

Agnieszka Przybylska-Mazur

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

PROGNOZOWANIE INFLACJI NA PODSTAWIE PEWNEGO MODELU DYNAMICZNEGO

1. Wstęp

Celem artykułu jest wyznaczenie prognozy inflacji na podstawie jednego z modeli dynamicznych opisujących proces inflacji. Do wyznaczenia prognozy inflacji wykorzystano modelowe ujęcie procesu inflacji, ponieważ prognozy ekonomiczne, w tym również prognozy inflacji, mogą być sporządzane różnymi metodami, ale wszystkie metody zapewniające ich przejrzystość i powtarzalność wymagają stosowania modeli. Do prognoz stosowane są modele statystyczne (empiryczne) oraz modele zbudowane według wskazówek czysto teoretycznych. Jednym z modeli inflacji są modele inflacji w ujęciu dynamicznym, w których dynamika opisana jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego. Są to modele w czasie ciągłym. Oprócz klasycznej postaci modelu w ujęciu ciągłym w pracy została również opisana wersja dyskretna modelu.

W artykule do wyznaczenia prognozy wykorzystano jednoczynnikowy model Vasicka. Stworzony w 1977 r. przez Vasicka [9] model jest modelem matematycznym, zastosowanym przez autorów prac np. [2; 3; 6; 7] do modelowania stóp procentowych. Został on w artykule zastosowany do opisu inflacji. Ponieważ w tym modelu mamy proces stochastyczny – proces Ornsteina-Uhlenbecka – w pracy zaprezentowano prognozowanie inflacji na podstawie modelu bazującego na tym procesie stochastycznym. Przedstawiono również warunki, w jakich można stosować prognozowanie inflacji na podstawie modelu Vasicka.

2. Podstawowe pojęcia

W omówionym w dalszej części modelu inflacji wykorzystano proces, który jest jedną z podstawowych klas procesów stochastycznych – ruch Browna, zwany również procesem Wienera lub procesem ruchu Browna $B(t)$, określony następująco [10]:

$$\begin{aligned} B(t + dt) &= B(t) + z(t + dt), \\ B(0) &= B_0, \end{aligned}$$

gdzie $z(t)$ – zakłócenie losowe opisane ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

Ten proces można zapisać także w postaci całkowej:

$$B(t) = B_0 + \int_0^t dB(s).$$

Proces ruchu Browna można również zdefiniować następująco [8]:

Proces stochastyczny $B(t)$ nazywamy procesem ruchu Browna, jeżeli

1) $P(B(0) = 0) = 1$;

2) dla dowolnych chwil $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ przyrosty $B(t_1) - B(t_0)$, $B(t_2) - B(t_1)$, ..., $B(t_n) - B(t_{n-1})$ są niezależne;

3) dla dowolnych chwil t i $h > 0$ przyrost $B(t + h) - B(t)$ ma rozkład normalny, którego parametry są następujące $E[B(t + h) - B(t)] = \mu h$, μ – stała rzeczywista, $E[(B(t + h) - B(t))^2] = \sigma^2 h$, σ^2 – stała dodatnia, przy czym μ – współczynnik przenoszenia (dryf), natomiast σ^2 – wariancja.

Proces Wienera $B(t)$ oznacza się również w literaturze B_t .

W modelowaniu procesów ekonomicznych wykorzystywane są pewne modyfikacje procesu ruchu Browna. Taką modyfikacją jest stochastyczne równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \\ X(0) &= X_0. \end{aligned}$$

Jeżeli założymy, że współczynnik przesunięcia (dryfu) $\mu(X, t) = \mu$ oraz współczynnik zmienności $\sigma(X, t) = \sigma$ są stałe, to proces stochastyczny

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t)$$

nazywamy arytmetycznym ruchem Browna.

Arytmetyczny ruch Browna może być wykorzystany do modelowania wielkości ekonomicznych, które przyjmują wartości dodatnie i ujemne, a ich przyrosty mają rozkłady normalne o liniowym wzroście wariancji w czasie.

Jeżeli zakładamy, że współczynnik przesunięcia (dryfu) $\mu(X, t) = \mu X$ oraz współczynnik zmienności $\sigma(X, t) = \sigma X$, to proces stochastyczny

$$dX(t) = \mu X dt + \sigma X dB(t)$$

nazywamy geometrycznym ruchem Browna z dryfem μ i zmiennością σ . Jest on modelem dla wielkości ekonomicznych rosnących wykładniczo, średnio w stosunku μ i o zmienności proporcjonalnej do poziomowi zmiennej X .

Wykorzystując przedstawione pojęcia, można podać definicję procesu Ornsteina-Uhlenbecka: Jeśli $B(t)$, $t \in [0, +\infty)$ będzie standardowym procesem Wienera, czyli ma wartość średnią równą 0 i wariancję równą 1, to proces $U(t) = \sqrt{\alpha} e^{-\beta t} B(e^{2\beta t})$ nazywamy procesem Ornsteina-Uhlenbecka.

3. Dynamiczny model inflacji wynikający ze stochastycznych równań różniczkowych

Jak już wspomniano we wstępie, do modelowania inflacji można zastosować jednoczynnikowy model Vasicka, w który ujęty jest proces Ornsteina-Uhlenbecka. Ten model ma następującą postać w czasie ciągłym [9]:

$$d\pi_t = k_\pi(\mu_\pi - \pi_t)dt + \sigma_\pi dB_t. \quad (1)$$

Model (1) można zapisać w wersji dyskretniej w następujący sposób:

$$\Delta\pi_t = k_\pi(\mu_\pi - \pi_t)\Delta t + \varepsilon_\pi \sigma_\pi \sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

lub równoważnie

$$\begin{aligned} \pi_{t+1} - \pi_t &= k_\pi(\mu_\pi - \pi_t)\Delta t + \varepsilon_\pi \sigma_\pi \sqrt{\Delta t}, \\ \pi_{t+1} &= \pi_t + k_\pi(\mu_\pi - \pi_t)\Delta t + \varepsilon_\pi \sigma_\pi \sqrt{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Jeżeli przyrost czasu $\Delta t = 1$, to otrzymujemy $\pi_{t+1} = \pi_t + k_\pi(\mu_\pi - \pi_t) + \varepsilon_\pi \sigma_\pi$.

Wykorzystany do modelowania inflacji proces Ornsteina-Uhlenbecka charakteryzuje się własnością powrotu do średniej, przez co należy rozumieć, że oczekiwany poziom przyszłej inflacji w danym momencie jest skorygowaną o składnik losowy średnią ważoną dwóch wielkości: inflacji π_t z poprzedniego momentu i średniego poziomu inflacji, do którego powraca proces (*mean reversion level of inflation*) μ_π . Średni poziom inflacji, do którego powraca proces, ma rolę długoterminowej stopy procentowej przy modelowaniu stóp procentowych. Prędkość powrotu jest określana przez wagę – parametr k_π . W ciągłym modelu średni poziom μ_π inflacji, do którego powraca proces, jest zwany dryfem procesu.

Jeżeli obecny poziom inflacji π_t jest powyżej średniego poziomu inflacji, do którego powraca proces, to pierwszy składnik równania (1) lub (2) jest ujemny. Na

podstawie tego można przewidywać, że oczekiwana zmiana inflacji będzie ujemna, czyli jest oczekiwany spadek inflacji.

Drugi składnik przedstawionego równania (1) opisuje niepewność procesu, zmianę w ruchu Browna. W postaci dyskretnej ε_π jest składnikiem losowym, który ma rozkład normalny. Niepewność jest skalowana przez parametr σ_π , która opisuje zmienność w procesie inflacji.

Przekształcając równanie (3), można pokazać, że ten proces opisujący inflację jest procesem autoregresji:

$$\pi_{t+1} - \mu_\pi = \pi_t - \mu_\pi + k_\pi \mu_\pi \Delta t - k_\pi \pi_t \Delta t + \varepsilon_\pi \sigma_\pi \sqrt{\Delta t}$$

lub równoważnie

$$\pi_{t+1} - \mu_\pi = (1 - k_\pi \Delta t) \pi_t - (1 - k_\pi \Delta t) \mu_\pi + \varepsilon_\pi \sigma_\pi \sqrt{\Delta t} = (1 - k_\pi \Delta t) (\pi_t - \mu_\pi) + \varepsilon_\pi \sigma_\pi \sqrt{\Delta t},$$

zatem

$$\pi_{t+1} - \mu_\pi = \psi (\pi_t - \mu_\pi) + \varepsilon_\pi \sigma_\pi \sqrt{\Delta t}, \text{ gdzie } \psi = 1 - k_\pi \Delta t.$$

Ponieważ proces modelujący inflację jest procesem autoregresji, to można oszacować parametry modelu inflacji zapisanego w ogólnej postaci procesu autoregresji rzędu pierwszego:

$$\pi_{t+1} = \alpha + \beta \pi_t + \varepsilon'_\pi. \quad (4)$$

Po oszacowaniu parametrów α, β klasyczną metodą najmniejszych kwadratów oraz wiedząc, że $\beta = 1 - k_\pi \Delta t$ i $\alpha = k_\pi \mu_\pi \Delta t$, możemy obliczyć prędkość powrotu do średniej – parametr k_π – oraz średni poziom inflacji μ_π , do którego powraca proces:

$$k_\pi = \frac{1 - \beta}{\Delta t}, \quad (5)$$

$$\mu_\pi = \frac{\alpha}{k_\pi \Delta t} = \frac{\alpha}{1 - \beta}. \quad (6)$$

Jeżeli poziom wskaźnika CPI jest zbyt wysoki, to inflacja oczekiwana miałaby wysoki poziom, podczas gdy rzeczywista inflacja byłaby dużo niższa. W związku z tym, jeżeli szereg czasowy CPI zawiera błędy tego typu, to parametry k_π , μ_π mogą mieć zbyt dużą wartość.

Jeśli znamy istniejący poziom inflacji π_t i parametry k_π , μ_π omówionego procesu, to możemy obliczyć oczekiwaną przyszłą inflację na różne okresy. W związku z tym struktura terminowa inflacji pozwala wyznaczyć oczekiwaną stopę inflacji na różne okresy.

4. Przykład empiryczny

Na podstawie danych empirycznych dotyczących wskaźników inflacji miesięcznej (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100) w okresie od stycznia 1989 r. do

grudnia 2006 r. i od stycznia 1991 r. do grudnia 2006 r. oraz danych wskaźników inflacji bazowej – inflacji netto (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100) – obliczono prognozę inflacji na styczeń 2007 r. oraz na luty 2007 r. Do analiz wykorzystano również dane dotyczące wskaźników inflacji rocznej w okresie od 1950 r. do 2005 r. i w okresie od 1991 r. do 2005 r., wyznaczając prognozę wskaźnika inflacji na 2006 r. i 2007 r. Wyniki obliczeń zestawiono w tab. 1-3.

Tabela 1. Oszacowane parametry strukturalne i parametry struktury stochastycznej modelu autoregresji (4)

Wskaźniki	Okres	Parametry strukturalne modelu (4)		Parametry struktury stochastycznej			
		α	β	wariancja składnika resztowego	odchylenie standardowe składnika resztowego	współczynnik zbieżności	współczynnik zmienności losowej
Wskaźniki inflacji miesięcznej (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100)	01.1989-12.2006	0,034	0,978	0,19	0,436	0,0432	0,251
Wskaźniki inflacji miesięcznej (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100)	01.1991-12.2006	0,05	0,954	0,0004	0,02	0,0117	0,017
Wskaźniki bazowej inflacji miesięcznej – inflacji netto (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100)	01.1998-12.2006	0,023	0,997	0,000013	0,004	0,0066	0,0034
Wskaźniki inflacji rocznej	1950-2005	0,702	0,450	0,592	0,769	0,798	0,602
Wskaźniki inflacji rocznej	1991-2005	0,330	0,685	0,0014	0,769	0,068	0,033

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Prognoza wskaźnika inflacji miesięcznej oraz mierniki dokładności predykcji

Wskaźniki	Okres	Prędkość powrotu do średniej k_{π}	Średni poziom inflacji, do którego powraca proces μ_{π}	Prognoza inflacji na styczeń 2007 r.	Średni błąd predykcji	Średni względny błąd predykcji	Błąd prognozy	Prognoza inflacji na luty 2007 r.
Wskaźniki inflacji miesięcznej (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100)	01.1989-12.2006	0,022	1,564	1,0256	0,437	42,6%	0,009	1,037
Wskaźniki inflacji miesięcznej (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100)	01.1991-12.2006	0,046	1,076	1,017	0,020	1,98%	0	1,020
Wskaźniki bazowej inflacji miesięcznej – inflacji netto (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100)	01.1998-12.2006	0,023	0,999	1,016	0,0036	0,36%		1,016

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Prognoza wskaźnika inflacji rocznej oraz mierniki dokładności predykcji

Wskaźniki	Okres	Prędkość powrotu do średniej k_{π}	Średni poziom inflacji, do którego powraca proces μ_{π}	Prognoza inflacji na 2006 r.	Średni błąd predykcji	Średni względny błąd predykcji	Błąd prognozy	Prognoza inflacji na 2007 r.
Wskaźniki inflacji rocznej	1950-2005	0,550	1,277	1,162	0,777	0,669	0,152	1,157
Wskaźniki inflacji rocznej	1991-2005	0,315	1,048	1,03	0,0403	0,039	0,02	1,022

Źródło: obliczenia własne.

Prognoza wskaźnika inflacji miesięcznej (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100) na styczeń 2007 r. oraz na luty 2007 r. była bardziej dokładna, dała mniejsze wartości mierników dokładności predykcji, gdy wzięto do obliczeń dane empiryczne z okresu styczeń 1991 r.-grudzień 2006 r. niż z okresu styczeń 1989 r.-grudzień 2006 r. Różnice te można wytłumaczyć tym, że w roku 1990 nastąpił znaczny wzrost inflacji – nagły skok w górę. Podobnie nie uzyskano zadowalających wyników prognozy wskaźników inflacji rocznej, gdy wzięto pod uwagę dane z okresu 1950 r.-2005 r., uwzględniając w analizie 1990 r. Bardziej precyzyjne wyniki otrzymano dla wskaźników inflacji rocznej, gdy wykorzystano dane od 1991 r. Wyniki prognoz charakteryzujących się małymi błędami predykcji uzyskano także dla miesięcznej inflacji bazowej – inflacji netto (analogiczny miesiąc roku poprzedniego = 100). W tym przypadku do analiz brano pod uwagę dostępne dane obejmujące okres od stycznia 1998 r. do grudnia 2006 r.

Na podstawie uzyskanych prognoz wskaźników inflacji można stwierdzić, że dynamiczny model inflacji wykorzystujący do modelowania proces Ornsteina-Uhlenbecka można stosować do prognozowania, gdy dane empiryczne nie wykazują gwałtownych skoków, czyli gdy nie występuje nagły znaczny spadek lub wzrost w badanym zjawisku.

5. Zakończenie

Do modelowania inflacji w ujęciu dynamicznym można wykorzystać procesy stochastyczne. W pracy zostały wyznaczone prognozy inflacji bazujące na procesie Ornsteina-Uhlenbecka wykorzystanego w jednoczynnikowym modelu Vasicka.

Na podstawie przeprowadzonych analiz stwierdzono, że proces Ornsteina-Uhlenbecka można stosować do prognozowania inflacji, gdy dane empiryczne nie wykazują gwałtownych skoków.

Prognozy inflacji ułatwiają prowadzenie odpowiedniej polityki monetarnej, jak również podejmowanie odpowiednich decyzji finansowych.

Literatura

- [1] Barno R.J., *Makroekonomia*, PWE, Warszawa 1997.
- [2] Brigo D., Mercurio F., *Interest Rate Model Theory and Practice*, Springer, 2001.
- [3] Fama E., *Term Structure Forecasts of Interest Rate, Inflation and Real Returns*, „Journal of Monetary Economics” 1990, 25, s. 59-76.
- [4] Gruszeński T., *Teoria pieniądza i polityka pieniężna. Rys historyczny i praktyka gospodarcza*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2004.
- [5] Hall R.E., Taylor J.B., *Makroekonomia*, wyd. 3 zm., PWN, Warszawa 2004.
- [6] Jajuga K., *Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych – wyzwanie dla ekonometrii*, <http://ekonometria.wzr.pl/res/konferencje/300505/referaty/jajugakrzysztof.pdf>.
- [7] Mc Manus D., Watt W., *Estimating One-Factor Models of the Short-Term Interest Rates*, Bank of Canada, Working Paper 1999.
- [8] Sobczyk K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
- [9] Vasicek O.A., *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, „Journal of Financial Economics” 1977 nr 5.
- [10] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.

INFLATION FORECASTING BASED ON A CERTAIN DYNAMIC MODEL

Summary

Among more advanced models are the dynamic inflation models that describe the dynamic by means of stochastic differential equations. For the purpose of the dynamic modeling of inflation, one can apply the Ornstein-Uhlenbeck process. This paper analyzes the forecasting of inflation on the grounds of the Ornstein-Uhlenbeck process applied in the one-factor model – the Vasicek model.