

Anna Szymańska

Uniwersytet Łódzki

SZACOWANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW *BONUS-MALUS* W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH OC ZA POMOCĄ ESTYMATORÓW BAYESOWSKICH

1. Wstęp

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC składki są wyznaczane w dwóch etapach. Pierwszy to obliczenie składki podstawowej na podstawie czynników *a priori* (obserwowalnych czynników ryzyka takich, jak np. rodzaj i rok produkcji samochodu), drugi etap to taryfikacja *a posteriori* (historia szkodowości kierowcy).

Praca dotyczy drugiego etapu, nazywanego systemem *bonus-malus*.

Systemem *bonus-malus* będziemy nazywać metody wyznaczania indywidualnych składek, uwzględniające liczbę szkód spowodowanych przez kierowcę w przeszłości. W każdym systemie *bonus-malus* musi być ustalona klasa startowa, do której trafiają ubezpieczeni bez historii szkodowości, wektor stawek składki podstawowej oraz zasady przejść między klasami.

W ubezpieczeniowym systemie *bonus-malus* wyznacza się składkę *a priori*, a następnie uwzględnia się indywidualny parametr ryzyka nazywany stawką składki [3].

W pracy do wyznaczania indywidualnych parametrów ryzyka zastosowano estymatory bayesowskie [1]. Za pomocą estymatorów bayesowskich oszacowano i porównano współczynniki *bonus-malus* dla indywidualnych składek wyznaczonych trzema metodami: metodą wartości oczekiwanej, metodą wariancji oraz metodą zerowej użyteczności. Badania przeprowadzono dla różnych parametrów rozkładu liczby szkód.

2. Szacowanie składek w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC

W ubezpieczeniach komunikacyjnych zakłada się, że liczba szkód K w jednorodnym portfelu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona o postaci:

$$P(K = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

gdzie λ nazywany jest parametrem intensywności szkód.

Jeżeli portfel jest niejednorodny [2], to parametr intensywności szkód λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrami α i β , o funkcji gęstości postaci

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0. \quad (2)$$

Wówczas liczba szkód w portfelu ma rozkład ujemny dwumianowy o postaci

$$P(K = k) = \binom{q+k-1}{k} p^q (1-p)^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

z parametrami p i q , gdzie

$$q = \alpha \text{ i } p = \beta / (1 + \beta). \quad (4)$$

Estymatory parametrów α i β , wyznaczone metodą momentów, mają postać

$$\beta = \frac{\bar{k}}{S_k^2 - \bar{k}} \text{ i } \alpha = \frac{\bar{k}^2}{S_k^2 - \bar{k}}, \quad (5)$$

gdzie $\bar{k}$ jest wartością średniej liczby szkód w portfelu, S_k^2 – wariancją liczby szkód w portfelu.

Niech K_j będzie zmienną losową oznaczającą liczbę szkód w roku j dla danej polisy; $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ wektorem obserwacji liczby szkód przez t lat dla danej polisy; $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$ będzie nieznanym parametrem szkodowości w roku $t + 1$ dla polisy opisanej wektorem obserwacji $(k_1, k_2, \dots, k_t)$.

Nieznaną parametr $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$ można oszacować za pomocą estymatora bayesowskiego na podstawie wektora obserwacji $(k_1, k_2, \dots, k_t)$. Estymator bayesowski parametru λ jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori*.

Założmy, że rozkład liczby szkód w portfelu jest ujemny dwumianowy. Parametr intensywności szkód Λ ma rozkład *a priori* gamma z parametrami α i β . Zatem rozkład *a posteriori* parametru λ jest rozkładem gamma z parametrami $\hat{\alpha} = \alpha + k$ oraz $\hat{\beta} = \beta + t$.

Estymator bayesowski parametru λ ma postać

$$\lambda_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{\alpha + k}{\beta + t}. \quad (6)$$

Parametry α i β wyznaczamy ze wzoru (5).

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC indywidualna składka netto w okresie $t + 1$ wynosi:

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (EX) \cdot (E\lambda) \cdot b_{t+1}(k_1, \dots, k_t), \quad (7)$$

gdzie $P_{t+1}(k_1, \dots, k_t)$ – indywidualna składka netto w okresie $t + 1$, (EX) – wartość oczekiwana pojedynczej szkody, $(E\lambda)$ – wartość oczekiwana liczby szkód, $b_{t+1}(k_1, \dots, k_t)$ – stawka szacowanej składki.

Przyjmijmy, że $(EX) = 1$ oraz $(E\lambda) = \frac{\alpha}{\beta}$. Wówczas równanie (7) ma postać

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot b_{t+1}(k_1, \dots, k_t). \quad (8)$$

Wynika stąd, że kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, powinien płacić stawkę szacowanej składki równą

$$b_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{P_{t+1}(k_1, \dots, k_t)}{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot 100\%. \quad (9)$$

Najprostszą zasadą kalkulacji składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych jest zasada wartości oczekiwanej. Szacowana według **zasady wartości oczekiwanej** indywidualna składka netto powiększona o dodatek bezpieczeństwa θ wynosi

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (1 + \theta)\lambda_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (1 + \theta)\frac{\alpha + k}{\beta + t}. \quad (10)$$

Na podstawie wzorów (9) i (10) kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, w roku $t + 1$ powinien płacić stawkę składki równą

$$b_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (1 + \theta)\frac{\beta(\alpha + k)}{\alpha(\beta + t)} \cdot 100\%. \quad (11)$$

Szacowana według **zasady wariancji** indywidualna składka netto powiększona o dodatek bezpieczeństwa θ wynosi

$$\begin{aligned} P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) &= (1 + \theta)E_\lambda[\lambda|k_1, \dots, k_t] + \theta Var_\lambda[\lambda|k_1, \dots, k_t] = \\ &= (1 + \theta)\frac{\alpha + k}{\beta + t} + \theta\frac{\alpha + k}{(\beta + t)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Szacowana stawka składki netto dla kierowcy, który po t latach zgłosił k szkód, wynosi

$$b_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\beta}{\alpha} \left[(1 + \theta)\frac{\alpha + k}{\beta + t} + \theta\frac{\alpha + k}{(\beta + t)^2} \right]. \quad (13)$$

Do szacowania indywidualnej składki netto zastosujemy **zasadę zerowej użyteczności**.

Zasada zerowej użyteczności opiera się na założeniu, że oczekiwana użyteczność zarobku ubezpieczyciela, gdy ryzyko X zostanie ubezpieczone za cenę P , równa się użyteczności początkowej rezerwy w ubezpieczyciela, czyli

$$u(w - P) = Eu(w - X). \quad (14)$$

Niech funkcja $u(w)$ będzie wykładniczą funkcją użyteczności o postaci

$$u(w) = \frac{1}{c} (1 - e^{-cw}), \quad (15)$$

gdzie $c > 0$ jest parametrem określającym awersję do ryzyka towarzystwa ubezpieczeniowego. Jeżeli funkcja użyteczności ma postać określoną wzorem (15), to składka netto P wynosi

$$P = \frac{\alpha}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{\beta} \right) \right| \quad \text{dla} \quad \beta > e^c - 1. \quad (16)$$

Uwzględniając, że $\hat{\alpha} = \alpha + k$ oraz $\hat{\beta} = \beta + t$, szacowana według **zasady użyteczności** indywidualna składka netto wynosi

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\alpha + k}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{t + \beta} \right) \right|. \quad (17)$$

Ponieważ celem badania jest oszacowanie, ile procent składki podstawowej powinien płacić kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, na podstawie równań (9) i (17) stawka szacowanej składki w systemie *bonus-malus* wynosi

$$b_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha + k}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{t + \beta} \right) \right| \cdot 100\%. \quad (18)$$

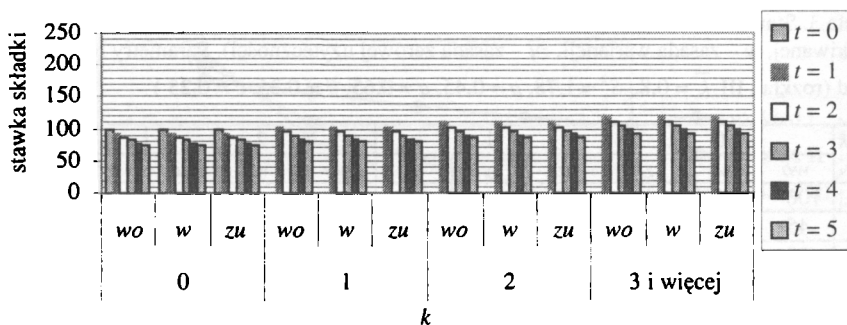
3. Przykład empiryczny

W pracy oceniono wpływ doboru metody szacowania indywidualnej składki na estymowane współczynniki *bonus-malus*. Oceniono również wpływ parametrów rozkładu liczby szkód na szacowane stawki składek.

Tabela 1. Stawka szacowanej składki wyznaczana według trzech zasad (*wo* – zasada wartości oczekiwanej, *w* – zasada wariancji, *zu* – zasada zerowej użyteczności). Parametry rozkładu liczby szkód (rozkład I: $\bar{k} = 0,8$, $S_k^2 = 0,86$, $p = 0,93$, $q = 10,67$, $\theta = 0,25$, $c = 0,25$)

$t \backslash k$	0			1			2			3 i więcej		
	<i>wo</i>	<i>w</i>	<i>zu</i>	<i>wo</i>	<i>w</i>	<i>zu</i>	<i>wo</i>	<i>w</i>	<i>zu</i>	<i>wo</i>	<i>w</i>	<i>zu</i>
0	100	100	100									
1	93	93	93	102	102	102	110	111	111	119	119	119
2	87	87	87	95	95	95	103	103	103	111	111	112
3	82	82	82	89	89	89	97	97	97	105	105	105
4	77	77	77	84	84	84	91	91	92	99	98	99
5	73	73	73	80	79	80	86	86	87	93	93	93

Źródło: badania własne.

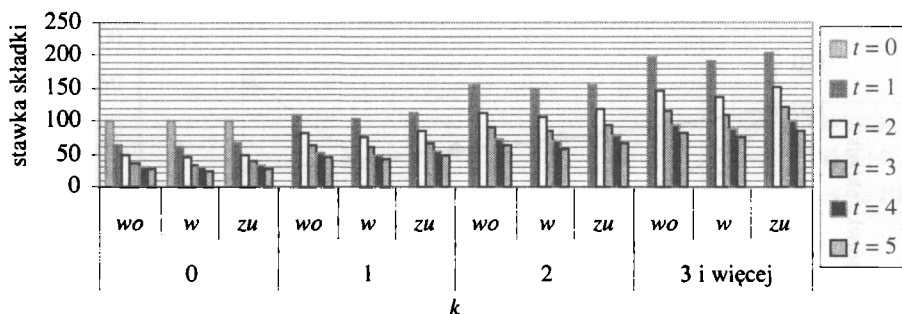


Rys. 1. Stawka szacowanej składki wyznaczana według trzech zasad (wo – zasada wartości oczekiwanej, w – zasada wariancji, zu – zasada zerowej użyteczności), (rozkład I: $\bar{k} = 0,8$, $S_k^2 = 0,86$, $p = 0,93$, $q = 10,67$, $\theta = 0,25$, $c = 0,25$)
Źródło: badania własne.

Tabela 2. Stawka szacowanej składki wyznaczana według trzech zasad (wo – zasada wartości oczekiwanej, w – zasada wariancji, zu – zasada zerowej użyteczności). Parametry rozkładu liczby szkód (rozkład II $\bar{k} = 0,8$, $S_k^2 = 1,24$, $p = 0,65$, $q = 1,45$, $\theta = 0,25$, $c = 0,25$)

t \ k	0			1			2			3 i więcej		
	wo	w	zu	wo	w	zu	wo	w	zu	wo	w	zu
0	100	100	100									
1	65	62	66	109	105	112	154	148	157	198	191	203
2	48	45	49	81	76	84	113	107	118	146	138	152
3	38	35	39	64	60	67	90	84	94	116	109	121
4	31	29	33	53	49	56	74	69	78	96	89	101
5	27	25	28	45	42	48	63	59	67	82	76	86

Źródło: badania własne.

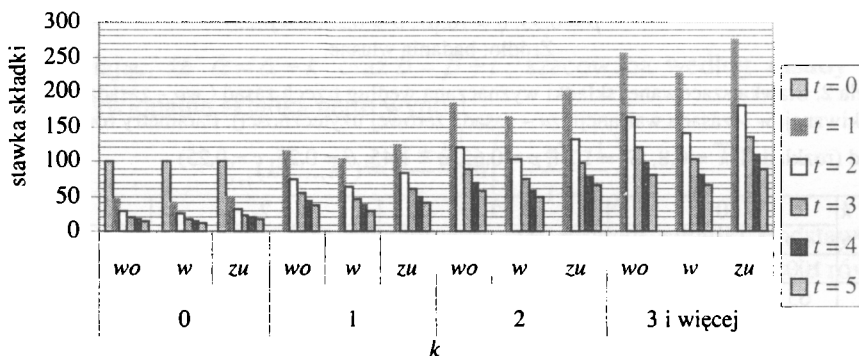


Rys. 2. Stawka szacowanej składki wyznaczana według trzech zasad (wo – zasada wartości oczekiwanej, w – zasada wariancji, zu – zasada zerowej użyteczności), (rozkład II $\bar{k} = 0,8$, $S_k^2 = 1,24$, $p = 0,65$, $q = 1,45$, $\theta = 0,25$, $c = 0,25$)
Źródło: badania własne.

Tabela 3. Stawka szacowanej składki wyznaczana według trzech zasad (wo – zasada wartości oczekiwanej, w – zasada wariancji, zu – zasada zerowej użyteczności). Parametry rozkładu liczby szkód (rozkład III $\bar{k} = 0,8$, $S_k^2 = 1,78$, $p = 0,45$, $q = 0,65$, $\theta = 0,25$, $c = 0,25$)

t \ k	0			1			2			3 i więcej		
	wo	w	zu	wo	w	zu	wo	w	zu	wo	w	zu
0	100	100	100									
1	45	40	49	114	102	124	184	164	199	253	226	274
2	29	25	32	74	64	82	119	102	132	163	141	181
3	21	18	24	54	46	61	88	74	98	121	102	135
4	17	14	19	43	36	49	69	58	78	96	80	108
5	14	12	16	36	30	41	57	48	65	79	66	90

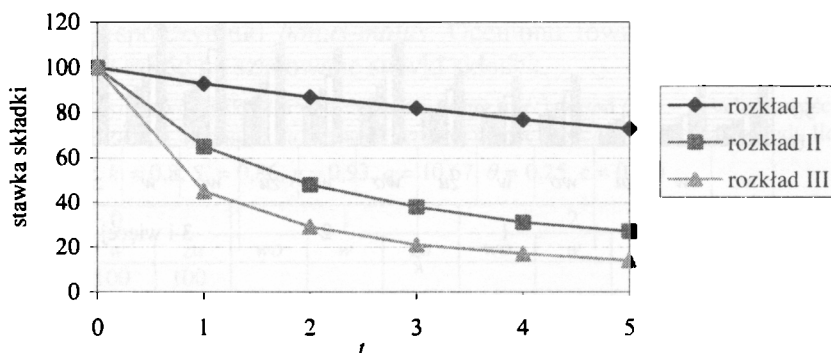
Źródło: badania własne.



Rys. 3. Stawka szacowanej składki wyznaczana według trzech zasad (wo – zasada wartości oczekiwanej, w – zasada wariancji, zu – zasada zerowej użyteczności), (rozkład III $\bar{k} = 0,8$,

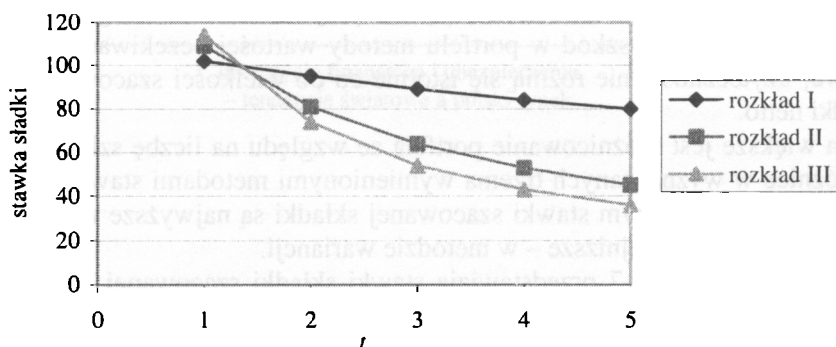
$$S_k^2 = 1,78, p = 0,45, q = 0,65, \theta = 0,25, c = 0,25)$$

Źródło: badania własne.

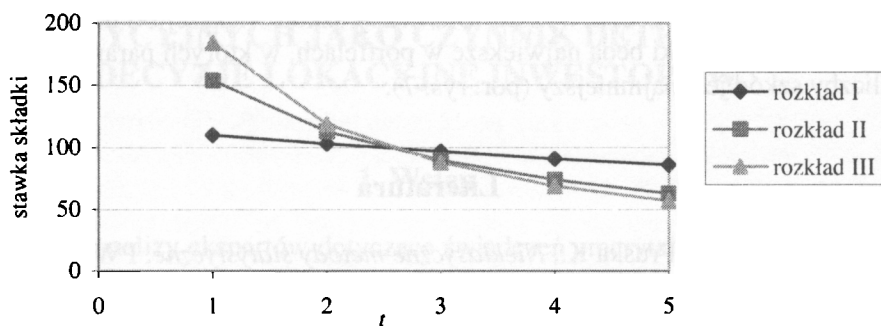


Rys. 4. Porównanie stawek składki szacowanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej dla $k = 0$ na podstawie danych z tab. 1, 2, 3

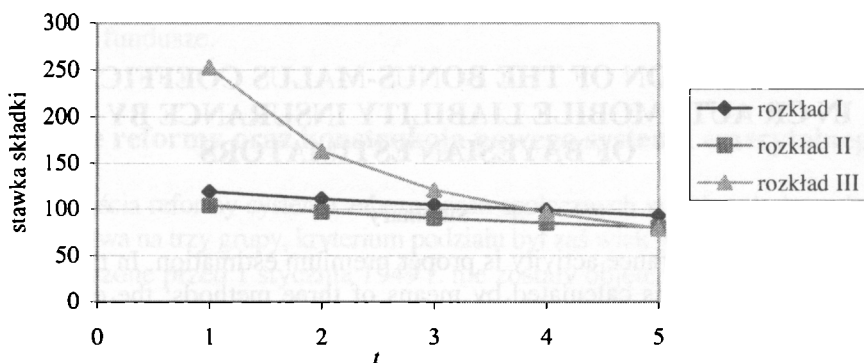
Źródło: badania własne.



Rys. 5. Porównanie stawek składek szacowanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej dla $k = 1$ na podstawie danych z tab. 1, 2, 3
Źródło: badania własne.



Rys. 6. Porównanie stawek składek szacowanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej dla $k = 2$ na podstawie danych z tab. 1, 2, 3
Źródło: badania własne.



Rys. 7. Porównanie stawek składek szacowanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej dla $k \geq 3$ na podstawie danych z tab. 1, 2, 3
Źródło: badania własne.

Przeprowadzone badania wskazują, że przy niewielkim względem średniej zróżnicowaniu liczby szkód w portfelu metody wartości oczekiwanej, wariancji i zerowej użyteczności nie różnią się istotnie co do wielkości szacowanych stawek składki netto.

Im większe jest zróżnicowanie portfela ze względu na liczbę szkód, tym większe różnice w wyznaczanych trzema wymienionymi metodami stawkach szacowanych składek, przy czym stawki szacowanej składki są najwyższe w metodzie zerowej użyteczności, najniższe – w metodzie wariancji.

Wykresy na rys. 4-7 przedstawiają stawki składki szacowanej według zasady wartości oczekiwanej w zależności od roku ubezpieczenia t , liczby szkód k i parametru p rozkładu liczby szkód. Jeżeli kierowca nie spowoduje szkody, to płaci w każdym roku niższą stawkę składki netto. Stawki składki będą najmniejsze w portfelach, w których parametr p rozkładu liczby szkód jest najmniejszy (por. rys. 4). Im więcej szkód spowoduje kierowca, tym stawka składki płacona w następnych latach ubezpieczenia będzie wyższa. Dla liczby szkód większej od trzech lub równej trzy stawki składki będą największe w portfelach, w których parametr p rozkładu liczby szkód jest najmniejszy (por. rys. 7).

Literatura

- [1] Domański Cz., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.
- [2] Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B., *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambridge 1999.
- [3] Lemaire J., *Bonus-malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

ESTIMATION OF THE BONUS-MALUS COEFFICIENTS IN CR AUTOMOBILE LIABILITY INSURANCE BY MEANS OF BAYESIAN ESTIMATORS

Summary

The basis of insurance activity is proper premium estimation. In the paper, individual net premium is calculated by means of three methods: the expected value method, the variance method, and the zero utility method. Subsequently, by means of Bayesian estimators, the *bonus-malus* coefficients for the premiums calculated by the three methods mentioned above were estimated and compared. The research was performed for different parameters of the number of damages distribution.