

Barbara Batóg

Uniwersytet Szczeciński

PRÓBA WYKORZYSTANIA PROGNOZ KOMBINOWANYCH W PROGNOZOWANIU PRZYCHODÓW ZE SPRZEDAŻY NA PRZYKŁADZIE WYBRANEJ SPÓŁKI GIEŁDOWEJ

Znanych jest wiele różnych metod prognozowania, co nie oznacza, że jedna z nich jest uniwersalna, przydatna w każdych warunkach i najbardziej efektywna bez względu na charakter badanego szeregu czasowego lub danych przekrojowo-czasowych. Zdarza się nieraz, że jedna z nich jest zdecydowanie lepsza niż inne, np. w sensie otrzymywania mniejszych błędów prognoz. Jeżeli tej jednej, najlepszej metody nie można jednoznacznie wskazać, to sposobem na wykorzystanie więcej niż jednej metody prognozowania jednocześnie jest budowa prognoz kombinowanych [Bates 1969; Dickinson 1973; Newbold 1974; Winkler, Makridakis 1983]. Sposób ten wykorzystuje informacje zawarte w poszczególnych prognozach indywidualnych.

Prognoza kombinowana ma postać:

$$y_i^p = \sum_{i=1}^m k_i y_i^{pi},$$

gdzie: y_i^p – prognoza kombinowana,

y_i^{pi} – i -ta prognoza indywidualna,

k_i – współczynnik (waga) odpowiadający metodzie i ,

m – liczba metod indywidualnych.

Współczynniki kombinacji liniowej dobiera się w ten sposób, aby błąd prognozy kombinowanej był jak najmniejszy. Jeżeli prognozy indywidualne są nieobciążone, to najczęściej stosuje się metodę wariancji i kowariancji, w której wektor współczynników kombinacji liniowej wyznacza się ze wzoru:

$$(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{\Sigma^{-1} j}{j' \Sigma^{-1} j},$$

gdzie: $j' = [1 \dots 1]$,

Σ – macierz wariancji i kowariancji błędów prognoz indywidualnych.

Inną metodą wyznaczania wag kombinacji liniowej jest metoda regresji, w której szacuje się liniowy model ekonometryczny, gdzie zmienna objaśniana to jednocześnie zmienna prognozowana, a zmienne objaśniające są utworzone z prognoz otrzymanych metodami indywidualnymi. Oszacowane parametry strukturalne tego modelu to jednocześnie poszukiwane współczynniki kombinacji liniowej.

Jeszcze innym sposobem wyznaczenia wag kombinacji liniowej jest skorzystanie z jednego ze wzorów przytoczonych w pracy [Newbold 1974], np.:

$$k_i = \frac{1}{\sum_{s=1}^m V_s^2} V_i^2,$$

gdzie: V_i^2 – oszacowanie wariancji prognoz dla i -tej metody indywidualnej.

W powyższym wzorze współczynnik odpowiadający i -tej metodzie indywidualnej jest związany z odwrotnością jej wariancji – zatem im niższa wariancja, tym wyższy jest przyporządkowany tej metodzie współczynnik.

W artykule zbudowano prognozy kombinowane przychodów ze sprzedaży w przykładowym przedsiębiorstwie – jednej ze spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Dane pochodziły z *Notorii Service* i dotyczyły okresu od I kwartału 1998 r. do II kwartału 2005 r. Podstawą budowy prognoz kombinowanych były trzy prognozy indywidualne. Budowa prognoz indywidualnych została oparta na 1) addytywnym modelu Holta-Wintersa, 2) modelu trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi oraz 3) analizie harmonicznej przy założeniu trendu liniowego [Cieślak 2002; Dittmann 2003]. Prognozy indywidualne wyznaczono dla czterech kwartałów 2003 r. na podstawie danych od I kwartału 1998 r. do IV kwartału 2002 r. Następnie absolutne błędy *ex post* prognoz indywidualnych na poszczególne kwartały 2003 r. posłużyły do wyznaczenia współczynników (wag) kombinacji liniowej prognoz. Z kolei zaś rok 2004 był okresem empirycznej weryfikacji prognoz kombinowanych.

W pierwszej kolejności podjęto próbę wyznaczenia wag kombinacji liniowej metodą wariancji i kowariancji. Wariancje i kowariancje prognoz indywidualnych zostały oszacowane z wykorzystaniem absolutnych błędów *ex post* w roku 2003. Okazało się jednak, że metoda ta dała ujemne współczynniki kombinacji. Przyczyną takiego wyniku może być charakteryzowanie się przez co najmniej jedną z metod budowy prognoz indywidualnych obciążonością [Holden, Peel, Thompson 1990]. Wniosek ten potwierdziło zastosowanie do wyznaczenia współczynników kombinacji liniowej metody regresji bez narzucenia wa-

runku o zerowaniu się wyrazu wolnego. Otrzymano te same co w metodzie wariancji i kowariancji ujemne współczynniki kombinacji, ale wyraz wolny okazał się statystycznie istotny. Analiza prognoz zbudowanych w oparciu o analizę harmoniczną daje podstawy do przypuszczenia, że właśnie ta metoda dała prognozy obciążone i stąd współczynniki kombinacji liniowej prognoz, otrzymane metodą wariancji i kowariancji, były ujemne.

W dalszej kolejności współczynniki kombinacji liniowej wyznaczono, posługując się oszacowaniami opartymi jedynie na wariancjach błędów prognoz indywidualnych. Wagi przypisane poszczególnym prognozom indywidualnym były tym większe, im mniejsze były odpowiadające im oszacowania wariancji.

Otrzymano następujące współczynniki kombinacji liniowej:

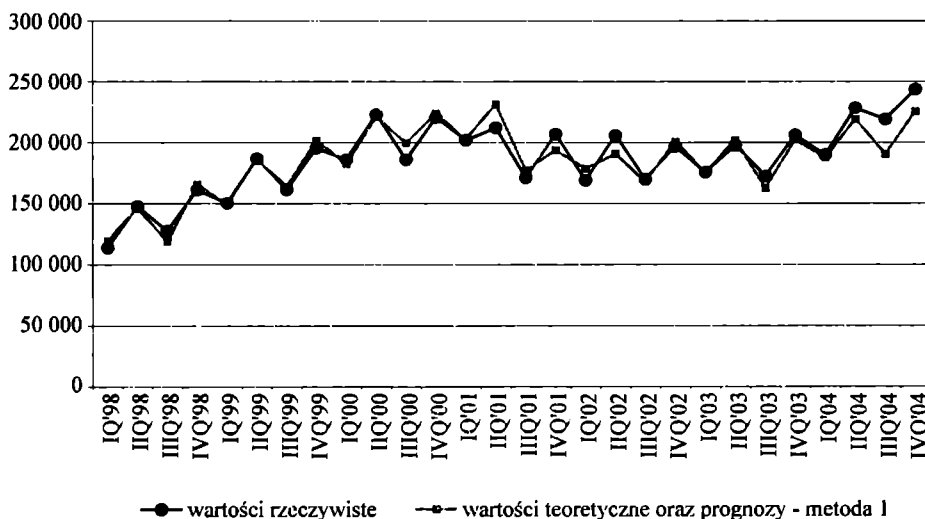
$$k_1 = 0,509,$$

$$k_2 = 0,391,$$

$$k_3 = 0,100,$$

gdzie k_1 odpowiada prognozom zbudowanym z wykorzystaniem addytywnego modelu Holta-Wintersa, k_2 – modelu trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi oraz k_3 – analizy harmonicznej przy założeniu trendu liniowego.

Na rys. 1 przedstawiono kształtowanie się przychodów ze sprzedaży w latach 1998-2004, wartości teoretyczne dla lat 1998-2003 oraz prognozy na rok 2004 otrzymane na podstawie addytywnego modelu Holta-Wintersa. Stałe wygładzania dla tego modelu wybrano za pomocą minimalizacji średniego bezwzględnego błędu procentowego. Najmniejsza wartość tego błędu wyniosła 3,26% dla stałych wygładzania $\alpha = 0,7$, $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,7$.



Rys. 1. Wartości rzeczywiste przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w latach 1998-2004 oraz wartości teoretyczne i prognozy na rok 2004 otrzymane z wykorzystaniem addytywnego modelu Holta-Wintersa (metoda 1)

Źródło: Notoria Service oraz obliczenia własne.

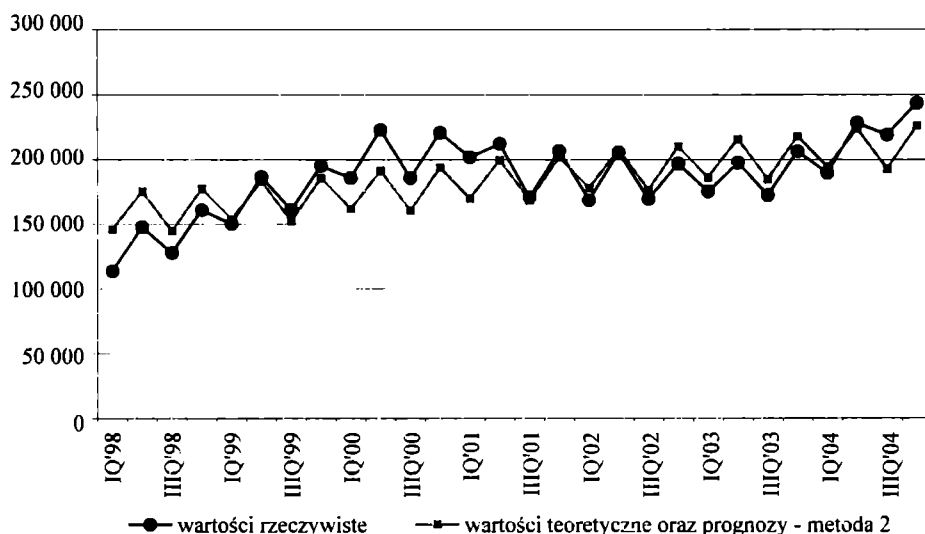
W tab. 1 zamieszczono wyniki oszacowania modelu trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi. Model ten charakteryzuje się wysokim współczynnikiem dopasowania $R^2 = 66,2\%$ oraz istotnymi (poza jednym) parametrami.

Tabela 1. Wyniki oszacowania modelu trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi

	Ocena parametru	Błąd standardowy oceny parametru	Wartość statystyki t	Poziom p
Wyraz wolny	155991,9	8575,102	18,19126	0,000000
Zmienna czasowa	2013,4	601,978	3,34470	0,003404
Q1t	-11957,5	7179,705	-1,66546	0,112224
Q2t	15515,4	7129,053	2,17636	0,042348
Q3t	-17418,2	7129,053	-2,44327	0,024491
Q4t	13860,3	–	–	–

Źródło: Notoria Service oraz obliczenia własne.

Na rys. 2 przedstawiono kształtowanie się przychodów ze sprzedaży w latach 1998-2004, wartości teoretyczne dla lat 1998-2003 oraz prognozy na rok 2004 otrzymane na podstawie modelu trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi.



Rys. 2. Wartości rzeczywiste przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w latach 1998-2004 oraz wartości teoretyczne i prognozy na rok 2004 otrzymane z wykorzystaniem modelu trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi (metoda 2)

Źródło: Notoria Service oraz obliczenia własne.

W tab. 2 przedstawiono wyniki przeprowadzenia analizy harmonicznej przy założeniu trendu liniowego. Wyraz wolny oraz parametr kierunkowy tego modelu wyniosły odpowiednio 154540,2 oraz 2129,6 i były statystycznie istotne na poziomie istotności 0,05.

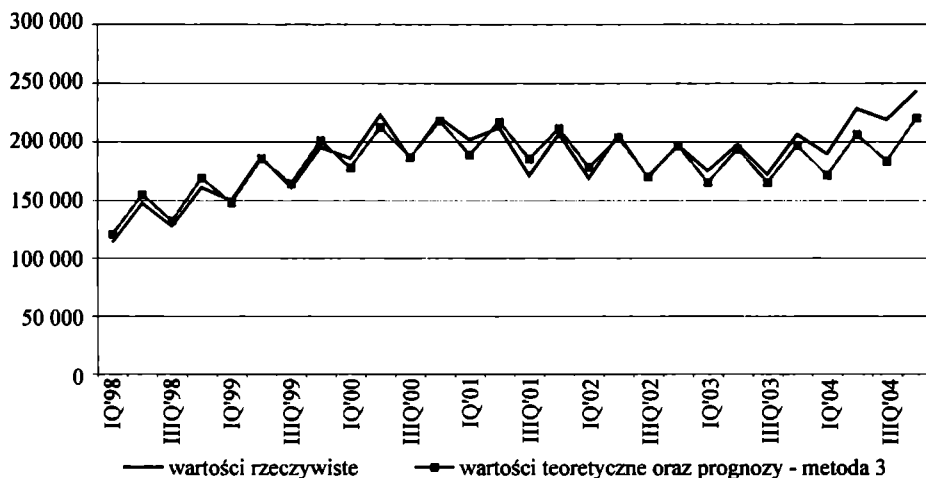
Tabela 2. Oszacowane parametry oraz udział poszczególnych harmonik w wyjaśnianiu zmiennej przychody w analizie harmonicznej przy założeniu trendu liniowego

Numer harmoniki	α_i	β_i	Udział harmoniki w wyjaśnianiu wariancji przychodów
1	3824,0	-23212,2	51,2%
2	-5704,4	3315,2	4,0%
3	-1280,7	-1884,5	0,5%
4	-1156,5	2097,6	0,5%
5	-1705,4	1486,6	0,5%
6	2846,5	-943,7	0,8%
7	-3208,3	1138,4	1,1%
8	1603,6	1843,8	0,6%
9	-2194,4	2560,0	1,1%
10	-761,9	-168,7	0,1%
11	1149,4	-74,2	0,1%
12	0,0	14629,8	39,6%

Źródło: *Notoria Service* oraz obliczenia własne.

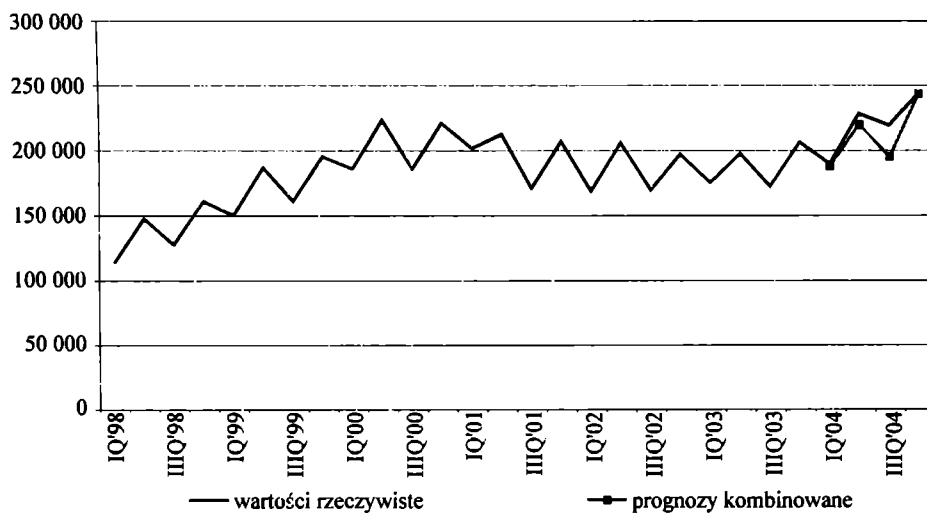
Na rys. 3 przedstawiono kształtowanie się przychodów ze sprzedaży w latach 1998-2004, wartości teoretyczne dla lat 1998-2003 oraz prognozy na rok 2004 otrzymane na podstawie analizy harmonicznej przy założeniu trendu liniowego.

Na rys. 4 przedstawiono kształtowanie się przychodów ze sprzedaży w latach 1998-2004 oraz prognozy kombinowane na poszczególne kwartały 2004 r. Natomiast w tab. 3 zamieszczono wartości rzeczywiste przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w poszczególnych kwartałach 2004 r., prognozy indywidualne wraz z odpowiadającymi im błędami procentowymi i ich średnimi oraz prognozy kombinowane, ich błędy procentowe i średnią tych błędów.



Rys. 3. Wartości rzeczywiste przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w latach 1998-2004 oraz wartości teoretyczne i prognozy na rok 2004 otrzymane z wykorzystaniem analizy harmonicznej (metoda 1)

Źródło: Notoria Service oraz obliczenia własne.



Rys. 4. Wartości rzeczywiste przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w latach 1998-2004 oraz prognozy kombinowane na rok 2004

Źródło: Notoria Service oraz obliczenia własne.

Tabela 3. Wartości rzeczywiste przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w poszczególnych kwartałach 2004 r., prognozy indywidualne wraz z odpowiadającymi im błędami procentowymi i ich średnimi oraz prognozy kombinowane, ich błędy procentowe i średnia tych błędów

	I kwartał 2004	II kwartał 2004	III kwartał 2004	IV kwartał 2004	Średnia
Wartości rzeczywiste	189 806,0	228 554,0	219 356,0	243 787,0	-
Metoda 1	187701,8	220683,9	199813,9	262718,1	-
Błędy	1,11%	3,44%	8,91%	7,77%	5,31%
Metoda 2	194370,2	223856,6	192936,4	226228,4	-
Błędy	2,40%	2,06%	12,04%	7,20%	5,93%
Metoda 3	164977,1	198974,8	178912,6	212427,8	-
Błędy	13,08%	12,94%	18,44%	12,86%	14,33%
Prognozy kombinowane	188041,4	219757,2	195035,8	243419,4	-
Błędy	0,93%	3,85%	11,09%	0,15%	4,00%

Metoda 1 to addytywny model Holta-Wintersa, metoda 2 - model trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi, a metoda 3 - analiza harmoniczna przy założeniu trendu liniowego

Źródło: *Notoria Service* oraz obliczenia własne.

Średni błąd procentowy prognoz kombinowanych był mniejszy niż każdy ze średnich błędów otrzymanych dla prognoz zbudowanych metodami indywidualnymi. Pozwala to wysunąć sugestię, że budowa prognoz kombinowanych jest warta polecenia w praktyce również w polskich warunkach gospodarczych¹. Jednakże trzeba tego rodzaju prognozami posługiwać się ostrożnie, biorąc pod uwagę możliwe obciążenie metod składowych.

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że wyznaczone współczynniki kombinacji liniowej nie są najczęściej stałe w czasie. Potwierdzeniem tego faktu są błędy otrzymane w przypadku wykorzystania wyznaczonych wcześniej współczynników do budowy prognoz na I i II kwartał 2005 roku. Wyniki budowy takich prognoz zamieszczono w tab. 4.

Prognozy kombinowane na I i II kwartał 2005 r., zbudowane z wykorzystaniem współczynników wyznaczonych na podstawie okresów nie najnowszych, charakteryzują się wyższymi wartościami błędów niż zamieszczone w tab. 1, a także nie mają już niższych błędów niż wszystkie prognozy indywidualne. Płyne stąd wnioszek, że w miarę napływu nowych informacji należy aktualizować współczynniki kombinacji liniowej. Mimo tej wady prognozy kombinowane są warte zastosowania, zwłaszcza że w przypadku, gdy do budowy prognoz kombinowanych wykorzystano równe wagi (czyli po 1/3), otrzymano prognozy charakteryzujące się wyższymi błędami procentowymi – odpowiednio 20,05% i 14,86% dla I i II kwartału 2005 r.

¹ Pozytywne opinie o prognozach kombinowanych można znaleźć m.in. w pracach [Armstrong 2003; Clements 2002; Makridakis, Wheelwright, Hyndman 1998].

Tabela 4. Wartości rzeczywiste przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w I i II kwartale 2005 roku, prognozy indywidualne wraz z odpowiadającymi im błędami procentowymi oraz prognozy kombinowane i ich błędy procentowe

	I kwartał 2005	II kwartał 2005
Wartości rzeczywiste	259 533,0	283 059,0
Metoda 1	234 606,6	270 234,5
błędy	9,60%	4,53%
Metoda 2	206 498,1	237 307,6
błędy	20,43%	16,16%
Metoda 3	181 417,6	215 418,6
błędy	30,10%	23,90%
Prognozy kombinowane	218 297,6	251 877,7
błędy	15,89%	11,02%

Metoda 1 to addytywny model Holta-Wintersa, metoda 2 - model trendu liniowego ze stałymi wahaniami sezonowymi, a metoda 3 - analiza harmoniczna przy założeniu trendu liniowego.

Źródło: Notoria Service oraz obliczenia własne.

Literatura

- Armstrong J.S., *Principles of Forecasting. A Handbook for Researchers and Practitioners*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London 2003.
- Bates J.M., Granger C.W.J., *The Combination of Forecasts*, „Operational Research Quarterly” 1969, vol. 20, no. 4.
- Clements M.P., Hendry D.F., *A Companion to Economic Forecasting*, Blackwell Publishers, USA, UK 2002.
- Dickinson J.P., *Some Statistical Results in the Combination of Forecasts*, „Operational Research Quarterly” 1973, vol. 24, no. 2.
- Dittmann P., *Prognozowanie w przedsiębiorstwie*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2003.
- Holden K., Peel D.A., Thompson J.L., *Economic Forecasting: an Introduction*, Cambridge University Press 1990.
- Makridakis S., Wheelwright S.C., Hyndman R.J., *Forecasting. Methods and Applications*, John Wiley & Sons, USA 1998.
- Newbold P., Granger C.W.J., *Experience with Forecasting Univariate Time Series and the Combination of Forecasts*, „Journal of Royal Statistical Society” 1974, no. 137.
- Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, red. M. Cieślak, AE, Wrocław 2002.
- Winkler R.L., Makridakis S., *The Combination of Forecasts*, „Journal of Royal Statistical Society” 1983, no. 146.

**THE TRIAL OF APPLICATION OF COMBINATION OF FORECASTS
IN FORECASTING OF SALES REVENUE FOR ONE OF FIRM
FROM WARSAW STOCK EXCHANGE**

Summary

In the paper the author constructed the combination of forecast for quarterly sales revenue for one of firm from Warsaw Stock Exchange. Individual forecasts were prepared on the basis of additive Holt-Winters model, linear trend with seasonality and harmonic analysis. It turned out that combination of forecasts was related to the percentage errors smaller than for every individual forecast. It was also pointed out that wages of combination should be calculated on the basis of possibly newest data.