

Kamila Galin

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ANALIZA EFEKTU IGARCH ORAZ EFEKTU DŁUGOZASIĘGOWYCH ZALEŻNOŚCI W SZEREGU STÓP ZWROTU INDEKSU WIG

1. Wstęp

W niniejszej pracy zostanie omówiony wpływ zaburzeń stacjonarności w szeregu stóp zwrotu na estymowane wartości parametrów modelu GARCH(1,1) oraz na analizę struktury zależności takiego szeregu. Okazuje się, że zmiany w bezwarunkowej wariancji szeregu stóp zwrotu powodują zawyżanie estymowanej sumy parametrów $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$, która często zbliża się do jedności. Ponadto w przypadku niestalej wariancji analiza zależności w szeregu wartości bezwzględnych stóp zwrotu może błędnie wskazywać na występowanie długozasięgowych zależności.

W artykule zostaną przedstawione wyniki badań szeregu logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG, wskazujące m.in. na występujące zmiany bezwarunkowej wariancji w tym szeregu.

2. Model IGARCH

Model GARCH(1,1) procesu stóp zwrotu $(X_t)_{t \in N}$ opisuje para równań:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \quad t \in N.$$

gdzie $(Z_t)_{t \in N}$ jest szeregiem niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie spełniającym warunki: $EZ_t = 0$ i $EZ_t^2 = 1$ dla $t \in N$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ [1].

Wiele badań szeregów stóp zwrotu cen akcji oraz wartości indeksów giełdowych wskazuje na wartość sumy $\alpha_1 + \beta_1$ bardzo bliską jedności [2]. Wynika stąd, że do opisu szeregu

stóp zwrotu najbardziej odpowiedni jest szczególny typ modelu GARCH, a mianowicie model IGARCH (Integrated GARCH). W takim modelu wariancja jest nieskończona. Nie ma jednak przekonujących dowodów na występowanie nieskończonego drugiego momentu w szeregu stóp zwrotu. Okazuje się, że własność estymowanych parametrów: $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \approx 1$ może być spowodowana występującymi zaburzeniami stacjonarności w szeregu stóp zwrotu, a w rzeczywistości suma ta jest zdecydowanie mniejsza od jedności [6].

3. Długozasięgowe zależności

Długozasięgowe zależności, zwane również długą pamięcią, to specyficzny rodzaj zależności, jakie występują pomiędzy wyrazami stacjonarnego szeregu czasowego. Funkcja autokorelacji w takim szeregu maleje powoli, potęgowo (w przypadku typowych zależności korelacje pomiędzy wyrazami szeregu zanikają wykładniczo). Wpływ mają na siebie elementy szeregu oddalone nawet o kilkadziesiąt czy kilkaset wyrazów. Poza analizą wykresu funkcji autokorelacji stosuje się wiele testów pozwalających stwierdzić, czy „długa pamięć” w danym szeregu występuje oraz jaki jest zasięg zależności [7]. Metody te polegają na estymacji parametrów: $H \in (0,1)$ (zwanego wykładnikiem Hursta) oraz $d \in (-0.5,0.5)$. W przypadku skończonej wariancji współczynniki te połączone są zależnością: $H = d + 0.5$. O obecności długozasięgowych zależności świadczy wówczas wartość wykładnika Hursta przekraczająca 0.5 lub równoważnie $d > 0$. Im wolniej zanikają zależności, tym większe są wartości parametrów H i d . Długozasięgowe zależności prawdopodobnie nie występują w samym szeregu stóp zwrotu, jednak liczne badania wskazują na występowanie tego typu zależności w szeregu wartości bezwzględnych stóp zwrotu [5]. Potwierdza to zarówno analiza wykresów funkcji autokorelacji, jak i metody estymacji parametrów H i d . Założenie, jakie przyjmuje się w przypadku estymacji funkcji autokorelacji oraz wyznaczania parametrów związanych z występowaniem „długiej pamięci”, to założenie o stacjonarności badanego szeregu. Zatem wszelkie zaburzenia stacjonarności powodują, że wyniki analizy nie są zgodne z prawdą. Okazuje się np., że w przypadku niestacjonarnego szeregu czasowego, w którym długozasięgowe zależności nie występują, zarówno analiza estymowanej funkcji autokorelacji, jak i wartość parametru d uzyskana przy zastosowaniu periodogramu wskazują na obecność „długiej pamięci” (fakt ten udowodniono w [3]).

4. Zaburzenia stacjonarności

Najczęściej zaburzenia stacjonarności w szeregu czasowym spowodowane są zmieniającą się w czasie wartością średnią lub też zmienną bezwarunkową wariancją wyrazów szeregu. To ostatnie zjawisko będzie przedmiotem analizy w niniejszej

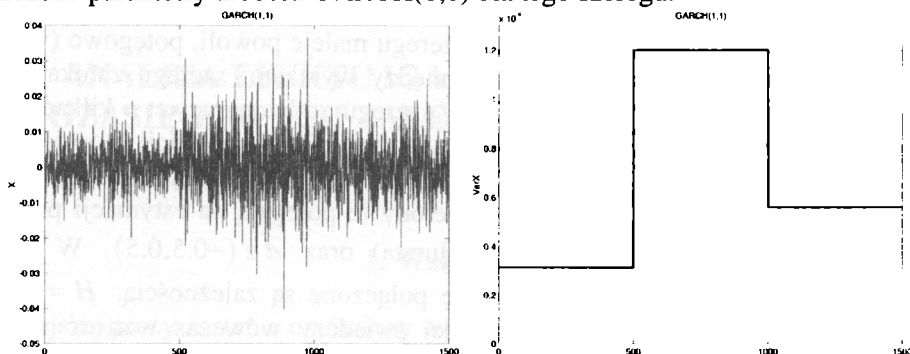
pracy. Aby pokazać, jaki wpływ na wyniki estymacji parametrów może mieć brak stacjonarności, przeanalizowany zostanie sztucznie wygenerowany szereg czasowy ($X_t, t=1,2,\dots,1500$), złożony z trzech równej długości szeregów z modelu GARCH(1,1), każdy z innymi parametrami:

$$\alpha_0 = 11 \cdot 10^{-6}, \alpha_1 = 0.20, \beta_1 = 0.45, \text{ dla } t = 1, \dots, 500,$$

$$\alpha_0 = 18 \cdot 10^{-6}, \alpha_1 = 0.15, \beta_1 = 0.70, \text{ dla } t = 501, \dots, 1000,$$

$$\alpha_0 = 14 \cdot 10^{-6}, \alpha_1 = 0.10, \beta_1 = 0.65, \text{ dla } t = 1001, \dots, 1500.$$

Szereg X (rys. 1 po lewej stronie) w każdym z trzech fragmentów ma inną wariancję (rys. 1 po prawej stronie). Metodą największej wiarygodności zostaną teraz wyznaczone parametry modelu GARCH(1,1) dla tego szeregu.



Rys. 1. Wygenerowany szereg złożony z trzech równej długości szeregów z modelu GARCH(1,1) (po lewej) oraz bezwarunkowa wariancja szeregu (po prawej)

Źródło: opracowanie własne.

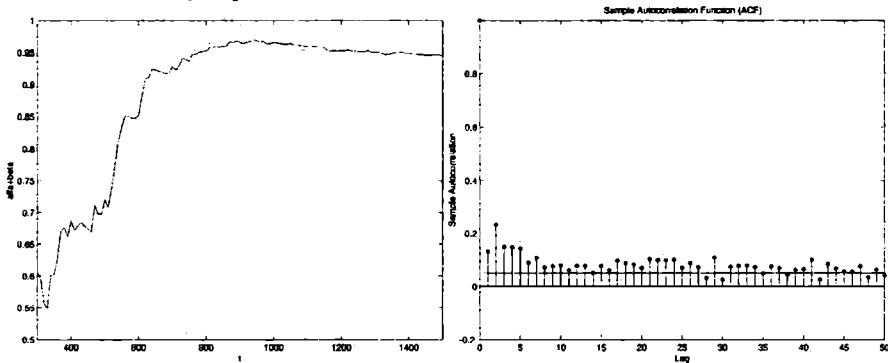
Pierwsze trzy kolumny tab. 1 zawierają wyniki estymacji parametrów α_1 i β_1 dla każdego z trzech fragmentów szeregu X . Wyniki odbiegają od wartości teoretycznych, ponieważ analizowane próbki danych są dość krótkie (500 elementów). W ostatniej kolumnie znajdują się parametry wyestymowane z całego szeregu X . Można by się spodziewać, że te wartości będą pewnym uśrednieniem estymowanych parametrów w trzech kolejnych fragmentach, okazuje się jednak, że wartość $\hat{\beta}_1$ jest tu większa niż każdy z parametrów $\hat{\beta}_1$ dla trzech fragmentów szeregu, a suma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ osiąga wartość prawie 0.95.

Tabela 1. Estymowane parametry modelu GARCH(1,1) wygenerowanego szeregu X

Parametry X_t	$t = 1, \dots, 500$	$t = 501, \dots, 1000$	$t = 1001, \dots, 1500$	$t = 1, \dots, 1500$
$\hat{\alpha}_1$	0.2536	0.1806	0.1161	0.1764
$\hat{\beta}_1$	0.4664	0.6419	0.6160	0.7702
$\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$	0.7200	0.8225	0.7321	0.9466

Źródło: opracowanie własne.

Aby pokazać jak zmiana parametrów (brak stacjonarności) wpływa na sumę $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$, parametry te będą wyznaczone dla coraz dłuższego fragmentu szeregu, który zawsze zaczyna się od wyrazu X_1 , długość, począwszy od 300, elementów zwiększa się o 10 aż do osiągnięcia długości 1500. Wartości $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ przedstawia rys. 2 (po lewej stronie). Szereg X_t jest stacjonarny dla $t \leq 500$. Dla $t < 400$ wyniki estymacji są niestabilne, dalej osiągają wartości w miarę bliskie prawdziwej sumy $\alpha_1 + \beta_1 = 0.65$. Wraz z przekroczeniem przez t granicy 500 zostaje zaburzona stacjonarność i estymowana suma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ gwałtownie rośnie, przekraczając wartość 0.95, podczas gdy dla $t = 501, \dots, 1000$ spełniona jest równość: $\alpha_1 + \beta_1 = 0.85$. Zmiana po raz drugi parametrów modelu (gdy t przekracza 1000) skutkuje tym, że pomimo spadku rzeczywistej wartości $\alpha_1 + \beta_1$ do progu 0.75, estymowana suma maleje tylko nieznacznie, dalej utrzymując się w pobliżu wartości 0.95. Widać zatem, jak zaburzenia stacjonarności wpływają na zawyżenie sumy $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$, której wartość zbliża się do jedności.

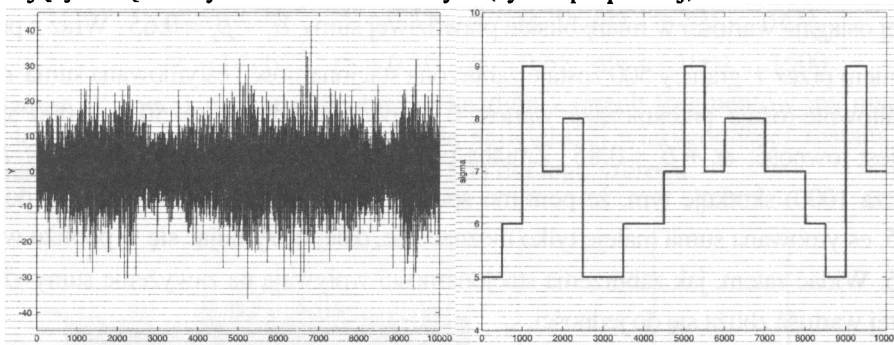


Rys. 2. Suma parametrów $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ estymowana dla coraz dłuższych fragmentów szeregu X (po lewej) oraz estymowana funkcja autokorelacji szeregu $|X|$ (po prawej)

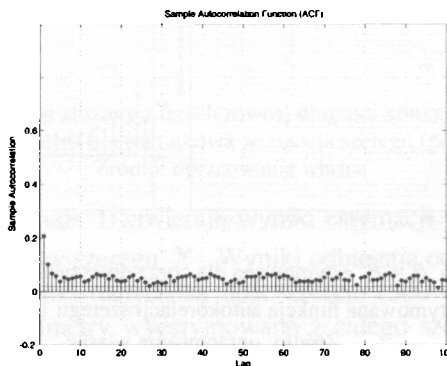
Źródło: opracowanie własne.

Szereg w modelu GARCH(1,1) ma tę własność, że jego wyrazy nie są ze sobą skorelowane, natomiast korelacje występują pomiędzy ich wartościami bezwzględnymi. Zależności te zanikają jednak szybko, funkcja autokorelacji maleje do zera wykładniczo. Na rysunku 2 (po prawej) przedstawiającym estymowaną funkcję autokorelacji wartości bezwzględnych wygenerowanego szeregu X widać zupełnie inną sytuację. Tutaj istotnie statystycznie korelacje występują nawet pomiędzy wyrazami oddalonymi o kilkadziesiąt elementów, co jest cechą szeregów czasowych, w których występują długozasięgowe zależności. Zatem w przypadku analizowanego szeregu wykres funkcji autokorelacji dostarcza zupełnie błędnej informacji o występowaniu „długiej pamięci”. Dzieje się tak dlatego, że nie jest spełniony podstawowy warunek pozwalający poprawnie określać funkcję autokorelacji – szereg nie jest stacjonarny.

Dokładniejszą analizę zasięgu zależności można przeprowadzić, badając odpowiednio długi szereg czasowy. W dalszej części zostanie przeanalizowany szereg Y długości 10 000 elementów (rys. 3 po lewej), który powstał w następujący sposób: wyrazy szeregu GARCH(1,1) (długości 10 000) z parametrami $\alpha_1 = 0.2$, $\beta_1 = 0.2$ zostały przemnożone przez stałą przedziałami funkcję, tak żeby otrzymać szereg ze zmieniającym się odchyleniem standardowym (rys. 3 po prawej).



Rys. 3. Wygenerowany szereg Y z krótkozasięgowymi zależnościami (po lewej) oraz odchylenie standardowe szeregu Y (po prawej)
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Estymowana funkcja autokorelacji szeregu $|Y|$
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Estymowane wartości wykładnika Hursta H dla szeregu $|Y|$ uzyskane przy zastosowaniu metody wartości absolutnej, periodogramu, metody wariancji

Metoda	Wartości absolutnej	Periodogram	Metoda wariancji
H	0.76	0.68	0.75

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4 przedstawia funkcję autokorelacji szeregu $|Y|$ dla dystansu od 0 do 100. Widać, jak olbrzymi wpływ na estymowaną funkcję autokorelacji mają zabu-

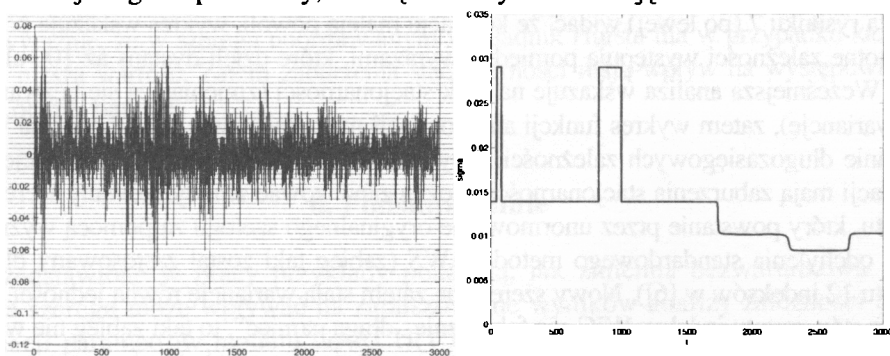
zenia stacjonarności szeregu. Wyrazy szeregu Y , a więc również szeregu $|Y|$, mają krótkozasięgowe zależności, natomiast estymowana funkcja autokorelacji szeregu $|Y|$ wskazuje na występowanie „długiej pamięci”.

Tabela 2 zawiera estymowane wartości wykładnika Hursta H dla szeregu $|Y|$. Każda z przeprowadzonych metod estymacji daje wynik zdecydowanie większy od 0.5, co świadczy o występowaniu długozasięgowych zależności.

5. Analiza stóp zwrotu indeksu WIG

W tej części pracy zostanie poddany analizie szereg stóp zwrotu (logarytmicznych) indeksu WIG długości ok. 3000 wyrazów (2 lutego 1995 r.-16 stycznia 2007 r.)¹. Estymacja parametrów modelu GARCH(1,1) wskazuje, że $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 0.98$, czyli suma ta osiąga wartość bliską jedności. Wynik ten może sugerować, że analizowane stopy zwrotu mają cechy zbliżone do szeregu z modelu IGARCH(1,1), ale możliwe jest również, że wartość estymowanej sumy jest sztucznie zawyżona z powodu występujących w szeregu zaburzeń stacjonarności.

Na rysunku 5 (po lewej) przedstawiającym stopy zwrotu indeksu WIG widać, że wariancja nie jest stała, jednak trudno stwierdzić, czy mamy do czynienia ze zmienną warunkową wariancją, czy też dodatkowo ze zmieniającą się wariancją bezwarunkową. Aby tę kwestię rozstrzygnąć, zastosowano metodę AWS (*adaptive weights smoothing*) [4], pozwalającą na dopasowanie do szeregu czasowego bezwarunkowej wariancji, która jest przedziałami stała. Jest to nieparametryczna, iteracyjna metoda, a jej algorytm w dużym uproszczeniu można opisać następująco: analizowane jest coraz większe sąsiedztwo każdego wyrazu szeregu, a następnie sprawdza się, czy elementy z otoczenia danego punktu mają podobne cechy. W rezultacie wyznaczone zostają odpowiedniej długości przedziały, w obrębie których wariancję można uznać za stałą.



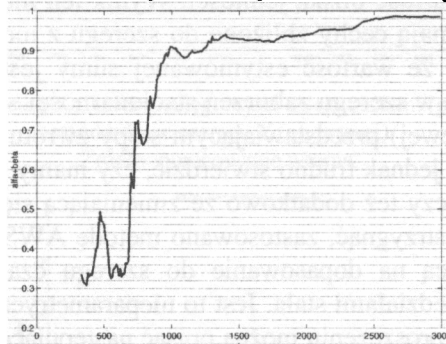
Rys. 5. Stopy zwrotu indeksu WIG (po lewej) oraz odchylenie standardowe (po prawej)

Źródło: opracowanie własne.

¹ Dane pochodzą z www.parkiet.com.

Rysunek 5 (po prawej) przedstawia obliczone na tej podstawie odchylenie standardowe szeregu stóp zwrotu. Uzyskany wynik wskazuje na występowanie istotnych zmian w wartości bezwarunkowej wariancji. Najkrótszy fragment analizowanego szeregu, w którym nie występują zmiany bezwarunkowej wariancji, liczy 35 elementów (ok. 2 miesiące), najdłuższy – 745 elementów (prawie 3 lata).

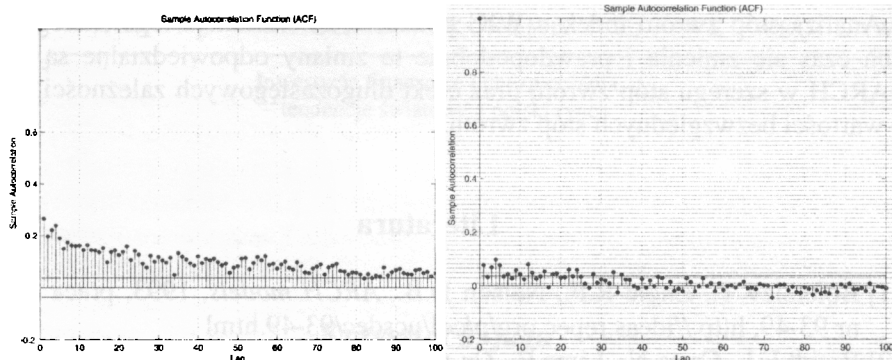
Dysponując informacjami o zmieniającej się wariancji, można przeprowadzić dokładniejszą analizę efektu IGARCH. Rysunek 6 przedstawia wyniki estymacji sumy parametrów α_1 i β_1 dla coraz większego fragmentu szeregu stóp zwrotu, przy czym pierwszy fragment, liczący 78 elementów, został w tej analizie pominięty po to, aby można było zacząć estymację od odpowiednio długiego stacjonarnego fragmentu. Pierwszy fragment miał długość 250 elementów, za każdym razem do tego fragmentu dodawano 10 kolejnych wyrazów. Widać, że dopóki wariancja jest stała, suma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ ma wartość zdecydowanie niższą od 1. Wraz z pojawianiem się kolejnych zmian w wariancji suma ta zwiększa swoją wartość, zbliżając się do jedności.



Rys. 6. Wartość $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ dla coraz dłuższego fragmentu szeregu stóp zwrotu WIG

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 7 (po lewej) widać, że korelacje maleją powoli, wykres wskazuje ponadto, że istotne zależności występują pomiędzy wyrazami, które dzieli dystans aż 100 elementów. Wcześniejsza analiza wskazuje na brak stacjonarności (zmieniającą się bezwarunkową wariancję), zatem wykres funkcji autokorelacji może fałszywie wskazywać na występowanie długozasięgowych zależności. Aby przekonać się, jaki wpływ na funkcję autokorelacji mają zaburzenia stacjonarności, można zanalizować zmodyfikowany szereg stóp zwrotu, który powstanie przez unormowanie oryginalnego szeregu za pomocą wyznaczonego odchylenia standardowego metodą AWS (zabieg taki został zastosowany dla stóp zwrotu 12 indeksów w [6]). Nowy szereg ma zatem stałą wariancję równą jedności. Jeżeli szereg stóp zwrotu indeksu WIG ma faktycznie „długą pamięć”, to taki zabieg nie wpłynie na zasięg zależności i funkcja autokorelacji wartości bezwzględnych unormowanego szeregu będzie również wolno malała.



Rys. 7. Estymowana funkcja autokorelacji wartości bezwzględnych: szeregu stóp zwrotu WIG (po lewej) oraz unormowanego szeregu stóp zwrotu (po prawej)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Estymowane wartości wykładnika Hursta H uzyskane przy zastosowaniu trzech metod wyznaczone dla wartości bezwzględnych szeregu stóp zwrotu WIG oraz szeregu unormowanego

Metoda	Wartości absolutnej	Periodogram	Metoda wariancji
H-oryginalny szereg	0.88	0.75	0.80
H-unormowany szereg	0.52	0.63	0.49

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 7 (po prawej) widać, że wykres funkcji autokorelacji po unormowaniu szeregu stóp zwrotu uległ zmianie. Korelacje znacznie zmalały, dla większych odległości są nieistotne statystycznie, dla małych dystansów oscylują wokół granicy istotności. Wyniki estymacji wykładnika Hursta z powodu niedostatecznej długości szeregu obarczone są sporymi błędami (zwykle w tego typu analizie badane szeregi mają długość powyżej 6000 elementów). Tak jak poprzednio przebadany zostanie oryginalny szereg oraz szereg po unormowaniu wariancji. Choć wyniki przedstawione w tab. 3 nie świadczą jednoznacznie o tym, że w unormowanym szeregu długozasięgowe zależności nie występują, to widać wyraźnie, że w szeregu unormowanym wykładnik Hursta ma w przypadku każdej metody niższą wartość. Zatem zaburzenia stacjonarności mają wpływ na występowanie efektu „długiej pamięci”.

6. Podsumowanie

Przedstawione w pracy przykłady pokazują, jak zmienna bezwarunkowa wariancja szeregu może wpływać na zafałszowanie wyników analizy zależności oraz estymacji parametrów modelu GARCH(1,1). Ważnym zadaniem podczas badania finansowych szeregów czasowych jest zatem analiza stacjonarności. Jedną z metod, pozwalającą określić przedziały, w których parametry szeregu (w tym wypadku wariancja) są stałe, jest zastosowana w pracy metoda AWS.

Analiza stóp zwrotu indeksu WIG pokazała, że wariancja tego szeregu co pewien czas się zmienia i prawdopodobnie te zmiany odpowiedzialne są za efekt IGARCH w szeregu stóp zwrotu oraz efekt długozasięgowych zależności w szeregu wartości bezwzględnych stóp zwrotu.

Literatura

- [1] Bolerslev T., Engle R.F., Nelson D.B., *ARCH models*, 1993, praca naukowa nr 93-49, <http://ideas.repec.org/p/cdl/ucsdec/93-49.html>.
- [2] Breidt F.J., Crato N., Lima P., *On the Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility*, „Journal of Econometrics”, 1996 nr 83, s. 325-348.
- [3] Mikosh T., Starica C., *Change of Structure in Financial Time Series, Long Range Dependence and GARCH Model*, 2000, materiały szkoleniowe nr 58, <http://cls.dk/caf/wp/wp-58.pdf>.
- [4] Polzehl J., Spokoiny V., *Local Likelihood Modeling by Adaptive Weights Smoothing*, 2002, maszynopis nr 787, <http://www.wias-berlin.de/publications/preprints/787/>.
- [5] Sibbersten P., *Long Memory in Volatilities of German Stock Returns*, „Empirical Economics” 2004 nr 29, s. 477-488.
- [6] Starica C., Herzel S., Nord T., *The Impact of the IGARCH Effect on Longer-Horizon Volatility Forecasting*, 2006, www.unipg.it/herzel.
- [7] Taqqu M.S., Teverovsky V., *On Estimating the Intensity of Long-Range Dependence in Finite and Infinite Variance Time Series*, [w:] R. Adler, R. Feldman, M.S. Taqqu, *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, Birkhauser, Boston 1998, s. 177-217.

THE ANALYSIS OF THE IGARCH EFFECT AND THE LONG RANGE DEPENDENCE EFFECT IN THE RATES OF RETURN ON THE WIG INDEX

Summary

The article considers the impact of non-stationarity in rates of return series on estimated parameters of the GARCH(1,1) model and dependency structure analysis. The sum of the estimated coefficients $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ very close to one (the IGARCH effect) and long range dependence in absolute log-returns might be spurious. The possible explanation of the effects mentioned are shifts in the unconditional variance.

The analysis of log-returns on the WIG index (using the adaptive weights smoothing method) suggests the presence of shifts in the unconditional variance, which is probably the reason for IGARCH and LRD effects.