

Michał Stachura

Akademia Świętokrzyska w Kielcach

ALTERNATYWNE UJĘCIE POMIARU RYZYKA DLA SZEREGÓW FINANSOWYCH

1. Wstęp

Z każdą działalnością ekonomiczną nierozzerwalnie łączy się szeroko rozumiane ryzyko wynikające z niepewności jej prowadzenia. Gdy działalność daje się odzwierciedlić poprzez zmienne mierzalne, ryzyko można mierzyć na podstawie gromadzonych danych. W praktyce powszechne są przede wszystkim miary wywodzące się z rachunku prawdopodobieństwa. Pociąga to za sobą konieczność przyjmowania mniej lub bardziej dyskusyjnych założeń modelowych.

Najbardziej rozpowszechnioną miarą ryzyka jest wariancja. Przyczyn jej popularności upatrywać należy zarówno w prostocie definicji i interpretacji, jak i we względach historycznych. Jednak obserwowana obecnie coraz większa zmienność stóp zwrotu sugeruje ograniczone możliwości zastosowań rozkładu normalnego, a przecież to m.in. dzięki „postulatowi normalności” wariancja w naturalny sposób jawi się jako miara ryzyka, bowiem znajomość wariancji i wartości oczekiwanej w sposób jednoznaczny determinuje rozkład normalny. W związku z tym analiza danych, zwłaszcza finansowych o dużych częstościach, z pewnością wymaga ogólniejszego spojrzenia na problem oraz modyfikowania pomiaru ryzyka.

Celem pracy jest zaproponowanie specyficznego podejścia do pomiaru ryzyka. Po pierwsze prezentowane są wybrane miary, które mogą służyć za miary ryzyka stanowiące alternatywę dla wariancji. Po drugie sugeruje się dynamiczne ujęcie pomiaru ryzyka – dynamiczne w tym sensie, że wielokrotnie oblicza się wartość miary wraz z napływem danych oraz ocenia się zmienność uzyskiwanego w ten sposób ciągu wartości miary.

Praca została zainspirowana przez ciekawe ujęcie wariacyjnych metod pomiaru ryzyka zaprezentowane w [4] oraz badania autora nad entropią i miarą ApEn.

2. Definicje wybranych miar

Niech $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznacza ciąg reprezentujący analizowany szereg czasowy.

Aby wariancję, liczoną ze wzoru: $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią z próby, dało się dobrze interpretować, należy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uznać za realizację modelowego wektora losowego $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, w którym współrzędne są niezależnymi kopiami tej samej zmiennej X . Wówczas σ^2 jest estymatorem wariancji zmiennej X . Należy zwrócić uwagę, że wariancja jest miarą rozproszenia masy rozkładu wokół wartości średniej oraz że wartość wariancji z próby nie zależy od kolejności obserwacji.

Średnia wariacyjną (drugiego rzędu) dla ciągu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ określa się wzorem: $V = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|^2 \right)^{1/2}$, przy czym można ją liczyć dla zupełnie dowolnych ciągów. Zauważmy, że średnia wariacyjna odwołuje się do kolejnych przyrostów analizowanego szeregu, jest zatem zależna od kolejności obserwacji. Jeśli się uzna ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ za realizację modelowego wektora $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, to w zasadzie nie ma konieczności zakładania niczego o rozkładzie łącznym. W związku z tym średnia wariacyjna może być rozumiana jako estymator jakiejś syntetycznej miary odzwierciedlającej pewną cechę rozkładu łącznego. Widoczna więc staje się różnica, że wariancja jest miarą liczoną dla n realizacji jednej i tej samej zmiennej X , zaś średnia wariacyjna – miarą liczoną dla jednej realizacji wektora o n współrzędnych.

Z kolei entropia (w sensie Shannona) rozkładu zmiennej losowej X definiowana jest jako: $H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \ln f_X(x) dx$, gdzie f_X jest gęstością zmiennej X .

Jednak w przypadku danych empirycznych, dla których gęstość nie jest znana, można posługiwać się jedynie estymatorami entropii. Jeżeli więc $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest n -krotną realizacją zmiennej X , to entropię estymuje się np. jako [3]: $\hat{H} = - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(x_{i+1} - x_{(i)}) - \psi(1) + \psi(n)$, gdzie $\psi(x) = (\ln \Gamma(x))'$, przy czym Γ jest funkcją gamma, a $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ – próbą uporządkowaną. Łatwo spostrzec, że uporządkowanie obserwacji w estymatorze sprawia, iż liczona wartość entropii nie zależy od kolejności danych. Entropię interpretuje się jako miarę odstępstwa roz-

kładu zmiennej X od rozkładu jednostajnego. Niestety entropia niewiele mówi o rodzaju tego odstępstwa – podobnie zresztą jak wariancja nic nie mówi kierunku rozproszenia danych względem średniej.

Ostatnia z rozważanych miar – miara ApEn – jest swego rodzaju przybliżeniem entropii¹. Konstruuje się ją sukcesywnie dla podciągów szeregu danych i dowodzi, że po przejściu granicznym uzyskać można wielkości nawiązujące do entropii w sensie Kołmogorowa-Sinai [5]. Dla wektora danych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i ustalonego $m \in \mathbf{N}$ definiujemy wektory $\mathbf{x}(i) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$, $i \in \{1, 2, \dots, n-m+1\}$, rozważając je w przestrzeni $\mathbf{R}^m$ z odległością między $\mathbf{x}(i)$ i $\mathbf{x}(j)$ zadaną wzorem: $d_m(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j)) = \max_{l \in \{0, 1, \dots, m-1\}} |x_{i+l} - x_{j+l}|$. Wówczas dla dowolnych: m i i oraz dodatkowo $r > 0$ określa się kolejno wielkości:

$$C_i^m(r) = (n-m+1)^{-1} \cdot \#\{j \in \{1, 2, \dots, n-m+1\} : d(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j)) \leq r\}^2,$$

$$\Phi^m(r) = (n-m+1)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-m+1} \ln C_i^m(r), \text{ ApEn}(m, r, n) = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r).$$

Zauważmy, że: $-\text{ApEn}(m, r, n) = \Phi^{m+1}(r) - \Phi^m(r)$ jest średnią po i z logarytmów prawdopodobieństw, że $|x_{i+m} - x_{j+m}| \leq r$, pod warunkiem iż dla wszystkich $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ zachodzi: $|x_{i+l} - x_{j+l}| \leq r$. Ponadto miara ApEn bywa interpretowana jako stopień złożoności systemu generującego dane [6].

Ponieważ w badaniach empirycznych dysponujemy skończonymi ciągami danych i w związku z tym, że już dla $m=1$ uzyskuje się dobre przybliżenie entropii, w dalszej części opracowania uwaga skupiona jest jedynie na $\text{ApEn}(1, r, n)$, za maksymalny rozstęp wszędzie przyjęto zaś: $r = 15\%$ próbkowego odchylenia standardowego i $n = 120$ obserwacji³.

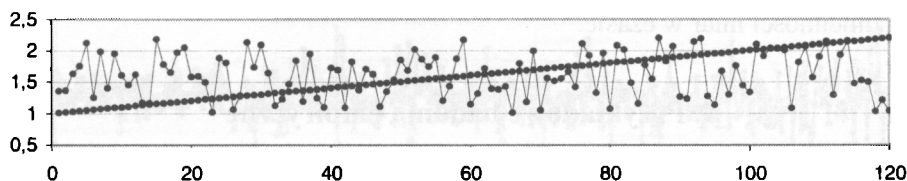
3. Porównanie miar i dynamiczny pomiar ryzyka

W celu porównania wybranych czterech miar przeanalizujemy prosty przykład. Rozważamy dwa szeregi danych umownych długości 120 obserwacji. Wartości w pierwszym szeregu zależą liniowo od numeru obserwacji: (1,01; 1,02; 1,03; ... ; 2,20), a w drugim te same wartości ustawione są w kolejności losowej (użyto w tym celu generatora liczb pseudolosowych).

¹ Skrót ApEn pochodzi od angielskiego terminu *approximate entropy*. Ze względu na fakt, że w nazewnictwie polskim nie przyjętą się żaden odpowiednik, w opracowaniu pojawia się jedynie ten skrót.

² #A oznacza liczebność zbioru A.

³ Zgodnie z sugestiami i badaniami z [6].



Rys. 1. Przebiegi szeregów danych umownych
Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z wcześniej przyjętymi definicjami dla obu szeregów wyznaczone zostały wszystkie miary. Wyniki umieszczone są w tab. 1.

Tabela 1. Miary ryzyka dla danych umownych

	Dane liniowe	Dane „tasowane”
Wariancja	0,121	0,121
Średnia wariacyjna	0,01	0,495818
Entropia	0,749589	0,749589
ApEn	-0,0082	0,442559

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, iż wartości miar znajdujące się w tabeli potwierdzają fakt, że wariancja i entropia (w przeciwieństwie do średniej wariacyjnej i miary ApEn) nie rozróżniają obu szeregów, choć przebiegi tych szeregów są diametralnie odmienne (por. wykres na rys. 1).

Do ograniczenia wpływu tego mankamentu na ocenę ryzyka posłużyć może dynamiczne podejście do wyznaczania miar – dynamiczne w tym sensie, że analizowaną miarę wyznacza się wielokrotnie dla wszystkich podszeregów o stałej długości, wybieranych z całego szeregu. Ujęcie to przenosi się również na pozostałe miary – średnią wariacyjną i ApEn (jak i na każdą inną miarę), albowiem coraz częściej postuluje się, że szeregi finansowe charakteryzują się (ewolucyjną lub skokową) zmiennością w czasie powodowaną nieustannie zmieniającymi się warunkami egzogenicznymi. Ze względu na ten fakt jako miarę ryzyka w pracy zaproponowano, zamiast pojedynczej liczby, ciąg wartości wybranej statystyki.

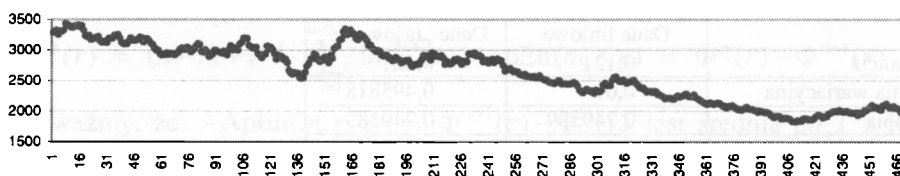
Problemem pozostaje w tej sytuacji dobór właściwej długości podszeregów wchodzących do liczenia statystyk. Z jednej bowiem strony im podszereg dłuższy, tym większa dokładność estymacji miary, o ile próba jest jednorodna. Z drugiej zaś strony przy przyjętym założeniu zmienności charakteru danych rozważanie zbyt długich podszeregów może stać w sprzeczności z jednorodnością.

Dodajmy, że o ile łatwo można przekładać wartości wariancji i średniej wariacyjnej na stopień ryzyka (im większa miara, tym większe ryzyko), o tyle interpretacja entropii i miary ApEn nie jest tak oczywista. Zatem pomiar ryzyka w ujęciu dynamicznym, pozwalający dokonywać oceny ryzyka w czasie, odbywa się nie

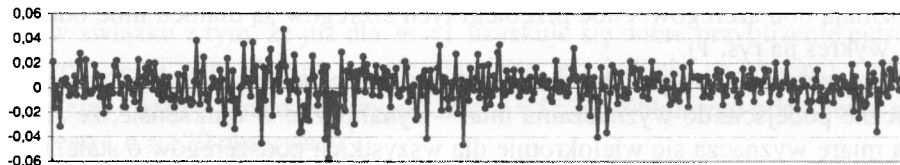
tylko na podstawie poszczególnych nominalnych wartości miar, ale także przez ocenę zmienności miar w czasie.

4. Przykładowe badania empiryczne

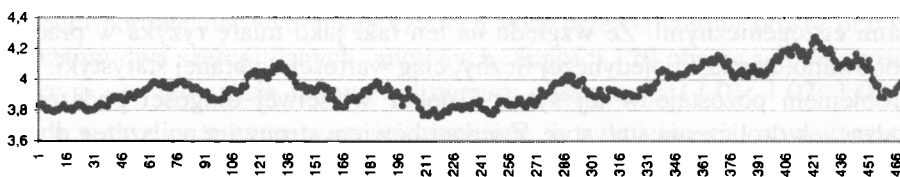
W związku z zarysowanym ujęciem pomiaru ryzyka rozważono dwa przykładowe szeregi finansowe – indeks giełdowy i kurs walutowy. Analizowane są dzienne notowania WIG20 na zamknięcie oraz dzienny kurs średni wymiany euro względem złotego notowany w NBP (szeregi długości 470 obserwacji obejmują okres od połowy lutego 2005 r. do końca grudnia 2006 r.) Przebieg szeregów danych i szeregów logarytmicznych stóp zwrotu ilustrują poniższe rys. 2-5, na których dane umieszczone są w odwrotnej kolejności, tzn. od najświeższych do najstarszych⁴.



Rys. 2. Notowania WIG20
Źródło: opracowanie własne.

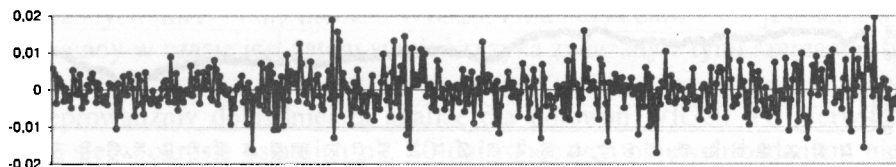


Rys. 3. Logarytmiczne stopy zwrotu WIG20
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Kurs euro
Źródło: opracowanie własne.

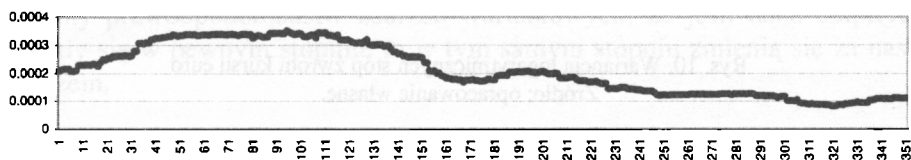
⁴ Dane są umieszczone w taki sposób, gdyż szeregi miar ryzyka wyznaczane w dalszej części opracowania są krótsze. Wobec tego wprowadzenie „wstecznej” numeracji na osiach poziomych wykresów ułatwia odczytywanie informacji. W i -tym dniu roboczym wstecz znajdujemy bowiem wartość indeksu oraz miarę ryzyka liczoną dla 120 ostatnich wówczas dostępnych danych.



Rys. 5. Logarytmiczne stopy zwrotu kursu euro

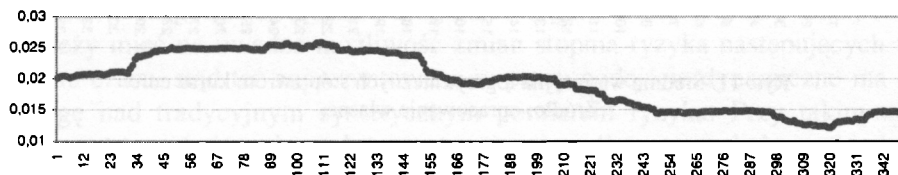
Źródło: opracowanie własne.

Dla obu szeregów empirycznych wyznaczono w ujęciu dynamicznym wszystkie cztery uprzednio opisane miary⁵, przy czym liczono je dla podszeregów długości 120 obserwacji⁶ z krokiem 1 obserwacja⁷. Szeregi miar ryzyka zamieszczone są na rys. 6-13, na których, jak poprzednio, odwrócona jest kolejność danych.



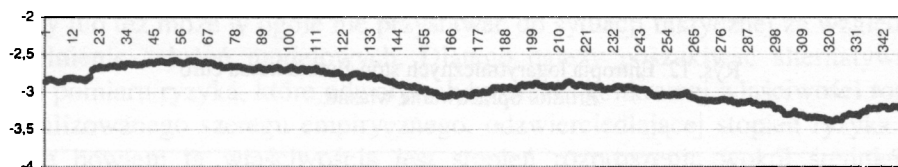
Rys. 6. Wariancja logarytmicznych stóp zwrotu WIG20

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 7. Średnia wariacyjna logarytmicznych stóp zwrotu WIG20

Źródło: opracowanie własne.



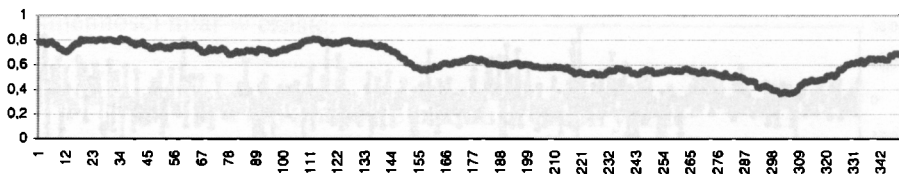
Rys. 8. Entropia logarytmicznych stóp zwrotu WIG20

Źródło: opracowanie własne.

⁵ Ze względu na prostotę obliczeniową z powodzeniem użyty został arkusz kalkulacyjny Excel.

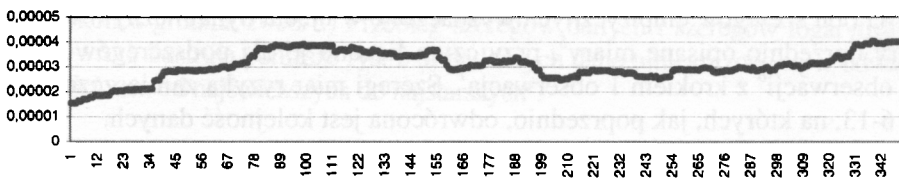
⁶ 120 obserwacji można uznać za wystarczająco dużą próbę potrzebną do estymacji, *nota bene*: 120 dni roboczych to około pół roku.

⁷ Skutkuje to wyliczeniem szeregów miar o długości 351 (=470 – 120 + 1) rekordów.



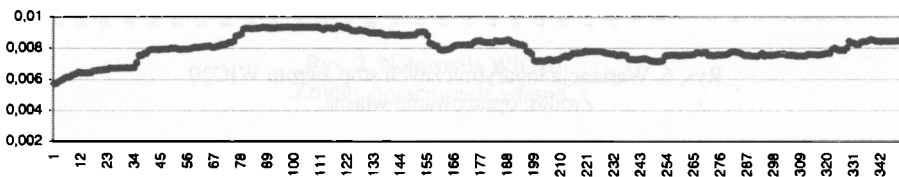
Rys. 9. ApEn dla notowań WIG20

Źródło: opracowanie własne.



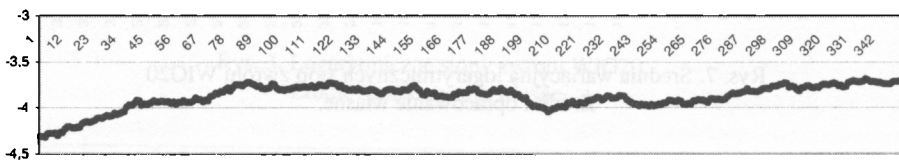
Rys. 10. Wariancja logarytmicznych stóp zwrotu kursu euro

Źródło: opracowanie własne.



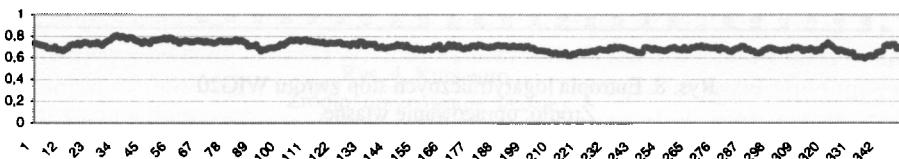
Rys. 11. Średnia wariancja logarytmicznych stóp zwrotu kursu euro

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 12. Entropia logarytmicznych stóp zwrotu kursu euro

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 13. ApEn dla kursu euro

Źródło: opracowanie własne.

Analiza zamieszczonych w artykule wykresów pozwala stwierdzić, że żadna z wyznaczonych miar – i dla indeksu WIG20, i dla kursu euro – nie jest stała w czasie. Zmienny w czasie jest zatem stopień ryzyka związany z tymi szeregami finansowymi.

Przeprowadźmy dokładniejszą analizę dla notowań WIG20. Po pierwsze obserwuje się w okresie ostatnich ok. 80 dni roboczych objętych badaniem niezbyt duży, lecz wyraźny spadek wariancji, średniej wariacyjnej i entropii. W rozumieniu tych miar mamy więc do czynienia z malejącym stopniem ryzyka, bowiem w odniesieniu do logarytmicznych stóp zwrotu miary wykazują odpowiednio: zmniejszające się rozproszenie wokół średniej, zmniejszające się rozbieżności pomiędzy sąsiadującymi obserwacjami i zmniejszający się rozstęp między najmniejszą i największą wartością. Po drugie miara ApEn po początkowych silniejszych fluktuacjach w zasadzie staje się ustabilizowana w okresie ostatnich ok. 80 dni roboczych. To także świadczyć może o spadku stopnia ryzyka, bowiem dość stabilne stają się logarytmy prawdopodobieństw zdarzeń warunkowych, że jeśli dane empiryczne zmieniały się w pewnym stopniu, to w tym samym stopniu zmieniają się za następnym razem.

5. Podsumowanie

Przeprowadzone badania uwidaczniają dwie ważne kwestie. Po pierwsze badając ryzyko, szczególnie związane z długimi szeregami finansowymi o dużej częstotliwości, należy mieć na uwadze możliwość zmian stopnia ryzyka następujących wraz upływem czasu, stąd też zaprezentowane w pracy podejście dynamiczne ma dużą przewagę nad tradycyjnym syntetycznym pomiarem ryzyka. Przy takim ujęciu ryzyka można mówić o jego dużym stopniu nie tylko ze względu na konkretne wartości liczonej miary ryzyka, ale i ze względu na dużą zmienność czy niestabilność wyznaczanego ciągu statystyk. Z kolei osobnym problemem jest to, w jaki sposób owe zmienność i niestabilność definiować i mierzyć.

Po drugie w wielu przypadkach tradycyjny pomiar ryzyka może nie być wystarczający lub też może w ogóle nie przystawać do sytuacji faktycznej ze względu na niespełnienie założeń modelowych. Dlatego należy poszukiwać alternatywnych metod pomiaru ryzyka, które odwoływałyby się do konkretnej właściwości rozkładu analizowanego szeregu empirycznego, odzwierciedlającej stopień ryzyka. Nie zawsze bowiem tą właściwością jest stopień rozproszenia wokół średniej. W związku z tym coraz częściej w literaturze teoretycznej i w praktyce pojawiają się miary inne niż wariancja (por. [1; 2]). Łatwo więc wyobrazić sobie, że różne miary mogą całkiem odmiennie ocenić stopień ryzyka związany z jednym i tym samym szeregiem danych.

Warto nadmienić jeszcze, że np. miara ApEn ma inne ważne praktyczne zastosowania – w pracy [6] sugeruje się możliwość prognozowania krachu na giełdzie na podstawie odpowiednich zmian w czasie wartości ApEn indeksu giełdowego.

Literatura

- [1] Bruck C.J., *The Approximate Entropy of Various Financial Asset Prices*, <http://www.american.edu/cas/econ/faculty/golan/Papers/Papers05/BruckPaper.pdf>, 2005.
- [2] Dionisio A., Menezes R., Mendes D.A., *An Econophysics Approach to Analyse Uncertainty in Financial Markets: An Application to the Portuguese Stock Market*, „Eur. Phys. J.” 2006, B 50, s. 161-164.
- [3] Kraskov A., Stögbauer H., Grassberger P., *Estimating Mutual Information*, „Physical Review” 2004 E 69, 066138.
- [4] Paweła-Wargocka L., *Wariacyjna metoda pomiaru ryzyka*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 1088, AE, Wrocław 2005, s. 112-125.
- [5] Pincus S.M., *Approximate Entropy as a Measure of System Complexity*, Proceedings of the National Academy of Science of the USA, 1991 vol. 88, s. 2297-2301.
- [6] Pincus S.M., Kalman R.E., *Irregularity, Volatility, Risk, and Financial Market Time Series*, Proceedings of the National Academy of Science of the USA, 2004 vol. 101, 13709-13714.

ALTERNATIVE FORMULATION OF RISK MEASUREMENT FOR FINANCIAL SERIES

Summary

The paper treats of the risk measurement problem and proposes an alternative view for this question. Firstly, one may use such statistics as variational averages, entropy and approximate entropy instead of variance to express and measure risk associated with financial series. Secondly, a dynamic approach is suggested rather than synthetic, which enables a researcher to detect changes of risk level in time. Additionally, this approach broadens risk measurement interpretation since not only values of measure but also inconstancy and volatility of the values' series may indicate a high level of risk.