

Monika Papież

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

WPLYW PROCESU STARZENIA SIĘ LUDNOŚCI NA RYZYKO W UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE

1. Wstęp

Przemiany demograficzne w XX w. wskazują na postępujące starzenie się społeczeństw. Związane jest to ze wzrostem gospodarczym, poprawą warunków życia wynikającą z poprawy sytuacji materialnej, postępem medycyny i upowszechnieniem się profilaktyki zdrowotnej, a także ze spadkiem płodności wynikającym ze zmiany modelu rodziny. Proces starzenia się populacji wpływa na wielkość wyceny produktów towarzystw ubezpieczeń na życie, a tym samym – na ryzyko związane z ich wyceną, bowiem w wycenie produktów główną rolę odgrywa oszacowana umieralność, która ulega zmianie z powodu wydłużania się przeciętnego dalszego trwania życia. Konieczne jest więc oszacowanie przyszłych zmian w zakresie umieralności na podstawie np. ekstrapolacji zaobserwowanych trendów i wyboru właściwego modelu oraz coraz ważniejsze staje się dokładne rozpoznanie prawidłowości rządzących umieralnością osób starszych.

2. Ryzyko demograficzne w ubezpieczeniach na życie

W ocenie i zarządzaniu portfelem ubezpieczeń na życie podstawowe znaczenie mają dwa rodzaje ryzyka: inwestycyjne i demograficzne. Dokonując wyceny produktów ubezpieczeniowych, aktuariusz musi uwzględnić ich źródła. Pierwsze z nich związane jest z niepewnością rynku, na którym inwestuje dane towarzystwo ubezpieczeń na życie, czyli zależy ono od losowych fluktuacji stopy zwrotu, natomiast ryzyko demograficzne zależy w głównej mierze od struktury demograficznej

społeczeństwa – zarówno obecnej, czyli w momencie przystępowania uczestnika do towarzystwa, jak i późniejszej. Należy zwrócić uwagę, że struktura demograficzna silnie i trwale ulega zmianie. Oznacza to zmiany kształtu piramidy demograficznej. Wśród typów ryzyka związanych z ryzykiem demograficznym można wyróżnić dwa główne rodzaje: ryzyko ubezpieczeniowe i długowieczności. Ryzyko ubezpieczeniowe związane jest z przypadkową różnicą między rzeczywistą liczbą zgonów a założoną – oszacowaną przez aktuarium. Ryzyko to może być zmniejszane poprzez zwiększanie liczby polis w portfelu firmy ubezpieczeniowej. Natomiast ryzyko długowieczności (*longevity risk*) związane jest z poprawą wskaźników umieralności, czyli z wydłużaniem się oczekiwanej długości trwania życia, zatem wynika z systematycznej różnicy pomiędzy rzeczywistą liczbą zgonów a założoną oczekiwaną liczbą, która jest oszacowana przez aktuarium [7].

Analiza przebiegu funkcji gęstości dla różnych okresów pokazuje, że wydłużanie się życia wpływa na jej kształt. Przesunięciu ulega zarówno wiek, w którym ta funkcja osiąga wartość maksymalną, jak i wzrasta sama wartość maksymalna, zatem wzrasta koncentracja zgonów wokół modalnej krzywej zgonów, a także następuje przesunięcie się modalnej krzywej zgonów w prawo. Podobnie zmianie w czasie ulega funkcja przeżycia wraz z wydłużaniem się długości życia wzrasta mediana wieku.

Dwie opisane prawidłowości wynikające z wydłużania się życia wpływają na rozmiar ryzyka długowieczności, stąd ryzyko to powinno być łagodzone przez wprowadzenie do wyceny produktów ubezpieczeniowych zamiast tradycyjnych tablic trwania życia tzw. dynamicznych tablic trwania życia (lub projekcyjnych tablic wymieralności) (*projected mortality tables*), które uwzględniają proces wydłużania się życia [5, s. 299].

Przy analizie ryzyka długowieczności pojawia się jeszcze jedno ryzyko, które wynika z nieodpowiedniego oszacowania parametrów służących później do budowy dynamicznych tablic trwania życia. Po angielsku określane jest ono jako *projected risk*.

Reasumując, istnieją dwa główne problemy w zarządzaniu ryzykiem portfela ubezpieczeń na życie. Pierwszy z nich to właściwe oszacowanie oczekiwanej stopy zwrotu¹. Drugi to oszacowanie przyszłej oczekiwanej długości trwania życia, a tym samym – parametrów tablic trwania życia. Nieuwzględnienie tych dwóch najważniejszych problemów może doprowadzić do niewypłacalności towarzystw ubezpieczeń na życie, stąd dla prawidłowego zarządzania ważne jest to, aby dokonać zintegrowania analizy tych dwóch składników wpływających na ryzyko portfela firmy ubezpieczeniowej i na tej podstawie przedstawić strategię inwestowania oraz wycenę produktów.

¹ Właściwe wydaje się użycie stochastycznych modeli stóp zwrotu. Problem ten autorka rozważała w pracy doktorskiej pt. *Statystyczne metody oceny ryzyka ubezpieczeniowego planów emerytalnych* wydanej w Krakowie w 2005 r.

W dalszej części artykułu zostanie rozważony wpływ poprawy wskaźników umieralności na wycenę jednego z produktów towarzystw, a mianowicie renty dożywotniej.

3. Dynamiczne tablice trwania życia

Do wyceny produktów ubezpieczeń na życie i ryzyka związanego z nimi towarzystwa ubezpieczeń na życie wykorzystują tablice trwania życia, które odzwierciedlają statystyczny rozkład długości trwania życia dla danej populacji. Wskazują one, jak zmniejsza się badana populacja. Budowa klasycznych tablic trwania życia opiera się na założeniu, że nie występują ruchy wędrownicze, roczna liczba urodzeń i zgonów jest jednakowa i niezmienna oraz niezmienna jest umieralność w poszczególnych latach. Są one wyliczone na podstawie przeszłych i obecnych danych, np. wartość przeciętnego dalszego trwania życia odczytana z tablic z 2004 r. wyraża średni wiek, do którego dożyły osoby, które zmarły w 2004 r. [1, s. 20]. Kolejną wadą tablic jest założenie o jednorodności populacji, co oznacza przyjęcie założenia, że wszystkie osoby podlegają temu samemu prawu intensywności zgonów oraz że trwanie życia jednej osoby nie zależy w sensie stochastycznym od trwania życia innych osób [8, s. 37]. Oznacza to, że tablice trwania życia nie pokazują przyszłej umieralności, a także zależności między osobami.

Ważnym problemem jest uwzględnienie przyszłych zmian w przebiegu umieralności, bowiem przyjęcie założenia o stałym poziomie umieralności w całym okresie prognozy oznacza, że wartość obecna przyszłych zobowiązań jest niedoszacowana, jeżeli będą następowały poprawa umieralności i związane z tym wydłużanie się przeciętnego trwania życia. Im szybsza i bardziej znacząca będzie ta poprawa, tym bardziej niedoszacowane będą wyniki obliczeń. Prawdopodobieństwa zgonów mogą być oszacowane np. na podstawie matematycznego modelu dopasowanego do empirycznego rozkładu zgonów w danej populacji, stąd aby zmniejszyć ryzyko niewłaściwego oszacowania wartości produktów i rezerw, należy stosować tablice trwania życia uwzględniające zmianę umieralności, czyli tzw. dynamiczne tablice trwania życia.

W celu analizy zmian w umieralności w zależności od wieku i czasu zostaną wprowadzone podstawowe oznaczenia. Niech $T_x(t)$ – zmienna losowa opisująca dalsze trwanie życia osoby w wieku x w roku kalendarzowym t . Ze zmienną $T_x(t)$ związane są następujące funkcje [3]:

– ${}_1q_x(t) := q_x(t)$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x umrze w ciągu roku w roku kalendarzowym t ,

– ${}_1p_x(t) := p_x(t)$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje przez rok w roku kalendarzowym t ,

- $\mu_x(t)$ – funkcja intensywności umieralności osoby w wieku x w roku kalendarzowym t , inaczej nazwana centralnym współczynnikiem zgonów,
- $l_{x,t}$ – liczba osób w wieku x żyjących na początku roku kalendarzowego t ,
- $d_{x,t}$ – liczba zgonów w wieku x w ciągu danego roku kalendarzowego t ,
- $ETR_{x,t}$ – liczba osób wystawionych na działanie ryzyka zgonu (*exposure-to-risk*) [3]:

$$ETR_{x,t} = \frac{l_{x,t} + l_{x+1,t+1} + d_{x,t}}{2}. \quad (1)$$

Przyjmijmy, że intensywność umieralności jest stała dla danego wieku w danym roku t :

$$\mu_{x+\xi}(t+\tau) = \mu_x(t) \quad 0 \leq \xi, \tau < 1. \quad (2)$$

Oczekiwana długość życia jest jedną z najczęściej wykorzystywanych miar do pokazania zmian umieralności. Niech $e_x(t)$ oznacza oczekiwaną długość trwania życia osoby w wieku x w roku kalendarzowym t . Wartość tę można wyznaczyć ze wzoru [3]:

$$e_x(t) = E[T_x(t)] = \frac{1 - e^{-\mu_x(t)}}{\mu_x(t)} + \sum_{k \geq 1} \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} e^{-\mu_{x+j}(t+j)} \right\} \frac{1 - e^{-\mu_{x+k}(t+k)}}{\mu_{x+k}(t+k)}. \quad (3)$$

Przy uwzględnieniu zmian w umieralności wysokość jednorazowej składki netto dla renty dożywotniej płatnej z góry na początku każdego roku wyznaczamy ze wzoru [3]:

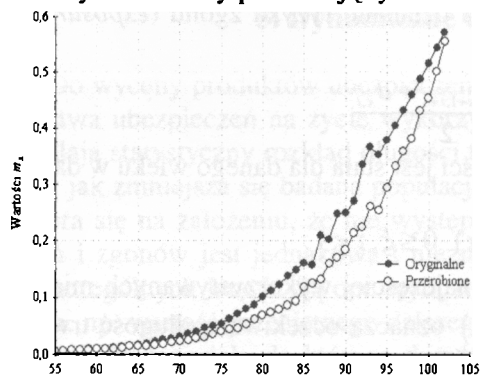
$$E(Y_x) = \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \prod_{j=0}^k p_{x+j}(t+j) \right\} v^k, \quad (4)$$

gdzie: $v = (1+i)^{-1}$, i – roczna stopa procentowa.

4. Wpływ wydłużania się trwania życia na wycenę renty dożywotniej na przykładzie dynamicznych tablic trwania życia

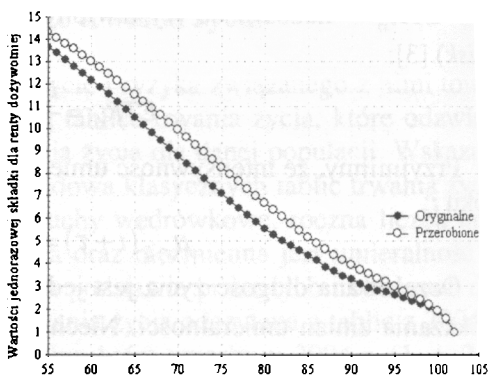
Do porównania, jak zmieniają się wysokość jednorazowej składki netto dla renty dożywotniej oraz związane z tą wypłatą ryzyko (mierzone za pomocą odchylenia standardowego i współczynnika zmienności), zostały stworzone tzw. dynamiczne tablice trwania życia na danych historycznych. Za oryginalne tablice trwania życia przyjęto tablice dla osób z 1955 r. i wysokość jednorazowej składki netto; ryzyko obliczono dla osób w wieku od 55 do 100 lat. Natomiast dynamiczne tablice trwania życia skonstruowano w ten sposób, że dla osoby w wieku 55 lat przyjęto prawdopodobieństwo zgonu z roku 1955 dla $t = 1$, na kolejny rok zamiast wartości dla osoby w wieku 56 lat z roku 1955 przyjęto wartość w 1956 r. (czyli uwzględ-

niono zmianę umieralności wraz ze wzrostem lat kalendarzowych) i analogicznie dla wieku osób w 57 lat przyjęto wartość prawdopodobieństwa zgonu z 1957 r. itd. Analizę przeprowadzono dla populacji mężczyzn w Szwecji. Niestety z powodu braku danych nie można było przeprowadzić takiej analizy w odniesieniu do Polski. Wyniki analizy prezentują rys. 1-3.



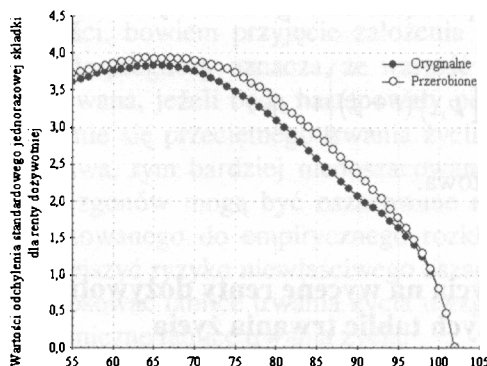
Rys. 1. Porównanie intensywności umierania dla oryginalnych i dynamicznych tablic trwania życia w populacji mężczyzn w Szwecji w zależności od wieku osoby rozpoczynającej pobieranie renty dożywotniej

Źródło: obliczenia własne na podstawie [4].



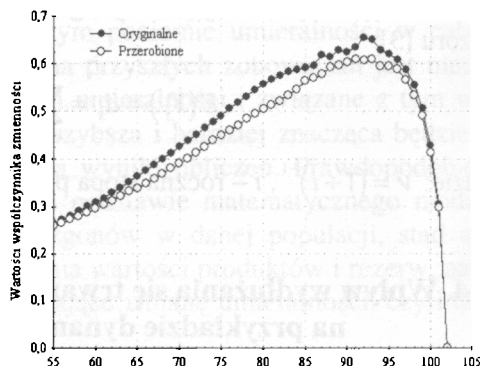
Rys. 2. Porównanie wysokości jednorazowej składki netto dla oryginalnych i dynamicznych tablic trwania życia w populacji mężczyzn w Szwecji w zależności od wieku osoby rozpoczynającej pobieranie renty dożywotniej

Źródło: obliczenia własne na podstawie [4].



Rys. 3. Porównanie wartości ryzyka dla oryginalnych i dynamicznych tablic trwania życia w populacji mężczyzn w Szwecji w zależności od wieku osoby rozpoczynającej pobieranie renty dożywotniej

a) ryzyko mierzone odchyleniem standardowym



b) ryzyko mierzone współczynnikiem zmienności

Źródło: obliczenia własne na podstawie [4].

Analiza wskazuje, że wraz ze spadkiem intensywności umieralności wzrasta wysokość jednorazowej składki netto dla renty dożywotniej. Także wraz z wydłużaniem się przeciętnego trwania życia, czyli ze spadkiem intensywności umieralności, wzrasta ryzyko związane z wypłatą jednorazowej składki netto mierzone odchyleniem standardowym. Oznacza to, że wprowadzenie dynamicznych tablic trwania życia do wyceny produktów ubezpieczeniowych zamiast tradycyjnych

tablic trwania życia pozwala na lepszą ich wycenę, gdyż zostaje uwzględnione ryzyko długowieczności.

5. Model Lee-Cartera

Wyniki przeprowadzonych analiz wpływu wydłużania się trwania życia na wycenę renty dożywotniej na przykładzie zarówno statycznych, jak i dynamicznych tablic trwania życia potwierdzają tezę, że niezwykle ważną rolę w ocenie i zarządzaniu portfelem ubezpieczeń na życie odgrywa ryzyko demograficzne, a właściwie ryzyko długowieczności. Zatem jednym z głównych problemów w zarządzaniu ryzykiem portfela ubezpieczeń na życie jest oszacowanie przyszłej oczekiwanej długości trwania życia, a tym samym – parametrów tablic trwania życia, bowiem nieuwzględnienie tego wskaźnika może doprowadzić do niewypłacalności towarzystw ubezpieczeń na życie. W związku z tym zostanie zaprezentowany stochastyczny model do modelowania intensywności umieralności.

Jedną z metod, która może być wykorzystana do szacowania wartości w dynamicznych tablicach trwania życia, jest model zaproponowany przez R. Lee i L. Cartera w 1992 r. w pracy *Modelling and Forecasting the Time Series of US Mortality* [6]. Autorzy zaproponowali prosty model opisujący zmiany w umieralności z uwzględnieniem zmieniającego się czasu. W metodzie tej logarytm intensywności zgonów jest opisany przez sumę dwóch składników, z których jeden nie zależy od czasu, a drugi jest iloczynem parametru pokazującego ogólny poziom umieralności oraz parametru, który wskazuje, jak szybko lub wolno zmienia się umieralność w dany wiek w zależności od zmian ogólnej umieralności w czasie. Parametry tego modelu są estymowane z danych historycznych.

Model Lee-Cartera ma następującą postać [2; 3; 6]:

$$\log \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x k(t) + \varepsilon_x(t), \quad (5)$$

- gdzie: α_x – oszacowane wartości równe są średniej arytmetycznej z $\log \mu_x(t)$ po czasie t lub logarytmowi ze średniej geometrycznej intensywności zgonów po czasie t dla danego wieku x , co oznacza, że e^{α_x} opisuje uśrednioną w czasie t krzywą starzenia się osób,
- β_x – przedstawia względną szybkość zmian umieralności w wieku x w czasie t ; jeżeli wartości β_x są wysokie, to względne zmiany intensywności umieralności są duże w danym wieku w czasie t , a jeżeli wartości β_x są niskie, to istnieje niewielka zmienność intensywności umieralności w danym wieku x w czasie t ,
- $k(t)$ – opisuje ogólną tendencję do zmian umieralności w czasie t .

W celu oszacowania parametrów modelu potrzebne są empiryczne wartości współczynnika zgonów. Niech para $(d_x(t), ETR_x(t))$ reprezentuje dane potrzebne do szacowania. Wówczas empiryczne wartości współczynnika zgonów można wyliczyć ze wzoru:

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{d_x(t)}{ETR_x(t)}, \quad (6)$$

dla każdego: $t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_n$ i $x = x_1, x_2, \dots, x_m$,

n – liczba obserwowanych lat (kalendarzowych), m – liczba kategorii wieku.

Ponadto zakłada się w modelu, że:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} k(t) = 0 \text{ oraz } \sum_x \beta_x = 1. \quad (7)$$

5.1. Estymacja parametrów w modelu Lee-Cartera dla populacji kobiet i mężczyzn w Polsce

Estymację parametrów w modelu Lee-Cartera dla populacji kobiet i mężczyzn w Polsce przeprowadzono w dwóch wariantach:

– **I wariant** – wykorzystano dane dla populacji mężczyzn i kobiet w Polsce w latach 1950-2004 na podstawie skróconych tablic trwania życia, czyli dane są w następujących okresach: $\{<1, 1-4, 5-9, 10-14, \dots, \geq 80\}$, zatem $m = 18, n = 55$;

– **II wariant** – wykorzystano dane dla populacji mężczyzn i kobiet w Polsce w latach 1995-2004 na podstawie pełnych tablic trwania życia, zatem $m = 101, n = 10$.

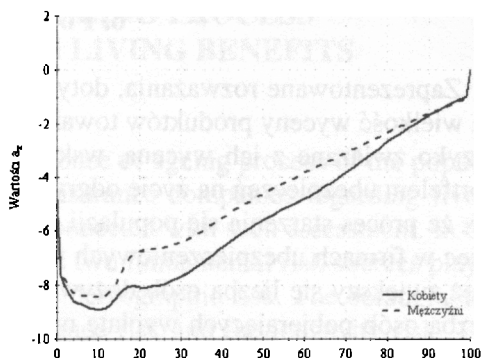
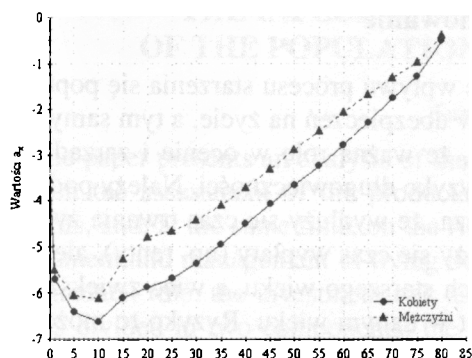
Analizę przeprowadzono w następujących etapach:

1. Wyznaczono empiryczne wartości współczynnika zgonów ze wzoru (6).
2. Oszacowano wartości α_x , które są równe logarytmowi średniej geometrycznej współczynników umieralności przez wszystkie lata t dla każdego wieku x :

$$\hat{\alpha}_x = \log \left(\left(\prod_{t=t_1}^{t_n} \hat{\mu}_x(t) \right)^{1/n} \right). \quad (8)$$

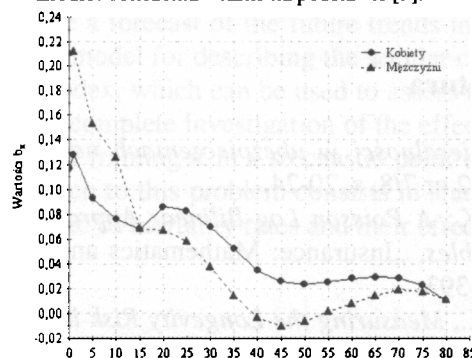
3. Utworzono macierz o wyrazach $z_x(t) = (\log \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x)$ i potem wyestymowano wartości $k(t)$ i β_x , używając metody dekompozycji według wartości osobliwych (*singular value decomposition – SVD*) [11, s. 162].

Oszacowane wartości parametrów w modelu Lee-Cartera w populacji mężczyzn i kobiet w Polsce w latach 1950-2004 na podstawie skróconych oraz pełnych tablic trwania życia prezentują rys. 4-6.

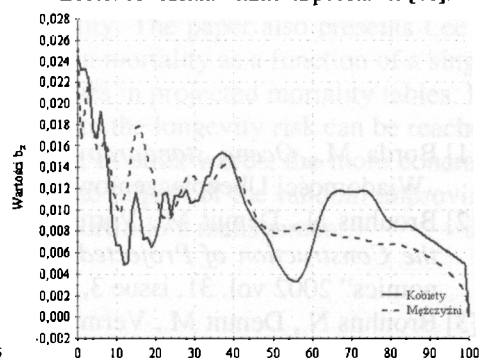


Rys. 4. Wartości oszacowanego parametru α_x w modelu Lee-Cartera w populacji mężczyzn i kobiet w Polsce
a) w latach 1950-2004 na podstawie skróconych tablic trwania życia
b) w latach 1995-2004 na podstawie pełnych tablic trwania życia

Źródło: obliczenia własne na podstawie [9].

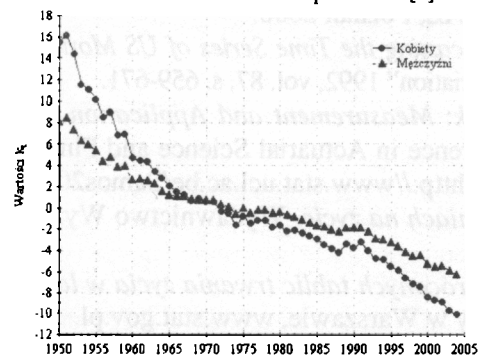


Źródło: obliczenia własne na podstawie [10].

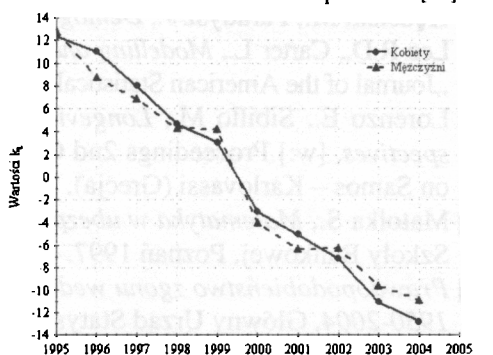


Rys. 5. Wartości oszacowanego parametru β_x w modelu Lee-Cartera w populacji mężczyzn i kobiet w Polsce
a) w latach 1950-2004 na podstawie skróconych tablic trwania życia
b) w latach 1995-2004 na podstawie pełnych tablic trwania życia

Źródło: obliczenia własne na podstawie [9].



Źródło: obliczenia własne na podstawie [10].



Rys. 6. Wartości oszacowanego parametru $k(t)$ w modelu Lee-Cartera w populacji mężczyzn i kobiet w Polsce
a) w latach 1950-2004 na podstawie skróconych tablic trwania życia
b) w latach 1995-2004 na podstawie pełnych tablic trwania życia

Źródło: obliczenia własne na podstawie [9].

Źródło: obliczenia własne na podstawie [10].

6. Podsumowanie

Zaprezentowane rozważania, dotyczące wpływu procesu starzenia się populacji na wielkość wyceny produktów towarzystw ubezpieczeń na życie, a tym samym na ryzyko związane z ich wyceną, wskazują, że ważną rolę w ocenie i zarządzaniu portfelem ubezpieczeń na życie odgrywa ryzyko długowieczności. Należy podkreślić, że proces starzenia się populacji oznacza, że wydłuży się czas trwania życia, a więc w firmach ubezpieczeniowych wydłuży się czas wypłaty (np. renty), ale również zwiększy się liczba osób dożywających starszego wieku, a więc zwiększy się liczba osób pobierających wypłatę np. rent w danym wieku. Ryzyko to może być łagodzone przez wprowadzenie dynamicznych tablic trwania życia, które uwzględniają proces wydłużania się życia. Przedstawiony model Lee-Cartera w przyszłych badaniach zostanie wykorzystany do szacowania wartości w dynamicznych tablicach trwania życia, czyli do prognozowania umieralności.

Literatura

- [1] Borda M., *Ocena standardowej umieralności w ubezpieczeniach na życie*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe” 2002 nr 7/8, s. 20-24.
- [2] Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K., *A Poisson Log-Bilinear Approach to the Construction of Projected Lifetables*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2002 vol. 31, issue 3, s. 373-393.
- [3] Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K., *Measuring the Longevity Risk in Mortality Projection*, Bulletin of the Swiss Association of Actuaries 2002.
- [4] *Human Mortality Database*, University of California, Berkeley (USA), Max Planck Institute for Demographic Research (Germany), www.mortality.org, www.humanmortality.de.
- [5] Kędelski M., Paradysz J., *Demografia*, AE, Poznań 2006.
- [6] Lee R.D., Carter L., *Modelling and Forecasting the Time Series of US Mortality*, „Journal of the American Statistical Association” 1992, vol. 87, s. 659-671.
- [7] Lorenzo E., Sibillo M., *Longevity Risk: Measurement and Application Perspectives*, [w:] Proceedings 2nd Conference in Actuarial Science and Finance on Samos – Karlovassi (Grecja), 2002, <http://www.stat.ucl.ac.be/Samos2002>.
- [8] Matołka S., *Matematyka w ubezpieczeniach na życie*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1997.
- [9] *Prawdopodobieństwo zgonu według skróconych tablic trwania życia w latach 1950-2004*, Główny Urząd Statystyczny w Warszawie, www.stat.gov.pl.
- [10] *Tablice trwania życia dla Polski w latach 1995-2004*, Główny Urząd Statystyczny w Warszawie, www.stat.gov.pl.
- [11] *Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym*, red. A. Zeliaś, AE, Kraków 2000.

THE INFLUENCE OF AGEING PROCESS OF THE POPULATION ON LIVING BENEFITS

Summary

The paper presents an analysis of the influence of ageing process of the population on the assessment of the products of insurance companies regarding living benefits, and, at the same time, on the risks connected with such assessment. In the assessment and management of living benefits two fundamental risk sources play a fundamental role: the investment risk and the demographic risk. The demographic risk is divided in two components: the insurance risk and the longevity risk. The longevity risk is particularly important; it derives from improvements in mortality trend, which determine systematic deviations of the number of deaths from its expected values. This risk should be assuaged by replacing traditional mortality tables used in the assessment of insurance products with projected mortality tables, which include a forecast of the future trends in mortality. The paper also presents Lee & Carter model for describing the secular change in mortality as a function of a single time index, which can be used to assess the values in projected mortality tables. In fact, a complete investigation of the effects due to the longevity risk can be reached only by framing it in a stochastic point of view; in other words, the more concrete approach to this problem consists in studying the impact of the random improving dynamic of mortality rates and their effects on portfolio's management.