

Nina Łapińska-Sobczak, Wojciech Zatoń

Uniwersytet Łódzki

STABILNOŚĆ PARAMETRÓW MODELU EKONOMETRYCZNEGO A DOKŁADNOŚĆ PROGNOZ

1. Wstęp

Modele ekonometryczne, zarówno dynamiczne, jak i strukturalne, mogą być po oszacowaniu parametrów wykorzystywane do wyznaczania prognoz rozwoju modelowanych zjawisk ekonomicznych. Przyjmuje się wówczas założenie o stałych parametrach (tj. stałych wartościach ich ocen) w całym okresie prognozowania. Założenie to budzi jednak wciąż wiele wątpliwości, stąd w literaturze ekonometrycznej już od lat sześćdziesiątych, tj. od momentu rozwinięcia badań empirycznych z wykorzystaniem modeli ekonometrycznych, stawiano sobie pytanie, czy rzeczywiście parametry w modelach opisujących zachowanie się różnych kategorii ekonomicznych są stałe w czasie. Pojawiły się więc prace dotyczące testowania stałości w czasie parametrów równań regresji, zob. [Andrews 1986, 1993, 2003; Bai 1996; Bai, Perron 1998; Brown, Durbin, Evans 1975; Chow 1960; Kramer, Plumberger, Alt 1988; Plumberger, Kramer, Contrus 1989]. Publikacje z niezbyt odległych lat świadczą o tym, że temat ten jest ciągle aktualny, gdyż pojawiają się nowe problemy badawcze związane z rozwojem ekonometrycznego modelowania, a następnie wykorzystania różnych rodzajów modeli do prognozowania. Jeżeli za pomocą testów statystycznych możemy z dużym prawdopodobieństwem stwierdzić, że parametry w weryfikowanym modelu ekonometrycznym są niestale, to powinno to być wskazaniem do badań nad przyczynami niestabilności, a następnie podaniem możliwości jej eliminacji. Często jednak w badaniach empirycznych występują sytuacje, w których testy statystyczne nie wskazują na konieczność uznania ocen parametrów za niestabilne, ale po dokładniejszym zbadaniu tego zjawiska okazuje się, że przynajmniej w dłuższym okresie oceny te wykazują pewną tendencję. Powstaje wówczas pytanie: czy wystarczy opierać się na rozstrzygnięciach testów statystycznych?

2. Metodologia

W większości obecnie dostępnych pakietów komputerowych wykorzystywanych do szacowania parametrów modelu jest przynajmniej kilka testów pozwalających na sprawdzenia hipotezy o stałości w czasie ocen tych parametrów.

Na potrzeby obecnej pracy należy wyróżnić dwa podstawowe przypadki niestabilności parametrów, a mianowicie:

- zmienność parametrów wynikającą z powolnych zmian mechanizmów ekonomicznych,
- zmienność wynikającą ze zmian strukturalnych zachodzących w pewnych okresach.

Jeżeli założymy, że model, w którym testowana jest stałość parametrów w czasie ma postać:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

to sprawdzeniu powinny być poddane oceny wszystkich parametrów β . Niestabilność pierwszego typu wystąpi wówczas, gdy przynajmniej jedna z ocen w diagnozowanym równaniu nie spełnia warunków stabilności. Ten rodzaj niestabilności można sprawdzić, stosując tzw. estymację rekurencyjną przy wykorzystaniu klasycznej MNK (zob. np. [Zeliaś, Pawełek, Wanat 2003]). Szacowanie parametrów wykonywane jest wówczas wielokrotnie, zaczyna się od próby najmniejszej, zapewniającej jeden stopień swobody, a następnie dodaje się po 1 obserwacji, aż do wyczerpania całej próby n obserwacji. Sprawdzenie, czy oszacowane w ten sposób oceny nie różnią się między sobą w sposób istotny, pozwala na uzyskanie odpowiedzi na interesujące nas pytanie. Wygodnie jest wykonać graficzną ocenę zjawiska. W programie Eviews, który został wykorzystany do obliczeń wykonanych na potrzeby tej pracy, można oprzeć się m.in. na następujących wykresach:

- 1) ocen parametrów rekurencyjnych,
- 2) reszt rekurencyjnych,
- 3) testu CUSUM.

Wykres ocen parametru z estymacji rekurencyjnej powinien być linią poziomą na wysokości odpowiadającej ocenie parametru otrzymanej na podstawie całej próby, jeśli hipoteza o stałości danego parametru jest prawdziwa.

Resztę rekurencyjną definiuje wzór (2):

$$w_t = \frac{y_t - x_t' \beta}{(1 + x_t' (X_{t-1}' X_{t-1})^{-1} x_t')^{0.5}}. \quad (2)$$

Kształtowanie się reszt rekurencyjnych jest analizowane w przedziale o rozpiętości ± 2 odchyłeń standardowych. Jeżeli pojawiają się reszty występujące na zewnątrz tego przedziału, sugeruje to niestabilność parametrów. Reszty rekurencyjne modelu o stabilnych parametrach mają rozkład normalny $N(0, \sigma^2)$.

Test CUSUM (por. np. [Brown, Durbin, Evans 1975]) jest oparty na skumulowanej sumie reszt rekurencyjnych. Jeśli wartość oczekiwana statystyki testu CUSUM ma wartość 0, to można wnioskować o stabilności parametrów modelu. Występowanie wartości statystyki na zewnątrz przedziału, którego granice wyznacza 5-procentowy poziom istotności, sugeruje niestabilność modelu.

Graficzna prezentacja wyników dla wymienionych wyżej testów bardzo ułatwia szybką weryfikację hipotez dotyczących stabilności parametrów, bez konieczności wyznaczania ich wartości na podstawie wzorów analitycznych, a następnie porównywania ich z wartościami krytycznymi. Ograniczona dostępność tablic wartości krytycznych dla takich testów jak CUSUM była często barierą w jego stosowaniu.

Drugi przypadek niestabilności parametrów związany jest ze zmianami strukturalnymi (np. zmiana systemu podatkowego czy gwałtowna podwyżka cen surowców energetycznych). Znając moment, w którym one nastąpiły, można podzielić próbę statystyczną na podpróby, w ramach których będą estymowane parametry. By zachować własności estymatorów, wyróżnia się zwykle dwie podpróby. Hipotezy o równości analogicznych parametrów w obu podpróbach można zweryfikować testem F Fishera (np. [Chow 1960]). Alternatywnie można wykorzystać zmienne zero-jedynkowe, wprowadzając je do równania i sprawdzając istotność parametrów przy nich stojących, posługując się np. testem t-Studenta.

Jeżeli badany model ma być wykorzystywany jako narzędzie prognozowania, to stwierdzenie niestabilności parametrów powinno skutkować ich uzmiennieniem w okresach prognozy. Jeśli korzystano z estymacji rekurencyjnej, dla otrzymanego szeregu ocen parametrów możemy np. znaleźć najlepszą postać funkcji trendu, według której parametry będą się kształtować w okresie prognozy. Prognozując z użyciem modelu, w którym wystąpiły zmiany strukturalne, należy wykorzystać oceny parametrów z podpróby najbliższej okresowi prognozowania lub, jeśli użyto zmiennych zero-jedynkowych, podjąć decyzję co do ich wartości w okresie prognozy.

3. Wyniki badań

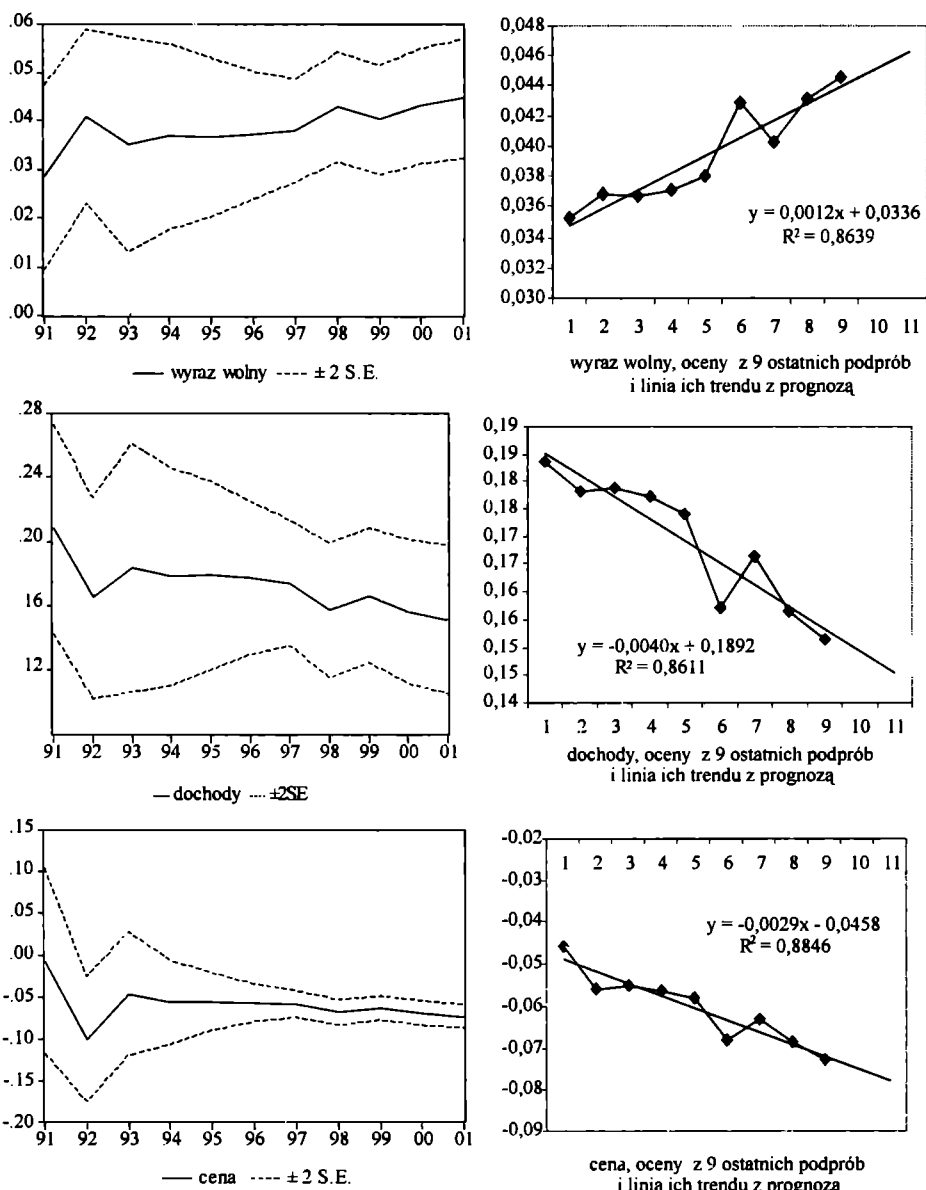
Wiedza ekonomiczna na temat modelowanego i prognozowanego zjawiska, która jest szczególnie pomocna w rozpoznaniu zmian strukturalnych, może się okazać niewystarczająca do wykrycia powolnych zmian mechanizmów ekonomicznych. Uzmiennienie parametrów wynikające ze zmian strukturalnych następuje właściwie już na etapie budowy modelu mającego służyć do prognoz. Problemem może tylko być stwierdzenie, czy zachodzące w okresie bezpośrednio poprzedzającym prognozę zmiany (uwzględnione za pomocą zmiennych zero-jedynkowych) będą miały charakter trwały. Postępowanie zmierzające do wykrycia i uwzględnienia w prognozie zmienności parametrów wynikającej z powolnych zmian mechanizmów ekonomicznych jest bardziej złożone, stąd też w referacie uwagę skupiono na tym właśnie przypadku.

Jak już wspomniano, jedną z metod badania tego rodzaju niestałości ocen parametrów jest wykonanie estymacji rekurencyjnej przy wykorzystaniu klasycznej MNK, polegającej na estymacji parametrów modelu na rozszerzającej się próbie danych empirycznych. Otrzymane w jej wyniku szeregi ocen parametrów strukturalnych modelu stanowią materiał do dalszej analizy. Ma ona doprowadzić do odpowiedzi na pytania: czy wartości ocen różnią się istotnie od siebie, czy w szeregach tych można zaobserwować trendy, których kontynuację należałoby uwzględnić w prognozie? Spośród wielu przeprowadzonych estymacji (ok. 100 wariantów zależności ekonomicznych badanych na danych o różnej częstotliwości) jako ilustrację omawianych problemów związanych z niestabilnością parametrów wybrano trzy równania o postaci liniowej, opisujące podstawowe mechanizmy ekonomiczne:

- zmienność wydatków na żywność (*wydatki*) w zależności od dochodów ludności (*dochody*) i cen żywności (*cena*); estymacja na danych rocznych 1985-2001 dla Polski, ceny stałe roku 1978;
- zmienność przeciętnego nominalnego wynagrodzenia brutto w gospodarce (*wynnom*) w zależności od wydajności pracy (średniej z dwóch ostatnich okresów, *wydajność*), inflacji opóźnionej o jeden okres (indeks jednopodstawowy, 1997=100, *inflacja*), stopy bezrobocia opóźnionej o trzy okresy (*stopa bezrobocia*); estymacja na danych kwartalnych dla Polski 1999.1-2004.4;
- zmienność średniej stopy oprocentowania kredytów rocznych w bankach komercyjnych (*rkredyt*) w zależności od stopy lombardowej NBP (średniej z dwóch ostatnich okresów, *rlom*) oraz zmiennej objaśnianej opóźnionej o jeden okres; estymacja na danych kwartalnych dla Polski 1997.1-2003.4.

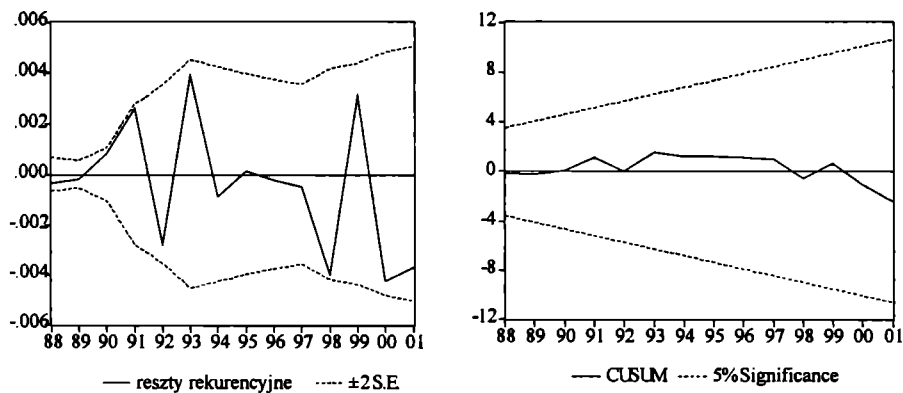
Wyniki estymacji rekurencyjnych wskazywały w każdym przypadku na istotność użytych zmiennych objaśniających i wysoki stopień dokładności opisu badanych zależności. Wybrane równania uznano za przypadki reprezentatywne dla wyników przeprowadzonych badań.

Oceny stabilności parametrów dokonywano na podstawie współczynnika zmienności oraz wykresów ocen parametrów rekurencyjnych, reszt rekurencyjnych i testu CUSUM (por. rys. 1-6). W lewych kolumnach rys. 1 i 5 oraz na rys. 3a przedstawiono wartości ocen parametrów uzyskiwane w estymacji rekurencyjnej, z zaznaczonym przedziałem ± 2 odchyłeń standardowych. W prawych kolumnach rys. 1 i 5 oraz na rys. 3b pokazano wartości ocen parametrów uzyskiwane w estymacji rekurencyjnej z ostatnich 8 lub 9 podprób (tzw. krótka próba). Do każdej linii wartości ocen parametrów dopasowano linię trendu. Skuteczność uwzględnienia w prognozie zmian parametrów oceniano, porównując wartości błędu MAPE dla prognoz wygasłych uzyskanych przy stałych (średnich z próby estymacyjnej) wartościach parametrów modelu oraz prognoz wynikających z modelu o parametrach uzmiennianych według trendów ocen parametrów, wyznaczonych na całej próbie i na próbie krótkiej (por. tab. 1). Dla poszczególnych równań przyjęto następujące okresy weryfikacji prognoz: *wydatki* – 2002-2003, *wynnom* – 2005.1-2005.2, *rkredyt* – 2004.1-2004.4.



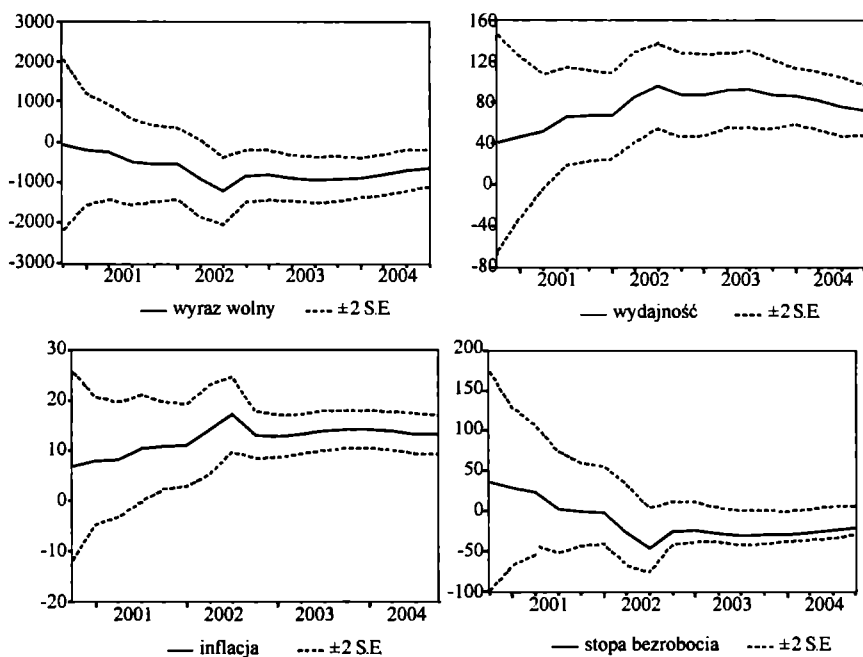
Rys. 1. Wartości ocen parametrów równania *wydatki* uzyskane w estymacji rekurencyjnej

Źródło: opracowanie własne.



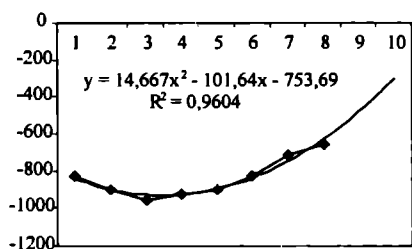
Rys. 2. Reszty rekurencyjne i wartości testu CUSUM dla równania *wydatki*

Źródło: opracowanie własne.

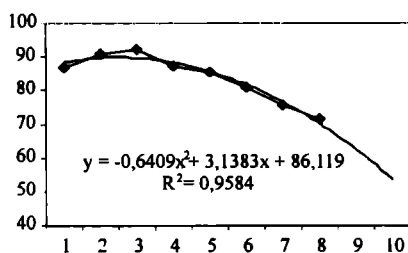


Rys. 3a. Wartości ocen parametrów równania *wynnom* uzyskane w estymacji rekurencyjnej

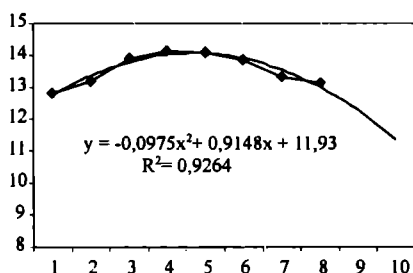
Źródło: opracowanie własne.



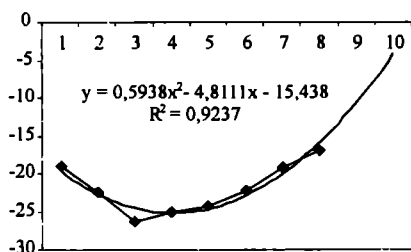
wyraz wolny, oceny z 8 ostatnich podprób
i linia ich trendu z prognozą



wydajność, oceny z 8 ostatnich podprób
i linia ich trendu z prognozą



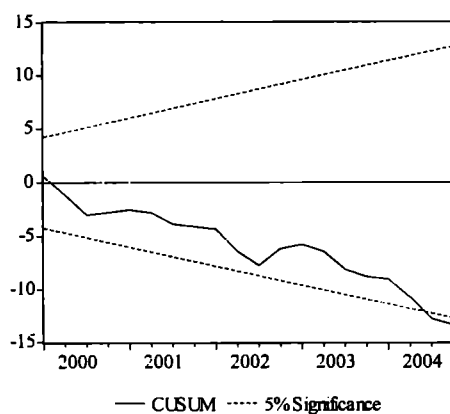
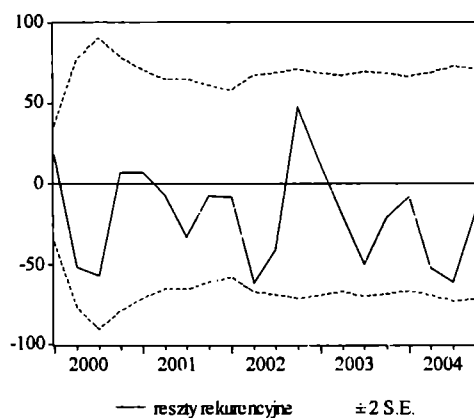
inflacja, oceny z 8 ostatnich podprób
i linia ich trendu z prognozą



stopa bezrobocia, oceny z 8 ostatnich podprób
i linia ich trendu z prognozą

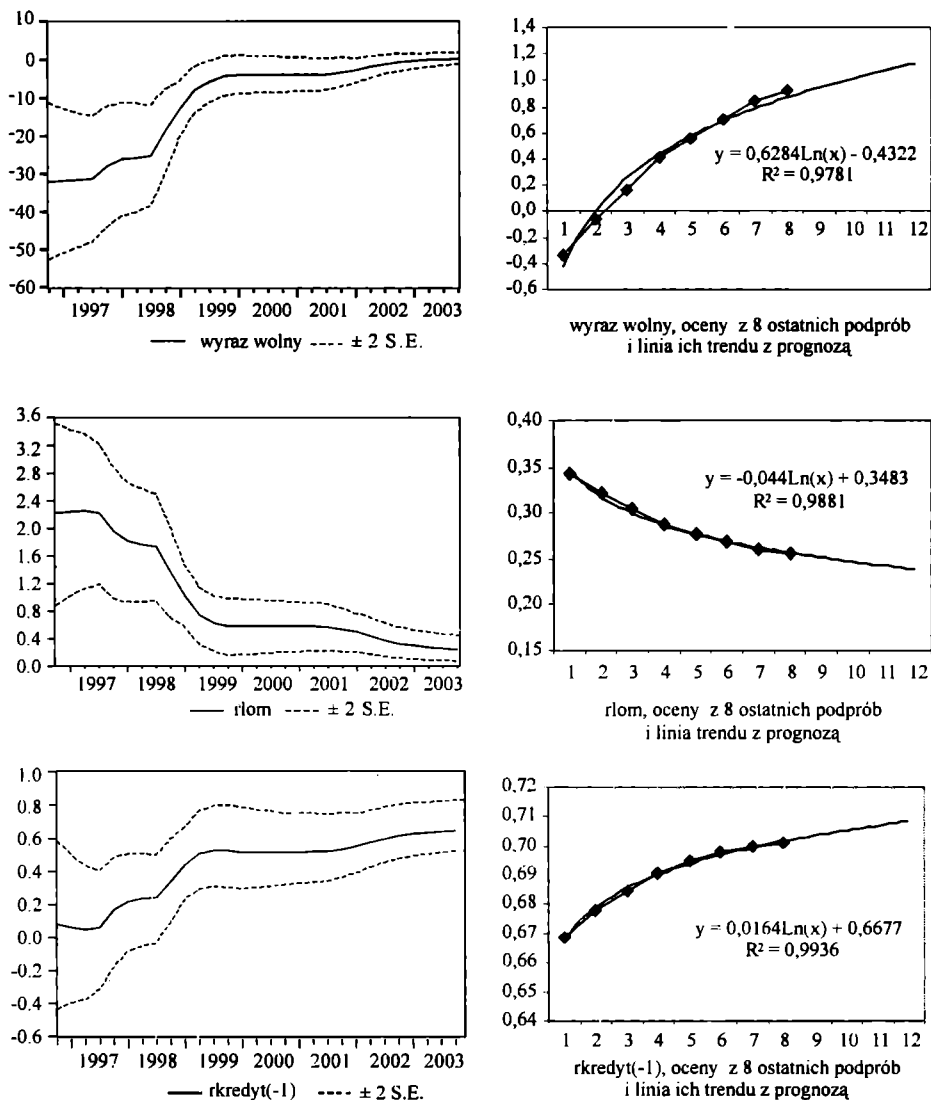
Rys. 3b. Wartości ocen parametrów równania *wynnom* uzyskane w estymacji rekurencyjnej

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Reszty rekurencyjne i wartości testu CUSUM dla równania *wynnom*

Źródło: opracowanie własne.



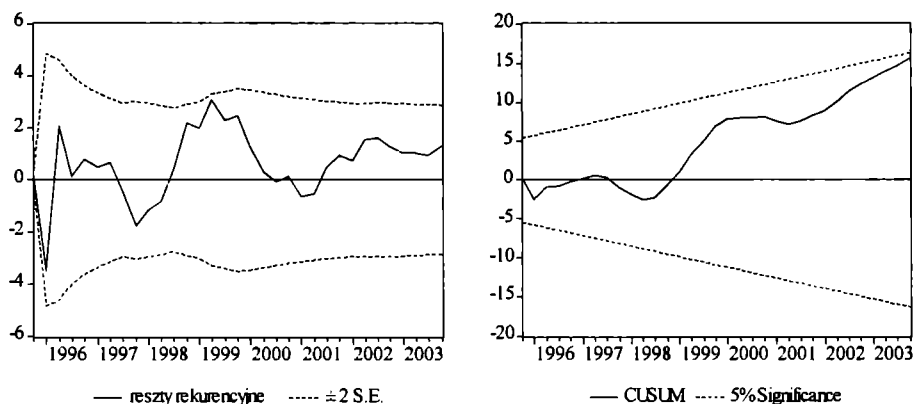
Rys. 5. Wartości ocen parametrów równania *rkredyt* uzyskane w estymacji rekurencyjnej

Źródło: opracowanie własne.

Analizując wartości testu CUSUM (por. rys. 2, 4 i 6), we wszystkich równaniach stwierdzono stabilność parametrów na poziomie istotności 5%, ale w przypadku równań *wynnom* i *rkredyt* stabilność można nazwać graniczną.

Zgodnie z oczekiwaniami uzmiennienie parametrów według zaobserwowanych trendów na krótkiej próbie wpłynęło korzystnie na jakość prognoz mierzoną MAPE. Dla

każdego równania błędy prognoz wyznaczonych przy stałych (średnich z próby estymacyjnej) wartościach parametrów były wyższe od błędów prognoz wyznaczonych z modelu o parametrach uzmiennionych (por. tab. 1). Tym samym okazało się, że mimo stwierdzonej na podstawie testu CUSUM stabilności parametrów, warto było zastosować w prognozowaniu ich uzmiennienie. Do uzmiennienia parametrów lepiej wykorzystać trendy ich wartości zaobserwowane na krótkiej próbie (najbliższej okresowi prognozowania) niż na całej, co potwierdzają wartości MAPE dla równania *rkredyt*.



Rys. 6. Reszty rekurencyjne i wartości testu CUSUM dla równania *rkredyt*

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Zestawienie wyników badań

Równanie	Wniosek z wykresów ocen parametrów	Wskazania testów stabilności modelu	Współczynniki zmienności ocen parametrów	MAPE
Wydatki na żywność (<i>wydatki</i>)	słabe trendy liniowe, widoczne wyraźniej na krótkiej próbie	stabilność	7%, -14%, 9% (krótka próba)	9,5 ^a 8,3 ^b
Wynagrodzenia nominalne (<i>wynnom</i>)	słabe trendy nieliniowe, widoczne wyraźniej na krótkiej próbie	stabilność, ale o charakterze granicznym	-13%, 9%, 4% -15% (krótka próba)	1,5 ^a 1,3 ^b
Stopa oprocentowania kredytów (<i>rkredyt</i>)	wyraźne trendy nieliniowe, niejednorodne na całej próbie, „gładkie” na krótkiej	stabilność, ale o charakterze granicznym	-129%, 76%, 41% (cała próba) 111%, 10%, 2% (krótka próba)	9,7 ^a 5,5 ^b 15,7 ^c

^a – prognoza przy stałych (średnich z próby) ocenach parametrów modelu, ^b – prognoza z modelu o parametrach uzmiennianych według trendów na krótkiej próbie, ^c – prognoza z modelu o parametrach uzmiennianych według trendów na całej próbie.

Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie

Na podstawie wyników badań (rys. 1-6 i tab. 1) można sformułować następujące wnioski praktyczne dotyczące analizy stabilności parametrów modelu ekonometrycznego w procesie prognozowania:

- Do wyników testów stabilności parametrów zawartych w programach komputerowych należy podchodzić z ostrożnością. Wskazanie testów na stabilność parametrów może być mylące i wynikać z porównywania zwykle dużej zmienności parametrów opartych na początkowych estymacjach rekurencyjnych (o małej liczbie stopni swobody) oraz stosunkowo małej zmienności parametrów opartych na liczniejszych próbach. Owa mała zmienność może być jednak pozorna, co będzie widoczne dopiero przy wycinkowej analizie. Przykładem tego jest równanie dla stopy oprocentowania kredytów. Można sobie też wyobrazić sytuację, w której testy wskazują na niestabilność parametrów spowodowaną dużą zmiennością ich ocen uzyskanych jedynie w początkowych estymacjach rekurencyjnych. Podkreśla to potrzebę zwrócenia szczególnej uwagi na trendy występujące w szeregach ocen parametrów z prób najbliższych okresowi prognozowania. Należy też zauważyć, że na podstawie zastosowanych testów otrzymujemy informację o stabilności lub nie całego równania, nie można jednak stwierdzić, który z parametrów modelu wykazuje niestabilność (wskazówką jest jedynie wykres rekurencyjnych ocen parametrów).
- Niska wartość błędu prognozy *ex post* poza próbą estymacyjną może stanowić wystarczającą przesłankę do stwierdzenia, że parametry modelu prognostycznego są stabilne.
- Należy mieć ograniczone zaufanie do zaobserwowanych trendów, zwracając szczególną uwagę na skalę zmian i ich jednorodność.
- Większość zjawisk i mechanizmów ekonomicznych przebiega stabilnie.
- Trudno określić regułę dla związku częstotliwości danych ze stabilnością parametrów, bardziej istotna wydaje się zależność stabilności od charakteru analizowanego zjawiska.

Pewnym zaskoczeniem były wyniki dotyczące równania *wydatki*, dla którego próbą analizy były lata 1985-2001. Z badań bowiem wynika, że mechanizm kształtowania wydatków na żywność, opisany zmiennością dochodów ludności i cen żywności, nie ulegał istotnym zmianom, mimo bardzo różnych w tym okresie warunków gospodarczo-politycznych. Świadczy o tym stabilność parametrów równania wykazana testem CUSUM.

Literatura

- Anderson G.J., Blundell R.W., *Estimation and Hypothesis Testing in Dynamic Singular Equation Systems*, "Econometrica" 1982, vol. 50.
 Andrews D.W.K., *Stability Comparison of Estimators*, "Econometrica" 1986, vol. 54.

- Andrews D.W.K., *Tests for Parameter Instability and Structural Change With Unknown Change Point*, "Econometrica" 1993, vol. 61.
- Andrews D.W.K., *Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point: A Corrigendum*, "Econometrica" 2003, vol. 71.
- Bai J., *Testing for Parameter Constancy in Linear Regressions: An Empirical Distribution Function Approach*, "Econometrica" 1996, vol. 64.
- Bai J., Perron P., *Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes*, "Econometrica" 1998, vol. 66.
- Brown L.R., J. Durbin, J.M. Evans, *Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time*, "Journal of the Royal Statistical Society", Series B, 1975.
- Chow C., *Test of Equality between Sets of Coefficients in two Linear Regressions*, "Econometrica" 1960, vol. 28.
- Gourieroux C., A. Holly, A. Monfort, *Likelihood Ratio Test, Wald Test, and Kuhn-Tucker Test in Linear Models with Inequality Constraints on the Regression Parameters*, "Econometrica" 1982, vol. 50.
- Kramer W., Plumberger W., Alt R., *Testing for Structural Change in Dynamic Models*, "Econometrica" 1988, vol. 56.
- Lee L.F., Porter R.H., *Switching Regression Models with Imperfect Sample Separation Information-With an Application on Cartel Stability*, "Econometrica" 1984, vol. 52.
- Łapińska-Sobczak N., *Analysis of Stability of Econometric Model Parameters*, Prace Instytutu Ekonometrii i Statystyki UŁ, seria D, nr 95, Łódź 1992.
- Morimune K., Tsukuda Y., *Testing a Subset of Coefficients in a Structural Equation*, "Econometrica" 1984, vol. 52.
- Plumberger W., Kramer W., K. Kontrus, *A New Test for Structural Stability in the Linear Regression Model*, "Journal of Econometrics" 1988, vol. 40.
- Tanaka K., *Notes and Comments: Non-Normality of the Lagrange Multiplier Statistic for Testing the Constancy of Regression Coefficients*, "Econometrica" 1983 vol. 51.
- Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S., *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria. Przykłady. Zadania*, PWN, Warszawa 2003.

PARAMETER STABILITY OF THE ECONOMETRIC MODEL AND THE FORECAST ACCURACY

Summary

After estimation econometric models are used for forecasting. The usual assumption is that the parameters are constant in the period of forecast. However, if the structural change (rapid or slow movement in a mechanism described by the model) takes place the reasonable approach is to vary parameters in the forecast. Here, we consider the problem of instability of the parameters in the econometric models. We apply tests based on the recursive residuals and recursive coefficients to detect model instability. We also examine trends in the parameters through the estimation sample in the long as well in the short (latest estimates in the recursive estimation) run. Then we apply constant and varying (according to the best trend line) parameters to make forecast on the econometric model. We calculate forecast errors to compare the results. The data used are quarterly and annual series for the Polish economy.