

Agnieszka Orwat

Uniwersytet Śląski

METODY ODPORNE SAW W ESTYMACJI RYZYKA PORTFELA AKTYWÓW DŁUGOTERMINOWYCH NA PRZYKŁADZIE POLSKIEGO RYNKU FUNDUSZY INWESTYCYJNYCH*

1. Wstęp

Portfele funduszy inwestycyjnych charakteryzują się długoterminowym horyzontem inwestycji. Struktura portfela tych podmiotów, na którą składają się aktywa o różnych stopniach ryzyka, zależy od charakteru działalności inwestycyjnej.

Jeżeli wielowymiarowy rozkład stóp zwrotu aktywów portfela należy do klasy wielowymiarowych rozkładów eliptycznie symetrycznych, to wyznaczenie charakterystyk dochodu i ryzyka sprowadza się do klasycznej estymacji wektora położenia i macierzy rozrzutu wielowymiarowego rozkładu stóp zwrotu. Założenie normalności rozkładu oraz niezależności stóp zwrotu aktywów często nie jest spełnione w praktyce. W szeregach czasowych stóp zwrotu obserwuje się efekt grubych ogonów rozkładu, co oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia dużych, nietypowych zmian kursu jest większe niż w przypadku, gdy stopy zwrotu pochodzą z rozkładu normalnego. Istotną kwestią jest zatem stosowanie metod estymacji ryzyka odpornych na te założenia, a tym samym na jakość obserwacji.

Celem pracy jest implementacja wybranych metod estymacji odpornej na obserwacje odstające, należących do metod statystycznej analizy wielowymiarowej (SAW) w wyznaczeniu przykładowych portfeli aktywów długoterminowych o minimalnym ryzyku. Opierając się na danych rzeczywistych, wyznaczono przykładowe teoretyczne portfele, których strukturę ze względu na rodzaj aktywów ustalono na podstawie struktury wybranych rodzajów polskich funduszy inwestycyjnych.

* Artykuł napisano w ramach grantu N11100332/0262.

2. Podstawowe pojęcia teorii estymacji odpornej

Celem stosowania metod odpornych na odstępstwa od klasycznych założeń jest poprawa wyników estymacji parametrów. Niech $\mathfrak{S}$ oznacza rodzinę dystrybucji $F_\theta \in \mathfrak{S}$ nazywaną modelem, a G – funkcję rzeczywistą określoną na rodzinie $\mathfrak{S}$. Funkcjonał przyporządkowujący każdej F_θ pewną liczbę określany jest w teorii metod odpornych jako miara opisowa. Miary opisowe indukują nieparametryczny estymator $G(F_n)$, gdzie F_n jest dystrybucją empiryczną, umożliwiającą badanie zachowania się funkcjonału G w otoczeniu nieznanego rozkładu F_θ [4, s. 237]. Dla dystrybucji F_n funkcjonal liniowy ma postać $G(F_n) = (1/n) \sum_{i=1}^n k(x_i)$, gdzie funkcja $k(x)$ nazywana jest jądrem funkcjonału G . Dla dystrybucji F_θ rozważany jest model ε -zaburzony opisujący lokalne odchylenia od F_θ (dystrybucja $F_{\varepsilon, \delta_x}$ leży w ε -otoczeniu dystrybucji F_θ) o postaci $F_{\varepsilon, \delta_x} = (1 - \varepsilon)F_\theta + \varepsilon\delta_x$, gdzie $\varepsilon \in [0, 1]$, δ_x jest dystrybucją Diraca skupioną w punkcie x (skalar lub wektor) [10].

Jednym z najważniejszych narzędzi pomiaru lokalnej odporności estymatorów parametrów jest funkcja wpływu określająca wpływ zaburzenia punktowego indukowanego przez obserwację x na estymator G dla dystrybucji F_θ :

$$IF(x, G, F_\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{[G(F_{\varepsilon, x}) - G(F_\theta)] / \varepsilon\}. \quad (1)$$

Estymator z ograniczoną funkcją wpływu jest estymatorem odpornym w ε -otoczeniu F_θ .

Miarą globalnej odporności estymatorów jest punkt załamania, będący granicą:

$$\varepsilon^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_0}{T}, \quad (2)$$

gdzie: T oznacza liczbę obserwacji, T_0 – liczbę obserwacji nietypowych, natomiast różnica $T - T_0$ jest funkcją liczby obserwacji stanowiących rdzeń, czyli zbiór, do którego nie należą obserwacje nietypowe.

Estymatory odporne, których punkt załamania jest bliski 0,5, nazywane są estymatorami odpornymi o wysokim punkcie załamania.

Wykrywanie obserwacji odstających w danych wielowymiarowych jest procesem bardziej złożonym niż w przypadku danych jednowymiarowych. Przedstawione w dalszej części artykułu wielowymiarowe metody łączą w sobie etap zarówno wykrywania, jak i estymacji odpornej.

3. Wielowymiarowe metody odporne estymacji charakterystyk portfela

Uzasadniając w sposób formalny potrzebę stosowania metod odpornych w analizie ryzyka inwestycyjnego, należy rozważyć wpływ zaburzenia punktowego in-

dukowanego przez wielowymiarową obserwację na estymatory parametrów, które są istotne z punktu widzenia problemów alokacji aktywów.

Niech $\mathbf{X}_t$, $t = 1, \dots, T$ będzie ciągiem niezależnych N -wymiarowych wektorów losowych o tym samym rozkładzie eliptycznym $El(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$, gdzie: $\boldsymbol{\mu}$ jest N -wymiarowym wektorem parametru położenia, $\boldsymbol{\Sigma}$ jest symetryczną, dodatnio określoną $(N \times N)$ -wymiarową macierzą kowariancji, g jest generatorem funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\mathbf{X}$ o postaci:

$$f_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} g(Ma^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})), \quad (3)$$

gdzie $Ma^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ jest kwadratem odległości Mahalanobisa wektora obserwacji $\mathbf{x}$ od wektora parametru $\boldsymbol{\mu}$ względem macierzy $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$Ma^2 \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} = Ma^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \equiv (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \quad (4)$$

Estymatory $\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ otrzymane metodą największej wiarygodności (NW) o posta-

$$\text{ci: } \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{w(Ma^2(\mathbf{x}_t, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}))}{\sum_{s=1}^T w(Ma^2(\mathbf{x}_s, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}))} \mathbf{x}_t, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{x}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})' w(Ma^2(\mathbf{x}_t, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}})), \text{ gdzie}$$

$$w(z) = -2 \frac{g'(z)}{g(z)}, \text{ nie są estymatorami odpornymi, ponieważ mają nieograniczoną}$$

funkcję wpływu:

$$IF(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, F_\theta) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}, \quad IF(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}, F_\theta) = -\boldsymbol{\Sigma} + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'. \quad (5)$$

Z tego oraz z faktu, że wagi portfela są wyznaczone przez estymatory parametrów $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$, wynika, że funkcja wpływu zaburzenia punktowego indukowanego przez obserwację $\mathbf{x}$ na estymator wag portfela jest nieograniczona. Innymi słowy, estymator wag portfela „dziedziczy” własność braku odporności na obserwacje odstające. Cechy tej nie ma estymator wag portfeli wyznaczony przez estymatory parametrów $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ otrzymanych w wyniku zastosowania odpornych metod *MVE* oraz *MCD*.

3.1. Metoda elipsoidy minimalnej objętości (*minimum volume ellipsoid – MVE*)

Idea metody *MVE* polega na estymacji wielowymiarowego parametrów położenia $\boldsymbol{\mu}$ oraz macierzy kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ odpornych na wielowymiarowe obserwacje nietypowe zidentyfikowane za pomocą najmniejszej elipsoidy tworzonej przez rdzeń wielowymiarowych obserwacji. Parametry $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ definiują uogólnioną elipsoidę o promieniu q o postaci:

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}^q = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^N : (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq q^2\}, \quad (6)$$

której objętość jest równa $Vol\{\epsilon_{\mu,\Sigma}^q\} = \gamma_N q^N \sqrt{|\Sigma|}$, gdzie γ_N jest objętością kuli jednostkowej. Bez straty na ogólności można przyjąć, że $|\Sigma| = 1$. Odległości $Ma_t^{\mu,\Sigma}$ wektora obserwacji $\mathbf{x}_t$, $t = 1, \dots, T$ od wektora parametru μ względem macierzy Σ porządkowane są rosnąco, a następnie rozważana jest T_D -ta odległość, gdzie T_D oznacza liczbę „dobrych” danych stanowiących rdzeń. Wówczas elipsoida $\epsilon_{\mu,\Sigma}^{q_{T_D}}$ z promieniem $q_{T_D} = Ma_{T_D}^{\mu,\Sigma}$ oraz objętością $Vol\{\epsilon_{\mu,\Sigma}^{q_{T_D}}\} = \gamma_N (Ma_{T_D}^{\mu,\Sigma})^N$ zawiera T_D punktów.

Niech $\hat{\mu}_{T_D}, \hat{\Sigma}_{T_D}$ będą estymatorami parametrów μ, Σ spełniającymi warunek:

$$(\hat{\mu}_{T_D}, \hat{\Sigma}_{T_D}) = \arg \min_{\Sigma \geq 0, |\Sigma|=1, \mu} \{Ma_{T_D}^{\mu,\Sigma}\}, \quad (7)$$

gdzie notacja $\Sigma \geq 0$ oznacza warunek symetryczności i dodatnią określoność macierzy Σ .

Wówczas elipsoida o promieniu $q_{T_D} = Ma_{T_D}^{\hat{\mu}_{T_D}, \hat{\Sigma}_{T_D}}$ ma najmniejszą objętość. Zatem $\hat{\mu}_{T_D}, \hat{\Sigma}_{T_D}$ są estymatorami wyznaczonymi przez elipsoidę minimalnej objętości. Oznaczać je będziemy przez $\hat{\mu}_{T_D}^{MVE}, \hat{\Sigma}_{T_D}^{MVE}$. Oceny estymatorów $\hat{\mu}_{T_D}^{MVE}, \hat{\Sigma}_{T_D}^{MVE}$ mają następującą postać:

$$\mathbf{m}^{MVE}_{T_D} = \sum_{t=1}^{T_D} w_t \mathbf{x}_t, \quad \mathbf{S}^{MVE}_{T_D} = \sum_{t=1}^{T_D} w_t (\mathbf{x}_t - \hat{\mu}_{T_D}^{MVE})(\mathbf{x}_t - \hat{\mu}_{T_D}^{MVE})', \quad (8)$$

gdzie: $w_t, t = 1, \dots, T_D$ są odpowiednio dobranymi wagami.

Liczba obserwacji T_D nie jest znana. Minimalna objętość elipsoidy $\epsilon_{\mu,\Sigma}^{q_{T_D}}$ jest funkcją liczby obserwacji w niej zawartych.

Algorytm wykrywania obserwacji nietypowych oraz estymacji odpornej parametru położenia μ oraz macierzy kowariancji Σ za pomocą MVE składa się z kilku etapów. Pierwszy etap obejmuje wykrycie najdalszej obserwacji nietypowej spośród $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$. Tym mianem określa się w metodzie MVE obserwację, której usunięcie powoduje zmniejszenie wyznacznika macierzy kowariancji wyznaczonej na podstawie próby. Etap wykrywania najdalszej obserwacji nietypowej został szczegółowo opisany w pracy [6]. W kolejnym etapie dobierane są wagi w_t równe $w_t = 1/T_D, t = 1, \dots, T_D$ dla obserwacji $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_T^*)$ tworzących rdzeń zidentyfikowany po usunięciu obserwacji nietypowych w etapie pierwszym. Następnie wyznaczane są oceny:

$$\mathbf{m} = \sum_{t=1}^{T_D} w_t \mathbf{x}_t^*, \quad \mathbf{S} = \sum_{t=1}^{T_D} w_t (\mathbf{x}_t^* - \mathbf{m})(\mathbf{x}_t^* - \mathbf{m})' \quad \text{oraz} \quad Ma_t^{2, m_{T_D}, S_{T_D}} \quad \text{dla każdego } t = 1, \dots, T_D.$$

Jeśli dla pewnego $\mathbf{x}_t^*$, $t = 1, \dots, T_D$ spełniony jest warunek $Ma_t^{2\mathbf{m}_{T_D}, \mathbf{S}_{T_D}} > 1$, to temu wektorowi nadawana jest waga $w_t Ma_t^{2\mathbf{m}_{T_D}, \mathbf{S}_{T_D}}$. W przeciwnym wypadku waga nie ulega zmianie. Na podstawie otrzymanych wag wyznaczane są ponownie oceny estymatorów wektora położenia i macierzy kowariancji. Krok ten powtarzany jest do momentu, gdy dla wszystkich $\mathbf{x}_t^*$, $t = 1, \dots, T_D$ spełniony będzie warunek $Ma_t^{2\mathbf{m}_{T_D}, \mathbf{S}_{T_D}} \leq 1$.

Estymatory $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ otrzymane metodą *MVE* są estymatorami o wysokim punkcie załamania.

3.2. Metoda wyznacznika minimalnej kowariancji (*minimum covariance determinant – MCD*)

Idea metody *MCD* estymacji wielowymiarowego parametru $\boldsymbol{\mu}$ oraz macierzy kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ podobna jest do metody *MVE*. Wynika to z faktu, że objętość elipsoidy $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}^q$ jest proporcjonalna do $\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}$. Dlatego można określić podzbiór $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{T_D}^*)$ obserwacji rdzenia, dla którego wyznacznik macierzy kowariancji przyjmuje wartość minimalną:

$$\{\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{T_D}^*\} = \arg \min_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T_D}} \left| \hat{\text{cov}}_{T_D} \right|. \quad (9)$$

Liczba obserwacji T_D nie jest znana. Najmniejszy wyznacznik macierzy kowariancji jest funkcją liczby obserwacji zawartych w elipsoidzie o macierzy kowariancji wyznaczonej przez warunek (9).

Algorytm wykrywania obserwacji nietypowych oraz estymacji odpornej wielowymiarowego parametru $\boldsymbol{\mu}$ oraz macierzy kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ za pomocą *MCD* składa się z kilku etapów. W pierwszym etapie wyznaczany jest zbiór obserwacji $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_h^*)$, dla których ocena $\mathbf{S}^*$ estymatora $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ma najmniejszy wyznacznik. Algorytm wykrywania tych obserwacji opisany jest szczegółowo w pracy [9]. W kolejnym kroku obliczane są na podstawie wyznaczonego zbioru średnia i macierz kowariancji z próby:

$$\mathbf{m}^* = \frac{1}{h} \sum_{t=1}^h w_t \mathbf{x}_t, \quad \mathbf{S}^* = \frac{1}{h} \sum_{t=1}^h w_t (\mathbf{x}_t^* - \mathbf{m}^*)(\mathbf{x}_t^* - \mathbf{m}^*)'.$$

Na podstawie tych ocen obliczane są odległości $Ma_t^{2\mathbf{m}^*, \mathbf{S}^*}$, $t = 1, \dots, T$. Szukane obserwacje $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{T_D}^*)$ wyznacza się na podstawie zbioru $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_h^*)$ tak, by zachodził warunek:

$$Ma_t^{2\mathbf{m}^*, \alpha^2 \mathbf{S}^*} < \chi_{N; 0.975}^2, \quad t = 1, \dots, T_D, \quad (10)$$

gdzie $\alpha^2 = (\text{med}_{t \in \{1, \dots, T\}} Ma_t^{2\mathbf{m}^*, \mathbf{S}^*}) / \chi_{N; 0.5}^2$.

Oceny estymatorów $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$ wektora μ i macierzy kowariancji Σ mają następującą postać:

$$\mathbf{m}^{MCD} = \frac{1}{T_D} \sum_{t=1}^{T_D} \mathbf{x}_t^*, \mathbf{S}^{MCD} = \frac{1}{T_D} \sum_{t=1}^{T_D} (\mathbf{x}_t^* - \mathbf{m}^{MCD})(\mathbf{x}_t^* - \mathbf{m}^{MCD})'. \quad (11)$$

Estymatory $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$ otrzymane metodą *MCD* są estymatorami o wysokim punkcie załamania.

4. Model portfela efektywnego

Założmy, że rozkład stopy zwrotu portfela złożonego z N aktywów jest wielowymiarowym rozkładem eliptycznym z parametrami μ oraz Σ . Budowane w pracy portfele inwestycyjne oparte na modelu Markowitza otrzymywane są w wyniku rozwiązania następującego zadania optymalizacyjnego:

$$\mathcal{S}_p = \sqrt{\hat{\mathbf{p}}' \mathbf{S} \hat{\mathbf{p}}} = \arg \min_A \sqrt{\mathbf{p}' \mathbf{S} \mathbf{p}}, \quad (12)$$

przy ograniczeniach:

$$A = \{ \mathbf{e}'_N \mathbf{p} = 1, \mathbf{p} \geq 0 \} \text{ lub } A^* = \{ \mathcal{R}_p = \mathbf{m}' \mathbf{p} \geq \mathcal{R}_0, \mathbf{e}'_N \mathbf{p} = 1, \mathbf{p} \geq 0 \}, \quad (13)$$

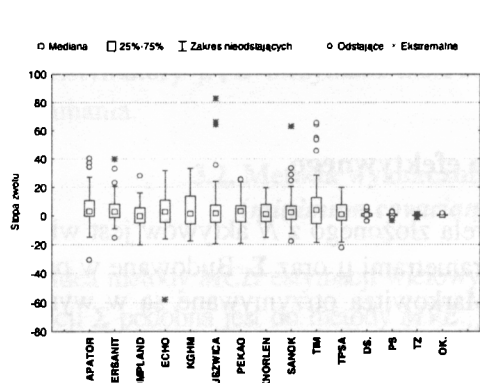
gdzie: $\mathcal{S}_p$ – ryzyko portfela, $\mathcal{R}_p$ – stopa zwrotu portfela, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)'$ – $(N \times 1)$ -wymiarowy wektor wag portfela, $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_N)'$ – $(N \times 1)$ -wymiarowy wektor będący oceną estymatora $\hat{\mu}$ parametru μ , $\mathbf{S}$ – ocena estymatora $\hat{\Sigma}$ $(N \times N)$ -wymiarowej macierzy kowariancji Σ , $\mathbf{e}_N$ – $(N \times 1)$ -wymiarowy wektor jedynek.

5. Wyniki empiryczne

Badanie empiryczne przeprowadzono w odniesieniu do przykładowych teoretycznych portfeli, których skład ze względu na rodzaj aktywów ustalono na podstawie struktury portfela funduszu inwestycyjnego zrównoważonego ING oraz funduszu akcji ING. Do tworzonych przykładowych portfeli wybrano aktywa o największym udziale spośród znajdujących się w portfelach tych funduszy w każdym roku okresu 2002-2006. Materiał badawczy stanowią miesięczne stopy zwrotu z inwestycji na rynku wtórnym w akcje wybranych spółek oraz w obligacje. Stopy zwrotu obligacji wyznaczone zostały na podstawie ceny rozliczeniowej. Okres badawczy to luty 2002-styczeń 2007. Dodatkowe kryterium doboru spółek do portfela stanowiła przynależność do odmiennych sektorów zgrupowanych w trzech głównych działach: przemysłu, finansów i usług.

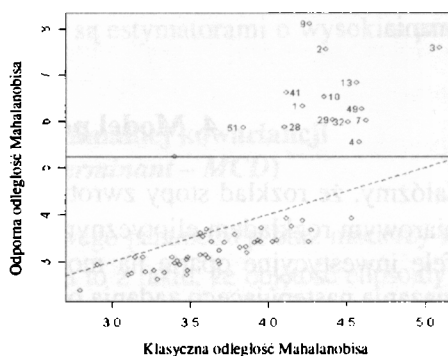
Rysunek 1 przedstawia wykresy typu „ramka-wąsy” miesięcznych stóp zwrotu aktywów wybranych do budowy portfela. Jedenaście pierwszych wykresów ilu-

struje strukturę obserwacji stóp zwrotu akcji spółek wybranych do portfela, a ostatnie cztery wykresy dotyczą struktury stóp zwrotu obligacji. Część dłużną portfela reprezentują stopy zwrotu następujących obligacji: dziesięcioletnich o stałym procentowaniu (DS), pięcioletnich o stałym procentowaniu (PS), trzyletnich o zmiennym oprocentowaniu (TZ) oraz zerokuponowych (OK).



Rys. 1. Wykresy „ramka-wąsy” szeregów czasowych zwrotów aktywów wchodzących w skład budowanych portfeli
Źródło: obliczenia własne.

Wykres odległość-odległość



Rys. 2. Wykres „odległość-odległość” klasycznych odległości Mahalanobisa i opartych na MCD
Źródło: obliczenia własne.

Obecność wartości nietypowych widocznych na rys. 1¹ w analizowanych szeregach czasowych wskazuje na potrzebę budowy portfeli, których charakterystyki wyznaczone są na podstawie estymatorów parametru położenia oraz macierzy kowariancji, odpornych na piętnastowymiarowe obserwacje nietypowe. Obserwacje te zidentyfikowano, stosując procedury ich wykrywania właściwe dla metod *MCD* oraz *MVE*. Przykładowo rys. 2 przedstawia wynik procesu wykrywania obserwacji należących do rdzenia za pomocą metody *MCD*. Obserwacjom tym odpowiadają punkty znajdujące się poniżej linii poziomej wyznaczonej przez wartość odciętą $\sqrt{\chi^2_{15; 0.975}} = 5,24$, czyli te, dla których spełniony jest warunek (10). Zbiór obserwacji nietypowych znajduje się powyżej tej linii.

Charakterystyki teoretycznych portfeli Markowitza zostały wyznaczone zadaniem (12) przy warunku A postaci (13) z uwzględnieniem ogólnego założenia właściwego funduszom zrównoważonym, dotyczącego zasady inwestycji w różne rodzaje aktywów. Zgodnie z nim maksymalny udział akcji, jak również instrumentów dłużnych w portfelu, nie może być wyższy niż 60%. Charakterystyki portfeli uwzględniających te założenia i wyznaczone na podstawie estymatorów *NW*, *MVE* i *MCD* parametru położenia oraz macierzy kowariancji zawarte są w kolumnach 2, 3 tab. 1. Natomiast kolumny 5, 6 tej tabeli zawierają charakterystyki portfeli bu-

¹ Za wartości nietypowe zilustrowane na rys. 1 uznano wartości oddalone od środka rozkładu każdej zmiennej w stopniu przekraczającym określoną regułę.

dowanych z uwzględnieniem ogólnego założenia właściwego funduszm akcji, zgodnie z którym w portfelu może być do 30% instrumentów dłużnych, a minimalny udział akcji nie może być niższy niż 70%.

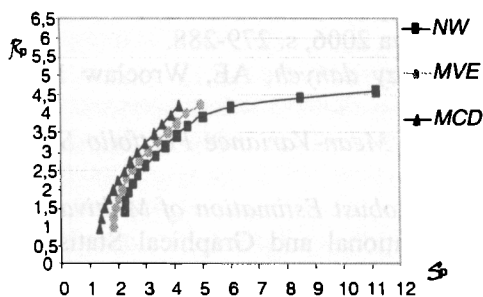
Tabela 1. Charakterystyki globalnych portfeli minimalnego ryzyka

„Teoretyczny” portfel funduszu zrównoważonego	S_p	R_p	„Teoretyczny” portfel funduszu akcji	S_p	R_p
1	2	3	4	5	6
NW	2,26	1,42	NW	5,13	2,63
MVE	1,84	1,01	MVE	4,20	1,64
MCD	1,37	0,97	MCD	3,17	1,60

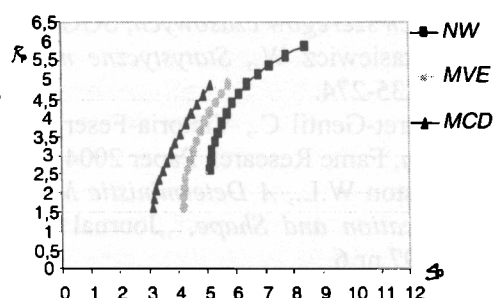
Źródło: obliczenia własne.

Otrzymane wyniki wskazują, że charakterystyki globalnego portfela minimalnego ryzyka wyznaczonego metodami odpornymi (*MVE*, *MCD*) różnią się od charakterystyk portfela otrzymanego z użyciem klasycznej metody estymacji (*NW*). Różnice te są szczególnie istotne z punktu widzenia ryzyka portfela.

Dla wyznaczonych globalnych portfeli minimalnego ryzyka oszacowano granice efektywne, które zilustrowano na rys. 3 i 4. Z punktu widzenia kształtowania się wartości ryzyka portfela obydwu rodzajów funduszy granica efektywna portfeli *MCD* dała nieznacznie lepsze rezultaty niż granica efektywna portfeli *MVE*.



Rys. 3. Granice efektywne „teoretycznych” portfeli funduszu zrównoważonego
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 4. Granice efektywne „teoretycznych” portfeli funduszu akcji
Źródło: obliczenia własne.

Lokalizacje i kształty „odpornych” granic efektywnych względem granicy „klasycznej” potwierdzają, że obecność obserwacji nietypowych może istotnie wpływać na klasyczną estymację charakterystyk portfela potrzebnych do wyznaczenia granicy efektywnej. Przy określonym poziomie stopy zwrotu portfele znajdujące się na „odpornych” granicach efektywnych charakteryzują się mniejszym ryzykiem w porównaniu z portfelami znajdującymi się na „klasycznej” granicy efektywnej.

6. Podsumowanie

Przeprowadzona analiza potwierdziła, że obecność wielowymiarowych obserwacji nietypowych, stanowiąca jedno z możliwych źródeł odchyień od klasycznych założeń danego modelu, może prowadzić do wyboru różnych portfeli Markowitza w przypadku stosowania klasycznych i odpornych metod estymacji. Poprawa wyników estymacji odpowiednich parametrów wyznaczających ryzyko oraz dochód portfela, będąca celem niniejszej estymacji odpornej, została osiągnięta, biorąc pod uwagę kryterium minimalizacji ryzyka budowanych portfeli. Należy jednak pamiętać, że *MVE*-estymatory oraz *MCD*-estymatory, mimo że są estymatorami o wysokim punkcie załamania, nie są najbardziej efektywne. Niewątpliwie zaletą omówionych procedur jest diagnostyka typów wielowymiarowych obserwacji.

Literatura

- [1] Lax D., *Robust Estimator of Scale: Finite-Sample Performance in Long-Tailed Symmetric Distributions*, „Journal of the American Statistical Association” 1985, vol. 80, s. 391
- [2] Meucci A., *Risk and Asset Allocation*, Springer, Berlin 2005.
- [3] Orwat A., *Przykład zastosowania metody odpornej w modelowaniu finansowych szeregów czasowych*, SGGW, Warszawa 2006, s. 279-288.
- [4] Ostasiewicz W., *Statystyczne metody analizy danych*, AE, Wrocław 1998, s. 235-274.
- [5] Perret-Gentil C., Victoria-Feser M., *Robust Mean-Variance Portfolio Selection*, Fame Research Paper 2004 nr 140.
- [6] Poston W.L., *A Deterministic Method for Robust Estimation of Multivariate Location and Shape*, „Journal of Computational and Graphical Statistics” 1997 nr 6.
- [7] *Robust Statistics*, red. F. Hampel, John Wiley&Sons, New York 1986.
- [8] Rousseeuw P., Leroy A., *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley&Sons, New Jersey 2003.
- [9] Rousseeuw P. VanDreissen K., *A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator*, „Journal of the American Statistical Association” 1999 nr 41.
- [10] Zuo Y., *Robust Location and Scatter Estimators in Multivariate Analysis*, Michigan State University, Michigan 2005

ROBUST *MSA* METHODS IN ESTIMATION OF LONG-TERM ASSETS PORTFOLIO RISK USING THE EXAMPLE OF POLISH OPEN-END INVESTMENT FUNDS MARKET

Summary

The paper aims at implementing selected robust estimation methods to multivariate outliers to determine examples of minimum-risk long-term assets portfolios. Examples of theoretical portfolios have been determined based on the actual data. The structure of those portfolios in terms of assets type was determined based on the structure of selected types of Polish open-end investment funds. Characteristics of portfolios determined based on classical maximum likelihood (ML) estimators of location and covariance matrix and based on robust minimum volume ellipsoid (MVE) and minimum covariance determinant (MCD) estimators have been compared.