$$

$$\hat{x}_{152} = x_{151} + \Delta x_{151} = 22,80 + (-0,0468) = 22,7532 \approx 22,75.$$

Po zaobserwowaniu cen zamknięcia akcji badanej firmy w dniach 8.08.2005 r. oraz 9.08.2005 r., wynoszących odpowiednio $x_{151} = 23,00$ zł, $x_{152} = 22,70$ zł, można stwierdzić, że bezwzględne błędy prognozy wynoszą odpowiednio $Q_{151} = 0,2$; $Q_{152} = -0,05$. To oznacza, że w dniu 8.08.2005 r., czyli w 151 okresie, odchylenie prognozy od wartości rzeczywistej wyniosło 0,2 zł, co stanowi 0,87% rzeczywistej ceny akcji w dniu 8.08.2005 r. Ponadto rzeczywista cena akcji badanej firmy była wyższa od prognozy. W stosunku do 150 okresu nastąpił wzrost ceny akcji. Natomiast dnia 9.08.2005 r., czyli w 151, okresie odchylenie prognozy od wartości rzeczywistej wyniosło -0,05 zł. Zatem zaobserwowana cena akcji była wyższa od prognozy. W stosunku do 151 okresu nastąpił spadek ceny akcji badanej firmy. Można również stwierdzić, że błąd prognozy stanowi 0,22% zaobserwowanej ceny akcji w 152 okresie.

4. Zakończenie

Na podstawie przeprowadzonych analiz stwierdzono, że szereg cen zamknięcia akcji TP SA nie jest szeregiem stacjonarnym. Zweryfikowano hipotezę, że stacjonarny jest szereg pierwszych przyrostów cen zamknięcia akcji TP SA. Szereg pierwszych przyrostów o średniej równej zero wykorzystano do prognozowania wartości cen za pomocą metody autokorelacji. Stwierdzono, że w pierwszym okresie prognozowania cena akcji analizowanej spółki wzrośnie, natomiast w drugim okresie prognozowania kurs zamknięcia akcji zmaleje. To miało odzwierciedlenie w rzeczywistym trendzie kursu zamknięcia akcji TP SA.

Ponadto przy wyznaczaniu rzędu autoregresji zastosowano do ekonomicznych szeregów czasowych zmodyfikowane kryterium Rovelli-Vulpiani, co stanowi uogólnienie rozważań prowadzonych w literaturze przedmiotu.

Literatura

- Akaike H., *A New Look at the Statistical Model Identification*, IEEE Tran. Automatic Control, AC-19, 1974.
- Box G.E.P., Jenkins G.M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden Day, San Francisco 1976.
- Charemza W.W., Deadman D.F., *Nowa ekonometria*, PWE, Warszawa 1997.
- Kosek W., *Short Periodic Autoregressive Prediction of the Earth Rotation Parameters*, Artificial Satellites, Planetary Geodesy, 27 no 2.
- Priestley M.B., *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, London 1981.
- Rovelli A., Vulpiani A., *Characteristic Correlation Time as Estimate of Optimum Filter Length in Maximum Entropy Spectral Analysis*, Geophys J.R. Astr.Soc.72, 1983.
- Tretter S.A., *Introduction to Discrete-time Signal Processing*, John Wiley and Sons, New York 1976.

APPLICATION OF THE AUTOREGRESSION METHOD IN PREDICTION OF THE STOCK PRICES OF TELECOMMUNICATION FIRM

Summary

Many commodity prices, the exchange rates and the securities prices are submitted to influence of fate.

In this article was presented one of the stochastic method of prediction – the autoregression method. This method was applied on the prediction of stock price of TP S.A.

The autoregression method is used for prediction of one-dimensional stationary time series. So in this article was applied the test verifies the order of integration of time series