

Tomasz Pisula, Grzegorz Mentel

Politechnika Rzeszowska

PROGNOZY DŁUGOOKRESOWE DLA WARTOŚCI ZAGROŻONEJ *VALUE AT RISK* W OCENIE RYZYKA INWESTOWANIA W AKCJE

1. Wstęp

Opracowana i wprowadzona po raz pierwszy przez *RiskMetrics*® w roku 1994 metodologia oceny ryzyka, oparta na koncepcji tzw. wartości zagrożonej lub inaczej – wartości narażonej na ryzyko *value at risk* (*VaR*) (zob. np. [1; 7]), została od samego początku uznana za rewolucyjną i efektywną metodę oceny ryzyka dla inwestorów inwestujących na rynkach finansowych. Z punktu widzenia wielu praktycznych zastosowań metodologia ta jest z powodzeniem wykorzystywana w praktyce przez inwestorów zarówno instytucjonalnych (np. banki), jak i indywidualnych.

W klasycznej metodologii *RiskMetrics*® przyjmuje się dwa podstawowe założenia (zob. [7, s. 59, 84-87]):

- oczekiwane dzienne logarytmiczne zwroty aktywów finansowych są równe zeru $E_t[r_{t+1|t}] = 0$ (co jest do zaakceptowania tylko dla krótkich horyzontów czasu),
- zmienność aktywów dla horyzontu czasowego k dni $\sigma_{t+k|t}$ jest obliczana na podstawie zmienności jednodniowej $\sigma_{t+1|t}$ i skalowana po przyjęciu współczynnika skali równego pierwiastkowi okresu prognozowania $\sigma_{t+k|t} = \sqrt{k} \cdot \sigma_{t+1|t}$.

Istnieje duże zapotrzebowanie na modele umożliwiające mierzenie i ocenę ryzyka w dłuższych horyzontach czasu (często przekraczających 2 lata). Przedsiębiorstwa i firmy, których głównym rodzajem działalności nie jest zarządzanie aktywami finansowymi, nie są aż tak wrażliwe na dzienne zmiany rynkowych cen tych aktywów. Dla takich przedsiębiorstw ważniejsza jest ocena ryzyka potencjalnych strat w wartości portfeli inwestycyjnych w dłuższym horyzoncie czasu. Zapotrzebowanie na modele prognoz długookresowych zgłaszane jest także przez instytucje za-

zarządzające funduszami inwestycyjnymi. Głównym źródłem ich ryzyka są zmiany rynkowe cen aktywów finansowych, w jakie te fundusze inwestują w wieloletnim horyzoncie czasu. Prognozy długookresowe są bardzo ważne również dla otwartych funduszy emerytalnych oraz firm ubezpieczeniowych, mających długoterminowe zobowiązania (renty, emerytury, odszkodowania), które muszą być okresowo wypłacane. Z tych powodów w 2000 r. opublikowany został dokument techniczny opisujący nową metodologię oceny ryzyka rynkowego dla inwestycji finansowych w długim horyzoncie czasu (przekraczającym 2 lata). Metodologię tę *RiskMetrics®* nazwało *ClearHorizon™* (zob. [4]).

W publikacji zostaną przedstawione teoretyczne aspekty metodologii *ClearHorizon™* oraz pokazane będą możliwości praktycznego jej wykorzystania przy długoterminowej ocenie ryzyka inwestowania w akcje.

2. Model błędzenia losowego (*random walk*)

Model *random walk* jest jednym z dwóch podstawowych modeli szeregów czasowych, na których opiera się omawiana długookresowa metoda prognozowania dla *VaR*. Niech V_t oznacza cenę (w okresie t) badanego instrumentu finansowego, wtedy dyskretną wersję modelu błędzenia losowego można przedstawić następująco (zob. [4, s. 3]):

$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1} = \ln(V_t) - \ln(V_{t-1}) = \mu + \sigma \cdot \varepsilon_t, \quad (1)$$

gdzie: μ – jest parametrem dryfu (trendu),

σ – jest parametrem zmienności i wyrażony jest odchyleniem standardowym,

ε_t – są zakłóceniami losowymi (błąd losowy) o jednakowym rozkładzie standaryzowanym normalnym $N(0,1)$.

Zwykle Δp_t określa się jako proces błędzenia losowego (*random walk*), szereg czasowy $p_t = \ln(V_t)$ zaś jako szereg stacjonarny po różnicowaniu $p_t - p_{t-1}$ (tzw. *difference stationary series*).

Przekształcając równanie (1), można otrzymać następującą zależność rekurencyjną:

$$p_{t+k} = p_t + k\mu + \sigma(\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \dots + \varepsilon_{t+k}). \quad (2)$$

Na podstawie zależności (2) prognozy na k okresów w przyszłość dla średniej i wariancji zmiennej losowej $p_{t+k} = \ln(V_{t+k})$ można wyznaczyć (korzystając z własności operatorów wartości oczekiwanej $E_t[\]$ i wariancji $VAR_t[\]$ obliczanych w czasie t) następująco (zob. [4, s. 4]):

$$\begin{aligned} \mu_k^{(RW)} &= E_t[p_{t+k}] = p_t + k\mu + \sigma \cdot E_t[\varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k}] = p_t + k \cdot \mu, \\ \sigma_k^{2(RW)} &= VAR_t[p_{t+k}] = \sigma^2 \cdot VAR_t[\varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k}] = k \cdot \sigma^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Wynika to z faktu, że ε_{t+m} są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $\varepsilon_{t+m} : N(0,1)$ dla każdego $m = 1, 2, \dots, k$.

3. Model powracania do średniej (*mean reversion*)

Model rewersji do średniej, opisujący fluktuację cen V_t badanych aktywów finansowych, może być wyrażony w wersji dyskretnej następującym równaniem (zob. [4, s. 4]):

$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1} = \mu + \theta [p_0 + \mu(t-1) - p_{t-1}] + \sigma \cdot \varepsilon_t, \quad (4)$$

gdzie: $\theta \in [0,1]$ – parametr określający prędkość rewersji (powracania) do średniej,

μ – parametr trendu,

σ – parametr zmienności (odchyleniem standardowym),

$p_0 = \ln(V_0)$, $p_t = \ln(V_t)$, $p_{t-1} = \ln(V_{t-1})$,

ε_t – zmienne losowe niezależne o jednakowym rozkładzie standaryzowanym normalnym $N(0,1)$.

Po odpowiednich przekształceniach dyskretną wersję modelu powracania do średniej można sprowadzić do postaci:

$$p_t = \alpha_0 + \beta \cdot t + \gamma \cdot p_{t-1} + \sigma \cdot \varepsilon_t, \quad (5)$$

gdzie: $\alpha_0 = \theta \cdot p_0 + \mu(1-\theta)$, $\beta = \mu \cdot \theta$, $\gamma = 1 - \theta$.

Proces $p_t = \ln(V_t)$ określa się jako tzw. proces powracania do średniej lub jako szereg czasowy stacjonarny po odjęciu trendu (*trend stationary series*).

Na podstawie równania (5) otrzymuje się zależność rekurencyjną:

$$p_{t+k} = \frac{\alpha_0(1-\gamma^k)}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma} \left[(t+k) - \gamma^k(t+1) - \frac{\gamma(1-\gamma^{k-1})}{1-\gamma} \right] + \gamma^k \cdot p_t + \sigma \left(\gamma^{k-1} \cdot \varepsilon_{t+1} + \gamma^{k-2} \cdot \varepsilon_{t+2} + \dots + \gamma \cdot \varepsilon_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} \right). \quad (6)$$

Po skorzystaniu z (6) prognozy na k okresów w przyszłość dla wartości średniej i wariancji zmiennej losowej $p_{t+k} = \ln(V_{t+k})$ można obliczyć (podobnie jak dla modelu błędzenia losowego) ze wzoru (zob. [4, s. 5]):

$$\mu_k^{(MRev)} = E_t[p_{t+k}] = \frac{\alpha_0(1-\gamma^k)}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma} \left[(t+k) - \gamma^k(t+1) - \frac{\gamma(1-\gamma^{k-1})}{1-\gamma} \right] + \gamma^k \cdot p_t, \quad ($$

$$\sigma_k^{2(MRev)} = VAR_t[p_{t+k}] = \frac{\sigma^2(1-\gamma^{2k})}{1-\gamma^2}.$$

Wynika to z faktu, że ε_{t+m} są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $\varepsilon_{t+m} : N(0,1)$ dla każdego $m = 1, 2, \dots, k$.

Więcej na temat stacjonarnych i niestacjonarnych ekonometrycznych szeregów czasowych oraz na temat omawianych modeli można znaleźć w pracach [2; 5; 8].

4. Optymalna mieszanina modeli *random walk* i *mean reversion* w prognozach długookresowych *VaR*

Dla obu podstawowych modeli szeregów czasowych (opisanych w punkcie 2 i 3) można wyznaczyć, jak szybko zmienia się w czasie ich wariancja w zależności od długości horyzontu prognozy k . W tym celu w metodologii zaproponowanej przez *RiskMetrics®* wprowadzono wskaźnik *variance ratio* (*VR*) (zob. [4, s. 5]):

$$VR_k = \frac{\sigma_k^2}{k \cdot \sigma_1^2}. \quad (8)$$

Na prezentowane modele błędzenia losowego i rewersji do średniej można spojrzeć jak na dwa skrajne bieguny szerokiego spektrum możliwych realizacji dowolnego finansowego szeregu czasowego. Na jednym skrajnym biegunie jest model błędzenia losowego, który charakteryzuje się maksymalną możliwą zmiennością długookresową ($VR_k = 1$). Na drugim zaś biegunie jest model powracania do średniej, który zapewnia minimalną możliwą zmienność długookresową ($VR_k \rightarrow 0$, gdy $k \rightarrow \infty$). Zmienność każdego innego szeregu czasowego określającego fluktuację cen badanych instrumentów finansowych może być opisana modelem hybrydowym będącym tzw. optymalną mieszaniną modeli *random walk* (*RW*) i *mean reversion* (*MRev*). Wagi $\omega \in [0,1]$ oraz $(1 - \omega)$ dla optymalnej mieszaniny modeli są tak dobierane, aby jak najlepiej skalibrować wariancję dla modelu hybrydowego w stosunku do obserwowanej wariancji (zmienności) historycznej. Wariancję historyczną dla $k = 1, 2, \dots, s$ okresów w przeszłość wyznacza się, korzystając ze wzoru (zob. [3, s. 147; 4, s. 9]):

$$\sigma_k^2 = \frac{n}{(n-k)(n-k+1)} \sum_{t=k+1}^n (p_t - p_{t-k} - k \cdot \bar{r}_1)^2, \quad (9)$$

gdzie: n – liczba dostępnych obserwacji historycznych,

$\bar{r}_1 = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$, $t = 2, \dots, n$ – średnia wartość dla 1-okresowych logarytmicznych stóp zwrotu badanych aktywów.

Po skorzystaniu ze wskaźnika *variance ratio* (*VR*) ustala się wagi dla modelu hybrydowego, rozwiązując następujące zadanie optymalizacyjne (zob. [4, s. 9]):

$$\sum_{k=1}^s (VR_k^{(H)} - \omega \cdot VR_k^{(RW)} - (1 - \omega) \cdot VR_k^{(MRev)})^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

gdzie: $VR_k^{(H)}$ – wskaźnik *variance ratio* dla wariancji historycznej, obliczony na podstawie wzorów (8) i (9),

$VR_k^{(RW)}$ oraz $VR_k^{(MRev)}$ – analogiczne wskaźniki dla modelu błędzenia losowego i rewersji do średniej (obliczone na podstawie wzorów (3), (7) i (8)).

W modelu hybrydowym zakłada się, że logarytmy naturalne cen badanych instrumentów finansowych podlegają rozkładowi normalnemu $p_{t+k} : N(\mu_k^{(Mix)}, \sigma_k^{(Mix)})$, gdzie za parametr średniej przyjmuje się $\mu_k^{(Mix)} = \mu_k^{(MRev)}$, który można wyznaczyć ze wzoru (7). Parametr odchylenia standardowego można wyznaczyć ze wzoru:

$$\sigma_k^{(Mix)} = \omega \cdot \sigma_k^{(RW)} + (1 - \omega) \cdot \sigma_k^{(MRev)}. \quad (11)$$

Value at risk (VaR) definiowana jest czasami w aspekcie potencjalnych strat (lub zysków) inwestora na podstawie prawdopodobieństwa wystąpienia w przyszłości następującego zdarzenia (scenariusza): $P(VaR_k^{(d)} < ZS_{t,k} = V_{t+k} - V_t < < VaR_k^{(g)})) = 1 - \alpha^1$. Więcej na temat wartości zagrożonej *VaR* można znaleźć w literaturze (zob. np. [1; 6; 7]). Prognozy na k okresów w przyszłość dla dolnej i górnej granicy *VaR* wyznacza się zatem następująco (zob. [4, s. 13]):

prognozy dla strat (zysków): prognozy dla cen: prognozy dla logarytmów cen:

$$\begin{aligned} VaR_k^{(g)} &= e^{(\mu_k + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_k)} - V_t, & VaR_k^{(g)} &= e^{(\mu_k + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_k)}, & VaR_k^{(g)} &= \mu_k + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_k, \\ VaR_k^{(d)} &= e^{(\mu_k + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_k)} - V_t, & VaR_k^{(d)} &= e^{(\mu_k + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_k)}, & VaR_k^{(d)} &= \mu_k + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_k. \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie: $\mu_k = \mu_k^{(Mix)}$ i $\sigma_k = \sigma_k^{(Mix)}$ są prognozami wyznaczonymi odpowiednio dla wartości średniej oraz odchylenia standardowego, $Z_{\alpha/2}$ i $Z_{1-\alpha/2}$ zaś są kwantylami rzędu $(\alpha/2)$ i $(1 - \alpha/2)$ dla rozkładu standaryzowanego normalnego.

5. Wykorzystanie metodologii *ClearHorizon*TM na przykładzie oceny ryzyka inwestowania w akcje

Omawiana metodologia została opracowana na potrzeby prognoz długoterminowych, zatem pewnym ograniczeniem możliwości jej wykorzystania może być konieczność posiadania szeregow czasowych o odpowiednio długiej historii. Wymagane jest to także z racji konieczności uzyskania stabilnych oszacowań parametrów dla modelu błędzenia losowego i rewersji do średniej.

Procedura wykorzystania metodologii *ClearHorizon*TM przy wyznaczaniu długookresowych prognoz dla wartości zagrożonej *VaR* zostanie przedstawiona na przykładzie prognozy dla miesięcznych notowań cen akcji spółki DZ Bank Polska.

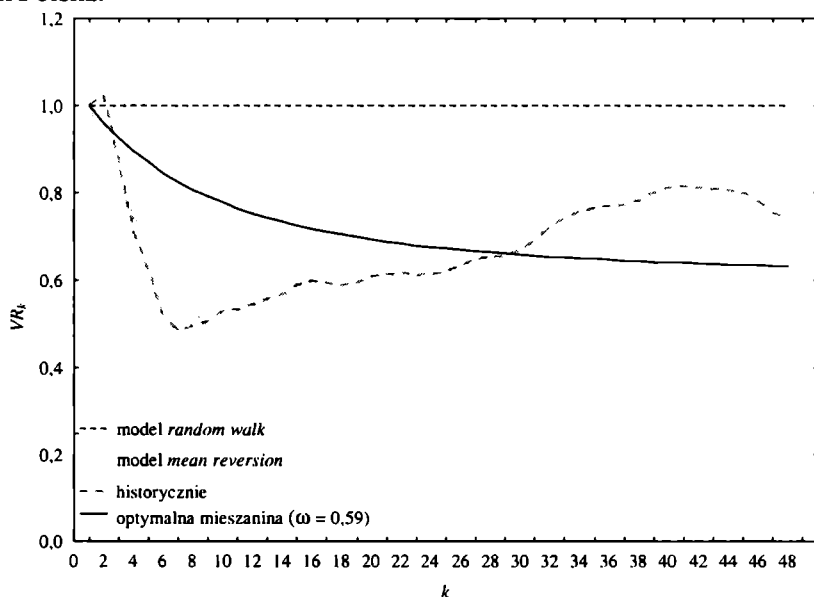
Na podstawie dostępnych danych historycznych o cenach kursów akcji badanej spółki (w okresie od maja 1995 r. do listopada 2003 r.) oszacowano parametry modeli *random walk* i *mean reversion*² z wykorzystaniem wzorów (1) i (5). Do

¹ Tak zdefiniowane granice dla wartości zagrożonej tworzą $(1 - \alpha)$ -procentowy przedział ufności dla przyszłych potencjalnych strat (lub zysków) inwestora w horyzoncie czasu k okresów.

² Dla modelu błędzenia losowego parametry wynosiły: $\mu = -0,00148$, $\sigma = 0,114$, a dla modelu rewersji do średniej: $\alpha_0 = 0,3438$, $\beta = -0,000658$, $\gamma = 0,8981$, $\sigma = 0,111$.

oszacowania parametrów modeli (z wyjątkiem parametru zmienności σ) wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów³. Parametr zmienności oszacowano natomiast jako odchylenie standardowe reszt. Na podstawie otrzymanych wartości parametrów dla miesięcznych fluktuacji dla logarytmów cen akcji ze wzorów (3) i (7) wyznaczono zmienność σ_k^2 ($k = 1, \dots, 48$) dla 4-letniego horyzontu prognozy. Historyczną zmienność k -okresową wyznaczono, korzystając ze wzoru (9). Aby jak najlepiej skalibrować zmienność w modelu hybrydowym (w stosunku do zmienności historycznej), rozwiązano zadanie optymalizacyjne (10). W tym celu wykorzystano obliczone wartości wskaźnika *variance ratio* (VR) ze wzoru (8). Otrzymano następujące wagi dla modelu hybrydowego (będącego optymalną mieszaniną modelu błędzenia losowego i rewersji do średniej): $\omega = 0,59$, $(1 - \omega) = 0,41$.

Rysunek 1 przedstawia wykresy wskaźników *variance ratio* dla badanej spółki DZ Bank Polska.

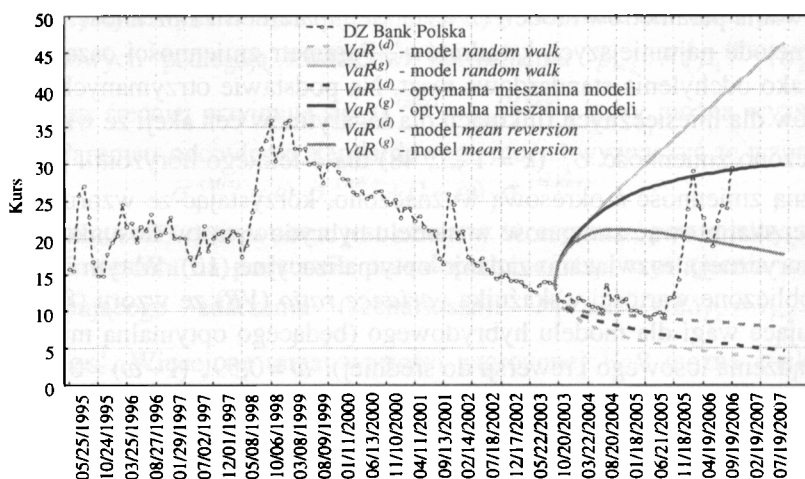


Rys. 1. Wartości k -miesięcznego wskaźnika *variance ratio* (VR_k) dla spółki DZ Bank Polska (oszacowane na podstawie dostępnych miesięcznych notowań spółki do dnia 18.12.2003 r.) dla modelu błędzenia losowego oraz modelu rewersji do średniej*

* Na wykresie (w celu porównania) przedstawiono także oszacowane wartości wskaźnika VR_k dla zmienności historycznej.

Źródło: opracowanie własne.

³ Do oszacowania parametrów modeli można zastosować także metodę największej wiarygodności.



Rys. 2. Prognozowane na poziomie ufności 90% granice VaR (dolna i górna) dla notowań spółki DZ Bank Polska, oszacowane na podstawie modeli: błędzenia losowego, powracania do średniej oraz modelu hybrydowego z wagami $\omega = 0,59$ i $(1 - \omega) = 0,41$

Źródło: opracowanie własne.

Prognozy długookresowe granic VaR dotyczące przyszłych notowań badanej spółki wyznaczono ze wzorów (12), przyjmując w modelu hybrydowym zmienność określoną na podstawie wzoru (11). Rysunek 2 przedstawia uzyskane oszacowania prognozowanych granic VaR dla notowań cen akcji spółki DZ Bank Polska⁴.

Z uzyskanych prognoz (zob. rys. 2) wynika kilka wniosków. Najbardziej obszernie granice ufności dla prognozowanych cen akcji badanej spółki daje model RW . Granice prognozy wyznaczone na podstawie modelu $MRev$ dla krótszych horyzontów czasu są zadowalające, jednak z racji zauważalnej zmiany struktury szeregu (czerwiec 2005 r.) w dłuższym horyzoncie czasu są już trochę mało efektywne. Najlepiej skalibrowane są oszacowane granice VaR dla modelu hybrydowego, dla którego procent przekroczeń w badanym okresie wyniósł ok. 8% w stosunku do dopuszczalnych przez przedział ufności 10%. Wydaje się, że najlepsze rezultaty daje model hybrydowy z dokonywaną korektą (z okresu na okres)⁵ prognozowanych granic VaR .

Literatura

- [1] Best P., *Wartość narażona na ryzyko. Obliczanie i wdrażanie modelu VaR*, Oficyna Ekonomiczna, Dom Wydawniczy ABC, Kraków 2000.
- [2] Enders W., *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons, New York 1995.

⁴ Prognozy dla modelu *random walk* oraz *mean reversion* wyznacza się także na podstawie wzoru (12), przyjmując za parametry μ_i i σ_i wartości parametrów oszacowane ze wzorów (3) lub (7).

⁵ Jeżeli tylko struktura badanego szeregu czasowego w kolejnym okresie uległa zmianie.

- [3] Glen J.D., *Real Exchange Rates in the Short, Medium and Long Run*, „Journal of International Economics” 1992 vol. 33.
- [4] Kim J., Mina J., *ClearHorizon™ Technical Document. Forecasting methodology for horizons beyond two years*, Risk Metrics Group, New York 2000.
- [5] Metcalf G.E., Hassett K.A., *Investment under Alternative Return Assumptions. Comparing Random Walks and Mean Reversion*, „Journal of Economic Dynamics and Control” 1995 vol. 19.
- [6] Pisula T., Pisula J., *Możliwości efektywnego przewidywania ryzyka zmian kursów akcji spółek notowanych na GPW*, „Rynek Terminowy”, z. 17, Agencja Informacyjna Penetrator, Kraków 2002.
- [7] *RiskMetrics™ Technical Document, 4th edition*, Morgan Guaranty Trust Company, New York 1996.
- [8] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998.

LONG RUN VALUE AT RISK PREDICTION IN RISK ASSESSMENT OF INVESTING IN SHARES

Summary

There is a growing demand for models which enable to measure and assess risk in long run horizons (sometimes more than 2 years). The practical demand for such models is required by the institutions which manage the investment and retirement funds. In the paper the theoretical aspects of risk assessment methodology with the use of *Value at Risk (VaR)* have been presented. In this method in order to estimate the predicted long run VaR limits the hybrid model, which is the optimum mixture of random walk and mean reversion has been used. The application of the presented methodology has been exemplified by the estimation of long run predictions for VaR limits for share prices.