

Piotr Fiszeder

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

WERYFIKACJA MODELU CAPM NA PODSTAWIE JEDNOCZYNNIKOWEGO MODELU GARCH DLA GPW W WARSZAWIE

1. Wstęp

Modele CAPM i APT należą do najczęściej stosowanych modeli równowagi rynku kapitałowego. Przeprowadzono wiele badań empirycznych dotyczących modeli CAPM i APT, jednakże w większości z nich nie bierze się pod uwagę zmienności warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Zastosowanie wielorównaniowych modeli GARCH pozwala przeprowadzić weryfikację modeli rynku z uwzględnieniem tej ważnej cechy finansowych szeregów czasowych. Z jednej strony modele CAPM i APT oparte są na różnych założeniach, dlatego w różny sposób wyjaśniają równowagę na rynku, z drugiej strony model CAPM może być traktowany jako szczególny przypadek modelu APT (zob. [11]). Test APT z jednym czynnikiem – indeksem WIG można zatem uważać za test modelu CAPM. W pracy Fiszедера [8] zaprezentowano testy modelu CAPM z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH i dokonano ich aplikacji dla GPW w Warszawie. Przedstawione testy dotyczyły wyłącznie przekształconej lub rozszerzonej linii rynku papierów wartościowych (SML). Tymczasem większość testów modelu CAPM wykorzystuje oszacowane w pierwszym kroku współczynniki beta do badania zależności między oczekiwanymi stopami zwrotu a współczynnikami beta. Przedstawiony test modelu CAPM bada również tę zależność, ale w nieco inny sposób. Oszacowane w pierwszym kroku premie za ryzyko są wykorzystywane w drugim kroku do estymacji współczynników beta. Celem niniejszego artykułu jest weryfikacja modelu CAPM przeprowadzona na podstawie procedury testowania modelu APT.

Układ artykułu jest następujący: w punkcie drugim przedstawiono informacje dotyczące specyfikacji, estymacji i testowania modelu APT. Punkt trzeci zawiera test modelu CAPM, w czwartym zaś przedstawiono wnioski.

2. Specyfikacja, estymacja i testowanie modelu APT

W pracy model CAPM jest traktowany jako szczególny przypadek modelu APT i do jego testowania zastosowane zostaną procedury, które wykorzystuje się standardowo dla modeli APT. W teorii arbitrażu cenowego przyjmuje się założenie, że stopy zwrotu z dowolnej akcji (lub portfela) są liniowo zależne od K czynników:

$$r_{it} = \mu_i + \beta_{i1}f_{1t} + \beta_{i2}f_{2t} + \dots + \beta_{iK}f_{Kt} + \varepsilon_{it} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

gdzie r_{it} oznacza stopę zwrotu i -tej akcji (lub portfela) w okresie $\langle t-1, t \rangle$, μ_i – oczekiwaną stopę zwrotu i -tej akcji, f_{kt} – k -ty czynnik ryzyka w chwili t , β_{ik} – współczynnik wrażliwości stopy zwrotu i -tej akcji względem k -tego czynnika, ε_{it} – składnik losowy równania¹.

Zmienność składnika losowego w równaniu (1) odzwierciedla ryzyko specyficzne związane z daną akcją. Teoria wyceny arbitrażowej nie precyzuje czynników ryzyka. Istnieje kilka metod wyznaczania czynników (por. [4; 14]). Ponieważ w teorii arbitrażu cenowego czynniki nie są sprecyzowane, każdy test APT będzie warunkowy względem przyjętych czynników.

Podstawą teorii arbitrażu cenowego jest prawo jednej ceny, które głosi, że to samo dobro nie może być sprzedawane po dwóch różnych cenach, zatem instrumenty finansowe o równym ryzyku powinny mieć te same stopy zwrotu. Oprócz założenia prawa jednej ceny i funkcjonowania arbitrażu APT zakłada również jednorodność oczekiwań inwestorów. Przyjmuje się, że wszyscy inwestorzy mają te same oczekiwania co do charakterystyk instrumentów finansowych (oczekiwanych stóp zwrotu, ryzyka, współczynników korelacji). W odróżnieniu od modelu CAPM, w modelu APT zakłada się, że istnieje wiele czynników ryzyka determinujących sytuację na rynku papierów wartościowych, dlatego równowaga występująca w teorii arbitrażu cenowego ma charakter bardziej ogólny od równowagi określonej przez model CAPM. Klasyczna teoria APT opiera się również na wielu dodatkowych założeniach, jak np. na tezie, że krótka sprzedaż dozwolona jest bez żadnych ograniczeń (zob. [10; 11; 16]).

Model APT wyprowadza się przy założeniu portfela arbitrażowego. Wieloczynnikowy model APT można przedstawić jako:

$$\mu_i = \lambda_0 + \lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} + \dots + \lambda_K\beta_{iK} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

gdzie λ_k ($k = 0, 1, \dots, K$) oznaczają współczynniki równania.

¹ W literaturze można znaleźć wiele informacji na temat modelu APT i jego założeń, zob. np. [11; 16: 4].

Można pokazać, że współczynniki λ_k dane są jako:

$$\lambda_0 = r_f, \quad \lambda_k = r_{pk} - r_f \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K, \quad (3)$$

gdzie r_f oznacza stopę zwrotu wolną od ryzyka, r_{pk} – oczekiwaną stopę zwrotu portfela, który nie jest wrażliwy na wszystkie czynniki oprócz k -tego, a którego wrażliwość na k -ty czynnik jest jednostkowa.

Zatem współczynnik λ_k ($k = 1, 2, \dots, K$) może być określany jako premia za ryzyko związana z czynnikiem f_k . Z równania (2) wynika, że oczekiwana premia za ryzyko jest średnią ważoną oczekiwanych premii za ryzyko związanych z poszczególnymi rodzajami ryzyka.

Wybór metody estymacji parametrów równania (1) zależy w dużym stopniu od wyboru metody wyznaczania czynników. Czynniki będące sztucznymi konstrukcjami można wyodrębnić za pomocą analizy czynnikowej lub analizy głównych składowych. Należy podkreślić, że inny jest cel tych metod (zob. [12]). W analizie czynnikowej wyjaśniane są kowariancje między zmiennymi. Z kolei analiza głównych składowych powstała jako metoda transformacji zbioru zmiennych, której głównym zadaniem jest wyjaśnienie wariancji zmiennych. Istnieje kilka metod estymacji parametrów oraz czynników w równaniu (1). Do najczęściej stosowanych należą metoda największej wiarygodności oraz metoda głównego czynnika, bezpośrednio wykorzystująca analizę głównych składowych.

Większość metod bazujących na metodzie największej wiarygodności wymaga dosyć silnych założeń dotyczących rozkładów stóp zwrotu. Connor i Korajczyk [3] zaproponowali metodę wyznaczania czynników, która nie wymaga spełnienia założenia o normalności rozkładów stóp zwrotu, metoda ta jednakże wymaga stałości macierzy kowariancji składników losowych w modelu czynnikowym. Jones [13] przedstawił alternatywną metodę, która jest odporna na heteroskedastyczność.

Jeżeli czynnikami są portfele, zmienne ekonomiczne lub czynniki są zdefiniowane na gruncie teorii preferencji, to do estymacji parametrów równania (1) stosuje się najczęściej metodę najmniejszych kwadratów². Należy jednakże pamiętać, że założenia klasycznej metody najmniejszych kwadratów często nie są spełnione dla szeregów finansowych.

Estymację parametrów modelu APT w postaci (2) przeprowadza się na podstawie danych przekrojowych, wykorzystując oceny parametrów β_{ik} otrzymane dla równania (1). Najczęściej stosuje się metodę najmniejszych kwadratów. Oceny parametrów λ_k można również wyznaczyć, konstruując portfele o jednakowej wrażliwości na k -ty czynnik i niewrażliwe na pozostałe czynniki oraz korzystając z zależności (3). Parametr λ_0 jest wówczas równy oczekiwanej stopie zwrotu portfela niewrażliwego na wszystkie czynniki.

² Jeżeli składniki losowe ε_{it} ($i = 1, 2, \dots, N$) będą skorelowane, to estymatory nie będą najefektywniejsze.

Testowanie modelu APT polega na zbadaniu istotności parametrów λ_k w równaniu (2). W wielu pracach bada się również stałość parametrów. Jak dotąd, wyniki testów APT są niejednoznaczne i w wysokim stopniu zależą od metodologii, według której zostały przeprowadzone. APT nie daje żadnych wskazówek odnośnie do tego, które czynniki podlegają wycenie. W związku z tym, dokonując porównań na podstawie APT, nie wiemy, czy odchylenia od linii arbitrażu są odzwierciedleniem prawdziwej rzeczywistości, czy nie wynikają z wyboru niewłaściwych czynników. Z kolei stwierdzenie, że więcej niż jeden ze współczynników λ_k istotnie różni się od zera, nie wystarcza, by móc odrzucić model CAPM (zob. [4]).

Istnieją stosunkowo mocne argumenty świadczące o tym, że na stopy zwrotu oddziałuje więcej niż jeden czynnik i czynniki te są wycenione (zob. np. [4]). Jednakże możliwe, że dodatkowe czynniki są wycenione nie dlatego, że model APT jest poprawny, ale ze względu na to, że konstruując model, nie zidentyfikowano właściwie portfela rynkowego. Nawet jeśli rzeczywiście tak jest, to wykorzystanie modeli wielowskaźnikowych pozwala lepiej wyjaśnić stopy zwrotu niż jakikolwiek dotychczas zaproponowany reprezentant portfela rynkowego.

W klasycznym modelu APT zakłada się, że wariancje stóp zwrotu czynników i aktywów oraz kowariancje stóp zwrotu aktywów są stałe. Jeżeli wariancja składnika losowego w równaniu (1) ma zmienną wariancję warunkową, to estymatory MNK parametrów β_{ik} nie będą najefektywniejsze (strata efektywności może być stosunkowo duża). Jeżeli współczynniki β_{ik} zostaną oszacowane z błędami, to oceny parametrów λ_k w równaniu (2) będą obciążone (np. dla modelu CAPM ocena λ_1 jest najczęściej zaniżona, ocena wyrazu wolnego zaś – zawyżona, zob. [4]). Podobnie nieuwzględnienie zmiennej wariancji może wpływać istotnie na wyniki testu APT (zob. [13]). W celu uwzględnienia zmienności warunkowych wariancji stóp zwrotu czynników i aktywów oraz kowariancji stóp zwrotu aktywów można zastosować wielorównaniowe modele GARCH. Weryfikację modelu APT dla GPW w Warszawie z zastosowaniem czynnikowego modelu GARCH przeprowadzono w pracach Fiszdera [6; 7], gdzie można znaleźć szczegółowy opis procedury testowania modelu APT z zastosowaniem czynnikowego modelu GARCH. W dalszej części artykułu przedstawiono tylko krótkie objaśnienie.

Niech λ_{kt} oznacza premię za ryzyko związane z czynnikiem f_k . Jeżeli założy się stałość preferencji w czasie, to λ_{kt} może być wyrażone jako funkcja liniowa warunkowej wariancji k -tego czynnika (zob. [5]):

$$\lambda_{kt} = c_k + \delta_k h_{kt} \text{ dla } k = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Można założyć, że czynniki są niezależnymi procesami. W takiej sytuacji często przyjmuje się, że każdy z czynników jest opisany za pomocą jednorównaniowego modelu GARCH(1,1)-M:

$$P_{kt} = c_k + \delta_k h_{kt} + \varepsilon_{kt}, \varepsilon_{kt} | \psi_{t-1} \sim D(0, h_{kt}), \quad (5)$$

$$h_{kt} = w_k + \phi_k \varepsilon_{kt-1}^2 + \varphi_k h_{kt-1}, \quad (6)$$

gdzie P_{kt} ($k=1,2,\dots,K$) oznaczają nadwyżkowe stopy zwrotu portfeli reprezentujących czynniki³, obliczane według formuły $P_{kt} = \alpha'_k y_t$, gdzie α_k oznacza wektor wag, y_t jest wektorem o wymiarach $N \times 1$ i oznacza stopy zwrotu z N aktywów pomniejszone o stopę zwrotu wolną od ryzyka.

Oszacowane na ich podstawie premie za ryzyko oraz warunkowe wariancje wykorzystywane są następnie w drugim kroku do estymacji parametrów równań:

$$y_{it} = \psi_{0i} + \sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_{kt} \beta_{ki} + \eta_{it} \text{ dla } i=1,2,\dots,N, \quad (7)$$

$$h_{it} = \sigma_{ii} + \sum_{k=1}^K \beta_{ki}^2 \hat{h}_{kt} \text{ dla } i=1,2,\dots,N, \quad (8)$$

gdzie h_{it} oznacza wariancję warunkową y_{it} .

Równanie (7) jest analogiczne do równania (2) w klasycznym modelu APT, natomiast równanie (8) opisuje wariancję warunkową stóp zwrotu badanych aktywów. Równania (8) wraz z pominiętymi równaniami dla warunkowych kowariancji składają się na model będący szczególnym przypadkiem K -czynnikowego modelu GARCH. Do testowania modelu APT można zastosować test ilorazu wiarygodności.

3. Test modelu CAPM na podstawie jednoczynnikowego modelu GARCH

Model CAPM był przedmiotem licznych analiz empirycznych (zob. np. [4; 10]). Rezultaty tych badań były bardzo zróżnicowane. Niektóre świadczyły na korzyść, inne przeciwko modelowi CAPM. W wielu badaniach pokazano, że współczynniki beta nie są jedyną determinantą różnic występujących pomiędzy stopami zwrotu. Weryfikacją modelu CAPM dla GPW w Warszawie zajmowali się m.in.: Gajdka i Wolski [9], Bołt i Miłobędzki [1], Byrka-Kita i Rozkrut [2].

W prezentowanym badaniu zastosowano jednakże wielorównaniowy model GARCH. Badanie przeprowadzono dla takich sektorów, jak: spożywczy, chemiczny, metalowy, banki i telekomunikacja. Spółki wchodzące w skład wybranych sektorów stanowiły ponad 75% kapitalizacji całego rynku, zatem moc testu powinna być stosunkowo duża. Badano tygodniowe stopy zwrotu pomniejszone o stopę wolną od ryzyka (nadwyżkowe stopy zwrotu) w okresie od 1 stycznia 1995 r. do 19 sierpnia 2005 r. Za stopę wolną od ryzyka rynkowego przyjęto rentowność 52-

³ Engle, Ng i Rothschild [5] konstruują czynniki na podstawie nadwyżkowych stóp zwrotu aktywów, dlatego nazywają je nadwyżkowymi stopami zwrotu portfeli reprezentujących czynniki.

-tygodniowych bonów skarbowych. Zastosowano te same dane i ten sam okres jak w pracy Fiszdera [6], w której można znaleźć więcej informacji na temat przyjętych założeń. Dla stóp zwrotu indeksu WIG pomniejszonych o stopę wolną od ryzyka oszacowano parametry jednorównaniowego modelu GARCH-M z warunkowym rozkładem *t*-Studenta w postaci (5-6). Otrzymane wyniki przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Wyniki estymacji modelu GARCH-M dla indeksu WIG

c	δ	$w \times 10^{-4}$	ϕ	φ	ν
0,0017 (0,0026)	-1,0165 (1,9365)	0,1673 (0,1462)	0,0701 (0,0370)	0,9188 (0,0422)	5,9371 (1,4926)

W nawiasach pod ocenami parametrów podano średnie błędy szacunku. Parametr ν oznacza liczbę stopni swobody w warunkowym rozkładzie *t*-Studenta.

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Wyniki estymacji jednoczynnikowego modelu APT z indeksem WIG oraz czynnikowym modelem GARCH

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t	Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
ψ_{01}	-0,0648	0,1368	-0,47	σ_{31}	4,6085	1,9195	2,40
ψ_{02}	-0,0307	0,1238	-0,25	σ_{32}	3,2587	2,1902	1,49
ψ_{03}	-0,2148	0,1640	-1,31	σ_{33}	12,6284	2,6833	4,71
ψ_{04}	-0,0514	0,1220	-0,42	σ_{41}	1,1448	1,5472	0,74
ψ_{05}	-0,3247	0,2378	-1,37	σ_{42}	0,2002	1,7561	0,11
β_{11}	59,9438	10,3819	5,77	σ_{43}	-0,3231	1,7293	-0,19
β_{12}	68,0780	12,1916	5,58	σ_{44}	2,2769	1,5689	1,45
β_{13}	79,6451	12,2113	6,52	σ_{51}	-0,8852	2,3952	-0,37
β_{14}	88,1064	8,1718	10,78	σ_{52}	-1,2536	2,9218	-0,43
β_{15}	139,0936	20,6666	6,73	σ_{53}	-2,7089	2,9062	-0,93
σ_{11}	9,7873	1,8257	5,36	σ_{54}	-3,9580	2,6269	-1,51
σ_{21}	3,6629	1,8389	1,99	σ_{55}	18,9388	7,3881	2,56
σ_{22}	6,4352	2,2791	2,82	ν	5,2941	0,6015	8,80

Liczby od 1 do 5 oznaczają odpowiednio sektory: spożywczy, chemiczny, metalowy, banki i telekomunikacja.

Źródło: obliczenia własne.

Zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją warunkową nie była istotna statystycznie. Oszacowane na podstawie modelu GARCH-M premie za ryzyko oraz warunkowe wariancje wykorzystano w drugim kroku do łącznej estymacji parametrów jednoczynnikowego modelu APT z czynnikowym modelem GARCH (jest to szczególny przypadek dynamicznego modelu rynku, por. [15]). Oszacowany model APT z indeksem WIG jako czynnikiem oraz modelem czynnikowym GARCH przedstawiono w tab. 2. Dla wszystkich sektorów poza telekomunikacją otrzymano szacunki współczynników beta poniżej jedności (szacunki przedstawione w tabeli należy podzielić przez 100, ponieważ stopy zwrotu sektorów zostały wcześniej pomnożone przez 100), czyli są to sektory defensywne. Sek-

tor „telekomunikacja” jest sektorem agresywnym, co oznacza, że jest portfelem bardziej ryzykownym aniżeli portfel rynkowy. Wszystkie oceny współczynników beta były istotne statystycznie na powszechnie przyjmowanych poziomach istotności. Wyniki testu ilorazu wiarygodności ($LR = 46,61$) zdecydowanie wskazują, że stopy zwrotu portfela rynkowego oddziałują na stopy zwrotu sektorów, a wariancja warunkowa stóp zwrotu zależy od wariancji warunkowej portfela rynkowego.

Uzyskane rezultaty są niewrażliwe na przyjęcie innej postaci rozkładu warunkowego. Na przykład dla warunkowego rozkładu normalnego $LR = 85,38$ były istotne na poziomie 0,05 oceny współczynników beta dla sektorów: telekomunikacja, banki i metalowy (nieistotność parametrów dla sektorów spożywczego i chemicznego wynika z zastosowania metody quasi-największej wiarygodności i, w konsekwencji, znacznie większych średnich błędów szacunku). Te wyniki przemawiają na korzyść modelu CAPM. Należy jednakże zauważyć, że model wieloczynnikowy wyjaśnia stopy zwrotu lepiej niż model jednoczynnikowy (zob. [6; 7]). Wiadomo, że stwierdzenie, iż więcej czynników jest wycenionych, nie wystarcza, by móc odrzucić model CAPM.

4. Podsumowanie

W pracy przeprowadzono weryfikację modelu CAPM z zastosowaniem modeli GARCH dla sektorów notowanych na GPW w Warszawie. Większość testów modelu CAPM dotyczy przekształconej lub rozszerzonej linii rynku papierów wartościowych. W niniejszym badaniu zastosowano procedurę testowania modelu APT opartą na czynnikowym modelu GARCH. Uzyskane wyniki przemawiają na korzyść modelu CAPM, jednakże w badaniu nie rozważano żadnych alternatywnych specyfikacji modelu.

Literatura

- [1] Bołt T., Miłobędzki P., *Weryfikacja modelu CAPM dla giełdy warszawskiej*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 952, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, AE, Wrocław 2002.
- [2] Byrka-Kita K., Rozkrut D., *Testowanie modelu CAPM na polskim rynku kapitałowym*, materiały konferencyjne „Rynek Kapitałowy”, *Skuteczne inwestowanie*, cz. I, Szczecin 2004.
- [3] Connor G., Korajczyk R., *Performance Measurement with the Arbitrage Pricing Theory*, „Journal of Financial Economics” 1986, 15, s. 373-394.
- [4] Elton E.J., Gruber M.J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.
- [5] Engle R.F., Ng V., Rothschild M., *Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills*, „Journal of Econometrics” 1990, 45, s. 213-238.

- [6] Fiszeder P., *Model APT z czynnikowym modelem GARCH – analiza dla GPW w Warszawie*, maszynopis, 2007.
- [7] Fiszeder P., *Testing the Arbitrage Pricing Model with a Factor GARCH Model for the Polish Stock Market*, [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making, FindEcon Monograph Series: Advances in Financial Market Analysis*, red. W. Milo, P. Wdowiński, Łódź University Press, Łódź, przyjęte do druku, 2007.
- [8] Fiszeder P., *Testy modelu CAPM z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH – analiza dla GPW w Warszawie*, „Przegląd Statystyczny” 2006, 53, 3, s. 36-56.
- [9] Gajdka J., Wolski R., *Test CAPM w warunkach polskiego rynku kapitałowego*, „Nowe Życie Gospodarcze” 1998, 5.
- [10] Haugen R.A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa 1996.
- [11] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa 1996.
- [12] Jajuga K., *Statystyczna analiza wielowymiarowa*, PWN, Warszawa, 1993.
- [13] Jones C. S., *Extracting Factors from Heteroskedastic Asset Returns*, „Journal of Financial Economics” 2001, 62, s. 293-325.
- [14] Kuziak K., *Model wyceny arbitrażowej (APM) – ujęcie dynamiczne*, „Dynamiczne modele ekonometryczne”, materiały na VI Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń 1999.
- [15] Ng V., Engle R. F., Rothschild M., *A Multi-Dynamic-Factor Model for Stock Returns*, „Journal of Econometrics” 1992, 52, s. 245-266.
- [16] Tarczyński W., *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe*, Agencja Wydawnicza Placet, 1997.

TESTING THE APT MODEL WITH THE ONE-FACTOR GARCH MODEL FOR THE WSE

Summary

Numerous studies have shown that conditional variances and covariances of returns are time-varying. Most of the CAPM and APT tests ignore those properties of financial time series. The variability of variances of factors and variances and covariances of asset returns may significantly influence the results of the tests. The APT model with the factor GARCH covariance structure, which is able to capture those properties of asset returns, is presented in the paper.

In the empirical part of the paper, a test of the CAPM model is performed for sectors quoted on the Warsaw Stock Exchange. The procedure for testing the APT model with the one-factor GARCH model was applied. The results support the restrictions of the CAPM model, however none of the alternative specifications of the model are considered.