

Dominik Krężolek

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

BUDOWA PORTFELI RYNKOWYCH I OCENA EFEKTYWNOŚCI INWESTYCJI Z WYKORZYSTANIEM ROZKŁADÓW STABILNYCH*

1. Wstęp

Teoria portfela papierów wartościowych, sięgająca początków lat pięćdziesiątych ubiegłego stulecia, oraz wybór optymalnej strategii inwestycyjnej oparte są w głównej mierze na dwóch podstawowych charakterystykach instrumentów finansowych: dochodzie oraz ryzyku [4]. Każdy inwestor stoi zatem przed pewnym złożonym problemem decyzyjnym, mianowicie [7, s. 67]:

- w jakie aktywa zainwestować kapitał,
- jaką strategię inwestycyjną obrać,
- jak zminimalizować ryzyko inwestycji oraz maksymalizować dochód.

Strategii inwestycyjnych może być w zasadzie tyle, ilu jest inwestorów, gdyż każdy z nich działa w sposób indywidualny, niemniej jednak wszyscy oni dążą do maksymalizowania swojego dochodu przy jednoczesnym ograniczaniu ryzyka. Jednak ograniczanie ryzyka dotyczy przede wszystkim jego negatywnego aspektu, kiedy to zrealizowana stopa zwrotu okazuje się niższa od jej wartości oczekiwanej [3, s. 226].

Do określania poziomu dochodu oraz ryzyka wykorzystywane są metody statystyczne, które polegają na analizie empirycznych rozkładów stóp zwrotu i mają szerokie zastosowanie w teorii analizy finansowych szeregów czasowych. W związku z tym, że portfele inwestycyjne są z reguły wieloskładnikowe, do ich opisu wykorzystywane są metody statystyki wielowymiarowej, stąd też wyznaczanie charakterystyk portfela inwestycyjnego sprowadza się do szacowania parametrów położenia oraz macierzy wariancji-kowariancji wielowymiarowego rozkładu stóp zwrotu [2, s. 11].

* Praca napisana w ramach grantu naukowego o numerze KBN: N111 003 32/0262.

Klasyczne koncepcje i modele, zakładające normalność rozkładu stóp zwrotu¹, są obecnie modyfikowane ze względu na odstępstwa od tego założenia. Celem pracy jest wykorzystanie własności rozkładów stabilnych w przypadku analizy portfelowej oraz ocena efektywności inwestycji na przykładzie wybranych spółek polskiego rynku kapitałowego. Przeprowadzono optymalizację składników portfeli, wykorzystując dwie strategie: minimalizacji współczynnika zmienności oraz minimalizacji ryzyka przy założonym poziomie dochodu (reprezentowanym przez parametr położenia rozkładu stabilnego), a następnie porównano efektywność obu inwestycji.

2. Metodologia

Klasa rozkładów stabilnych² wprowadzona została do modelowania danych finansowych przez Mandelbrota, jednak ze względu na brak odpowiednich narzędzi nie była szeroko rozpowszechniona. Dopiero w późniejszych latach, dzięki gwałtownemu i efektywnemu rozwojowi informatyki, powrócono do stosowania tej rodziny modeli w analizie finansowych szeregów czasowych. Głównym utrudnieniem stosowalności modeli stabilnych jest to, iż nie mają one ściśle określonej funkcji gęstości. Do jej opisu wykorzystuje się zatem funkcję charakterystyczną oraz tzw. transformację Fouriera (*inverse fourier transform*). Jednym z najpopularniejszych jest następujący zapis funkcji charakterystycznej rozkładu stabilnego [1, s. 4]:

$$\ln \phi(t) = \begin{cases} i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta Sgn(t) tg\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right], & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ i\delta t - \gamma |t| \left[1 + i\beta Sgn(t) \frac{2}{\pi} \ln |t| \right], & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases}$$

Każdy rozkład stabilny określony jest za pomocą czterech parametrów opisujących kształt krzywej gęstości. Najważniejszym z nich jest parametr stabilności α informujący o grubości ogona rozkładu. Pozostałe trzy parametry określają odpowiednio skośność (β), skalę (γ) oraz położenie (δ) krzywej gęstości. Ponadto, co jest cechą charakterystyczną modeli stabilnych, wraz ze zmniejszaniem się wartości indeksu α zwiększa się grubość ogona rozkładu [6, s. 25]. Wartości parametru stabilności w przedziale (1; 2) potwierdza występowanie grubych ogonów.

Wykorzystanie rozkładów stabilnych w teorii portfela papierów wartościowych jest, jak widać, znacznie bardziej uzasadnione niż stosowanie modeli opierających się na rozkładzie normalnym. Po zastosowaniu podejścia stabilności rozkładu w klasycznym zagadnieniu optymalizacyjnym Markowitza uzyskane estymatory oczekiwanego dochodu oraz ryzyka w bardziej realny sposób charakteryzują podejmowane strategie inwestycyjne niż w przypadku założenia normalności rozkładu [5, s. 341].

¹ Założenie pierwszy raz wprowadzone przez L. Bacheliera w pracy *Théorie de la Speculation* (1900 r.).

² Określana w literaturze także jako rodzina stabilnych rozkładów Pareto.

3. Analiza empiryczna

Zastosowanie strategii budowy portfeli inwestycyjnych opartych na stabilnych rozkładach empirycznych stóp zwrotu zaprezentowano na przykładzie GPW w Warszawie. Badaniem objęto akcje 86 spółek notowanych na polskiej giełdzie w okresie od stycznia 2000 r. do grudnia 2006 r. Na podstawie kursów otwarcia i zamknięcia wyznaczono dzienne logarytmiczne stopy zwrotu dla badanych spółek (łącznie 1757 obserwacji). Okres badawczy podzielono na następujące podokresy:

- podokres 1: styczeń 2000 r.-grudzień 2001 r. – dobór spółek do portfeli,
- podokres 2: styczeń 2002.-grudzień 2003 r. – analizy portfelowa, szacowania parametrów rozkładów stabilnych,
- podokres 3: styczeń 2004.-grudzień 2006 r. – badanie efektywności przyjętej strategii inwestycyjnej.

W podokresie pierwszym za główne kryterium doboru akcji do portfeli przyjęto wartości współczynników beta badanych spółek. Jako portfel rynkowy wykorzystano indeks WIG. Portfele utworzono na zasadzie rankingu, tzn. w skład pierwszego z nich weszło 6 walorów, które charakteryzowały się najniższymi wartościami beta (spółki te w najmniejszym stopniu podatne były na zachowania rynku). W skład drugiego portfela włączono kolejnych 6 spółek o najniższym beta spośród pozostałych, i tak aż do portfela o numerze 14, w którym umieszczono spółki o największych wartościach współczynnika beta. Tak skonstruowane portfele wykorzystano w kolejnym etapie badania.

W podokresie 2002-2003 dokonano analizy portfelowej. Przyjęto dwie strategie inwestycyjne. Pierwsza (S1) polegała na minimalizacji współczynnika zmienności stopy zwrotu i określiła optymalne wielkości udziałów poszczególnych spółek³. Następnie wyznaczono parametry modeli stabilnych, wykorzystując optymalne rozkłady stóp zwrotu badanych portfeli w podokresie 2. Druga strategia (S2) polegała na minimalizacji współczynnika zmienności przy założeniu, że oczekiwana dochód portfela odpowiada parametrowi położenia rozkładu stabilnego portfela optymalnego. Wagi optymalne, uzyskane z użyciem obu strategii, wykorzystano w ostatnim podokresie badania, gdzie dokonano oceny ich efektywności (indeksy Sharpe'a oraz Treynora). Dokonano także porównania zbieżności empirycznych rozkładów optymalnych stóp zwrotu portfeli (podokres 3) z rozkładami stabilnymi (o parametrach oszacowanych na podstawie optymalnych stóp zwrotu portfeli z podokresu 2).

Wartości współczynników beta akcji w podokresie doboru spółek do portfeli kształtowały się przedziale $(-0,105; 1,972)$, wykazując silną asymetrię prawostronną, co oznacza, że w badanej grupie przeważały spółki umiarkowanie i słabo reagujące na ruchy rynku. Na podstawie wartości beta utworzono 14 portfeli inwestycyjnych, które poddano analizie w kolejnym etapie badania. Przyjęto pierwszą

³ Przyjęto założenie o braku możliwości krótkiej sprzedaży.

strategię inwestycyjną oraz wyznaczono i porównano ryzyko oraz dochód w przypadku równych, a także optymalnych udziałów spółek. Wykazano, że dla prawie wszystkich portfeli (z wyjątkiem portfela 5) optymalizacja spowodowała wzrost oczekiwanej stopy zwrotu przy jednoczesnej redukcji ryzyka. W kolejnym kroku oszacowano parametry rozkładów stabilnych dla optymalnych i równych udziałów spółek. Wyniki przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Parametry rozkładów stabilnych – podokres 2

Portfel	Udziały optymalne				Udziały równe			
	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
Portfel 1	1,9387	0,10144	0,0065	0,0128	1,8446	0,3428	0,0085	0,0094
Portfel 2	1,7682	0,49013	0,0079	0,0062	1,7535	0,3239	0,0090	0,0049
Portfel 3	1,7542	0,33747	0,0083	0,0120	1,7451	0,7369	0,0080	0,0087
Portfel 4	1,8527	0,29968	0,0069	0,0057	1,7724	0,0444	0,0068	0,0050
Portfel 5	1,6884	0,04776	0,0069	0,0096	1,7261	0,5436	0,0089	0,0106
Portfel 6	2	0	0,0064	0,0102	1,8814	0,1052	0,0061	0,0075
Portfel 7	1,7801	0,12842	0,0070	0,0061	1,7482	0,2797	0,0073	0,0059
Portfel 8	1,9157	0,58080	0,0072	0,0113	1,8814	0,0173	0,0078	0,0083
Portfel 9	2	0,89732	0,0064	0,0092	1,9171	0,0422	0,0061	0,0064
Portfel 10	1,7391	0,45646	0,0066	0,0051	1,7979	-0,0311	0,0073	0,0031
Portfel 11	1,9560	0,04148	0,0071	0,0086	1,9230	0,2435	0,0075	0,0073
Portfel 12	1,8451	0,37541	0,0091	0,0055	1,7612	0,4388	0,0096	0,0038
Portfel 13	1,7760	0,45196	0,0101	0,0040	1,8432	0,3271	0,0087	0,0012
Portfel 14	1,8091	0,31856	0,0097	0,0001	1,8577	0,3499	0,0104	-0,0012

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Porównanie strategii S1 oraz S2

Portfel	Dochód – $E(R_p)$	Ryzyko	Dochód – δ	Ryzyko
Portfel 1	1,2834%	0,009357	1,2804%	0,009336
Portfel 2	0,5847%	0,013415	0,6233%	0,014367
Portfel 3	1,2012%	0,013859	1,1979%	0,013822
Portfel 4	0,5601%	0,009982	0,5707%	0,010178
Portfel 5	0,9617%	0,010861	0,9631%	0,010877
Portfel 6	1,0569%	0,008717	1,0221%	0,008449
Portfel 7	0,5965%	0,010686	0,6130%	0,011008
Portfel 8	1,1524%	0,010596	1,1256%	0,010366
Portfel 9	0,9171%	0,008352	0,9172%	0,008354
Portfel 10	0,4767%	0,010331	0,5081%	0,011175
Portfel 11	0,8571%	0,009782	0,8603%	0,009819
Portfel 12	0,5354%	0,013462	0,5521%	0,013900
Portfel 13	0,3649%	0,014753	0,3953%	0,016171
Portfel 14	-0,0003%	0,010772	0,0092%	0,011006

Źródło: obliczenia własne.

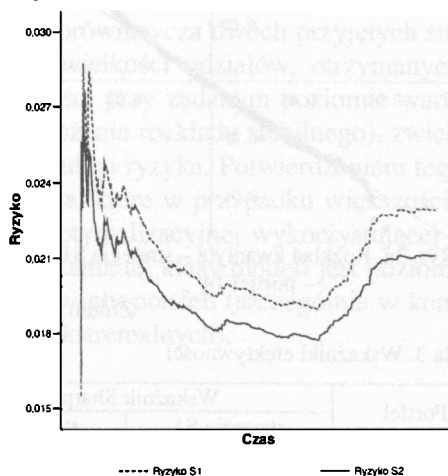
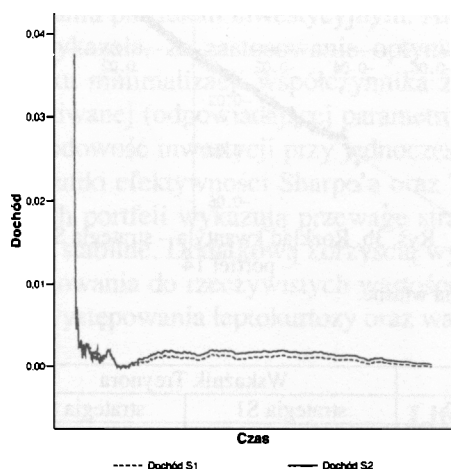
Z danych przedstawionych w tab. 1 wynika, że portfele o równych udziałach charakteryzują się grubszyimi ogonami niż w przypadku udziałów optymalnych

(poziom parametru alfa), niemniej jednak ich wartości odpowiadają rzeczywistym wartościom indeksu ogona dla finansowych szeregów czasowych.

Ponadto dla takiego poziomu α wartość oczekiwana rozkładu jest równa parametrowi położenia. Zależność tę wykorzystano przy drugiej przyjętej strategii, gdzie minimalizowano współczynnik zmienności, zakładając, że oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji jest równa estymowanej wartości parametru δ . Oszacowany dochód oraz ryzyko dla tej strategii przedstawiono w tab. 2.

Dla większości z badanych portfeli strategia ta redukowałą poziom ryzyka. Ponadto wartości parametrów położenia rozkładów stabilnych okazały się wyższe niż ich średnia arytmetyczna stopa zwrotu, co dodatkowo przemawia za wykorzystywaniem parametru δ jako estymatora oczekiwanego dochodu inwestycji kapitałowej.

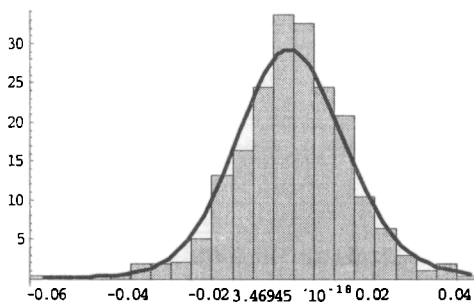
W ostatnim okresie badania wykorzystano optymalne udziały otrzymane z obu strategii S1 oraz S2 w okresie poprzednim. Zbadano zachowanie się stopy zwrotu oraz ryzyka portfela w czasie. Wyniki dotyczące portfela 14, najsilniej skorelowanego z indeksem WIG, przedstawiono na wykresach 1a-1b:



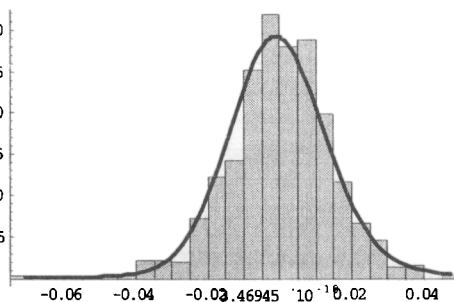
Rys. 1a. Dochód – strategia S1 i S2 – portfel 14

Rys. 1b. Ryzyko – strategia S1 i S2 – portfel 14

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 2a. Dopasowanie rozkładu stabilnego – S1

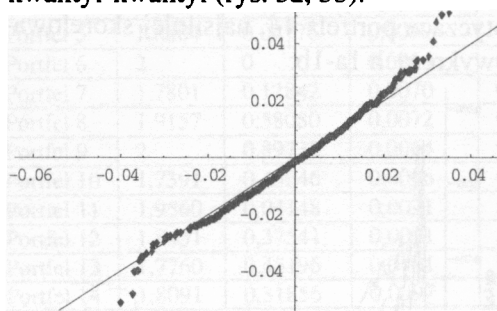


Rys. 2b. Dopasowanie rozkładu stabilnego – S2

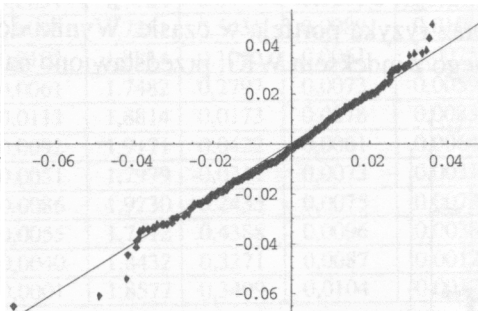
Źródło: obliczenia własne.

Na wykresach 1a i 1b widać wyraźnie, że zastosowanie strategii S2 spowodowało zredukowanie ryzyka przy jednoczesnym wzroście oczekiwanej stopy zwrotu portfela w całym podokresie trzecim. Graficzną ocenę dopasowania empirycznych stóp zwrotu z podokresu trzeciego do rozkładów stabilnych o zadanych parametrach, oszacowanych na podstawie optymalnych stóp zwrotu portfeli z podokresu drugiego, przedstawiono na wykresach 2a i 2b (portfel 14).

Z tych wykresów wynika, że w przypadku strategii S2 dopasowanie empirycznych stóp zwrotu z okresu 2004-2006 z rozkładem stabilnym jest lepsze niż w przypadku strategii S1. Widać na nich ponadto, że zastosowanie strategii opartej na minimalizacji współczynnika zmienności przy zadanym poziomie dochodu (równym parametrowi położenia rozkładu stabilnego) w lepszym stopniu uwzględnia występowanie obserwacji oddalonych. Dodatkowym potwierdzeniem są wykresy kwantyl-kwantyl (rys. 3a; 3b).



Rys. 3a. Rozkład kwantyla – strategia S1
– portfel 14



Rys. 3b. Rozkład kwantyla – strategia S2
– portfel 14

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Wskaźniki efektywności

Portfel	Wskaźnik Sharpe'a		Wskaźnik Treynora	
	strategia S1	strategia S2	strategia S1	strategia S2
Portfel 1	0,3989	0,4004	0,0303	0,1593
Portfel 2	0,1734	0,1662	0,0052	0,0154
Portfel 3	0,2575	0,2580	0,0112	0,0311
Portfel 4	0,3117	0,3164	0,0067	0,0123
Portfel 5	0,1243	0,1244	0,0027	0,0031
Portfel 6	0,4368	0,4371	0,0200	0,0661
Portfel 7	0,2847	0,2779	0,0061	0,0095
Portfel 8	0,2897	0,2944	0,0122	0,0385
Portfel 9	0,4220	0,4223	0,0075	0,0059
Portfel 10	0,2742	0,2689	0,0086	0,0149
Portfel 11	0,1621	0,1616	0,0048	0,0115
Portfel 12	0,2583	0,2568	0,0053	0,0136
Portfel 13	0,0649	0,0440	0,0010	0,0018
Portfel 14	-0,0220	0,0052	-0,0002	0,0001

Źródło: obliczenia własne.

Ostatnim etapem badania było porównanie efektywności przyjętych strategii inwestycyjnych. W tym celu wykorzystano dwa mierniki: wskaźnik efektywności Sharpe'a oraz wskaźnik efektywności Treynora. Za stopę zwrotu pozbawioną ryzyka przyjęto średnią dzienną rentowność 52-tygodniowych bonów skarbowych w latach 2004-2006 ($R_f = 0,0148\%$). Wyniki pomiaru efektywności przedstawiono w tab. 3.

Wartości wskaźnika Sharpe'a potwierdzają przewagę efektywności strategii inwestycyjnej S2 nad strategią S1 dla 8 spośród 14 analizowanych portfeli. Indeks Treynora natomiast sugeruje przewagę drugiej strategii dla prawie wszystkich utworzonych portfeli (z wyjątkiem portfela 9).

4. Podsumowanie

Celem pracy było zastosowanie pewnych własności rozkładów stabilnych w zarządzaniu portfelem inwestycyjnym. Analiza porównawcza dwóch przyjętych strategii wykazała, że zastosowanie optymalnych wielkości udziałów, otrzymanych w wyniku minimalizacji współczynnika zmienności przy zadanym poziomie wartości oczekiwanej (odpowiadającej parametrowi położenia rozkładu stabilnego), zwiększa dochodowość inwestycji przy jednoczesnej redukcji ryzyka. Potwierdzeniem tego są wskaźniki efektywności Sharpe'a oraz Treynora, które w przypadku większości badanych portfeli wykazują przewagę strategii optymalizacyjnej wykorzystującej rozkłady stabilne. Dodatkową korzyścią wykorzystania tej klasy modeli jest poziom ich dopasowania do rzeczywistych wartości stóp zwrotu portfeli (szczególnie w kontekście występowania leptokurtozy oraz wartości ekstremalnych).

Literatura

- [1] Borak Sz., Härdle W., Weron R., *Stable Distributions*, SFB 649 Economic Risk, Berlin, Discussion Paper 2005-008.
- [2] Jajuga K., *Metody statystyczne w finansach*, AE, Wrocław, www.statsoft.pl/czytelnia/finanse/wstepfinans.html.
- [3] Jajuga K., Kuziak T., Markowski P., *Rynek kapitałowy. Inwestycje finansowe*, AE, Wrocław 1997.
- [4] Markowitz H., *Portfolio Selection*, „The Journal of Finance” 1952 vol. 7, s. 77-91.
- [5] Rachev S., Han S., *Portfolio Management with Stable Distribution*, „Mathematical Methods of Operation Research” 2000 nr 50, s. 341-352.
- [6] Rachev S., Mittnik S., *Stable Paretian Models in Finance*, Series in Financial Economics and Quantitative Analysis, John Wiley & Sons Ltd., England 2000.

[7] Tarczyński W., *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe. Vol. 2*, Agencja Wydawnicza „Placet”, Warszawa 1997.

SOME STRATEGIES OF PORTFOLIO SELECTION AND INVESTMENT EFFICIENCY TESTS WITH STABLE DISTRIBUTIONS

Summary

The aim of this paper is to present some properties of stable distributions and its implementation in portfolio management. Two strategies are presented: the first one is to minimize the coefficient of variation of the portfolio's return and the second one is to minimize the coefficient of variation subject to the assumption that the expected portfolio's return coincides with the location parameter of the stable distribution. Afterwards these strategies are compared using Sharpe and Treynor indexes of efficiency. The results show that the second strategy reflects the real behaviour of asset returns (including heavy-tailed property of financial data) better than the first one. The application of these strategies in solving of portfolio selection problems in the Polish capital market is given.