

Maria M. Kaźmierska-Zatoń, Wojciech Zatoń

Uniwersytet Łódzki

WYKORZYSTANIE OPTYMALNEGO STEROWANIA DO PROGNOZOWANIA ZJAWISK GOSPODARCZYCH

1. Wstęp

Zadanie optymalnego sterowania, formułowane w naukach ekonomicznych, polega na wyborze spośród alternatywnych polityk gospodarczych polityki najlepszej przy danych ograniczeniach i ustalonym kryterium wyboru. Inaczej można powiedzieć, iż polega na wyznaczeniu takich wartości instrumentów polityki, które pozwolą zrealizować założone cele sterowania na poziomach najbliższych pożądanym. Opis sterowanego układu ekonomicznego przyjmuje zwykle formę modelu matematycznego (szczególnie ekonometrycznego). Rozwiązywanie zadania sterowania może być wykorzystane jako narzędzie prognozowania. W tym przypadku prognozowane są wartości zmiennych egzogenicznych modelu (wybranych jako instrumenty), a nie zmiennych endogenicznych (z których wybierane są cele sterowania, ze z góry ustalonymi pożądanymi wartościami). Wybór celów i instrumentów sterowania jest jedną z kluczowych kwestii i pozostaje w ścisłym związku z rodzajem sterowanego układu, por. np. [Neck, Karbuz 1997; Witkowska 1993]. W skali makroekonomicznej funkcję instrumentów polityki mogą pełnić np. stopy podatkowe i stopy procentowe, zaś celów gospodarczych np. stopa bezrobocia czy poziom inflacji. W zarządzaniu przedsiębiorstwem w analogicznych funkcjach mogą wystąpić np. koszty płac, ceny produktów i towarów, wydatki inwestycyjne (instrumenty), wynik finansowy, płynność finansowa, poziom zapasów (cele).

W artykule omówiono szerzej specyfikę prognozowania z wykorzystaniem optymalnego sterowania układem ekonomicznym opisanym przez model ekonometryczny, ilustrując rozważania przykładem.

2. Sformułowanie problemu

Ogólną postać zadania sterowania układem opisanym przez model ekonometryczny można zapisać następująco, por. np. [Gajda 1993; Kaźmierska-Zatoń 2002; Kaźmierska-Zatoń, Zatoń 2004]:

$$\min \sum_{t=1}^T [(y_t - y_t^*)^T Q_t (y_t - y_t^*) + (x_t - x_t^*)^T R_t (x_t - x_t^*)], \quad (1)$$

przy warunkach:

$$y_t = g(y_t, y_{t-1}, x_t, z_t, \theta) + u_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

lub

$$\min \sum_{t=1}^T [(y_t - y_t^*)^T Q_t (y_t - y_t^*)] \quad (3)$$

przy warunkach:

$$y_t = g(y_t, y_{t-1}, x_t, z_t, \theta) + u_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$x_t \leq x_t^*, \quad (5)$$

$$x_t \geq x_t^*, \quad (6)$$

gdzie: y_t, y_{t-1} – wektory zmiennych endogenicznych (celów sterowania), opóźnionych i nie opóźnionych,

y_t^* – wektor pożądanych wartości celów sterowania,

x_t – wektor zmiennych decyzyjnych (instrumentów sterowania),

x_t^* – wektor dopuszczalnych wartości instrumentów sterowania,

z_t – wektor zmiennych egzogenicznych typu „dane”,

θ – parametry funkcji wektorowej g ,

u_t – wektor składników losowych, zakłóceń,

Q_t – macierz wag (priorytetów) określających relatywną ważność celów,

R_t – macierz wag (priorytetów) określających relatywną ważność instrumentów.

Rozwiązanie problemu postaci (1)-(2) lub (3)-(6) polega na znalezieniu wartości instrumentów x_t (części zmiennych wybranych spośród zmiennych egzogenicznych modelu), pozwalających zrealizować cele sterowania y_t (wybrane spośród zmiennych endogenicznych modelu) jak najbliżej ich wartości pożądanych.

W kontekście prognozowania zjawisk z wykorzystaniem modelu ekonometrycznego (np. [Dittmann 2000; Milo 2002; Welfe 2004]) zadanie optymalnego sterowania można uznać za metodę alternatywną wobec typowej symulacji na modelu wielorównaniowym. Wybór jednej z tych metod uwarunkowany jest rodzajem wiedzy,

jaką dysponuje prognosta. Jeśli ma on wyobrażenie o przyszłych wartościach zmiennych endogenicznych i szuka odpowiedzi na pytanie: w jaki sposób (przy jakich wartościach zmiennych egzogenicznych) mogą one być jak najlepiej zrealizowane, wówczas powinien posłużyć się rozwiązaniem zadania optymalnego sterowania, jeśli zaś potrafi określić przyszłe wartości zmiennych egzogenicznych i pyta: jakie z ich realizacji powstaną skutki (wartości zmiennych endogenicznych), wówczas w celu uzyskania odpowiedzi powinien wykorzystać symulacje.

3. Przykład empiryczny

W celu ilustracji zagadnień omawianych w referacie zbudowano makroekonomiczny model ekonometryczny opisujący podstawowe mechanizmy gospodarcze. Jego parametry oszacowano na danych kwartalnych dla Polski za okres 1999.1-2004.4. Poszczególne równania modelu są następujące:

$$\begin{aligned} \text{PKBreal}_t = & 1415,4970 + 0,0080 \cdot \frac{\text{wynnom}_t}{\text{inflacja97}_t} \cdot 100 \cdot \text{pracujący}_t + 1,0692 \cdot \text{eksportreal}_t - \\ & - 8256,5816 \cdot \frac{\text{stopa}_t}{\text{stopa}_{t-1}} + 14,2047 \cdot \left(\frac{\text{wydatkizbudzetu}_t}{\text{inflacja97}_t} + \frac{\text{wydatkizbudzetu}_{t-1}}{\text{inflacja97}_{t-1}} \right) - \\ & - 10227,3041 \cdot \text{kwartał1}_t + 8279,0968 \cdot \text{kwartał4}_t - 4135,0570 \cdot u01_t \\ J - B = & 0,99 \quad DW = 1,93 \quad KR^2 = 0,985 \quad MAPE = 0,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{stopabezrobocia}_t = & -173,8100 + 0,0062 \cdot \text{ludność}_t - 0,0556 \cdot \frac{\text{PKBreal}_t}{1000} - \\ & - 0,0068 \cdot \left(\frac{\text{wydatkizbudzetu}_{t-2}}{\text{inflacja97}_{t-2}} + \frac{\text{wydatkizbudzetu}_{t-3}}{\text{inflacja97}_{t-3}} \right) + \\ & + 0,0053 \cdot \text{wynnom}_t + 0,0007 \cdot u03_t \cdot \text{wynnom}_t - 0,0146 \cdot (u00_t + u01_t) \cdot \frac{\text{PKBreal}_t}{1000} \\ J - B = & 0,494 \quad DW = 1,7 \quad KR^2 = 0,972 \quad MAPE = 1,975 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wynnom}_t = & -670,3923 + 38,7857 \cdot \frac{\text{PKBreal}_t}{\text{pracujący}_t} + 33,9640 \cdot \frac{\text{PKBreal}_{t-1}}{\text{pracujący}_{t-1}} + \\ & (2,8) \quad (4,7) \quad (4,8) \\ & + 13,2333 \cdot \text{inflacja97}_{t-1} - 17,9336 \cdot \text{stopabezrobocia}_{t-3} \\ & (6,6) \quad (-1,9) \end{aligned}$$

$$J - B = 1,28 \quad DW = 1,50 \quad KR^2 = 0,97 \quad MAPE = 1,36$$

$$\begin{aligned} \text{inflacja97}_t = & 80,9396 + 0,0265 \cdot \text{wynnom}_t - 12,9201 \cdot \frac{\text{stopa}_{t-1}}{\text{stopa}_{t-2}} + \\ & (9,8) \quad (1,10) \quad (-4,1) \\ & + 0,6445 \cdot \text{stawkapodatku}_t - 0,0046 \cdot u99_t \cdot \text{wynnom}_t + 0,3020 \cdot u304_t \cdot \text{stawkapodatku}_t \\ & (1,9) \quad (-6,3) \quad (4,5) \end{aligned}$$

$$J - B = 0,79 \quad DW = 1,80 \quad KR^2 = 0,97 \quad MAPE = 0,71$$

$$\begin{aligned} \text{eksportreal}_t = & -5568,6462 + 0,0978 \cdot (\text{PKBreal}_t - \text{PKBreal}_{t-1}) + \\ & (-1,4) \quad (4,9) \\ & + 0,9637 \cdot \text{eksportreal}_{t-1} + 27,5172 \cdot \frac{\text{EUR}_t}{\text{inflacja97}_t} \cdot 100 - 8,6105 \cdot (u99_t \cdot \frac{\text{EUR}_t}{\text{inflacja97}_t} \cdot 100) \\ & (22,2) \quad (2,1) \quad (-2,1) \end{aligned}$$

$$J - B = 0,39 \quad DW = 2,32 \quad KR^2 = 0,97 \quad MAPE = 2,57$$

$$\begin{aligned} \text{pracujący}_t = & 10810,2490 - 158,9004 \cdot \text{stopabezrobocia}_t - \\ & (79,9) \quad (20,9) \\ & - 14,9500 \cdot (\text{stopabezrobocia}_t \cdot (u00_t + u01_t)) - 12,1259 \cdot \text{stopabezrobocia}_t \cdot u304_t \\ & (-4,4) \quad (-3,5) \end{aligned}$$

$$J - B = 0,11 \quad DW = 1,9 \quad KR^2 = 0,96 \quad MAPE = 0,90$$

gdzie: pod oszacowaniami parametrów podano wartości statystyki *t*- Studenta,
inflacja97 – wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych 1997.4=100, dane przeliczone,

wynnom – przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto nominalne w gospodarce narodowej ogółem, zł, dane źródłowe,

pracujący – pracujący w gospodarce narodowej ogółem (stan w końcu okresu), tys. osób, dane źródłowe,

stopabezrobocia – stopa rejestrowanego bezrobocia ogółem (stan w końcu okresu), %, dane źródłowe,

eksportreal – eksport towarów ogółem w mln zł, ceny stałe 1997, dane przeliczone,
 EUR – kurs oficjalny NBP 100 ECU/100 EUR w zł, dane źródłowe,
 PKBreal – produkt krajowy brutto, ceny stałe 1997, mln zł, dane przeliczone,
 stopa – stopa oprocentowania kredytu lombardowego NBP, %, dane źródłowe,
 ludność – liczba ludności w wieku 15 lat i więcej, tys. osób, dane źródłowe,
 wydatkizbudżetu – nominalne wydatki z budżetu państwa, mln zł, dane przeliczone,
 stawkapodatku – średnia stawka podatków pośrednich, %, dane przeliczone,
 kwartał1 – zmienna 0-1, 1 kwartał każdego roku = 1, pozostałe okresy 0,
 kwartał4 – zmienna 0-1, 4 kwartał każdego roku = 1, pozostałe okresy 0,
 u99 – zmienna 0-1, rok 1999 = 1, pozostałe okresy 0,
 u00 – zmienna 0-1, rok 2000 = 1, pozostałe okresy 0,
 u01 – zmienna 0-1, rok 2001 = 1, pozostałe okresy 0,
 u03 – zmienna 0-1, rok 2003 = 1, pozostałe okresy 0,
 u304 – zmienna 0-1, 2, 3 i 4 kwartał 2004 roku = 1, pozostałe okresy 0,

Model ten jest uproszczeniem rzeczywistości, niemniej spełnia wymogi dobrego narzędzia opisu przeszłości, co potwierdza przeprowadzona analiza mnożnikowa oraz błędy MAPE rozwiązania bazowego (symulacji w okresie próby estymacji parametrów, por. tab. 1). Uzasadnia to użycie modelu do celów prognostycznych.

Prognozą objęto pierwsze dwa kwartały 2005 r. W pierwszej kolejności rozważono sytuację, w której znane są założenia (wartości przewidywane) odnoszące się do zmiennych egzogenicznych i należy wyznaczyć prognozę dla zmiennych endogenicznych. Celem wyeliminowania źródła błędu prognoz wynikającego z błędnych założeń dla zmiennych egzogenicznych przyjęto wartości na poziomach ich realizacji w okresie prognozy (znane były już wartości historyczne dla pierwszych dwóch kwartałów 2005 r.) i przeprowadzono typową dynamiczną symulację ekonometryczną na modelu. Następnie rozważono sytuację odwrotną. Przyjęto, że znane są oczekiwania dotyczące przyszłych wartości zmiennych endogenicznych (wartości pożądane, w tym przypadku również na poziomie historycznej realizacji) i należy wyznaczyć wartości zmiennych egzogenicznych umożliwiające ich osiągnięcie. Formułując odpowiadające tej sytuacji zadanie sterowania, przyjęto kwadratową funkcję kryterium, za cele sterowania uznano wszystkie zmienne endogeniczne, jako instrumenty sterowania zaś wybrano cztery zmienne egzogeniczne: EUR, stawkapodatku, stopa, wydatkizbudżetu, pozostałe zmienne – zmienne sztuczne (zero-jedynkowe) i liczbę ludności – ich wartości uznano za ustalone. Należy zaznaczyć, że kurs EUR tylko do pewnego stopnia można uznać za instrument, gdyż oddziaływanie na niego przez rząd i Bank Centralny w kraju wolnorynkowym może być tylko pośrednie. Ponadto określono dopuszczalne granice zmienności instrumentów:

- wartość historyczna $\pm$ odchylenie standardowe zmiennej z okresu 2003-2004 – dla zmiennych stawkapodatku, stopa, wydatkizbudżetu,
- wartość historyczna $\pm$ 10 groszy dla EUR.

Wszystkie cele sterowania uznano za jednakowo ważne.

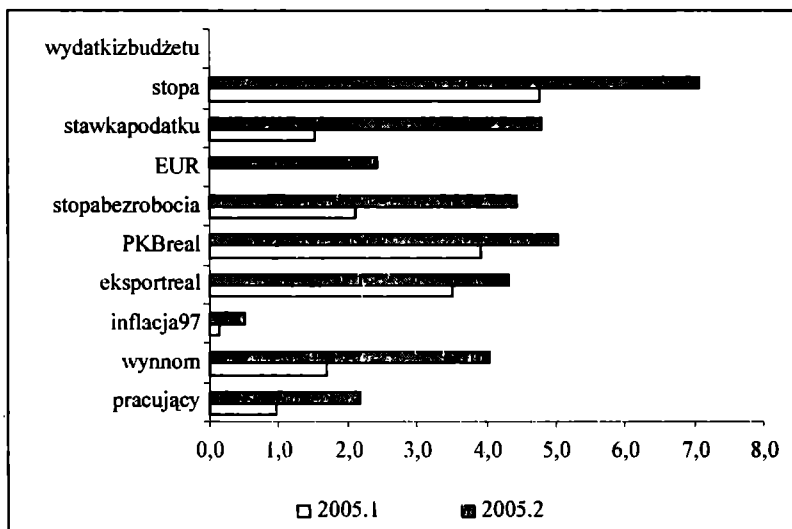
Dla obu prognoz wyznaczono błędy MAPE przedstawione w tab. 1 (puste pole wartości oznaczają, że jej policzenie nie ma sensu merytorycznego). Wartości tych błędów są

akceptowalne i zbliżone, co potwierdza alternatywność zastosowanych metod prognozowania. W drugim okresie analizy prognozy są obciążone większym błędem, co wynika z dynamicznej struktury modelu (por. rys. 1 i 2).

Tabela 1. Porównanie błędów estymacji, rozwiązania bazowego i prognoz

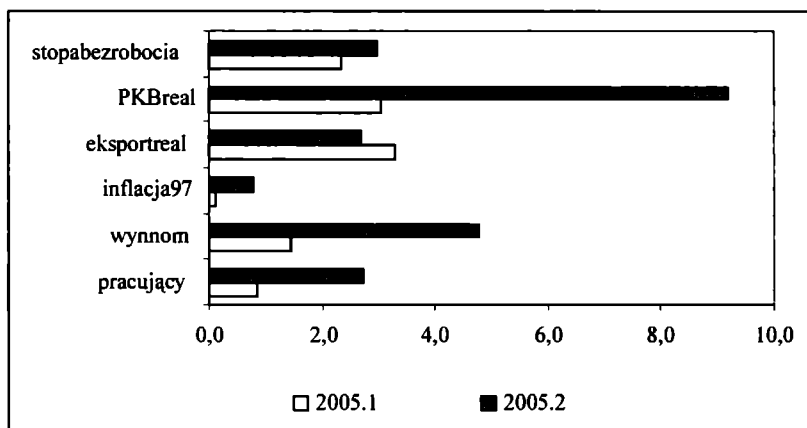
Nazwa zmiennej	MAPE			
	estymacji	rozwiązania bazowego	prognozy metodą typowej symulacji ekonometrycznej	prognozy metodą optymalnego sterowania
pracujący	0,90	3,51	1,79	1,56
wynnom	1,36	1,86	3,11	2,86
inflacja97	0,71	0,73	0,45	0,32
eksportreal	2,58	4,08	2,98	3,92
PKBreal	0,75	3,01	6,10	4,48
stopabezrobocia	1,97	9,25	2,66	3,28
EUR	-	-	-	1,22
stawkapodatku	-	-	-	3,17
stopa	-	-	-	5,92
wydatkizbudżetu	-	-	-	0,00

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1. Wartości błędów prognoz wyznaczonych metodą optymalnego sterowania w procencie historycznych realizacji

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wartości błędów prognoz wyznaczonych metodą typowej symulacji ekonometrycznej w procencie historycznych realizacji

Źródło: opracowanie własne.

Warto zwrócić uwagę, że sterowanie nie jest prostym odwróceniem typowej symulacji ekonometrycznej. Uzyskane wartości celów nie są równe wartościom pożądanym, co wynika z cech zadania optymalnego sterowania (funkcji kryterium i warunków ograniczających nałożonych na instrumenty) oraz faktu, że wartości pożądane (w tym przypadku historyczne) były różne od wartości wynikających z symulacji.

4. Uwagi końcowe

Optymalne sterowanie w stosunkowo prosty sposób pozwala na określenie wartości instrumentów umożliwiających osiągnięcie założonych celów (eliminując konieczność stosowania żmudnej metody „prób i błędów” konstruowania wielowariantowych scenariuszy symulacyjnych). Warto jednak podkreślić, że dysponując modelem ekonometrycznym, mamy zawsze możliwość wyboru między sporządzeniem prognozy wykorzystującym klasyczną symulację lub w drodze optymalnego sterowania.

Przedstawioną powyżej metodę prognozowania przez optymalne sterowanie można również zastosować w zarządzaniu przedsiębiorstwem. Brak dostępu do odpowiednich danych uniemożliwił nam konstruowanie kompleksowego modelu ekonometrycznego przedsiębiorstwa. Takie modele są jednak budowane od wielu lat i służą prognozowaniu działalności przedsiębiorstwa, por. pionierską pracę [Naylor 1979], zarówno w dużej, jak i małej skali, np. [Wiśniewski 2003; Zatoń 2001]. Odnosząc się do przedstawionego modelu makroekonomicznego, można by nawet znaleźć pewne analogie dla modelu firmy (np. płace uzależnione od wydajności pracy czy też produkcję sprzedaną uzależnioną

od popytu). Również zmienne egzogeniczne zastosowane w modelu makro znalazłyby zastosowanie w modelu mikro, choć inny byłby ich charakter. Byłyby one „datami”, wartościami, na które przedsiębiorstwo nie ma wpływu. Niemniej jednak potraktowanie niektórych z nich w optymalnym sterowaniu jako instrumentów, głównie od strony technicznej, mogłoby znacznie wzbogacić wiedzę prognosty. Pozwoliłoby bowiem ocenić, jakie wartości ważnych elementów otoczenia przedsiębiorstwa mogą umożliwić realizację celów firmy. Za instrumenty, którymi przedsiębiorstwo mogłoby wpływać na osiągnięcie swoich celów, można by uznać: wydatki na inwestycje, wydatki na reklamę, ceny produktów i towarów, płace w przedsiębiorstwie. Wśród klasycznych celów funkcjonowania przedsiębiorstwa moglibyśmy natomiast wymienić wynik finansowy, stopę zwrotu z kapitału, udział w rynku, poziomy zadłużenia i płynności finansowej.

Literatura

- Biuletyny statystyczne GUS.
- Dittmann P., *Metody prognozowania sprzedaży w przedsiębiorstwie*, AE, Wrocław 2000, s. 110-128.
- Gajda J.B., *Model ekonometryczny w optymalnym sterowaniu gospodarką*, PWE, Warszawa 1993, s. 36.
- Każmierska-Zatoń M.M., *Rozwiązywanie problemu minimalizacji funkcji strat w optymalnym sterowaniu układami ekonomicznymi z wykorzystaniem algorytmów numerycznych i genetycznych*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko '02*, red. T. Trzaskalik, AE, Katowice 2002.
- Każmierska-Zatoń M.M., Zatoń W., *Analiza wrażliwości rozwiązań w problemie optymalnego sterowania*, [w:] *Metody i zastosowania badań operacyjnych '04*, red. T. Trzaskalik, AE, Katowice 2004.
- Naylor T., *Corporate Planning Models*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York 1979.
- Neck R., Karbuz S., *Towards Constructing an Objective Function for Austrian Fiscal Policy-Making: An Optimum Control Approach*, [w:] Tangian A., Gruber J. (eds.), *Constructing Scalar-Valued Objective Functions*, Springer Verlag, Berlin 1997.
- Prognozowanie i symulacja*, red. W. Milo, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2002.
- Welfe A., *Modele i polityka makroekonomiczna*, PWE, Warszawa 2004.
- Welfe W., *Ekonometria stosowana*, PWE, Warszawa 2004.
- Witkowska D., *Optymalne sterowanie na podstawie modeli ekonometrycznych. Analiza empiryczna makrorelacji w gospodarce polskiej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1993.
- Wiśniewski J., *Ekonometryczny model małego przedsiębiorstwa*, Instytut Wydawniczy „Gravis”, Toruń 2003.
- Zatoń W., *Zarządzanie gotówką w przedsiębiorstwie z wykorzystaniem modelu symulacyjnego*, [w:] *Prognozowanie w zarządzaniu firmą*, red. I. Kuropka, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 919, AE, Wrocław 2001.

THE USE OF OPTIMAL CONTROL FOR FORECASTING IN THE ECONOMY

Summary

Optimal control problem in the economics leads to the choice of the optimal economic policy from the set of the alternatives. In other words, the problem is to find such policy instruments that enable to realize assumed

control objectives with the minimum loss (the difference between the optimal values from the solution and desirable levels). The economic system to be controlled is usually described by the mathematical model (an econometric model in particular). The optimal control model may be used as a tool for forecasting. In this case we forecast values of the exogenous variables (some of them selected as instruments) not endogenous ones (now being control objectives) as in the usual approach. When modelling macroeconomy the instruments may be: tax rate, budget expenses, or central bank interest rate, the objectives: production, consumption, unemployment rate or a level of inflation. In a model for an enterprise we could select wages, products' prices, research and development expenses, marketing expenses (instruments) and sales, profit, return on equity, market share, financial liquidity ratio or a debt ratio (objectives). In the paper we describe the specific use of optimal control for forecasting purposes and show some results based on a small econometric model.