

Beata Stolorz

Uniwersytet Szczeciński

WYKORZYSTANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ DO KONSTRUOWANIA STRATEGII OPCYJNYCH

1. Wstęp

Strategie opcyjne są stosowane przez inwestora w celu ograniczenia ryzyka poniesienia straty wynikającej ze zmienności ceny instrumentu bazowego. Jeżeli dostępne byłyby opcje europejskie o wszystkich możliwych cenach, to teoretycznie możliwe byłoby stworzenie dowolnej funkcji dochodu końcowego [2, s. 196-197]. Strategię opcyjną można zapisać w postaci funkcji, co umożliwia jej matematyczną analizę. Utworzenie takiego modelu znacznie ułatwia wybranie strategii, która pozwoli na zminimalizowanie straty i zmniejszenie prawdopodobieństwa jej poniesienia, jak również spowoduje maksymalizację zysku i zwiększenie prawdopodobieństwa jego osiągnięcia [6, s. 164-171]. Celem pracy jest przedstawienie możliwości wykorzystania takiego modelu do konstrukcji i analizy strategii opcyjnych.

2. Funkcja dochodu końcowego strategii opcyjnej

2.1. Strategie proste

Dowolna strategia złożona jest wynikiem równoczesnego zastosowania określonej liczby strategii prostych. Dochód końcowy tych strategii można przedstawić w postaci funkcji, w których zmienna x jest ceną końcową instrumentu bazowego. Niech x_i dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ oznacza cenę wykonania opcji.

1. Nabycie opcji kupna (*long call*):

$$k(x) = \begin{cases} -c_1 & \text{dla } x \in \langle 0, x_1 \rangle \\ x - x_1 - c_1 & \text{dla } x \in \langle x_1, \infty \rangle \end{cases} \quad (1)$$

gdzie: c_1 – cena zakupu opcji kupna.

2. Nabycie opcji sprzedaży (*long put*):

$$s(x) = \begin{cases} -x + x_2 - c_2 & \text{dla } x \in \langle 0, x_2 \rangle \\ -c_2 & \text{dla } x \in \langle x_2, \infty \rangle \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie: c_2 – cena zakupu opcji sprzedaży.

3. Sprzedaż opcji kupna (*short call*):

$$l(x) = \begin{cases} c_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x_3 \rangle \\ -x + x_3 + c_3 & \text{dla } x \in \langle x_3, \infty \rangle \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie: c_3 – cena sprzedaży opcji kupna.

4. Sprzedaż opcji sprzedaży (*short put*):

$$t(x) = \begin{cases} x - x_4 + c_4 & \text{dla } x \in \langle 0, x_4 \rangle \\ c_4 & \text{dla } x \in \langle x_4, \infty \rangle \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie: c_4 – cena sprzedaży opcji sprzedaży.

2.2. Strategie złożone

Funkcja f dochodu końcowego strategii złożonej jest sumą określonej liczby funkcji dochodu końcowego strategii prostych. Jest zatem kombinacją liniową strategii prostych o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Przedstawia ją wzór [6, s. 164-171]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i k_i(x) + \sum_{i=1}^n \beta_i s_i(x) + \sum_{i=1}^p \chi_i l_i(x) + \sum_{i=1}^r \delta_i t_i(x), \quad (5)$$

$$\text{dla } i, n, m, p, r \in N \text{ oraz } \alpha_i, \beta_i, \chi_i, \delta_i \in N_0,$$

gdzie: k_i, s_i, l_i, t_i – odpowiednio strategie *long call*, *long put*, *short call*, *short put*,

$\alpha_i, \beta_i, \chi_i, \delta_i$ – odpowiednio liczba jednakowych strategii *long call*, *long put*, *short call*, *short put*,

m, n, p, r – odpowiednio liczba różnych strategii *long call*, *long put*, *short call*, *short put*.

W zależności od wartości wymienionych współczynników można otrzymać różne strategie złożone.

3. Konstrukcja i analiza funkcji dochodu końcowego wybranych strategii typu *spread**

Strategia opcyjna typu *spread* (rozpiętości) jest to taka strategia, w której inwestor jest jednocześnie nabywcą i wystawiającym opcje na ten sam instrument bazowy [3, s. 203]. Jest ona najpopularniejszym rodzajem kontraktu mieszanego.

* Rozważania na temat wybranych strategii typu *combination* można znaleźć w pracy [5, s. 315-322].

Niech dana będzie strategia typu *spread* polegająca na kupnie jednej opcji kupna o cenie wykonania równej x_1 i premii równej c_1 oraz sprzedaży dwóch opcji kupna o cenach wykonania odpowiednio równych x'_3 , x''_3 i premiach odpowiednio równych c'_3 , c''_3 . Niech terminy wygaśnięcia wszystkich opcji będą jednakowe.

Przy tych założeniach funkcja dochodu końcowego f dana wzorem (5) przyjmie postać:

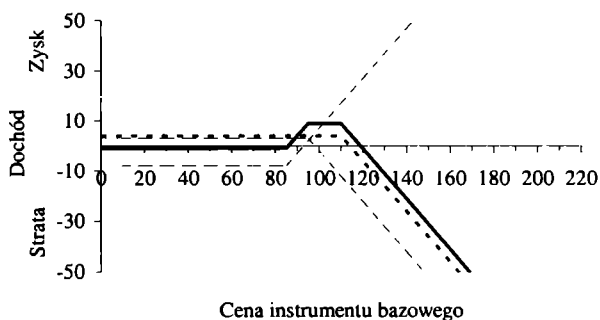
$$f(x) = k_1(x) + \sum_{i=1}^2 l_i(x), \quad (6)$$

gdzie: k_1, l_i ($i \in \{1, 2\}$) mają takie samo znaczenie jak we wzorze (5).

W zależności od wzajemnych relacji między cenami wykonania opcji powstaje 13 przypadków różnych kombinacji strategii, które można zebrać w sześciu grupach.

1. Jeżeli $x_1 < x'_3 < x''_3$, to funkcja f ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} -c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x_1 \rangle \\ x - x_1 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x_1, x'_3 \rangle \\ -x_1 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x'_3, x''_3 \rangle \\ -x - x_1 + x'_3 + x''_3 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x''_3, +\infty \rangle \end{cases} \quad (7)$$



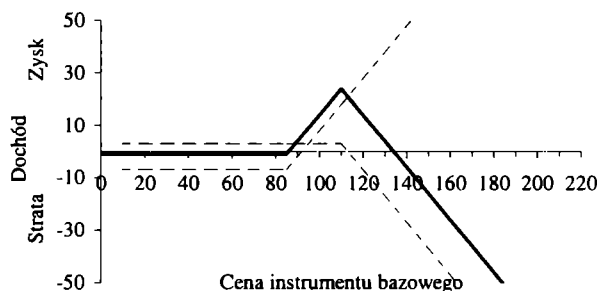
Rys. 1. Strategia *long call ladder* dla $c_1 = 8$, $c'_3 = 3$, $c''_3 = 4$, $x_1 = 85$, $x'_3 = 95$, $x''_3 = 110$

Źródło: opracowanie własne.

Jest to strategia *long call ladder* [4, s. 50]. Strategię tego typu można stosować, jeśli cena rynkowa instrumentu bazowego jest zbliżona do niższej ceny wykonania lub jest jej równa, natomiast inwestor oczekuje niewielkiego wzrostu ceny. Przy wzroście ceny powyżej x''_3 (rys. 1) występuje nieograniczona strata. Analogicznie wygląda przypadek, w którym: $x_1 < x'_3 < x''_3$.

2. Jeżeli $x_1 < x'_3 = x''_3$, to przy założeniu, że $c'_3 = c''_3$, funkcja f ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} -c_1 + 2c'_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x_1 \rangle \\ x - x_1 - c_1 + 2c'_3 & \text{dla } x \in \langle x_1, x'_3 \rangle \\ -x - x_1 + 2x'_3 - c_1 + 2c'_3 & \text{dla } x \in \langle x'_3, +\infty \rangle \end{cases} \quad (8)$$



Rys. 2. Strategia *ratio call spread* dla $c_1 = 7$, $c'_3 = 3$, $c''_3 = 3$, $x_1 = 85$, $x'_1 = 110$, $x''_1 = 110$

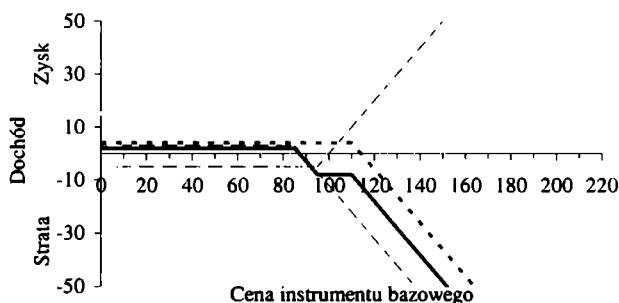
Źródło: opracowanie własne.

Jest to strategia *short call ratio spread* [1, s. 69-70], którą warto stosować w sytuacji zbliżonej do strategii *long call ladder*. Przedstawia ją rys. 2.

3. Jeżeli $x'_3 < x_1 < x''_3$, to funkcja f ma postać :

$$f(x) = \begin{cases} -c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x'_3 \rangle \\ -x - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x'_3, x_1 \rangle \\ -x_1 + x'_3 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x_1, x''_3 \rangle \\ -x - x_1 + x'_3 + x''_3 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x''_3, +\infty \rangle \end{cases} \quad (9)$$

Jest to strategia, która przypomina strategię *long put spread versus call* [4, s. 58], ale powstała ona w wyniku złożenia innych strategii prostych. Analogicznie rozważa się strategię dla przypadku: $x''_3 < x_1 < x'_3$.

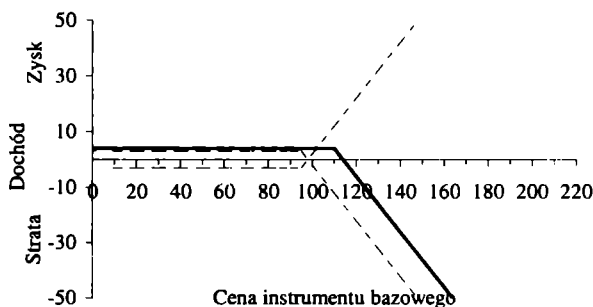


Rys. 3. Strategia (9) dla $c_1 = 5$, $c'_3 = 3$, $c''_3 = 4$, $x_1 = 95$, $x'_1 = 85$, $x''_1 = 110$

Źródło: opracowanie własne.

4. Jeżeli $x'_3 = x_1 < x''_3$, to dla $c'_3 = c_1$ otrzymujemy:

$$f(x) = \begin{cases} -c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x''_3 \rangle \\ -x + x''_3 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x''_3, +\infty \rangle \end{cases} \quad (10)$$



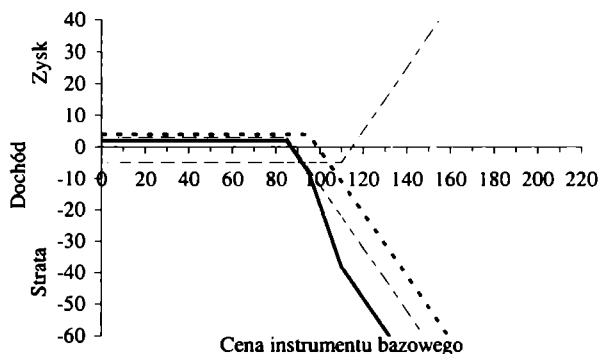
Rys. 4. Strategia (10) dla $c_1 = 3$, $c'_3 = 3$, $c''_3 = 4$, $x_1 = 95$, $x'_3 = 95$, $x''_3 = 110$

Źródło: opracowanie własne.

W ten sposób powstała strategia *short call* (rys. 4) o cenie wykonania x''_3 i premii $c'_3 + c''_3 - c_1$. Analogicznie wyglądają przypadki, w których: $x''_3 = x_1 < x'_3$, $x'_3 < x_1 = x''_3$, $x''_3 < x_1 = x'_3$ oraz $x'_3 = x_1 = x''_3$.

5. Jeżeli $x'_3 < x''_3 < x_1$, to wzór (6) przyjmuje postać:

$$f(x) = \begin{cases} -c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x'_3 \rangle \\ -x + x'_3 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x'_3, x''_3 \rangle \\ -2x + x'_3 + x''_3 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x''_3, x_1 \rangle \\ -x - x_1 + x'_3 + x''_3 - c_1 + c'_3 + c''_3 & \text{dla } x \in \langle x_1, +\infty \rangle \end{cases} \quad (11)$$



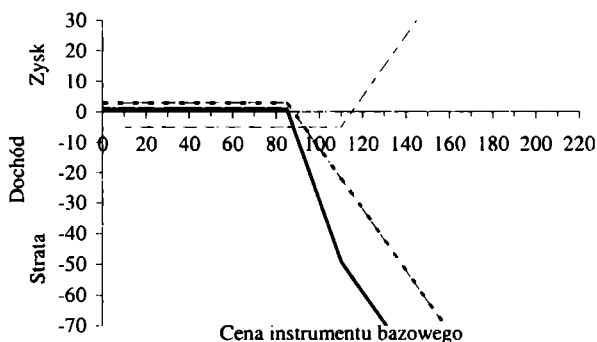
Rys. 5. Strategia (11) dla $c_1 = 5$, $c'_3 = 3$, $c''_3 = 4$, $x_1 = 110$, $x'_3 = 85$, $x''_3 = 95$

Źródło: opracowanie własne.

Analogicznie przeprowadza się analizę przypadku, w którym: $x_3'' < x_3' < x_1$.

6. Jeżeli $x_3' = x_3'' < x_1$, to funkcja dochodu końcowego f (rys. 6) dla $c_3' = c_3''$ ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} -c_1 + 2c_3' & \text{dla } x \in \langle 0, x_3' \rangle \\ -2x + 2x_3' - c_1 + 2c_3' & \text{dla } x \in \langle x_3', x_1 \rangle \\ -x - x_1 + 2x_3' - c_1 + 2c_3' & \text{dla } x \in \langle x_1, +\infty \rangle \end{cases} \quad (12)$$



Rys. 6. Strategia (12) dla $c_1 = 5$, $c_3' = 3$, $c_3'' = 3$, $x_1 = 110$, $x_3' = 85$, $x_3'' = 85$

Źródło: opracowanie własne.

Wszystkie strategie, które opisane są wzorem (6), pozwalają inwestorowi otrzymać ograniczony zysk w przypadku spadku cen instrumentu bazowego lub w przypadku pewnej stabilizacji na rynku. Jednak jeżeli nastąpi wzrost cen instrumentu bazowego, to mogą one dać nieograniczoną stratę.

4. Podsumowanie

Konstrukcja i analiza strategii opcyjnych są utrudnione ze względu na ich różnorodność oraz złożoność. Dla inwestora ważne są zysk i możliwość uniknięcia straty. Przez odpowiedni dobór współczynników we wzorze (5) można konstruować złożone strategie opcyjne. W przypadku kombinacji większej liczby strategii prostych zachodzi konieczność rozpatrzenia wielu możliwych przypadków, które są nowymi strategiami złożonymi. Niewątpliwą zaletą prezentowanej metody jest to, że pozwala tworzyć i analizować nowe strategie opcyjnie przy wykorzystaniu nieskomplikowanego aparatu matematycznego. Umożliwia ona dokładne zbadanie dochodu końcowego w zależności od doboru cen wykonania opcji. Analiza wykresu funkcji dochodu końcowego strategii złożonej pozwala na szybkie określenie, kiedy i w jakim przedziale cen instrumentu bazowego strategia przyniesie zysk lub stratę. Metoda ta pozwala również określić, jak dużo należy dobrać strategii pro-

stych, aby otrzymać z góry określony zysk. Może być wskazówką do klasyfikacji strategii opcyjnych według liczby strategii prostych wchodzących w ich skład oraz w zależności od ich cen wykonania.

Literatura

- [1] Ford D., *Opcje giełdowe. Metody i strategie*, K.E. LIBER, Warszawa 1997.
- [2] Hull J., *Options, Futures and Other Derivatives. Fifth Edition*, Prentice Hall, New Jersey 2002.
- [3] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje, instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [4] *Options, a Guide to Trading Strategies*, LIFFE 2002.
- [5] Stolorz B., *Analiza strategii polegającej na zakupie jednej opcji kupna i jednej opcji sprzedaży z tą samą datą wygaśnięcia o cenach wykonania x_1 i x_2* , „Przegląd Statystyczny” 2001, t. 48 (nr 3-4).
- [6] Stolorz B., *Wykorzystanie własności funkcji liniowej do badania strategii opcyjnych*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 1117, AE, Wrocław 2006.

THE APPLICATION OF PROPERTIES OF THE LINEAR FUNCTION TO THE CONSTRUCTION OF OPTION STRATEGIES

Summary

The article presents how the properties of the linear functions could be used to the construction of option strategies. An option can be represented as a function of its profit at expiry. Each complex strategy is a combination of basic strategies. Thus, the function of profit of complex option strategies is a linear combination of function of an income of basic strategies with coefficients that are integral non-negativ numbers. The method was presented on the basis of construction and analysis of spread option strategies.