

**Anna Rutkowska-Ziarko, Lesław Markowski**

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

## **PORÓWNANIE PORTFELI MARKOWITZA I PORTFELI O MINIMALNEJ SEMIWARIANCJI W WARUNKACH ZMIENNEJ KONIUNKTURY GIEŁDOWEJ**

### **1. Wstęp**

Giełda papierów wartościowych jest jednym z głównych kanałów przemieszczania kapitału, a w szczególności jego pozyskania do kredytowania przedsięwzięć inwestycyjnych. Jest ona miejscem wyceny akcji, często największych i najlepiej zarządzanych przedsiębiorstw, przez co stanowi odzwierciedlenie poziomu ekonomicznego danego kraju. Stopy zwrotu spółek giełdowych reagują na zmiany zachodzące w gospodarce, zależą one nie tylko od kondycji danej spółki, ale również od wielu czynników zewnętrznych, makroekonomicznych. Tempo rozwoju gospodarki danego kraju, jej wrażliwość na zmiany zachodzące w gospodarce światowej oraz uwarunkowania polityczne stają się przyczynami długofalowych ruchów cen na giełdzie. Utrzymujące się tendencje zmierzające do przewartościowania lub niedowartościowania większości akcji powodują, iż rynek kapitałowy przechodzi przez różne fazy takie, jak hossa i bessy, będące w długofalowej perspektywie składowymi cyklami koniunkturalnymi [8].

Biorąc to pod uwagę, istotnym problemem wydaje się tworzenie i zarządzanie portfelami akcji w warunkach zmieniającej się koniunktury na rynku kapitałowym [1; 2; 3]. Celem artykułu jest porównanie portfeli Markowitza i portfeli o minimalnej semiwariancji (SEM) w warunkach różnych faz giełdowych. Ocena zbudowanych portfeli dotyczyła parametrów rozkładów stóp zwrotu, w tym wybranych miar ryzyka, oraz zjawiska zmienności rozkładów stóp zwrotu w czasie.

Zastosowanie semiwariancji stopy zwrotu jako konkurencyjnej miary ryzyka w odniesieniu do klasycznej miary ryzyka w modelu Markowitza podyktowane jest

wadą wariancji traktującej w jednakowy sposób ujemne i dodatnie odchylenia stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu. W rzeczywistości odchylenia ujemne są niepożądane, a dodatnie stwarzają możliwość większego zysku. Najistotniejszą cechą semiwariancji jest to, że mierzy ona odchylenia tylko poniżej określonego poziomu. Zwolennicy stosowania semiwariancji jako miary ryzyka podkreślają, że lepiej niż wariancja opisuje ona faktyczne preferencje inwestorów [4; 9; 13].

## 2. Zastosowane modele

W artykule rozważane są dwa alternatywne modele wyboru portfela akcji. Pierwszym z nich jest klasyczny model Markowitza [6], w którym ryzyko mierzone jest wariancją stóp zwrotu portfela. Drugim jest model SEM [7], w którym miarą ryzyka jest semiwariancja od założonej stopy zwrotu ( $\gamma$ -semiwariancja).

Problem wyznaczenia udziałów akcji w modelu Markowitza sprowadza się do rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego, jakim jest zminimalizowanie wariancji stóp zwrotu portfela:

$$s_p^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j k_{ij}, \quad (1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i \bar{z}_i \geq \gamma, \quad (3)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

gdzie:  $s_p^2$  – wariancja stóp zwrotu portfela akcji;

$\gamma$  – określona z góry stopa zwrotu dla całego portfela, przy założeniu  $\gamma \leq \max \bar{z}_i$ ;

$\bar{z}_i$  – średnia stopa zwrotu  $i$ -tej akcji;

$x_i$  – udział wartościowy  $i$ -tej akcji w portfelu;

$k_{ij}$  – kowariancja stóp zwrotu  $i$ -tej i  $j$ -tej akcji.

Model wyboru portfela SEM jest podobny do klasycznego modelu Markowitza. Jedyna różnica polega na tym, że minimalizowana jest inna miara ryzyka  $\gamma$ -semiwariancja stopy zwrotu portfela akcji ( $ds_p^2(\gamma)$ ). W modelu Markowitza za ryzykowne uznaje się odchylenia zarówno poniżej średniej stopy zwrotu, jak i powyżej średniej stopy zwrotu. W modelu SEM ryzyko jest związane jedynie z wystąpieniem stóp zwrotu niższych niż stopa zwrotu ( $\gamma$ ) założona przez inwestora. Problem wyznaczenia udziałów akcji w modelu SEM sprowadza się do rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego polegającego na zminimalizowaniu  $\gamma$ -semiwariancji:

$$ds_p^2(\gamma) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j d_{ij}(\gamma) \quad (5)$$

przy ograniczeniach (2-4),  
gdzie:

$$d_{ij}(\gamma) = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m d_{ijt}(\gamma), \quad (6)$$

$$d_{ijt}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_{pt} \geq \gamma \\ (z_{it} - \gamma)(z_{jt} - \gamma) & \text{dla } z_{pt} < \gamma \end{cases}, \quad (7)$$

$d_{ij}(\gamma)$  – semikowariancja od założonej stopy zwrotu;  $m$  – liczba jednostek czasowych, w których rejestrowane są stopy zwrotu akcji  $z_{it}$ ,  $t = 1, 2, \dots, m$ ;  $z_{pt}$  – stopa zwrotu portfela w momencie  $t$ . Zagadnienie budowy portfela SEM opisano szczegółowo w pracach [10; 12].

### 3. Wyniki

Badania objęły 70 największych i najbardziej płynnych spółek nieprzerwanie notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w całym okresie badawczym, tj. od 1 stycznia 2000 r. do 31 grudnia 2005 r. Analiza portfelowa ze względu na czasochłonność obliczeń oraz małą elastyczność i płynność portfela z reguły dotyczy inwestycji długookresowych [14]. Z tego względu zaproponowano wykorzystanie kwartalnych stóp zwrotu badanych walorów oraz zbudowanych z nich portfeli. W celu uproszczenia rozważań przy wyznaczeniu stóp zwrotu pominięte zostały dywidendy. Stopy zwrotu obliczono jako względne przyrosty cen akcji, zgodnie ze wzorem:

$$z_{it} = \frac{n_{i,t+s} - n_{it}}{n_{it}} 100\%, \quad (8)$$

gdzie:  $s$  – długość okresu inwestycyjnego wyrażona w dniach,

$n_{it}$  – wartość notowania  $i$ -tych aktywów w momencie  $t$ ,

$n_{i,t+s}$  – wartość notowania  $i$ -tych aktywów po  $s$  dniach inwestowania rozpoczętego w momencie  $t$ .

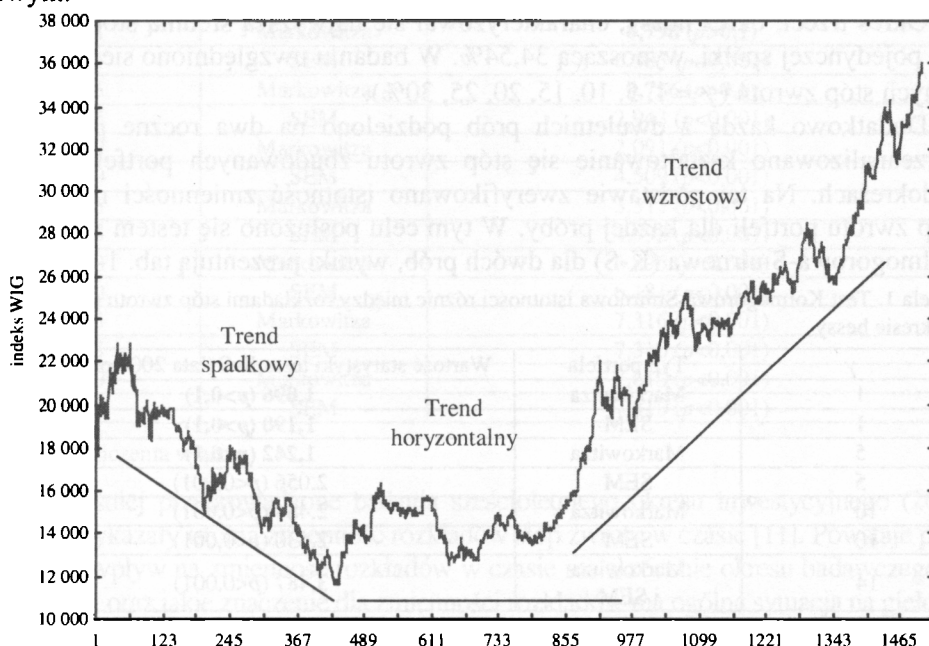
Liczba jednostek czasowych ( $m$ ), w których rejestrowane są stopy zwrotu, zależy od liczby notowań i długości okresu inwestycyjnego:

$$m = n - s, \quad (9)$$

gdzie  $n$  jest liczbą notowań.

Okres badawczy został podzielony na trzy dwuletnie próby (2000-2001; 2002-2003; 2004-2005), z których każda zawierała ok. 440 jednostek czasowych, w których rejestrowane były kwartalne stopy zwrotu. Analiza wykresu indeksu WIG

(rys. 1) pokazuje, iż okresy te różnią się od siebie ogólną sytuacją na rynku kapitałowym.



Rys. 1. Wartości indeksu WIG w okresie 2000-2005

Źródło: opracowanie własne.

Pierwszy okres charakteryzował się trendem spadkowym i nazywany będzie dalej okresem bessy. Przeciętna kwartalna stopa zwrotu z indeksu WIG w tym okresie wyniosła -5,77%.

Drugi okres jest okresem przejściowym między okresem bessy i hossy. Cechuje się on głównie występowaniem trendu horyzontalnego, jak również trendu wzrostowego, szczególnie w ostatnim kwartale 2003 r. Okres ten odznaczał się przeciętną kwartalną stopą zwrotu z indeksu WIG na poziomie ok. 5%.

Okres trzeci, obejmujący lata 2004 i 2005, identyfikuje się trendem wzrostowym [8], co uzasadnia nazwanie go okresem hossy. Przeciętna kwartalna stopa zwrotu z indeksu WIG w tym okresie wyniosła 5,86%.

Dla każdej z prób wyznaczono portfele Markowitza oraz portfele SEM dla wybranych założonych stóp zwrotu.

W pierwszym okresie najwyższa średnia stopa zwrotu dla pojedynczej spółki wynosiła 14,99%. W badaniu uwzględniono cztery założone stopy zwrotu ( $\gamma = 1, 5, 10, 14\%$ ). Dla najwyższej założonej stopy zwrotu (14%) portfel Markowitza i portfel SEM miały identyczny skład.

W okresie przejściowym między okresem bessy i hossy najwyższa średnia stopa zwrotu dla pojedynczej spółki wyniosła 46,85%. Pozwoliło to na zbudowanie najbardziej

zyskowych portfeli z trzech rozpatrywanych okresów. W badaniu uwzględniono dziesięć założonych stóp zwrotu ( $\gamma = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\%$ ).

Okres trzeci, okres hossy, charakteryzował się najwyższą średnią stopą zwrotu dla pojedynczej spółki, wynoszącą 34,54%. W badaniu uwzględniono siedem założonych stóp zwrotu ( $\gamma = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30\%$ ).

Dodatkowo każdą z dwuletnich prób podzielono na dwa roczne podokresy i przeanalizowano kształtowanie się stóp zwrotu zbudowanych portfeli w tych podokresach. Na tej podstawie zweryfikowano istotność zmienności rozkładów stóp zwrotu portfeli dla każdej próby. W tym celu posłużono się testem zgodności Kołmogorowa-Smirnowa (K-S) dla dwóch prób, wyniki prezentują tab. 1-3.

Tabela 1. Test Kołmogorowa-Smirnowa istotności różnic między rozkładami stóp zwrotu portfeli w okresie bessy

| $\gamma$ | Typ portfela     | Wartość statystyki testu K-S (lata 2000 oraz 2001) |
|----------|------------------|----------------------------------------------------|
| 1        | Markowitza       | <b>1,096 (<math>p&gt;0,1</math>)</b>               |
| 1        | SEM              | <b>1,190 (<math>p&gt;0,1</math>)</b>               |
| 5        | Markowitza       | <b>1,242 (<math>p&lt;0,1</math>)</b>               |
| 5        | SEM              | 2,056 ( $p<0,001$ )                                |
| 10       | Markowitza       | 2,484 ( $p<0,001$ )                                |
| 10       | SEM              | 2,630 ( $p<0,001$ )                                |
| 14       | Markowitza i SEM | 3,487 ( $p<0,001$ )                                |

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Test Kołmogorowa-Smirnowa istotności różnic między rozkładami stóp zwrotu portfeli w okresie przejściowym

| $\gamma$ | Typ portfela | Wartość statystyki testu K-S (lata 2002 oraz 2003) |
|----------|--------------|----------------------------------------------------|
| 1        | Markowitza   | <b>0,862 (<math>p&gt;0,1</math>)</b>               |
| 1        | SEM          | 5,268 ( $p<0,001$ )                                |
| 5        | Markowitza   | <b>0,862 (<math>p&gt;0,1</math>)</b>               |
| 5        | SEM          | 6,417 ( $p<0,001$ )                                |
| 10       | Markowitza   | 1,628 ( $p<0,025$ )                                |
| 10       | SEM          | 6,130 ( $p<0,001$ )                                |
| 15       | Markowitza   | 3,065 ( $p<0,001$ )                                |
| 15       | SEM          | 5,555 ( $p<0,001$ )                                |
| 20       | Markowitza   | 4,262 ( $p<0,001$ )                                |
| 20       | SEM          | 4,981 ( $p<0,001$ )                                |
| 25       | Markowitza   | 4,358 ( $p<0,001$ )                                |
| 25       | SEM          | 4,837 ( $p<0,001$ )                                |
| 30       | Markowitza   | 5,555 ( $p<0,001$ )                                |
| 30       | SEM          | 5,507 ( $p<0,001$ )                                |
| 35       | Markowitza   | 8,141 ( $p<0,001$ )                                |
| 35       | SEM          | 7,088 ( $p<0,001$ )                                |
| 40       | Markowitza   | 7,614 ( $p<0,001$ )                                |
| 40       | SEM          | 7,614 ( $p<0,001$ )                                |
| 45       | Markowitza   | 7,375 ( $p<0,001$ )                                |
| 45       | SEM          | 7,710 ( $p<0,001$ )                                |

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Test Kołmogorowa-Smirnowa istotności różnic między rozkładami stóp zwrotu portfeli w okresie hossy

| $\gamma$ | Typ portfela | Wartość statystyki testu K-S (lata 2004 oraz 2005) |
|----------|--------------|----------------------------------------------------|
| 1        | Markowitza   | <b>0,798 (<math>p&gt;0,1</math>)</b>               |
| 1        | SEM          | 6,083 ( $p<0,001$ )                                |
| 5        | Markowitza   | <b>0,756 (<math>p&gt;0,1</math>)</b>               |
| 5        | SEM          | 2,943 ( $p<0,001$ )                                |
| 10       | Markowitza   | 2,091 ( $p<0,001$ )                                |
| 10       | SEM          | 4,509 ( $p<0,001$ )                                |
| 15       | Markowitza   | 3,511 ( $p<0,001$ )                                |
| 15       | SEM          | 4,992 ( $p<0,001$ )                                |
| 20       | Markowitza   | 6,895 ( $p<0,001$ )                                |
| 20       | SEM          | 6,181 ( $p<0,001$ )                                |
| 25       | Markowitza   | 7,316 ( $p<0,001$ )                                |
| 25       | SEM          | 7,316 ( $p<0,001$ )                                |
| 30       | Markowitza   | 7,610 ( $p<0,001$ )                                |
| 30       | SEM          | 7,410 ( $p<0,001$ )                                |

Źródło: obliczenia własne.

Wcześniej przeprowadzone badania sześcioletniego okresu inwestycyjnego (2000-2005) wykazały istotną zmienność rozkładów stóp zwrotu w czasie [11]. Powstaje pytanie, jaki wpływ na zmienność rozkładów w czasie ma skrócenie okresu badawczego do dwóch lat oraz jakie znaczenie dla zmienności rozkładów ma ogólna sytuacja na giełdzie.

Tabela 4. Wybrane charakterystyki rozkładów stóp zwrotu portfeli w okresie bessy

| $\gamma$ | Portfel | Lata      | $\bar{z}_p$  | Min           | Max          | $s_p^2$       | $ds_p^2(\gamma)$ | A           | Test normalności                      |
|----------|---------|-----------|--------------|---------------|--------------|---------------|------------------|-------------|---------------------------------------|
| 1        | M       | 2000-2001 | <b>2,59</b>  | <b>-6,72</b>  | <b>14,36</b> | <b>7,28</b>   | <b>0,99</b>      | <b>0,64</b> | <b>0,062 (<math>p&lt;0,1</math>)</b>  |
|          |         | 2000      | 2,78         | -6,72         | 14,36        | 8,17          | 0,98             | 0,76        | <b>0,092 (<math>p&lt;0,1</math>)</b>  |
|          |         | 2001      | 2,39         | -3,81         | 12,36        | 6,35          | 0,99             | 0,41        | <b>0,061 (<math>p&gt;0,2</math>)</b>  |
| 1        | SEM     | 2000-2001 | <b>7,20</b>  | <b>-0,54</b>  | <b>23,65</b> | <b>21,48</b>  | <b>0,014</b>     | <b>1,17</b> | 0,114 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2000      | 6,93         | 0,52          | 23,65        | 15,29         | 0,002            | 1,38        | 0,117 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2001      | 7,46         | -0,54         | 21,52        | 27,62         | 0,026            | 0,98        | 0,122 ( $p<0,01$ )                    |
| 5        | M       | 2000-2001 | <b>5,00</b>  | <b>-3,86</b>  | <b>19,83</b> | <b>10,17</b>  | <b>3,90</b>      | <b>0,98</b> | 0,088 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2000      | 5,36         | -3,86         | 19,83        | 10,72         | 2,94             | 1,30        | 0,122 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2001      | 4,64         | -1,67         | 14,80        | 9,41          | 4,87             | 0,58        | <b>0,058 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 5        | SEM     | 2000-2001 | <b>7,76</b>  | <b>-0,85</b>  | <b>26,35</b> | <b>24,00</b>  | <b>1,76</b>      | <b>1,01</b> | 0,109 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2000      | 8,22         | 0,30          | 26,35        | 22,23         | 0,99             | 1,31        | 0,111 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2001      | 7,31         | -0,85         | 20,33        | 25,45         | 2,54             | 0,83        | 0,142 ( $p<0,01$ )                    |
| 10       | M       | 2000-2001 | <b>10,00</b> | <b>-3,08</b>  | <b>38,12</b> | <b>53,61</b>  | <b>22,12</b>     | <b>0,59</b> | 0,066 ( $p<0,05$ )                    |
|          |         | 2000      | 10,87        | -1,06         | 38,12        | 44,84         | 12,94            | 0,93        | 0,099 ( $p<0,05$ )                    |
|          |         | 2001      | 9,13         | -3,08         | 26,18        | 61,09         | 31,40            | 0,49        | 0,110 ( $p<0,01$ )                    |
| 10       | SEM     | 2000-2001 | <b>10,00</b> | <b>-3,55</b>  | <b>42,18</b> | <b>55,90</b>  | <b>20,54</b>     | <b>0,89</b> | 0,113 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2000      | 11,01        | -1,21         | 42,18        | 52,95         | 11,48            | 1,35        | 0,167 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2001      | 8,99         | -3,55         | 24,69        | 57,08         | 29,69            | 0,55        | 0,111 ( $p<0,01$ )                    |
| 15       | M i SEM | 2000-2001 | <b>14,00</b> | <b>-20,25</b> | <b>96,68</b> | <b>384,78</b> | <b>123,31</b>    | <b>1,26</b> | 0,140 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2000      | 20,41        | -10,57        | 96,68        | 420,57        | 56,31            | 1,24        | 0,119 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2001      | 7,59         | -20,25        | 64,53        | 268,17        | 190,86           | 1,25        | 0,148 ( $p<0,01$ )                    |

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5. Wybrane charakterystyki rozkładów stóp zwrotu portfeli w okresie przejściowym

| $\gamma$ | Portfel | Lata      | $\bar{z}_p$ | Min   | Max    | $s_p^2$ | $ds_p^2(\gamma)$ | A     | Test normalności   |
|----------|---------|-----------|-------------|-------|--------|---------|------------------|-------|--------------------|
| 1        | 2       | 3         | 4           | 5     | 6      | 7       | 8                | 9     | 10                 |
| 1        | M       | 2002-2003 | 5,77        | -3,16 | 18,51  | 13,25   | 0,26             | 0,35  | 0,041 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2002      | 5,71        | -2,08 | 16,62  | 13,05   | 0,19             | 0,15  | 0,047 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2003      | 5,83        | -3,16 | 18,51  | 13,51   | 0,33             | 0,54  | 0,067 ( $p>0,20$ ) |
| 1        | SEM     | 2002-2003 | 14,19       | 0,90  | 44,50  | 103,06  | 0,00003          | 0,93  | 0,109 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 9,02        | 0,98  | 21,21  | 33,39   | 0,00001          | 0,05  | 0,137 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2003      | 19,37       | 0,90  | 44,50  | 119,33  | 0,00005          | 0,46  | 0,095 ( $p<0,05$ ) |
| 5        | M       | 2002-2003 | 5,77        | -3,16 | 18,51  | 13,25   | 4,09             | 0,35  | 0,041 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2002      | 5,71        | -2,08 | 16,62  | 13,05   | 4,48             | 0,15  | 0,047 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2003      | 5,83        | -3,16 | 18,51  | 13,51   | 3,72             | 0,54  | 0,067 ( $p>0,20$ ) |
| 5        | SEM     | 2002-2003 | 16,20       | 3,70  | 34,23  | 55,37   | 0,014            | 0,36  | 0,083 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 11,74       | 3,70  | 24,27  | 20,03   | 0,019            | 0,13  | 0,072 ( $p<0,20$ ) |
|          |         | 2003      | 20,66       | 3,73  | 34,23  | 50,98   | 0,008            | -0,37 | 0,102 ( $p<0,05$ ) |
| 10       | M       | 2002-2003 | 10,00       | -0,82 | 20,86  | 15,79   | 8,23             | -0,10 | 0,049 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2002      | 9,55        | 0,34  | 20,86  | 16,77   | 10,22            | 0,01  | 0,079 ( $p<0,15$ ) |
|          |         | 2003      | 10,45       | -0,82 | 20,30  | 14,46   | 6,27             | -0,18 | 0,063 ( $p>0,20$ ) |
| 10       | SEM     | 2002-2003 | 26,21       | 4,97  | 62,30  | 197,55  | 0,15             | 0,59  | 0,153 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 17,76       | 4,97  | 46,21  | 64,71   | 0,29             | 1,32  | 0,175 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2003      | 34,65       | 8,26  | 62,30  | 187,98  | 0,01             | -0,21 | 0,114 ( $p<0,01$ ) |
| 15       | M       | 2002-2003 | 15,00       | 2,26  | 26,88  | 28,22   | 15,50            | -0,28 | 0,049 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2002      | 13,68       | 2,26  | 26,46  | 26,57   | 19,80            | 0,04  | 0,042 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2003      | 16,32       | 2,56  | 26,88  | 26,50   | 11,27            | -0,65 | 0,085 ( $p<0,10$ ) |
| 15       | SEM     | 2002-2003 | 27,07       | 4,04  | 61,16  | 187,73  | 2,99             | 0,54  | 0,141 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 19,54       | 4,04  | 52,03  | 83,82   | 5,60             | 1,32  | 0,160 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2003      | 34,59       | 8,49  | 61,16  | 178,77  | 0,39             | -0,17 | 0,110 ( $p<0,01$ ) |
| 20       | M       | 2002-2003 | 20,00       | 1,39  | 38,51  | 58,15   | 29,05            | 0,01  | 0,027 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2002      | 17,54       | 1,39  | 38,04  | 50,79   | 42,30            | 0,14  | 0,080 ( $p<0,15$ ) |
|          |         | 2003      | 22,46       | 5,58  | 38,51  | 53,57   | 15,95            | -0,16 | 0,085 ( $p<0,10$ ) |
| 20       | SEM     | 2002-2003 | 27,72       | 3,22  | 62,71  | 179,10  | 15,48            | 0,57  | 0,112 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 20,86       | 3,22  | 52,31  | 90,86   | 27,98            | 0,94  | 0,105 ( $p<0,05$ ) |
|          |         | 2003      | 34,59       | 9,91  | 62,71  | 173,51  | 3,04             | 0,09  | 0,081 ( $p<0,15$ ) |
| 25       | M       | 2002-2003 | 25,00       | -0,98 | 51,76  | 113,03  | 52,70            | 0,19  | 0,048 ( $p>0,20$ ) |
|          |         | 2002      | 20,99       | -0,98 | 49,59  | 92,30   | 82,46            | 0,27  | 0,093 ( $p<0,05$ ) |
|          |         | 2003      | 29,01       | 7,86  | 51,76  | 101,94  | 23,19            | 0,09  | 0,073 ( $p<0,15$ ) |
| 25       | SEM     | 2002-2003 | 28,37       | 0,93  | 64,53  | 182,08  | 42,54            | 0,56  | 0,098 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 21,54       | 0,93  | 51,51  | 95,32   | 73,83            | 0,56  | 0,081 ( $p<0,15$ ) |
|          |         | 2003      | 34,21       | 11,24 | 64,53  | 175,80  | 11,46            | 0,26  | 0,091 ( $p<0,10$ ) |
| 30       | M       | 2002-2003 | 30,00       | 0,94  | 80,99  | 258,03  | 95,21            | 0,89  | 0,100 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 21,21       | 0,94  | 52,06  | 96,43   | 157,94           | 0,61  | 0,086 ( $p<0,10$ ) |
|          |         | 2003      | 38,79       | 11,31 | 80,99  | 265,52  | 32,92            | 0,54  | 0,062 ( $p>0,20$ ) |
| 30       | SEM     | 2002-2003 | 30,00       | 1,18  | 80,90  | 258,17  | 95,13            | 0,89  | 0,097 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 21,12       | 1,18  | 51,66  | 95,64   | 159,33           | 0,62  | 0,088 ( $p<0,10$ ) |
|          |         | 2003      | 38,88       | 11,76 | 80,90  | 263,27  | 31,36            | 0,54  | 0,060 ( $p>0,20$ ) |
| 35       | M       | 2002-2003 | 35,00       | -0,05 | 118,92 | 646,66  | 228,97           | 1,03  | 0,121 ( $p<0,01$ ) |
|          |         | 2002      | 17,59       | -0,05 | 37,47  | 103,36  | 407,70           | 0,12  | 0,110 ( $p<0,05$ ) |
|          |         | 2003      | 52,41       | 12,95 | 118,92 | 584,06  | 51,29            | 0,61  | 0,090 ( $p<0,10$ ) |

| 1  | 2   | 3                | 4            | 5            | 6             | 7              | 8             | 9           | 10                        |
|----|-----|------------------|--------------|--------------|---------------|----------------|---------------|-------------|---------------------------|
| 35 | SEM | <b>2002-2003</b> | <b>35,00</b> | <b>1,51</b>  | <b>130,85</b> | <b>688,14</b>  | <b>206,61</b> | <b>1,49</b> | 0,150 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2002             | 19,02        | 1,51         | 46,89         | 89,16          | 342,94        | 0,35        | <b>0,079</b> ( $p<0,15$ ) |
|    |     | 2003             | 50,98        | 7,85         | 130,85        | 777,19         | 71,23         | 0,94        | 0,148 ( $p<0,01$ )        |
| 40 | M   | <b>2002-2003</b> | <b>40,00</b> | <b>-6,22</b> | <b>164,16</b> | <b>1357,33</b> | <b>454,56</b> | <b>1,16</b> | 0,158 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2002             | 14,48        | -6,22        | 43,45         | 171,39         | 825,29        | 0,53        | 0,127 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2003             | 65,52        | 11,32        | 164,16        | 1241,16        | 85,93         | 0,76        | 0,126 ( $p<0,01$ )        |
| 40 | SEM | <b>2002-2003</b> | <b>40,00</b> | <b>0,73</b>  | <b>180,96</b> | <b>1443,42</b> | <b>389,16</b> | <b>1,67</b> | 0,173 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2002             | 16,96        | 0,73         | 43,09         | 106,43         | 639,80        | 0,20        | 0,128 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2003             | 63,03        | 3,79         | 180,09        | 1720,18        | 140,32        | 1,00        | 0,115 ( $p<0,01$ )        |
| 45 | M   | <b>2002-2003</b> | <b>45,00</b> | <b>-8,41</b> | <b>215,85</b> | <b>2392,98</b> | <b>722,90</b> | <b>1,39</b> | 0,161 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2002             | 12,86        | -8,41        | 47,69         | 232,52         | 1270,16       | 0,63        | 0,127 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2003             | 77,14        | 5,87         | 215,85        | 2489,00        | 178,99        | 0,85        | 0,109 ( $p<0,05$ )        |
| 45 | SEM | <b>2002-2003</b> | <b>45,00</b> | <b>-1,91</b> | <b>230,86</b> | <b>2518,96</b> | <b>647,02</b> | <b>1,72</b> | 0,195 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2002             | 14,78        | -1,91        | 39,39         | 146,34         | 1063,76       | 0,17        | 0,175 ( $p<0,01$ )        |
|    |     | 2003             | 75,22        | 0,18         | 230,86        | 3068,36        | 233,27        | 1,00        | 0,101 ( $p<0,05$ )        |

Źródło: obliczenia własne.

W latach 2000-2001 stabilnością rozkładu charakteryzowały się trzy portfele, tj. Markowitza oraz SEM, dla założonej stopy zwrotu 1% oraz Markowitza dla 5%. W następnych okresach badawczych stabilnością charakteryzowały się portfele Markowitza dla założonej stopy zwrotu 1 oraz 5%. Dla wszystkich prób obliczone wartości statystyki testu Kołmogorowa-Smirnowa rosną wraz ze wzrostem założonej stopy zwrotu, co świadczy o większej zmienności rozkładu portfeli o wyższych rentownościach.

Większość portfeli SEM charakteryzuje się mniejszą stabilnością rozkładów w porównaniu z portfelami Markowitza. Zjawisko to jest najwyraźniejsze dla niskich założonych stóp zwrotu. Wraz ze wzrostem stopy zwrotu portfele Markowitza i SEM upodobniają się. Przyczyną tego jest fakt, że zagwarantowanie wysokiej średniej stopy zwrotu portfela ogranicza wybór do bardziej zyskowych akcji, aż do sytuacji, gdy w portfelu będą wyłącznie akcje jednej spółki [12].

Następnie wyznaczono wybrane charakterystyki rozkładu stóp zwrotu rozważanych portfeli oraz zbadano normalność tych rozkładów testem  $\lambda$ -Kołmogorowa. Analiza ta dotyczyła każdego z trzech okresów z uwzględnieniem wcześniejszego podziału na roczne podokresy, wyniki zestawiają tab. 4-6.

We wszystkich okresach dla niskich założonych stóp zwrotu portfele SEM osiągają znacznie wyższe średnie stopy zwrotu od portfeli Markowitza. Ponadto portfele SEM posiadają wyższe minima i maksima. Również ze względu na semiwariancję portfele SEM są bezpieczniejsze od portfeli Markowitza. Jedynie ze względu na wariancję portfele Markowitza są lepsze od portfeli SEM.

W wszystkich wyróżnionych okresach na GPW w Warszawie rozkłady stóp zwrotu portfeli optymalizowanych zastosowanymi modelami, poza nielicznymi wyjątkami, były prawostronnie asymetryczne, przy czym rozkłady stóp zwrotu portfeli SEM cechowały się silniejszą asymetrią. Prawostronna asymetria jest pożądana przez inwestorów [5]. Wartości współczynników asymetrii zarówno

w przypadku portfeli Markowicza, jak i SEM rosną wraz ze wzrostem założonej stopy zwrotu.

Tabela 6. Wybrane charakterystyki rozkładów stóp zwrotu portfeli w okresie hossy

| $\gamma$ | Portfel | Lata             | $\bar{z}_p$  | Min           | Max           | $s_p^2$        | $ds_p^2(\gamma)$ | A            | Test normalności                      |
|----------|---------|------------------|--------------|---------------|---------------|----------------|------------------|--------------|---------------------------------------|
| 1        | M       | <b>2004-2005</b> | <b>4,64</b>  | <b>0,29</b>   | <b>9,42</b>   | <b>2,27</b>    | <b>0,0029</b>    | <b>0,03</b>  | <b>0,024 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
|          |         | 2004             | 4,63         | 0,38          | 8,03          | 1,93           | 0,0031           | -0,06        | <b>0,033 (<math>p&lt;0,20</math>)</b> |
|          |         | 2005             | 4,64         | 0,29          | 9,42          | 2,61           | 0,0027           | 0,09         | <b>0,033 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 1        | SEM     | <b>2004-2005</b> | <b>9,23</b>  | <b>0,74</b>   | <b>27,95</b>  | <b>71,44</b>   | <b>0,0002</b>    | <b>0,88</b>  | 0,211 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 14,14        | 1,00          | 27,95         | 86,65          | 0,0001           | -0,14        | 0,190 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2005             | 4,33         | 0,74          | 13,25         | 8,19           | 0,0004           | 1,05         | 0,146 ( $p<0,01$ )                    |
| 5        | M       | <b>2004-2005</b> | <b>5,00</b>  | <b>0,72</b>   | <b>9,75</b>   | <b>2,28</b>    | <b>1,11</b>      | <b>0,07</b>  | <b>0,023 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
|          |         | 2004             | 5,00         | 0,94          | 8,35          | 1,87           | 0,92             | -0,03        | <b>0,030 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
|          |         | 2005             | 5,00         | 0,72          | 9,75          | 2,71           | 1,32             | 0,12         | <b>0,033 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 5        | SEM     | <b>2004-2005</b> | <b>10,47</b> | <b>4,81</b>   | <b>20,76</b>  | <b>16,13</b>   | <b>0,0002</b>    | <b>0,51</b>  | <b>0,079 (<math>p&lt;0,01</math>)</b> |
|          |         | 2004             | 11,48        | 4,99          | 20,76         | 19,25          | 0,0001           | 0,29         | 0,123 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2005             | 9,45         | 4,81          | 19,95         | 11,03          | 0,0005           | 0,45         | 0,097 ( $p<0,05$ )                    |
| 10       | M       | <b>2004-2005</b> | <b>10,00</b> | <b>4,34</b>   | <b>15,88</b>  | <b>6,58</b>    | <b>3,34</b>      | <b>-0,02</b> | <b>0,047 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
|          |         | 2004             | 10,49        | 5,28          | 15,88         | 5,68           | 2,03             | -0,05        | <b>0,045 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
|          |         | 2005             | 9,51         | 4,34          | 15,74         | 7,02           | 4,67             | 0,10         | <b>0,072 (<math>p&lt;0,20</math>)</b> |
| 10       | SEM     | <b>2004-2005</b> | <b>16,73</b> | <b>5,81</b>   | <b>47,16</b>  | <b>92,24</b>   | <b>0,51</b>      | <b>1,56</b>  | <b>0,235 (<math>p&lt;0,01</math>)</b> |
|          |         | 2004             | 21,14        | 5,81          | 47,16         | 136,53         | 0,33             | 0,67         | 0,193 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2005             | 12,33        | 6,45          | 20,79         | 9,37           | 0,69             | 0,42         | <b>0,054 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 15       | M       | <b>2004-2005</b> | <b>15,00</b> | <b>2,80</b>   | <b>25,75</b>  | <b>26,59</b>   | <b>13,37</b>     | <b>-0,03</b> | 0,064 ( $p<0,05$ )                    |
|          |         | 2004             | 16,87        | 6,01          | 25,75         | 24,74          | 6,85             | -0,22        | <b>0,082 (<math>p&lt;0,10</math>)</b> |
|          |         | 2005             | 13,13        | 2,80          | 23,76         | 21,49          | 19,95            | 0,01         | <b>0,089 (<math>p&lt;0,10</math>)</b> |
| 15       | SEM     | <b>2004-2005</b> | <b>17,08</b> | <b>5,13</b>   | <b>45,75</b>  | <b>81,14</b>   | <b>10,55</b>     | <b>1,41</b>  | 0,212 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 21,73        | 6,23          | 45,75         | 108,85         | 5,27             | 0,60         | 0,162 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2005             | 12,43        | 5,13          | 20,13         | 10,33          | 15,88            | -0,03        | <b>0,040 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 20       | M       | <b>2004-2005</b> | <b>20,00</b> | <b>-2,44</b>  | <b>49,73</b>  | <b>137,52</b>  | <b>58,36</b>     | <b>0,43</b>  | 0,079 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 27,95        | 10,00         | 49,73         | 100,52         | 7,23             | 0,15         | <b>0,070 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
|          |         | 2005             | 12,05        | -2,44         | 29,35         | 48,05          | 109,81           | -0,09        | <b>0,056 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 20       | SEM     | <b>2004-2005</b> | <b>20,00</b> | <b>3,33</b>   | <b>53,63</b>  | <b>166,95</b>  | <b>49,45</b>     | <b>1,12</b>  | 0,211 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 27,73        | 5,48          | 53,63         | 196,44         | 21,15            | 0,25         | 0,136 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2005             | 12,27        | 3,33          | 23,47         | 18,09          | 77,99            | -0,03        | <b>0,076 (<math>p&lt;0,20</math>)</b> |
| 25       | M       | <b>2004-2005</b> | <b>25,00</b> | <b>-3,45</b>  | <b>83,01</b>  | <b>426,56</b>  | <b>147,62</b>    | <b>0,90</b>  | 0,154 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 38,84        | 5,39          | 83,01         | 406,59         | 40,07            | 0,20         | 0,097 ( $p<0,05$ )                    |
|          |         | 2005             | 11,16        | -3,45         | 28,57         | 63,63          | 255,85           | 0,08         | <b>0,035 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 25       | SEM     | <b>2004-2005</b> | <b>25,00</b> | <b>-0,56</b>  | <b>83,91</b>  | <b>448,32</b>  | <b>143,80</b>    | <b>1,02</b>  | 0,188 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 39,15        | 3,23          | 83,91         | 454,78         | 45,49            | 0,18         | 0,092 ( $p<0,05$ )                    |
|          |         | 2005             | 10,85        | -0,56         | 26,36         | 41,65          | 242,76           | 0,20         | <b>0,054 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 30       | M       | <b>2004-2005</b> | <b>30,00</b> | <b>-13,73</b> | <b>131,96</b> | <b>1135,18</b> | <b>337,72</b>    | <b>1,25</b>  | 0,153 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 52,24        | 0,30          | 131,96        | 1184,76        | 83,11            | 0,56         | 0,139 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2005             | 7,76         | -13,73        | 31,50         | 97,02          | 593,87           | 0,24         | <b>0,066 (<math>p&gt;0,20</math>)</b> |
| 30       | SEM     | <b>2004-2005</b> | <b>30,00</b> | <b>-13,66</b> | <b>133,19</b> | <b>1140,46</b> | <b>337,19</b>    | <b>1,27</b>  | 0,150 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2004             | 52,01        | -0,72         | 133,19        | 1210,82        | 87,51            | 0,57         | 0,142 ( $p<0,01$ )                    |
|          |         | 2005             | 7,99         | -13,66        | 32,38         | 101,59         | 588,40           | 0,29         | <b>0,079 (<math>p&lt;0,15</math>)</b> |

Źródło: obliczenia własne.

W portfelach SEM, w porównaniu z portfelami Markowitza, występuje większe rozproszenie stóp zwrotu wokół średniej. Jednocześnie mniejsze są odchylenia poniżej, a większe powyżej założonej stopy zwrotu. Z tego względu portfele SEM należy uznać za lepsze dla inwestorów. Przy mniejszym ryzyku uzyskania stopy zwrotu niższej od założonej stwarzają jednocześnie szansę na wysokie stopy zwrotu.

Największe odstępstwa od rozkładu normalnego wystąpiły w okresie bessy, natomiast w okresie przejściowym oraz w fazie hossy znaczna część portfeli charakteryzowała się normalnością rozkładów stóp zwrotu.

#### 4. Podsumowanie

Przedstawione wyniki pokazują, że bez względu na fazę cyklu giełdowego analiza portfelowa pozwala na znalezienie inwestycji o dodatniej rentowności przy zminimalizowanym ryzyku. Portfele SEM były bardziej zyskowne i mniej ryzykowne od portfeli Markowitza.

Portfele zarówno SEM, jak i Markowitza w większości przypadków charakteryzowały się niestabilnością rozkładów stóp zwrotu, przy czym dla portfeli SEM niestabilność ta była większa. Dla obydwu rozpatrywanych modeli, we wszystkich trzech okresach badawczych, wraz ze wzrostem założonej stopy zwrotu wzrasta nie tylko ryzyko wyrażone wariancją lub semiwariancją, ale wyraźnie wzrasta możliwość zmiany rozkładu w czasie. Zmienność rozkładów w czasie powoduje, że portfel efektywny w jednym okresie nie musi być portfelem efektywnym w następnym okresie. Warunki podejmowania decyzji bardziej przypominają warunki niepewności niż warunki ryzyka.

#### Literatura

- [1] Brocato J., Steed S., *Optimal Asset Allocation over the Business Cycle*, „The Financial Review” 1998, 33, s. 129-148.
- [2] Chow G., Jacquier E., Kritzman M., Lowry K., *Optimal Portfolios in Good Times and Bad*, „Financial Analysts Journal”, May/June 1999, s. 65-73.
- [3] Eichholtz P., *The Stability of the Covariances of International Property Share Returns*, „The Journal of Real Estate Research” 1996, vol. 11, nr 2, s. 149-158.
- [4] Hogan W., Warren J., *Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Module Based on Semivariance*, „Journal of Finance and Quantitative Analysis”, January 1974.
- [5] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [6] Markowitz H., *Portfolio Selection*, „J. Finance” 1952, 7, s. 77-91.

- [7] Markowitz H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, New York 1959.
- [8] Murphy J.J., *Analiza techniczna rynków finansowych*, WIG-PRESS, Warszawa 1999.
- [9] Ogryczak W., Ruszczyński A., *On Consistency of Stochastic Dominance and Mean-Semideviation Models*, „Mathematical Programming” 2001, Ser. B, vol. 89, Springer Verlag KG, s. 217-232.
- [10] Rutkowska-Ziarko A., *Metody znajdowania portfela efektywnego dla semiwariancji*, „Badania Operacyjne i Decyzje” 2005 nr 3-4, s. 63-83.
- [11] Rutkowska-Ziarko A., Markowski L., *Zmienność rozkładów stóp zwrotu portfeli Markowitza w porównaniu z portfelami o minimalnej semiwariancji*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, Wrocław 2006 (praca w druku).
- [12] Rutkowska-Ziarko A., Olesinkiewicz J., *Wykorzystanie semiwariancji do budowy portfela akcji*, „Przegląd Statystyczny” 2002 nr 4.
- [13] Sortino F., Satchell S., *Managing Downside Risk in Financial Markets: Theory, Practice and Implementation*, Butterworth – Heinemann Oxford 2001.
- [14] Tarczyński W., *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*, PWE, Warszawa 2002.

## A COMPARISON BETWEEN MARKOWITZ'S PORTFOLIOS AND PORTFOLIOS WITH A MINIMUM SEMI-VARIANCE IN THE BULL AND BEAR MARKET PHASES

### Summary

This article aims at comparing Markovitz's portfolios with minimal semi-variance portfolios at various stages of the stock market. The assessment of the portfolios included the parameters of distribution of the rates of return, including selected risk measures and the phenomenon of distribution of return rates in time. The study was limited to the companies quoted on the Warsaw Stock Exchange between 2000 and 2005.

The portfolios with a minimal semi-variance proved to be more profitable and less risky than Markovitz's portfolios. In most cases, both the SEM and Markovitz's portfolios were unstable with relation to the distribution of the return rates, but, notably, in the case of the SEM portfolios, the instability was greater. In both of the models compared, in all the three phases of study, the rise in the target rate of return entails an increase, not only in the risk (expressed by variance or semi-variance), but also in the possibility of a distribution change over time.