

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

MODEL WIELOPASMOWY W TEORII PÓŁPRZEWODNIKÓW
O STRUKTURZE BLENDY CYNKOWEJ W POLU MAGNETYCZNYM

Andrzej Obuchowicz

Praca doktorska

wykonana pod kierunkiem

prof. dr hab. Jacka Własaka

Wrocław 1992

Panu profesorowi Jackowi Własakowi
memu Przewodnikowi na drogach fizyki
i Przyjacielowi

Dziękuję

SPIS TREŚCI

	str.
Wprowadzenie.....	5
I. Anizotropia przejść magnetoptycznych w związkach półprzewodnikowych III-V.....	11
I.1. Wstęp.....	11
I.2. Model wielopasmowy.....	15
I.2.1. Hamiltonian kp	15
I.2.2. Procedura "diagonalizacji" hamiltonianu efektywnego.....	17
I.2.3. Hamiltonian efektywny w modelu pięciopasmowym..	20
I.2.4. Funkcje własne w modelu pięciopasmowym.....	25
I.3. Rezonanse magnetoptyczne w związkach półprzewodnikowych III-V.....	28
I.3.1. Hamiltonian oddziaływania elektron-foton.....	28
I.3.2. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych.....	30
I.3.3. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych.....	36
I.3.4. Porównanie z doświadczeniem.....	37
II. Donor w polu magnetycznym w związkach półprzewodnikowych III-V.....	39
II.1. Wstęp.....	39
II.2. Wodoropodobny donor w polu magnetycznym.....	43
II.2.1. Równanie ogólne.....	43
II.2.2. Metody rozwiązywania równania ogólnego.....	45
II.2.3. Nowy typ funkcji próbnej dla stanu podstawowego donoru w polu magnetycznym.....	51

WPROWADZENIE

Związki półprzewodnikowe III-V są od blisko czterdziestu lat przedmiotem badań fizyków. Szczególnie w ostatnim dziesięcioleciu, wraz z nowo odkrytymi możliwościami zastosowań, zwłaszcza GaAs w układach trój- i dwuwymiarowych, wzrosło zainteresowanie tymi materiałami.

Większość związków III-V krystalizuje w strukturze blendy cynkowej. Struktura ta określona jest przez powierzchniowo centrowaną sieć kubiczną z bazą dwuatomową, o odległości między atomami bazy równej $1/4$ długości głównej przekątnej elementarnego sześcianu. Strukturze tej odpowiada grupa punktowa T_d^2 i przestrzenna $F(\bar{4},3,m)$.

Struktura pasmowa związków III-V charakteryzuje się tym, że ekstrema pasm przewodnictwa i walencyjnego leżą w pobliżu punktu Γ strefy Brillouina. Symetria ogranicza możliwe reprezentacje pasm w punkcie Γ do Γ_6, Γ_7 i Γ_8 [1]. Rysunek 1 przedstawia typową strukturę pasmową związków półprzewodnikowych III-V w pobliżu punktu Γ : czterokrotnie zdegenerowane w punkcie Γ pasma dziur ciężkich i lekkich (Γ_8^V) oraz dwukrotnie zdegenerowane pasmo spin-orbitalnie odcepione (Γ_7^V); dwukrotnie zdegenerowane, sferyczne i nieparaboliczne dolne pasmo przewodnictwa (Γ_6^C); oraz wyższe pasma przewodnictwa (Γ_8^C, Γ_7^C) posiadające podobną symetrię jak

odpowiednie pasma walencyjne. Inne pasma zostały na rysunku 1 opuszczone.

Magnetooptyczne badania półprzewodników najpełniej potwierdziły przewidzianą przez Landaua [2] strukturę poziomów energetycznych elektronu w silnym polu magnetycznym. Pierwsze prace z tej dziedziny (Dresselhaus i in. [3,4]) były poświęcone wyznaczeniu mas efektywnych elektronów i dziur za pomocą pomiaru cyklotronowej częstości rezonansowej. W zależności od kierunku pola magnetycznego względem osi krystalograficznych otrzymano różne masy. Świadczyło to o tym, że powierzchnie izoenergetyczne nośników odbiegają od kształtu kulistego. Już te pierwsze, z naszego punktu widzenia dość niedokładne, badania wykazały, że opis pasm za pomocą jednego parametru (masy efektywnej) jest niewystarczający [5]. Stopniowo rozbudowywano model opisujący strukturę pasmową wprowadzając dalsze parametry. Kane [6] oraz Bowers i Yafet [7] zaproponowali sferyczny model $\mathbf{k}\mathbf{p}$, który uwzględniał oddziaływanie trzech pasm Γ_6^c , Γ_8^v i Γ_7^v . Model ten dość dobrze opisywał pasmo przewodnictwa związków półprzewodnikowych z wąską przerwą wzbronioną jak InSb, InAs czy $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ [8], gdzie dominujące są oddziaływania między tymi trzema pasmami. Rozwiązywał także w sposób dość prosty i analityczny zagadnienie wartości i funkcji własnych hamiltonianu. Herman i Weisbuch [9] wskazują, że model ten nie jest wystarczający do właściwego określenia wartości masy efektywnej m^* i czynnika Landego g^* . Badania doświadczalne rezonansu cyklotronowego w

wysokich polach magnetycznych wykazują nieparaboliczność pasm [10], a dane dla różnych kierunków pola niesferyczność [11]. Pidgeon i Brown [12] zaproponowali rozwiązanie tych problemów przez rozszerzenie modelu trójpasmowego o oddziaływanie **kp** z innymi pasmami z dokładnością do drugiego rzędu zaburzeń. Model ten w pełni rozwinęli Grisar i in. [13] (także [14]) oraz Weiler i in. [15]. Ostatnio wskazano [16,17] na konieczność uwzględnienia wyższych pasm przewodnictwa Γ_8^c i Γ_7^c do opisu GaAs. Niniejsza praca, podobnie jak [18], rozszerza proponowany w [16 i 17] model pięciopasmowy o oddziaływanie **kp** z pozostałymi pasmami uwzględnione z dokładnością do drugiego rzędu zaburzeń.

Alternatywnym do wielopasmowego modelu **kp** ([6,7,12+14, 17+18]) jest podejście Luttingera [19] (również [20+23]). Przy użyciu metody niezmienników otrzymywano tam efektywny jednopasmowy hamiltonian zawierający nieparaboliczność (do członów k^4), niesferyczność i oddziaływanie spinowe. Jak wykazał Golubev i in. [11] metoda ta dość dobrze opisuje anizotropię rezonansu cyklotronowego.

W rozdziale I niniejszej pracy bazując na rachunku zaburzeń **kp** z uwzględnieniem rozważań teoriogrupowych, otrzymano pełny pięciopasmowy hamiltonian efektywny (macierz 14x14) dla kryształów o symetrii blendy cynkowej dla dowolnego kierunku pola magnetycznego względem osi krystalograficznych. Oddziaływania **kp** z dalszymi pasmami uwzględniono z dokładnością do drugiego rzędu zaburzeń.

Współczynniki absorpcji dla określonych przejść

magnetoptycznych wykazują zależność od kierunku pola magnetycznego w stosunku do kierunków krystalograficznych materiału [11,24+28]. Wyjaśnienie tych zmian dla kierunków [100], [110] i [111] zawierają prace Weiler [15] oraz Pfeffera i Zawadzkiego [17], dla pola w płaszczyznach (110) i (100) prace Własaka [29,30], i dla dowolnego kierunku pola magnetycznego prace Własaka [31] (przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej) oraz Obuchowicza i Własaka [18] (przejścia indukowane warpingiem).

W drugiej części rozdziału I wyliczono hamiltonian oddziaływania elektron-foton dla dowolnego kierunku pola magnetycznego. Następnie znaleziono reguły wyboru przejść magnetoptycznych jedno- i dwufotonowych indukowanych różnymi mechanizmami niesferyczności dla różnych polaryzacji.

Każdy kryształ zawiera znaczną ilość domieszek. W najczystszych próbkach związków III-V znajduje się ich około $10^{12}/\text{cm}^3$. Znaczna część to atomy z grup IV i VI wprowadzające zlokalizowane stany donorowe do struktury energetycznej kryształu.

Płytkie stany donorowe w półprzewodnikach w obecności zewnętrznego pola magnetycznego są przedmiotem badań doświadczalnych i teoretycznych od ponad trzydziestu lat, ze względu na ich wpływ na zjawiska transportu i na własności optyczne. Zagadnienie donoru w polu magnetycznym rozpatrywane w ramach modelu masy efektywnej jest formalnie identyczne z opisem atomu wodoru w próżni w obecności pola

magnetycznego, a zatem staje się interesujące dla fizyki atomu i astrofizyki.

Pierwsza część rozdziału drugiego niniejszej pracy zawiera opis donoru w polu magnetycznym w modelu jednopasmowym czyli w przybliżeniu masy efektywnej. Zamieszczono tam również przegląd literatury dotyczącej tego zagadnienia [32÷54]. W szczególności przeanalizowano zależność form funkcji próbnych używanych przez różnych autorów od zakresu pól magnetycznych, dla których przeprowadzali oni obliczenia.

Coraz dokładniejsze metody eksperymentalne wskazują na niewystarczalność modelu jednopasmowego do opisu półprzewodników z wąską przerwą wzbronioną [55÷70]. Stopniowo więc powstawał opis uwzględniający wpływ większej ilości pasm. Rozwiązanie zagadnienia stanów donorowych w związkach III-V w obecności pola magnetycznego przy użyciu modelu trójpasmowego zaproponował Larsen [38]. Wyznaczył on energie stanu podstawowego i jednego stanu wzbudzonego używając próbnych funkcji obwiedni, które na granicy zerowego pola magnetycznego sprowadzają się do funkcji wodoropodobnych. Zawadzki i Własak [71] wyznaczyli energie wyższych stanów wzbudzonych, podobnie Trzeciakowski i in. [40]. Wszystkie powyższe teorie są zgodne z doświadczeniem w określonych przedziałach pola magnetycznego, Larsena w granicach niskich pól, dwie następne w granicy pól wysokich. Funkcję próbną odpowiednią dla całego zakresu pól magnetycznych przedstawiono w pracy [18]. Łączy ona sukcesy

pracy pracy Larsena dla niskich pól i prac [40] i [71] dla pól wysokich. Funkcja ta dla pola zerowego przechodzi w funkcję wodorową, a dla nieskończonego w funkcję elektronu swobodnego w polu magnetycznym (Yafet [37]).

We wszystkich pracach dotychczasowych potencjał kulombowski domieszki traktowano jako wolnozmienny na przestrzeni komórki elementarnej. Utrzymanie w mocy powyższego założenia prowadzi do skomplikowanych obliczeń numerycznych [40] lub też do konieczności zaniedbywania osobliwych (dających nieskończone wkłady do energii) wyrazów w hamiltonianie efektywnym w celu uzyskania rozwiązania o symetrii "s" dla stanu podstawowego [18,71].

Rozwiązanie zagadnienia stanu podstawowego płytkiego donoru w związkach półprzewodnikowych III-V w obecności pola magnetycznego, jest treścią ostatniej części drugiego rozdziału niniejszej pracy. Proponuje się tam podział potencjału kulombowskiego, który dotychczas był traktowany jako wolnozmienny na przestrzeni komórki elementarnej, na dwie składowe : szybkozmienną i wolnozmienną. Pierwsza z nich uwzględniona jest w hamiltonianie niezaburzonym, druga natomiast poddana jest procedurze wariacyjnej [72].

I. ANIZOTROPIA PRZEJŚĆ MAGNETOOPTYCZNYCH W ZWIĄZKACH PÓŁPRZEWODNIKOWYCH III-V

I.1. WSTĘP

W obecności pola magnetycznego pasma energetyczne półprzewodników o strukturze blendy cynkowej (rys.1) podlegają kwantyzacji Landaua tworząc ciągi ("drabiny") poziomów energetycznych. Dwa z nich są to stany pasma przewodnictwa Γ_6 , różniące się między sobą rzutem spinu. W każdym z tych stanów spin nie jest dobrze określony z powodu oddziaływania spin-orbita, jednak wkład rzutu $s=+1/2$ jest większy dla "drabiny" zawierającej najniższy poziom energii (stany "a" według notacji Pidgeona i Browna [12]), podczas gdy w drugim ciągu stanów przeważa rzut $s=-1/2$ (stany "b"). Cztery niższe "drabiny" stanowią stany pasma walencyjnego Γ_8^v , dwie z nich o dużych odstępach energetycznych odpowiadające lekkim dziurom (a^+ , b^+), podczas gdy dwie o małych odstępach energetycznych odpowiadają stanom dziur ciężkich (a^- , b^-). Podobnie można opisać stany Landaua pasm pozostałych.

Istnieją dwie metody wykorzystania technik teorii grup do wyznaczania pełnego hamiltonianu efektywnego opisującego

pewien zbiór oddziaływujących pasm energetycznych.

Pierwsza, zaproponowana przez Kane'a [6], polega na wyznaczeniu międzypasmowych elementów macierzowych $p_{\alpha\beta}$ hamiltonianu zaburzenia $\mathbf{k}p - \hbar \mathbf{k} p_{\alpha\beta} / m$ - oraz hamiltonian oddziaływania spin-orbita. Kane wyliczył ponadto wszystkie możliwe elementy drugiego rzędu, generowane przez wyżej wymienione mechanizmy, pomiędzy stanami pasma przewodnictwa S (grupa pojedyncza Γ_1) i pasma walencyjnego X, Y, Z (grupa pojedyncza Γ_{15} - według notacji Parmentera [1]). Symbole S, X, Y i Z oznaczają funkcje periodyczne przekształcające się jak funkcje atomowe s, p_x , p_y i p_z przy działaniu operacji symetrii grupy tetraedrycznej T_d . Niezerujące się elementy macierzowe pierwszego i drugiego rzędu są parametrami dopasowania zaburzonego hamiltonianu. Hamiltonian zawiera elementy o postaci iloczynu parametrów dopasowania z formami liniowymi i kwadratowymi $\mathbf{k}$. Na marginesie warto tu dodać, że pole magnetyczne do najprostszej wersji modelu Kane'a (tzw. modelu trójpoziomowego) wprowadzili Bowers i Yafet [7].

Drugą metodą wyznaczania hamiltonianu efektywnego zaproponował Luttinger [19], który użył analizę teorii grup do wyznaczenia wszystkich dopuszczalnych elementów macierzowych z $\mathbf{k}$ i $\mathbf{k}x\mathbf{k}$ pomiędzy stanami pasma walencyjnego Γ_8 w obecności pola magnetycznego. Jego rezultaty zawierają parametry dopasowania, które są liniową kombinacją parametrów wyznaczonych przez Kane'a, za wyjątkiem dodatkowego parametru q , który nie zeruje się wówczas, gdy stanami pośrednimi są stany pasm spin-orbitalnie

rozczepionych. Hamiltonian Luttingera został rozwinięty przez Roth i in. [73] poprzez włączenie pasma Γ_7^v . Pidgeon i Brown [12] włączyli do analizy pasmo przewodnictwa Γ_6 , łącząc rezultaty Kane'a, Bowersa i Yafeta oraz Roth i in.. Model ich nie uwzględniał braku symetrii inwersyjnej kryształu o strukturze blendy cynkowej. Pełne rozwinięcie modelu o efekty braku symetrii inwersyjnej i degeneracji pasma Γ_8 zawarli w swych pracach niezależnie Grisar i in. [13] (również [14]) oraz Weiler i in. [15]. W pracach [16,17,25,26,74] wskazano na konieczność rozwinięcia modelu o wyższe pasma przewodnictwa Γ_7^c i Γ_8^c przy opisie GaAs. W pracy [17] autorzy rozwinęli model Bowersa i Yafeta [7] tworząc model pięciopasmowy zaniedbujący wszystkie pasma prócz Γ_8^c , Γ_7^c , Γ_6 , Γ_8^v i Γ_7^v .

W pierwszej części niniejszego rozdziału przedstawimy sposób wyznaczenia pełnego wielopasmowego hamiltonianu efektywnego uwzględniającego oddziaływanie $\mathbf{k}\mathbf{p}$ z dalszymi pasmami do drugiego rzędu zaburzeń i określonego dla dowolnego kierunku pola magnetycznego. W otrzymanym hamiltonianie można wydzielić składowe sferyczną i niesferyczną. Ta druga część ma dwie przyczyny: brak symetrii inwersyjnej kryształu o strukturze blendy cynkowej oraz czterokrotną degenerację pasma Γ_8 w punkcie Γ . Następnie wyznaczymy funkcje własne tego hamiltonianu - dokładne dla części sferycznej i poprawione zgodnie z formalizmem metody zaburzeń dla pełnego hamiltonianu.

Wyznaczenie reguł wyboru i współczynników absorpcji

wymaga znajomości hamiltonianu oddziaływania elektron-foton. W literaturze znane są dwa podejścia do opisu przejść optycznych - metoda skalarna i macierzowa. Zawadzki [75] wskazuje na wyższą użyteczność metody macierzowej w modelach wielopasmowych opisujących strukturę związków półprzewodnikowych III-V. Stosując powyższą metodę wyznaczone zostały reguły wyboru dla przejść jedno i dwufotonowych w funkcji kierunku pola magnetycznego z wyszczególnieniem wpływu różnych mechanizmów sferycznych i niesferycznych. Wyliczone reguły zawierają i uzupełniają dotychczasowe wyniki teoretycznych rozważań [13+15,29,30]. Przewidują także i wyjaśniają wszystkie mierzone dotychczas przejścia [24,27,28], za wyjątkiem silnej drugiej harmonicznej rezonansu cyklotronowego dla pola magnetycznego w kierunku [100] i polaryzacji $\sigma_L + \sigma_R$.

I.2. MODEL WIELOPASMOWY

I.2.1. Hamiltonian kp.

Wstępnym równaniem naszych rozważań jest równanie stacjonarne Schrödingera dla układu jednoelektronowego w polach periodycznym kryształu i magnetycznym :

$$\left[\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V_o(\mathbf{r}) + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V_o(\mathbf{r})) \mathbf{P} + \mu_B \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma} \right] \Psi = E \Psi \quad (1.1)$$

gdzie $\mathbf{P} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ jest pędem kinetycznym, $\mathbf{p} = i\hbar\nabla$, $\mathbf{A}$ potencjałem wektorowym pola magnetycznego o indukcji $\mathbf{B}$, e i m są odpowiednio wartością bezwzględną ładunku i masą elektronu swobodnego, μ_B magnetonem Bohra, $V_o(\mathbf{r})$ potencjałem periodycznym sieci. Oddziaływanie spin-orbita i spinowe operatory Pauli'ego są podane w postaci standartowej.

Ponieważ włączenie pola magnetycznego narusza symetrię translacyjną hamiltonianu z wyrażenia (1.1) funkcjami własnymi tego równania nie są funkcje blochowskie. Rozwiązania poszukuje się w postaci [23] :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_l a_l f_l(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

gdzie sumowanie przebiega po pasmach energetycznych, $u_l(\mathbf{r})$ są periodycznymi amplitudami Luttingera-Kohna spełnia-

jącymi równanie w ekstremum pasma :

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}_0) + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V_0(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{p} \right] u_{l0} = E_{l0} u_{l0} \quad (1.3)$$

oraz warunek ortogonalności :

$$\frac{1}{\Omega} \langle u_{ko} | u_{lo} \rangle = \delta_{kl} \quad (1.4)$$

Ω - objętość komórki elementarnej,

$f_l(\mathbf{r})$ - wolnozmienna funkcja współrzędnych.

Warunek ortonormalności (1.2) przy uwzględnieniu normalizacji $f_l(\mathbf{r})$ w całym kryształ i (1.4) wyraża się następująco :

$$\sum_l |a_l|^2 = 1 \quad (1.5)$$

Po podstawieniu w równaniu (1.1) za Ψ wyrażenie (1.2),

otrzymuje się układ równań :

$$\begin{aligned} \sum_l \left[\frac{1}{2m} (p^2 u_l) + \frac{1}{m} (\mathbf{p} u_l) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2m} u_l p^2 + \frac{e}{2m} (\mathbf{p} u_l) \cdot \mathbf{A} + \frac{e}{2m} u_l (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + \right. \\ \left. + \frac{e}{2m} \mathbf{A} (\mathbf{p} u_l) + \frac{e}{2m} u_l (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 u_l + V_0(\mathbf{r}) + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V_0) (\mathbf{p} u_l) \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla V_0) u_l \cdot \mathbf{p} + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V_0) u_l \cdot \mathbf{e} \mathbf{A} \right] f_l(\mathbf{r}) = \varepsilon \sum_l f_l(\mathbf{r}) u_l \quad (1.6) \end{aligned}$$

Obie strony równań, pomnożone przez $u_{l'o}^*$, a następnie całkowane po komórce elementarnej przy założeniu, że $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ i $f_l(\mathbf{r})$ są wolnozmiennie w tym obszarze, przekształcają się do postaci :

$$\sum_l a_l \left[\left(\frac{p^2}{2m} + E_{l0} - E \right) \delta_{l'l} + \pi_{l'l} \cdot \mathbf{p} + \left(\frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V_0) \cdot \mathbf{p} \right)_{l'l} + \mu_B \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{l'l} \right] f_l(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.7)$$

gdzie

$$\pi_{l'l} = \frac{1}{m} \langle u_{l'o} | \mathbf{p} + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V_o(\mathbf{r})) | u_{lo} \rangle \quad (1.8)$$

Układ równań (1.6) możemy przepisać w postaci macierzowej :

$$[\mathbf{H}_o + \mathbf{H}' - E\mathbf{I}]\mathbf{F} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{gdzie } H_{ol'l} = E_{lo} \delta_{l'l} \quad (1.10)$$

$$H'_{ll} = \frac{p^2}{2m} \delta_{ll} + \pi_{ll} \mathbf{p} + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} [(\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V_o) \mathbf{p}]_{ll} + \mu_B \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})_{ll}, \quad (1.11)$$

$\mathbf{I}$ - macierz jednostkowa, $\mathbf{F}$ nieskończona kolumna o składowych $a_l f_l(\mathbf{r})$.

Ponieważ do otrzymania równania (1.9) nie były stosowane żadne przybliżenia, jest ono równoważne równaniu (1.1).

1.2.2. Procedura "diagonalizacji" hamiltonianu efektywnego

Wyrażenie (1.9) zawiera macierz hamiltonianu nieskończonego wymiaru uwzględniającą nieskończoną ilość pasm energetycznych. Istnieją różne podejścia do rozwiązania równania (1.9). Pierwsze (Luttinger i Kohn [23]) polega na zastosowaniu transformacji kanonicznej do eliminacji pozadiagonalnych elementów $\pi_{ll}, \mathbf{p}$ i sprowadzeniu zagadnienia do równania jednopasmowego z masą efektywną w miejsce masy elektronu swobodnego. Jak wykazali Zak i Zawadzki [76] stosowanie powyższej procedury wymaga silnie określonych warunków zależnych od konkretnego problemu, dla rozwiązania którego stosujemy równanie (1.9). W ogólności, energia

elektronu obliczona od dna pasma musi być mała w stosunku do przerw energetycznych pomiędzy sąsiednimi pasmami (za [75]). Znaczna większość półprzewodników o strukturze blendy cynkowej to materiały, w których istotny wpływ na zjawiska ma kilka stosunkowo bliskich pasm. Stąd, aby to uwzględnić, drugie podejście do równania (1.9) bazuje na rachunku zaburzeń dla stanów kwazizdegenerowanych [77]. Procedura bazująca na tym rachunku (Bowers i Yafet [7] - model trójpasmowy, Pfeffer i Zawadzki [17] - model pięciopasmowy) uwzględnia dokładnie skończoną liczbę blisko leżących pasm, zaniedbując pozostałe. Niniejsza praca (za [14] - dla modelu trójpasmowego) wychodzi poza to przybliżenie stosując metodę, wynikiem której jest eliminacja części hamiltonianu (1.11) sprzęgającej funkcje u_m u_m , należące do pasm "istotnych", i funkcje u_l u_l , należące do pasm dalszych. Tę eliminowaną część nazwiemy częścią "niediagonalną". W wyniku takiej procedury ulegają zmianie części diagonalne hamiltonianu (1.11).

Poniżej za [78] opiszę pokrótce procedurę "diagonalizacji" hamiltonianu (1.10) przy pomocy unitarnej macierzy e^S :

$$H = e^{-S} H_0 e^S \quad (1.12)$$

Rozwijając e^S w szereg otrzymuje się:

$$H = \sum_n \{HS\}^{(n)} / n! \quad (1.13)$$

gdzie $\{HS\}^{(0)} = H$, $\{HS\}^{(1)} = [H, S]$, $\{HS\}^{(2)} = [[H, S], S], \dots$

[,] - komutator.

Hamiltonian H składa się z części "diagonalnej" $H^0 = H_0 + H_1$ niezawierającej elementów pozadiagonalnych H_{ml} i "niediagonalnej"

H_2 niezawierające elementów $H_{m'm}$ i $H_{1,1}$. Ponieważ macierz S jest również macierzą "niediagonalną" to części "diagonalne" i "niediagonalne" przetransformowanej macierzy mają postać :

$$H_d = \sum_t \{H^0 S\}^{(2t)} / (2t)! + \sum_t \{H_2 S\}^{(2t+1)} / (2t+1)! \quad (1.14)$$

$$H_{nd} = \sum_t \{H^0 S\}^{(2t+1)} / (2t+1)! + \sum_t \{H_2 S\}^{(2t)} / (2t)! \quad (1.15)$$

z warunku

$$H_{nd} = 0 \quad (1.16)$$

określa się S .

Można teraz rozłożyć S w szereg

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots \quad (1.17)$$

względem zaburzenia H' i znaleźć H_d z dokładnością do

drugiego rzędu zaburzeń. Z (1.13) i (1.14) mamy

$$H_d = H_0 + H_1 + 0.5[[H_0, S_1], S_1] + [H_2, S_1] \quad (1.18)$$

$$[H_0, S_1] = -H_2 \quad (1.19)$$

$$\text{stad} \quad H_d = H_0 + H_1 + [H_2, S_1]/2 \quad (1.20)$$

Przechodząc w (1.19) do elementów macierzowych

$$\langle j | H_0 S_1 - S_1 H_0 | n \rangle = -H_{2,jn} \quad (1.21)$$

po uwzględnieniu (1.3) otrzymujemy :

$$S_{1,jn} = -H_{2,jn} / (E_{0j} - E_{0n}) \quad (1.22)$$

Ostatecznie mamy

$$H_{dij} = H_{0ij} + H_{1ij} + \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{1}{E_{0i} + E_{0n}} + \frac{1}{E_{0j} + E_{0n}} \right) H_{2in} H_{2nj} \quad (1.23)$$

Wyrażenie to opisuje hamiltonian uwzględniający oddziaływanie między pasmami $m_1, m_2, \dots, m_N$ w sposób dokładny, natomiast wpływ pasm $l_1, l_2, \dots$ jest uwzględniony z dokładnością do P^2 (k^2). Aby określić, które elementy macierzy H_{dij} są różne od zera, wystarczy znajomość symetrii

hamiltonianu zaburzenia oraz funkcji u_{10} .

I.2.3. Hamiltonian efektywny w modelu pięciopasmowym.

Rozważamy model pięciopasmowy dla półprzewodników o strukturze blendy cynkowej, w którym za istotne przyjmujemy pasma przewodnictwa $\Gamma_8^c, \Gamma_7^c, \Gamma_6$ oraz pasma walencyjne Γ_8^v, Γ_7^v . Amplitudy Luttingera-Kohna u_i wybieram w postaci diagonalizującej hamiltonian oddziaływania spin-orbita w pasmach Γ_8^c, Γ_7^c i w Γ_8^v, Γ_7^v [12]:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= R_+ \uparrow & u_2 &= R_- \downarrow \\
 u_3 &= \sqrt{\frac{1}{3}} R_-^c \uparrow + \sqrt{\frac{2}{3}} Z^c \downarrow & u_4 &= -\sqrt{\frac{1}{3}} R_+^c \downarrow + \sqrt{\frac{2}{3}} Z^c \uparrow \\
 u_5 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} R_-^c \uparrow + \sqrt{\frac{1}{3}} Z^c \downarrow & u_6 &= \sqrt{\frac{2}{3}} R_+^c \downarrow + \sqrt{\frac{1}{3}} Z^c \uparrow \\
 u_7 &= iS \uparrow & u_8 &= iS \downarrow \\
 u_9 &= R_+^v \uparrow & u_{10} &= R_-^v \downarrow \\
 u_{11} &= \sqrt{\frac{1}{3}} R_-^v \uparrow + \sqrt{\frac{2}{3}} Z^v \downarrow & u_{12} &= -\sqrt{\frac{1}{3}} R_+^v \downarrow + \sqrt{\frac{2}{3}} Z^v \uparrow \\
 u_{13} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} R_-^v \uparrow + \sqrt{\frac{1}{3}} Z^v \downarrow & u_{14} &= \sqrt{\frac{2}{3}} R_+^v \downarrow + \sqrt{\frac{1}{3}} Z^v \uparrow
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

gdzie $R_{\pm}^{c(v)} = (X^{c(v)} \pm iY^{c(v)})/\sqrt{2}$, symbole $\uparrow$ i $\downarrow$ oznaczają funkcje spinowe, $S^{c(v)}$, $X^{c(v)}$, $Y^{c(v)}$, $Z^{c(v)}$ są funkcjami periodycznymi przekształcającymi się jak funkcje atomowe s, p_x, p_y, p_z przy działaniu operacji symetrii grupy T_d .

Postać hamiltonianu pięciopasmowego $H_{[001]}$ dla pola w

kierunku [001] kryształu w bazie (1.24) przedstawia tabela 1. Definicje parametrów występujących w tabeli 1 podaje dodatek A. Amplitudy $u_7 \div u_{14}$ stanowią bazę hamiltonianu efektywnego modelu Pidgeona-Browna. Tabela 2 zestawia parametry dopasowania najpełniejszego, jak dotychczas, hamiltonianu powyższego modelu wyznaczonego przez Weiler i in. [15]. Parametry $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \kappa$ i q definiowane w pracach [19,23,73] sprzęgają pasmo Γ_8 ze sobą ($\Gamma_8 \times \Gamma_8$). Obraz pełnej grupy podwójnej wymaga ponadto niezależnych od parametrów $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ parametrów $\Gamma_8 \times \Gamma_7$ i $\Gamma_7 \times \Gamma_7$ oznaczone jako $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \kappa'$ i κ'' . Parametr masy efektywnej F pasma przewodnictwa $\Gamma_6 \times \Gamma_6$, "liniowy w k " parametr C dla $\Gamma_8 \times \Gamma_8$, oraz parametry $\Gamma_6 \times \Gamma_8$ P i G zostały określone w pracach [4+6]. Odpowiedni parametr $\Gamma_8 \times \Gamma_7$ oznaczono przez C' . Parametr P' określany jako różny od P (np. Weiler i in. [15]), jest w rzeczywistości jemu równy, ponieważ ich definicje (wzór (A.8) - dodatek A) są identyczne i funkcje bazowe X, Y, Z dla pasm Γ_8 i Γ_7 wywodzących się z jednego pasma grupy pojedynczej Γ_{15} są tożsame. W pracy [15] wyznaczono ponadto trzy nowe parametry N_1, N_2 i N_3 . N_1 określa g -czynniki pasma przewodnictwa, podobnie jak κ w paśmie walencyjnym. N_2 i N_3 reprezentują dodatkowe sprzężenie $\Gamma_6 \times \Gamma_8$. Te parametry, podobnie jak q , są efektem rozczepienia spin-orbitalnego pasm wyższych. Parametry C, G, N_2 i N_3 są generowane przez brak symetrii inwersyjnej kryształu, zerują się dla materiałów z symetrią inwersyjną jak german, a są różne od zera dla związków o strukturze blendy cynkowej. Parametry q, γ_2 i γ_3 są tak

zwanymi parametrami warpingowymi - generowanymi przez degenerację pasma Γ_8 .

Ilość parametrów gwałtownie wzrasta po włączeniu do modelu wyższych pasm przewodnictwa Γ_8^C i Γ_7^C (tabela 3). Parametrom o podobnym teoriogrupowym rodowodzie odpowiadają te same oznaczenia literowe. Parametry "zerowe" - F , N_1 , P_0 , G_0 , G'_0 , C_0 , C'_0 , γ_{10} , γ'_{10} , γ_{20} , γ'_{20} , γ_{30} , γ'_{30} , κ_0 , κ'_0 , κ''_0 , q_0 , N_{20} , N_{30} - są odpowiednikami parametrów modelu Weiler [15]. Parametry "jedynekowe" - P_1 , G_1 , G'_1 , C_1 , C'_1 , γ_{11} , γ'_{11} , γ_{21} , γ'_{21} , γ_{31} , γ'_{31} , κ_1 , κ'_1 , κ''_1 , q_1 , N_{21} , N_{31} - opisują pasma przewodnictwa Γ_8^C , Γ_7^C i Γ_6 . Parametry "dwójkowe" - C_2 , C'_2 , C''_2 , γ_{12} , γ'_{12} , γ_{22} , γ'_{22} , γ''_{22} , γ_{32} , γ'_{32} , γ''_{32} , κ_2 , κ'_2 , κ''_2 , κ'''_2 , q_2 - sprzęgają pasma przewodnictwa Γ_8^C i Γ_7^C z pasmami walencyjnymi Γ_8^V i Γ_7^V . Dodatkowym parametrem, nie mającym swego odpowiednika w modelach trójpasmowych, jest element pędu Q [20] pomiędzy pasmami Γ_8^C , Γ_7^C i Γ_8^V , Γ_7^V . Ponadto występuje międzypasmowy element spin-orbitalnego rozczepienia $\bar{\Delta}$ [79]. Istnienie tego pozadiagonalnego parametru energetycznego, sprawia, że energie występujące na diagonalu hamiltonianu nie odpowiadają przerwom energetycznym, tylko są ich funkcjami [17] (patrz wzory (A.1)+(A.4), dodatek A). Otrzymany hamiltonian $H_{[001]}$ (tab.1) uzupełnia wcześniej publikowane jego postacie [16,17].

Znając symetrię funkcji bazy (1.24) hamiltonianu (tab.1) można wyznaczyć macierz $T(\varphi, \psi, \vartheta)$ przekształcającą hamiltonian przy obrocie pola magnetycznego do kierunku określonego kątami Eulera φ, ψ, ϑ w odniesieniu do kierunku

[001], korzystając z zależności:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_c \theta_c \psi_c - \varphi_s \psi_s & \varphi_s \theta_c \psi_c + \varphi_c \psi_s & -\theta_s \psi_c \\ -\varphi_c \theta_c \psi_s - \varphi_s \psi_c & -\varphi_s \theta_c \psi_s + \varphi_c \psi_c & \theta_s \psi_s \\ \varphi_c \theta_s & \varphi_s \theta_s & \theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\begin{bmatrix} \uparrow' \\ \downarrow' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-(\psi+\varphi)/2)_e (\theta/2)_c & (-(\psi-\varphi)/2)_e (\theta/2)_s \\ -((\psi-\varphi)/2)_e (\theta/2)_s & ((\psi+\varphi)/2)_e (\theta/2)_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

gdzie $\alpha_c = \cos \alpha$, $\alpha_s = \sin \alpha$, $\alpha_e = e^{i\alpha}$.

Tabela 4 przedstawia macierz obrotu $T(\varphi, \psi, \theta)$ otrzymaną powyższą metodą.

Hamiltonian naszego problemu określony dla dowolnego kierunku pola magnetycznego można wyznaczyć na podstawie wyrażenia:

$$H(\varphi, \psi, \theta) = T(\varphi, \psi, \theta) H_{[001]} T^{-1}(\varphi, \psi, \theta) \quad (1.27)$$

Hamiltonian H (1.26) możemy rozdzielić na trzy składowe:

$$H(\varphi, \psi, \theta) = H_s + H_I(\varphi, \psi, \theta) + H_W(\varphi, \psi, \theta) \quad (1.28)$$

gdzie

H_s - część sferyczna hamiltonianu H (tab.5);

H_I - część hamiltonianu H indukowana brakiem symetrii inwersyjnej w kryształach (tab.6);

H_W - część hamiltonianu H indukowana przez warping (tab.7).

Podobną procedurę podziału na składowe prezentuje praca [30] rozważająca postać hamiltonianu efektywnego dla pola

magnetycznego w płaszczyznach (100) i (110) w modelu trójpasmowym. Można zauważyć, że hamiltonian efektywny generowany przez warping (parametry γ_2 , γ_3 i q) z pracy [30] (oznaczymy $H_{[30]}$) można podzielić na dwie części - sferyczną H_{Ws} , której funkcjami własnymi są funkcje własne hamiltonianu H_s , oraz niesferyczną H_{Wn} . Uzyskać to można przez rozbitcie parametrów γ^I , γ^{II} i γ^{III} dla kierunku pola magnetycznego w płaszczyźnie (100), oraz γ' , γ'' , γ''' w płaszczyźnie (110) z pracy [30] na dwa składniki - sferyczny i niesferyczny, zależny od odpowiedniej dla danej płaszczyzny postaci funkcji kątów β_0 (tab.7):

$$\begin{aligned}\gamma^I &\equiv \gamma_2 - 3(\gamma_2 - \gamma_3) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \gamma_2 + \frac{3}{4}(\gamma_2 - \gamma_3) \beta_0 |_{(100)} \\ \gamma^{II} &\equiv \gamma_2 + \gamma_3 - (\gamma_2 - \gamma_3) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \gamma_2 + \gamma_3 + \frac{1}{4}(\gamma_2 - \gamma_3) \beta_0 |_{(100)} \\ \gamma^{III} &\equiv \gamma_3 + 2(\gamma_2 - \gamma_3) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \gamma_3 - \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_3) \beta_0 |_{(100)} \\ \gamma' &\equiv \gamma_3 + (\gamma_2 - \gamma_3) \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2} \right)^2 = \gamma_2 + \frac{3}{4}(\gamma_2 - \gamma_3) \beta_0 |_{(110)} \\ \gamma'' &\equiv \frac{1}{3} \gamma_2 + \frac{2}{3} \gamma_3 + \frac{1}{6}(\gamma_2 - \gamma_3) \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\gamma_2 + \gamma_3 + \frac{1}{4}(\gamma_2 - \gamma_3) \beta_0 |_{(110)} \right) \\ \gamma''' &\equiv \frac{2}{3} \gamma_2 + \frac{1}{3} \gamma_3 - \frac{2}{3}(\gamma_2 - \gamma_3) \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2} \right)^2 = \gamma_3 - \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_3) \beta_0 |_{(110)}\end{aligned}$$

W niniejszej pracy H_{Ws} zostało włączone do H_s , a $H_W = H_{Wn}$, w monografii [30] $H_W = H_{[30]} = H_{Ws} + H_{Wn}$.

Wyrażenie (1.28) przedstawia pełny pięciopasmowy hamiltonian efektywny uwzględniający oddziaływanie kp z dalszymi pasmami do drugiego rzędu zaburzeń i określony dla dowolnego kierunku pola magnetycznego.

I.2.4. Funkcje własne w modelu pięciopasmowym.

Poszukiwane jest rozwiązanie równania:

$$H(\varphi, \psi, \theta)F = EF \quad (1.29)$$

gdzie F jest kolumną 14-wymiarową o składowych a_{l1}^f . Równanie (1.29) rozwiążemy dla części sferycznej H_s a części niesferyczne H_I i H_W potraktujemy jako zaburzenie. Mając na uwadze symetrię osiową problemu wygodnie jest posłużyć się układem cylindrycznym wybierając symetryczne cechowanie potencjału wektorowego [80]:

$$A = (-By/2, Bx/2, 0) \quad (1.30)$$

Wektorami własnymi macierzy H_s są dla spinu $s = +1/2$ (F^{0+}) i $s = -1/2$ (F^{0-}):

$$F_{nM}^{o+} = \begin{bmatrix} a_{nM}^{1+} f_{n-1, M-1} \\ a_{nM}^{3+} f_{n+1, M+1} \\ a_{nM}^{5+} f_{n+1, M+1} \\ a_{nM}^{7+} f_{n, M} \\ a_{nM}^{9+} f_{n-1, M-1} \\ a_{nM}^{11+} f_{n+1, M+1} \\ a_{nM}^{13+} f_{n+1, M+1} \\ a_{nM}^{2+} f_{n+2, M+2} \\ a_{nM}^{4+} f_{n, M} \\ a_{nM}^{6+} f_{n, M} \\ 0 \\ a_{nM}^{10+} f_{n+2, M+2} \\ a_{nM}^{12+} f_{n, M} \\ a_{nM}^{14+} f_{n, M} \end{bmatrix} \quad F_{nM}^{o-} = \begin{bmatrix} a_{nM}^{1-} f_{n-2, M-2} \\ a_{nM}^{3-} f_{n, M} \\ a_{nM}^{5-} f_{n, M} \\ 0 \\ a_{nM}^{9-} f_{n-2, M-2} \\ a_{nM}^{11-} f_{n, M} \\ a_{nM}^{13-} f_{n, M} \\ a_{nM}^{2-} f_{n+1, M+1} \\ a_{nM}^{4-} f_{n-1, M-1} \\ a_{nM}^{6-} f_{n-1, M-1} \\ a_{nM}^{8-} f_{n, M} \\ a_{nM}^{10-} f_{n+1, M+1} \\ a_{nM}^{12-} f_{n-1, M-1} \\ a_{nM}^{14-} f_{n-1, M-1} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$\text{gdzie} \quad f_{nM} = \left(\frac{\gamma N!}{4\pi^2 (N+|M|)!} \right)^{1/2} e^{iM\varphi_t} |M|^{1/2} e^{-t/2} L_N^{|M|}(t) \quad (1.32)$$

$$n = N+(M+|M|)/2, \quad t = \gamma \rho^2/2, \quad \gamma = \hbar \omega_c / 2Ry^*$$

n jest numerem pasma Landaua, M określa rzut momentu pędu na kierunek pola magnetycznego, N jest liczbą równą n dla $M \leq 0$ i $n-M$ dla $M > 0$, L_β^α są stowarzyszonymi wielomianami Laguerre'a, γ jest połową energii cyklotronowej $\hbar e B / m^*$ wyrażoną w efektywnych Rydbergach $Ry^* = m^* e^4 / 32 \pi^2 \hbar^2 \kappa_o^2$, jednostką długości jest efektywny promień Bohra $a_B = 4 \pi \kappa_o \hbar^2 / m^* e^2$, κ_o jest stałą dielektryczną a m^* masą efektywną elektronu.

Funkcje F_i (i jest ciągiem liczb kwantowych n, M, s, α -numer pasma) poprawione w pierwszym przybliżeniu rachunku zaburzeń mają postać:

$$F_i = F_i^0 + F_i^1 = F_i^0 + \sum_j \frac{\langle F_i^0 | H_n | F_j^0 \rangle}{\epsilon_i - \epsilon_j} F_j^0 \quad (1.33)$$

gdzie $H_n = H_I + H_W \quad (1.34)$

I.3. REZONANSE MAGNETOOPTYCZNE W ZWIĄZKACH PÓŁPRZEWODNIKOWYCH III-V.

I.3.1. Hamiltonian oddziaływania elektron-foton.

Rozpatrywanie zjawiska oddziaływania elektron-foton w ramach modelu wielopasmowego umożliwia traktowanie w podobny sposób przejść międzypasmowych i wewnątrzpasmowych, ponieważ funkcje falowe dla różnych pasm różnią się jedynie wartościami współczynników zachowując tą samą postać.

Istnieją dwa równorzędne sposoby wyznaczania elementów macierzowych dla przejść magnetoptycznych - metoda skalarna i macierzowa [75].

Hamiltonian oddziaływania elektron-foton w metodzie skalarnej wyznacza się poprzez podstawienie za $\mathbf{P}$ w hamiltonianie (1.1) operatora $\mathbf{P} + e\mathbf{A}'$, gdzie $\mathbf{A}'$ jest potencjałem wektorowym promieniowania elektromagnetycznego. W rezultacie otrzymuje się :

$$H_R = \frac{e}{m} \mathbf{A}' \mathbf{P} \quad (1.35)$$

Do wyznaczenia elementów macierzowych przejść optycznych należy użyć rozwiązania niezaburzonego hamiltonianu (1.1), czyli funkcji falowej (1.2) zawierającej funkcje obwiedni f_1 i amplitudy Luttingera-Kohna u_1 .

W metodzie macierzowej hamiltonianu oddziaływania elektron-foton ma postać:

$$H_R = e\mathbf{A}'\mathbf{v} = e \sum_{i=1}^3 A'_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_i} \quad (1.36)$$

gdzie prędkość elektronu $\mathbf{v}$ wyrażono poprzez pochodną hamiltonianu elektronu po pędzie kinetycznym.

Postać hamiltonianu (1.36) można wnioskować z ogólnej zależności [75] :

$$H(\mathbf{P}+e\mathbf{A}') \simeq H(\mathbf{P}) + e \sum_{i=1}^3 A'_i \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_i} \quad (1.37)$$

gdzie człon $e\mathbf{A}'$ jest traktowany jako niewielkie zaburzenie, co jest słuszne dla niewielkiego strumienia fotonów.

Łatwo zauważyć, że jeśli w wyrażeniu (1.36) użyjemy hamiltonianu (1.1) otrzymamy równanie (1.35). Jednakże, jeśli użyjemy w (1.36) hamiltonianu efektywnego (1.28), to do otrzymania elementów macierzowych przejść optycznych wystarczą wektory obwiedni (1.33) dla stanów początkowego i końcowego, z pominięciem amplitud (1.24). Wewnątrz wielopasmowego modelu metoda macierzowa jest bardziej ogólna, ponieważ automatycznie zawiera wszystkie cechy hamiltonianu efektywnego [81,13].

Równanie (1.36) można przedstawić w postaci:

$$H_R = e \left[A'_+ \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \right)_- + A'_- \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \right)_+ + A'_3 \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \right)_3 \right] \quad (1.38)$$

$$\text{gdzie } A'_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}}(A'_1 \pm iA'_2) \quad (1.39)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial H}{\partial P_1} \pm i\frac{\partial H}{\partial P_2}\right) \quad (1.40)$$

Każdy z członów wyrażenia (1.38) odpowiada przejściom generowanym przez inną polaryzację padającego promieniowania - kołową $\sigma_{R,L}$ ($A'_{\pm}$) i liniową π (A'_3). Tabele 8 i 9 przedstawiają macierze prędkości wyznaczone dla części sferycznej H_s (tab.5) hamiltonianu (1.27) odpowiednio dla polaryzacji π i σ_R , tabela 10 dla części niesferycznej indukowanej brakiem symetrii inwersyjnej H_I (tab.6), a tabela 11 dla części warpingowej H_w (tab.7). Tabela 12 podaje definicje symboli użytych w tabelach 10 i 11 dla polaryzacji π (A'_3) i σ_R (A'_+). Macierz prędkości dla polaryzacji σ_L (A'_-) jest sprzężona hermitowsko do macierzy dla polaryzacji σ_R . Istotnym jest fakt, że macierze prędkości są funkcjami kierunku pola magnetycznego.

I.3.2. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych.

Jednofotonowe przejście magnetoptyczne pomiędzy różnymi stanami, o wektorze początkowym F_k i końcowym F_l , wzbudzone przez promieniowanie elektromagnetyczne o określonej polaryzacji t jest reprezentowane przez element macierzowy :

$$M_{kl} = \langle F_l | H_R | F_k \rangle = eA'_t \langle F_l | \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_t | F_k \rangle \quad (1.41)$$

Element $\langle F_1 | \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_t | F_k \rangle$ oznacza iloczyn prawostronny macierzy prędkości przez wektor kolumnowy F_k i lewostronny przez wektor szeregowy F_1 .

Korzystając z zależności (1.28) oraz (1.33) i (1.34) równanie (1.41) możemy przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} M_{kl} &= e A'_t \langle F_1^S + F_1^I + F_1^W | \left(\frac{\partial (H_s + H_I + H_W)}{\partial P} \right)_t | F_k^S + F_k^I + F_k^W \rangle = \\ &= e A'_t [W_s + W_I + W_W + W_{II} + W_{WW} + W_{IW}] \end{aligned} \quad (1.42)$$

gdzie

$$W_s = \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle \quad (1.43)$$

$$W_I = \left[\langle F_1^I | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_I}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^I \rangle \right] \quad (1.44)$$

$$W_W = \left[\langle F_1^W | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_W}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^W \rangle \right] \quad (1.45)$$

$$W_{II} = \left[\langle F_1^I | \left(\frac{\partial H_I}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^I | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^I \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_I}{\partial P} \right)_t | F_k^I \rangle \right] \quad (1.46)$$

$$W_{WW} = \left[\langle F_1^W | \left(\frac{\partial H_W}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^W | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^W \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_W}{\partial P} \right)_t | F_k^W \rangle \right] \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} W_{IW} &= \left[\langle F_1^W | \left(\frac{\partial H_I}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^W | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^I \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_W}{\partial P} \right)_t | F_k^I \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle F_1^I | \left(\frac{\partial H_W}{\partial P} \right)_t | F_k^S \rangle + \langle F_1^I | \left(\frac{\partial H_s}{\partial P} \right)_t | F_k^W \rangle + \langle F_1^S | \left(\frac{\partial H_I}{\partial P} \right)_t | F_k^W \rangle \right] \end{aligned} \quad (1.48)$$

gdzie W_s reprezentuje przejścia sferyczne; W_I i W_W przejścia niesferyczne indukowane odpowiednio brakiem symetrii inwersyjnej (I) i degeneracją pasm Γ_8 (W); W_{II} , W_{WW} i W_{IW} - przejścia drugiego rzędu generowane brakiem symetrii inwersyjnej (II), warpingiem (WW) i oboma mechanizmami (IW).

Przejścia wyższych rzędów zostały pominięte. Z każdego z wyżej wymienionych elementów macierzowych można ponadto wydzielić część generującą przejścia dozwolone jedynie dla $k_H = 0$ i dla $k_H \neq 0$, gdzie k_H jest składową wektora k równoległą do pola magnetycznego.

Reguły wyboru jednofotonowych przejść sferycznych przedstawione są w tabeli 13, pokrywają się one z regułami wyznaczonymi w modelu trójpasmowym [81]. W tabelach 14÷18 kolejno przedstawione są reguły wyboru dla przejść generowanych wyżej wymienionymi mechanizmami niesferyczności a także moduły funkcji kątów Eulera występujące w hamiltonianie efektywnym i pochodzących od niego macierzach prędkości. Żadne z dozwolonych przejść nie pojawiło się w wyniku rozwinięcia modelu z trójpasmowego do pięciopasmowego. Weiler, Aggarwal i Lax [15] podają reguły wyboru dla przejść wewnątrzpasmowych w kierunkach [001], [110] i [111] pola magnetycznego dla przejść sferycznych (s), sferycznych z $k_H \neq 0$ (sk_H) oraz przejść I, Ik_H , W i Wk_H . Praca niniejsza zawiera wszystkie reguły wyboru pracy [15], a ponadto przewiduje przejścia ($\Delta s = -1$ przejście z drabiny "a" do "b", $\Delta s = +1$ z "b" do "a", $\Delta s = 0$ z "a" do "a" lub "b" do "b"):

dla kierunku [001]

$$\sigma_R \rightarrow (I) \Delta s = +1 \Delta n = 0;$$

$$(Wk_H) \Delta s = -1 \Delta n = 4; \Delta s = +1 \Delta n = 2;$$

$$\sigma_L \rightarrow (Wk_H) \Delta s = -1 \Delta n = 6; \Delta s = +1 \Delta n = 4;$$

$$\pi \rightarrow (Wk_H) \Delta s = 0 \Delta n = 4;$$

dla kierunku [110]

$$\begin{aligned}
\sigma_R &\rightarrow (Ik_H) \Delta s=-1 \Delta n=3; \\
&\quad (Wk_H) \Delta s=-1 \Delta n=4; \Delta s=+1 \Delta n=2; \\
\sigma_L &\rightarrow (Ik_H) \Delta s=+1 \Delta n=5; \\
&\quad (W) \Delta s=0 \Delta n=1; \\
&\quad (Wk_H) \Delta s=-1 \Delta n=2,6; \Delta s=+1 \Delta n=4; \\
\pi &\rightarrow (W) \Delta s=-1 \Delta n=1; \\
&\quad (Wk_H) \Delta s=0 \Delta n=4;
\end{aligned}$$

dla kierunku [111]

$$\begin{aligned}
\sigma_R &\rightarrow (I) \Delta s=-1 \Delta n=2; \\
&\quad (Ik_H) \Delta s=-1 \Delta n=1,3; \Delta s=0 \Delta n=1; \\
&\quad (W) \Delta s=-1 \Delta n=1; \Delta s=0 \Delta n=1,3; \\
&\quad (Wk_H) \Delta s=-1 \Delta n=2,4; \Delta s=+1 \Delta n=2; \\
\sigma_L &\rightarrow (I) \Delta s=-1 \Delta n=4; \Delta s=0 \Delta n=2; \Delta s=+1 \Delta n=2; \\
&\quad (Ik_H) \Delta s=-1 \Delta n=1,3,5; \Delta s=0 \Delta n=1,3; \Delta s=+1 \Delta n=1; \\
&\quad (W) \Delta s=-1 \Delta n=1,3; \Delta s=0 \Delta n=1,3,5; \Delta s=+1 \Delta n=1; \\
&\quad (Wk_H) \Delta s=-1 \Delta n=2,4,6; \Delta s=0 \Delta n=2; \Delta s=+1 \Delta n=2,4; \\
\pi &\rightarrow (I) \Delta s=-1 \Delta n=2; \Delta s=0 \Delta n=2; \\
&\quad (Ik_H) \Delta s=-1 \Delta n=1,3,5; \Delta s=0 \Delta n=1; \Delta s=+1 \Delta n=1; \\
&\quad (W) \Delta s=-1 \Delta n=1,3; \Delta s=0 \Delta n=1,3,5; \Delta s=+1 \Delta n=1; \\
&\quad (Wk_H) \Delta s=-1 \Delta n=2; \Delta s=0 \Delta n=2,4;
\end{aligned}$$

Warto zauważyć, że część wyżej wymienionych przejść pokrywa się z przejściami sferycznymi, podobnie, różne mechanizmy mogą mieć swój wkład do jednego przejścia. Zaistniałe różnice pomiędzy niniejszą pracą a pracą Weiler i in. [15] można tłumaczyć użyciem innej metody otrzymywania hamiltonianu oddziaływania elektron-foton i związanej z tym

metody wyznaczania elementów macierzowych przejść - metoda skalarna w [15] i metoda macierzowa tutaj.

Grisar i in. [13] (również Własak [14]) podaje reguły wyboru dla przejść międzypasmowych i wewnątrzpasmowych generowanymi mechanizmami s , sk_H , I , Ik_H , W , Wk_H i IW dla pola magnetycznego w kierunku krystalograficznym [001]. Reguły wyboru dla przejść wynikających z pierwszych sześciu z wyżej wymienionych mechanizmów w pełni pokrywają się z pracą niniejszą. Dla przejść IW brak w pracy [13] przejść:

$$\sigma_R \rightarrow \Delta s = -1 \Delta n = \pm 2; \Delta s = +1 \Delta n = -4, 0;$$

$$\sigma_L \rightarrow \Delta s = -1 \Delta n = 0, 4; \Delta s = +1 \Delta n = \pm 2;$$

$$\pi \rightarrow \Delta s = 0 \Delta n = \pm 2.$$

Pominięcie tych reguł w [13] może wynikać z tego, że pokrywają się z regułami silniejszych przejść generowanych przez mechanizm niższego rzędu - brak symetrii inwersyjnej.

Własak [29,30] podaje reguły wyboru dla przejść międzypasmowych i wewnątrzpasmowych dla pola magnetycznego w płaszczyznach (100) i (110) generowanymi wszystkimi mechanizmami uwzględnionymi w pracy niniejszej oprócz elementów trzeciego rzędu IIk_H , WWk_H i IWk_H .

Dla płaszczyzny (100) można wyróżnić następujące funkcje kąta θ liczonego od kierunku [001] (patrz praca [29]) :

$$h_1 = \sin\theta\cos\theta; \quad h_2 = 1-2\cos^2\theta;$$

$$g_1 = \sin^2\theta\cos^2\theta; \quad g_2 = \sin\theta\cos\theta(1-2\cos^2\theta); \quad g_3 = 1-\sin^2\theta\cos^2\theta;$$

Łatwo wykazać, że funkcje $|\alpha_i|$ i $|\beta_i|$ (patrz tab.6 i 7) pracy niniejszej redukują się w płaszczyźnie (100) do funkcji h_i i g_i następująco:

$$\begin{aligned} |\alpha_0| &= 0; \quad |\alpha_1| \text{ i } |\alpha_3| = h_1; \quad |\alpha_2| = h_2; \\ |\beta_0| \text{ i } |\beta_2| &= g_1; \quad |\beta_1| \text{ i } |\beta_3| = g_2; \quad |\beta_4| = g_3. \end{aligned}$$

Dla płaszczyzny (110) w pracy [29] wyróżniono funkcje kąta θ (również liczonego od kierunku [001]):

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin\theta(1-3\cos^2\theta); \quad v_2 = \sin\theta(1+\cos^2\theta); \\ v_3 &= \sin^2\theta\cos\theta; \quad v_4 = \cos\theta(1-3\cos^2\theta); \\ f_1 &= (1-3\cos^2\theta)(3-\cos^2\theta); \quad f_2 = \sin\theta\cos\theta(5-3\cos^2\theta); \\ f_3 &= \sin^2\theta(1-3\cos^2\theta); \quad f_4 = \sin\theta\cos\theta(1-3\cos^2\theta); \end{aligned}$$

Funkcje $|\alpha_i|$ i $|\beta_i|$ dla płaszczyzny (110) przechodzą w funkcje v_i i f_i następująco:

$$\begin{aligned} |\alpha_0| &= v_3; \quad |\alpha_1| = v_1; \quad |\alpha_2| = v_4; \quad |\alpha_3| = v_2; \\ |\beta_1| &= f_4; \quad |\beta_2| = f_3; \quad |\beta_3| = f_2; \quad |\beta_4| = f_1; \end{aligned}$$

Funkcja β_0 nie ma swego odpowiednika w pracy [29].

Wprowadźmy funkcję f_5 :

$$|\beta_0| = f_5 = \sin^2\theta(1+3\cos^2\theta);$$

Reguły wyboru pracy niniejszej dla pola magnetycznego w kierunkach krystalograficznych zawartych w płaszczyznach

(100) i (110) zawierają wszystkie reguły pracy [29]. Zawierają ponadto znaczną grupę przejść w pracy [29] nie przewidzianych. Różnica ta spowodowana jest zaniedbaniem przez autora prac [29,30] zależności kątowej (β_0) parametrów γ^I , γ^{II} , γ^{III} (dla $\mathbf{B}$ w płaszczyźnie (100)), γ' , γ'' , γ''' (dla $\mathbf{B}$ w płaszczyźnie (110)) (patrz punkt I.2.3). Brak zatem przejść opisanych w tabelach 15, 17 i 18 określonych dla funkcji $|\beta_0|$ (W, Wk_H); $|\beta_0\beta_i|$ $i = 0,1,2,3,4$ (WW) oraz $|\alpha_i\beta_0|$ (IW) $i = 0,1,2,3$.

I.3.3. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych.

Zastosowanie laserów dużej mocy stało się powodem zainteresowania wzbudzeniami wielofotonowymi w ciele stałym. Wzbudzenie dwufotonowe jest wynikiem dwu wirtualnych przejść jednofotonowych [14]. Podobnie jak w rozdziale poprzednim można wyróżnić przejścia generowane różnymi mechanizmami. Tabela 19 przedstawia reguły wyboru sferycznych przejść dwufotonowych, tabele 20÷24 odpowiednio przejść dwufotonowych indukowanych mechanizmami I i Ik_H , W i Wk_H , II i IIk_H , WW i WWk_H oraz IW i IWk_H .

Reguły wyboru przejść dwufotonowych dla niektórych polaryzacji ($\sigma_R\sigma_R$, $\sigma_L\sigma_L$, $\pi\pi$, $\sigma_R\sigma_L$) dla pola $\mathbf{B}$ w kierunku [001] i mechanizmów s, I, W, II, WW i IW podaje Własak [14]. W pełni pokrywają się one z regułami niniejszej pracy zredukowanymi do powyższych warunków.

Ten sam autor w pracach [29,30] podaje reguły wyboru przejść dwufotonowych dla B w płaszczyznach (100) i (110). Podobnie, jak w przypadku reguł wyboru dla przejść jednofotonowych zawartych w powyższych pracach, istnieje klasa przejść (związana z funkcją β_0) opisana w tabelach 20÷24 nie przewidziana w [29,30]. Powód tej różnicy w wynikach jest analogiczny jak podany w poprzednim punkcie dotyczącym przejść jednofotonowych.

I.3.4. Porównanie z doświadczeniem.

Jak dotychczas niewiele jest prac doświadczalnych badających w sposób szczegółowy anizotropię przejść magnetoptycznych.

Badania Favrota i in [24] wykazały silną anizotropię współczynnika absorpcji przejść $2\omega_c$, $2\omega_c + \omega_s$ i $3\omega_c$ ze względu na kierunek pola magnetycznego ([111], [110], [100]) dla różnych polaryzacji światła ($E \perp B$ - $\sigma_R + \sigma_L$, $E \parallel B$ - π). Jak już wykazano w [15] za silną anizotropię przejścia $2\omega_c + \omega_s$ odpowiedzialny jest głównie brak symetrii inwersyjnej (I) w obu polaryzacjach. O słabym wpływie sferycznego przejścia z $k_H \neq 0$ dla polaryzacji $\sigma_L + \sigma_R$ świadczy brak zauważalnego piku absorpcji dla $B \parallel [110]$, dla którego α_0 (σ_L) i α_2 (σ_R) zeraują się. Przejście $3\omega_c$ indukowane jest głównie przez warping. Autorzy prac [82÷85] jako źródło przejścia $2\omega_c$ podają kulombowskie oddziaływanie elektronu z donorem. Wynikający z

niego tzw. rezonans z pomocą domieszki (impurity assisted resonance) ma intensywność niezależną od kierunku pola magnetycznego, podczas gdy dane doświadczalne [24] wyraźnie wskazują taką zależność. Własak [30] wskazuje na dużą złożoność przejścia $2\omega_c$ (tab. 14+18) i rozstrzygnięcie na korzyść któregoś z mechanizmów wymaga dokładniejszej analizy anizotropii współczynników absorpcji. Dane pracy [24] w porównaniu z tabelami 14+18 skłaniają do twierdzenia, że za anizotropię przejścia $2\omega_c$ odpowiada głównie brak symetrii inwersyjnej. Jednakże żaden z mechanizmów niesferyczności nie wyjaśnia tak silnego przejścia $2\omega_c$ dla $B||[100]$ i polaryzacji $\sigma_R + \sigma_L$. Dla pełnego wyjaśnienia przejścia $2\omega_c$ przydatna byłaby szczegółowa analiza doświadczalna anizotropii współczynnika absorpcji tej harmonicznego rezonansu cyklotronowego.

Tego typu szczegółową analizę dla rezonansu spinowego ω_s ($\Delta s=-1$ $\Delta n=0$) przeprowadzono w pracy [27]. Potwierdza ona przewidziane przez teorię twierdzenia, że główną przyczyną tego przejścia jest brak symetrii inwersyjnej w pełni potwierdzając zależności kątowe absorpcji w płaszczyznach (100) i (110).

Badania współczynnika absorpcji dają dodatkową możliwość wyznaczania parametrów pasmowych zwłaszcza tych, które w niewielkim stopniu wpływają na energię.

II. DONOR W POLU MAGNETYCZNYM W ZWIĄZKACH PÓŁPRZEWODNIKOWYCH

III-V.

II.1. WSTĘP.

Płytkie stany donorowe w półprzewodnikach w zewnętrznym polu magnetycznym są przyczyną wielu interesujących efektów obserwowanych w badaniach optycznych i w zjawiskach transportu. Pole magnetyczne zaburza symetrię wodoropodobnych stanów donorowych zawężając obszar wysokiego prawdopodobieństwa występowania elektronu w płaszczyźnie prostopadłej do pola. Skurczenie funkcji falowych domieszki i wzrost odpowiadających im energii w polu magnetycznym objawia się w zjawiskach transportu w postaci różnych zmian magnetooporu. Wzrost energii jonizacji donoru powoduje wymrażanie swobodnych elektronów w pasmie przewodnictwa na zlokalizowane stany domieszkowe, zwiększając oporność materiału. W warunkach występowania efektu hoppingowego zwykle z tych samych przyczyn również wzrasta oporność, jednakże, bardziej subtelne efekty wynikające z istnienia domieszek mogą prowadzić do ujemnego magnetooporu. Rozpraszanie elektronów na donorach w obecności pola

magnetycznego ma silny wpływ na zjawiska oscylacyjne. Różnorodność przejść magnetoptycznych jest wynikiem, między innymi, rozczepienia poziomów domieszkowych w obecności pola magnetycznego. W przypadku związków półprzewodnikowych o małej przerwie energetycznej, charakteryzujących się małą masą efektywną i dużą stałą dielektryczną, efektywny Rydberg może przybierać wartość rzędu ułamka milielektronowolta, w efekcie poziomy donorowe zlewają się z dnem pasma przewodnictwa. Wzrost energii jonizacji w wysokich polach magnetycznych powoduje odczepienie stanów donorowych od dna pasma udostępniając je bezpośrednim obserwacjom. Zawężanie się funkcji falowych stanów donorowych zwiększa również część energii elektronu związaną z krótkozasięgowym potencjałem tzw. przesunięciem chemicznym atomu domieszki umożliwiając identyfikację różnych atomów domieszkowych.

Mimo, że próby teoretycznego rozwiązania zagadnienia donoru w zewnętrznym polu magnetycznym były podejmowane wielokrotnie, problem ten nadal zawiera pytania, na które nie udzielono zadowalających odpowiedzi. W przybliżeniu jednopasmowym jest on formalnie tożsamy z opisem atomu wodoru w próżni w polu magnetycznym. Relacja ta czyni rozważany temat interesującym nie tylko dla fizyków zajmującym się ciałem stałym. Wobec braku dokładnego rozwiązania literatura tematu [18,33÷54,71,72] zawiera dużą różnorodność metod rozwiązań przybliżonych. Przegląd najważniejszych prac podejmujących próbę rozwiązania tego zagadnienia zawarty jest w artykule Zawadzkiego [32], którym

posłużono się przy opracowywaniu pierwszej części niniejszego rozdziału. Zawiera ona opis magnetodonoru dla pojedynczego parabolicznego i niezdegenerowanego pasma (przybliżenie masy efektywnej). Przytoczono w niej próby różnych autorów wyznaczenia energii stanu podstawowego a zarazem energii jonizacji domieszki.

Badania doświadczalne [55-70] wskazują na konieczność wyjścia poza przybliżenie paraboliczne pasma przewodnictwa. W celu uwzględnienia nieparabolności pasm Larsen [38] wprowadził do opisu magnetodonoru model trójpasmowy [7]. Stosując procedurę wariacyjną wyznaczył stany domieszkowe zgodne z eksperymentem dla stosunkowo niskich pól magnetycznych. Zawadzki i Własak [71] uzyskali dobrą zgodność z doświadczeniem dla pól wysokich, stosując funkcję próbną w postaci zbliżonej do funkcji elektronu swobodnego w silnym polu magnetycznym. Pierwsza próba znalezienia rozwiązania odpowiadającemu pełnemu zakresowi pól magnetycznych zawarta została w pracy [18]. Jednakże, określona w [18] funkcja próbna nie spełniała wszystkich wymogów nałożonych przez użyty model, w szczególności daje nieskończone przyczynki do energii stanu podstawowego. Krytyczna ocena tego modelu zawarta jest w drugiej części niniejszego rozdziału.

Wspomniany już brak modelu jest konsekwencją założenia, że nieograniczony kulombowski potencjał domieszki jest wolnozmienny na przestrzeni komórki elementarnej. Osobliwość potencjału jest ponadto silnie uwypuklona przez procedurę

matematyczną stosowaną w obliczeniach.

Ostatnia część rozdziału zawiera propozycję podziału potencjału kulombowskiego domieszki na dwie składowe. Pierwsza, szybkozmienna, włączona została do niezaburzonego hamiltonianu. Druga, wolnozmienna, poddana została procedurze wariacyjnej.

II.2. WODOROPODOBNY DONOR W POLU MAGNETYCZNYM.

II.2.1. Równanie ogólne.

Rozważany jest donor w obecności zewnętrznego pola magnetycznego z zaniedbaniem spinu. W przybliżeniu masy efektywnej dla niezdegenerowanego sferycznego pasma energetycznego hamiltonian zagadnienia ma postać podobną jak dla zagadnienia atomu wodoru w polu magnetycznym :

$$H = \frac{1}{2m^*}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - \frac{e^2}{4\pi\kappa_0 r} \quad (2.1)$$

gdzie $\mathbf{A}$ - potencjał wektorowy pola magnetycznego, m^* masa efektywna elektronu a κ_0 stała dielektryczna. Stosując cechowanie cylindryczne [79] dla potencjału wektorowego pola magnetycznego $\mathbf{A}$ w postaci:

$$\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0) \quad (2.2)$$

otrzymuje się

$$H = \frac{p_z^2}{2m^*} + \frac{1}{2}\hbar\omega_c L_z + \frac{1}{8}m^*\omega_c^2(x^2 + y^2) - \frac{e^2}{4\pi\kappa_0 r} \quad (2.3)$$

gdzie $\omega_c = eB/m^*$ jest częstością cyklotronową, $\hbar L_z = x p_y - y p_x$ rzutem momentu pędu na kierunek z . Wprowadzając jednostkę energii i długości w postaci efektywnego rydberga Ry^* i

efektywnego promienia Bohra a_B^* :

$$Ry^* = \frac{m_e^* 4}{32\pi^2 \kappa_o^2 \hbar^2} \quad (2.4) \quad a_B^* = \frac{4\pi \kappa_o \hbar^2}{m_e^* 4} \quad (2.5)$$

równanie stacjonarne Schrödingera przyjmuje postać:

$$\left(-\nabla^2 + \gamma L_z + \frac{1}{4} \gamma \rho^2 - \frac{2}{r} \right) \Psi = E \Psi \quad (2.6)$$

gdzie $\rho^2 = x^2 + y^2$ i

$$\gamma = \frac{\hbar \omega_c}{2 Ry^*} = \left(\frac{a_B}{\lambda_B} \right)^2 \quad (2.7)$$

gdzie $\lambda_B = (\hbar/eB)^{1/2}$ - promień magnetyczny.

Parametr γ określa względny wpływ oddziaływań magnetycznego i kulombowskiego (reprezentowane odpowiednio przez energie $\frac{1}{2} \hbar \omega_c$ i Ry^*) na ruch elektronu.

Zagadnienie własne (2.6) jest wyrażone w jednostkach efektywnych, co pozwala prowadzić dalsze rozważania bez określania konkretnego półprzewodnika wyznaczając energie i funkcje własne w funkcji parametru γ .

Przy rozpatrywaniu zjawisk transportu jak zależność przewodności od pola magnetycznego, od temperatury, czy też efekt Halla, wielkością istotną jest energia jonizacji magnetodonoru E_J , czyli różnica pomiędzy najniższym stanem wolnego elektronu $\frac{1}{2} \hbar \omega_c$ a stanem podstawowym donoru. W efektywnych rydbergach energia jonizacji wyraża się zatem równaniem:

$$E_J = \gamma - E_p(\gamma) \quad (2.8)$$

II.2.2. Metody rozwiązania równania ogólnego.

Dokładne rozwiązanie równania własnego (2.6) nie jest znane. Istnieje wiele prób znalezienia przybliżonych wartości i funkcji własnych przy zastosowaniu różnych metod. Omówienie powyższych prób wyznaczania stanu podstawowego i stanów wzbudzonych donoru wewnątrz przybliżenia masy efektywnej zawiera artykuł Zawadzkiego [32], będącego głównym źródłem pomocnym przy opracowaniu niniejszego punktu.

Ekardt [33] przy użyciu parabolicznego układu współrzędnych poszukiwał rozwiązania (2.6) równania w postaci:

$$\Psi(\xi, \eta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iM\varphi)\phi(\xi, \eta) \quad (2.9)$$

gdzie $M = 0, \pm 1, \pm 2$ jest liczbą kwantową z-owej składowej momentu pędu. Użycie (2.9) w (2.6) daje w rezultacie równanie:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) - \left[1 + \frac{1}{4} M^2 \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{4} (E - M\gamma)(\xi + \eta) \right] \phi + \\ + \frac{1}{16} \gamma^2 (\xi^2 \eta + \eta^2 \xi) \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Następnie poszukuje się ϕ w postaci:

$$\phi(\xi, \eta) = \exp(-\gamma \xi \eta / 4) F(\xi, \eta) \quad (2.11)$$

otrzymując:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) - \left[1 + \frac{1}{4} M^2 \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{4} (E - \gamma(M+1))(\xi + \eta) \right] F + \\ + \frac{1}{2} \gamma \xi \eta \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Trzy pierwsze człony (2.12) są identyczne jak w równaniu atomu wodoru (przy zamianie $E-\gamma(M+1)$ na ϵ), którego rozwiązanie jest znane. Ostatni człon traktowany jest jako zaburzenie. Energia stanu podstawowego w pierwszym rzędzie teorii zaburzeń ma postać:

$$E_p = -1 + \gamma + E_p^1 \quad (2.13a)$$

$$E_p^1 = 2 + 2\exp(b)\text{Ei}(-b)[1+b\exp(b)\text{Ei}(-b)]^{-1} \quad (2.13b)$$

gdzie $b = 2/\gamma$ a $\text{Ei}(x)$ jest całkową funkcją wykładniczą [86].

Dla małych γ równanie (2.13) przechodzi w $E_p \cong -1 + O(\gamma^2/4)$.

Tabela 25 zawiera numeryczne wartości energii jonizacji magnetodonoru wyznaczone na podstawie wyrażenia (2.13). Dla dużych γ ($\gg 1$) wyniki rachunku zaburzeń daleko odbiegają od danych doświadczalnych.

Aby uwzględnić ten region γ wielu autorów poszukując rozwiązań równania (2.6) stosowało procedurę wariacyjną.

Jako pierwsi powyższe podejście do zagadnienia zaprezentowali Yafet, Keyes i Adams [34]. Funkcję próbną dla stanu podstawowego przedstawili w formie dwuparametrowej (układ cylindryczny) :

$$\Psi = C\exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right) \quad (2.14)$$

Funkcja ta dla $a=b$ (czego należałoby się spodziewać dla $B=0$) nie przekształca się w funkcję stanu podstawowego wodoru $\Psi \sim \exp(-r/a)$. Jednakże część prostopadła do pola, dla $\gamma \gg 1$ zdominowana przez oddziaływanie magnetyczne, upodabnia się do funkcji falowej elektronu swobodnego w polu magnetycznym

(dalej nazywana będzie funkcją magnetyczną). Zastosowanie funkcji (2.14) daje dobre rezultaty dla dużych wartości γ .

Funkcję uproszczoną w stosunku do (2.14) zastosowali Wallis i Bowlden [35] przyrównując parametr poprzeczny do promienia magnetycznego:

$$\Psi = C \exp \left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_B^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \quad (2.15)$$

Użycie powyższej funkcji jeszcze bardziej ograniczyło jej stosowalność dla małych wartości γ . Głównym sukcesem pracy [35] była prosta i analityczna forma rozwiązań dla stanów wzbudzonych.

Pokatilov i Rusanov [36] podjęli próbę uzyskania dobrych wyników w całym zakresie wartości γ stosując funkcję próbną mieszającą funkcje atomową i magnetyczną:

$$\Psi = C \exp \left(-\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{r}{c} \right) \quad (2.16)$$

Funkcja (2.16) redukuje się do atomowej dla małych γ i do magnetycznej dla dużych. Jak wykazuje tabela 25 ta funkcja daje dobre rezultaty dla $0 < \gamma < 20$.

Jednoparametrowa funkcja Rau i in. [37]:

$$\Psi = C \exp \left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_B^2} - \frac{r}{c} \right) \quad (2.17)$$

jest analogicznym uproszczeniem funkcji (2.16) jak w przypadku funkcji (2.14) i (2.15).

Jedną z bardziej udanych propozycji rozwiązania problemu (2.6) podał Larsen [38] stosując trójparametrową

funkcję:

$$\Psi = C \exp \left(-\frac{\rho^2}{a} - \kappa(\rho^2 + \alpha z^2)^{1/2} \right) \quad (2.18)$$

wymagająca bardziej złożonych obliczeń lecz dająca dobre rezultaty dla $0 < \gamma < 100$.

Aldrich i Green [39] użyli sumy funkcji gaussowskich:

$$\Psi = \sum_i c_i \exp(-\alpha_i \rho^2 - \beta_i z^2) \quad (2.19)$$

Trzeciakowski i in.[40] otrzymali dobre rezultaty dla dużych wartości γ z dwoma składnikami (trzy parametry). Zaletą (2.19) jest uzyskiwanie wyników za pomocą funkcji analitycznych.

Przybliżenie adiabatyczne dla rozwiązania zagadnienia domieszki w polu magnetycznym zastosowali Elliot i Loudon [41] oraz Hasegawa i Howard [42]. Rozwiązania (2.6) poszukuje się w postaci:

$$\Psi = \Phi_{NM}(\rho, \varphi) f(z) \quad (2.20)$$

gdzie funkcja Φ_{NM} jest funkcją falową dla elektronu swobodnego w polu magnetycznym [37]:

$$\Phi_{NM}(\rho, \varphi) = \left[\frac{\gamma N!}{2\pi(N+|M|)!} \right]^{1/2} e^{iM\varphi} \sigma^{|M|/2} e^{-\sigma/2} L_N^{|M|}(\sigma) \quad (2.21)$$

gdzie $\sigma = \gamma \rho^2/2$ a $L_N^{|M|}$ są stowarzyszonymi wielomianami Laguerre'a. Wprowadzając do (2.6) otrzymuje się równania adiabatyczne:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + U_{NM}(z) \right] f(z) = -E_{NM}^b f(z) \quad (2.22)$$

gdzie $E_{NM}^b = 2\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) - E_{NM}$

$$n = N + \frac{1}{2}(M + |M|)$$

$$U_{NM}(z) = \langle \Phi_{NM} | \frac{2}{r} | \Phi_{NM} \rangle$$

Energie stanów magnetodonoru wyznacza się z jednowymiarowego równania (2.22) numerycznie. Różnorodne podejście do obliczeń numerycznych, a także modyfikacje powyższej metody zawierają prace [43+45].

Ostatnia metoda bazuje na standartowym sposobie rozwiązywania kwantowomechanicznego równania własnego. Nieznane rozwiązanie jest rozwijane w szereg odpowiednio dobranych funkcji w celu zredukowania zagadnienia do układu różnych jednowymiarowych równań, które następnie są numerycznie diagonalizowane. Dokładność otrzymanych wyników zależy jedynie od liczby dobranych funkcji, głównie atomowych, magnetycznych, czy ich kombinacji. Wśród prac posługujących się tą metodą [46+54] najbardziej dokładne obliczenia zawiera praca Rösnera i in. [54]. Autorzy użyli dwóch różnych rozwinięć :

atomowe

$$\Psi_{M\pi} = \sum_l \frac{1}{r} f_l(r) Y_{lM}(\theta, \varphi) \quad \text{dla } \gamma < 2 \quad (2.23)$$

magnetyczne

$$\Psi_{M\pi} = \sum_n g_n(z) \Phi_{nM}(\rho, \varphi) \quad \text{dla } \gamma > 2 \quad (2.24)$$

gdzie Y_{lM} i Φ_{nM} są odpowiednio harmonikami sferycznymi i

funkcjami Dingle'a (2.21). Wprowadzając funkcje (2.23) i (2.24) do równania (2.6), mnożąc lewostronnie przez $Y_{l'M'}$ i $\Phi_{n'M'}$ i całkując otrzymamy dwa typy układów nieskończonego wymiaru jednowymiarowych funkcji:

$$-Ef_l(r) - \frac{d^2}{dr^2} f_l(r) + \sum_{l'} V_{\text{eff}}^{l'1M}(r) f_{l'}(r) = 0 \quad (2.25)$$

$$-Eg_n(z) - \frac{d^2}{dz^2} g_n(z) + \sum_{n'} V_{\text{eff}}^{n'nM}(z) g_{n'}(z) = 0 \quad (2.26)$$

gdzie

$$V_{\text{eff}}^{l'1M}(r) = \delta_{l',l} \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \gamma(M-1) + \frac{1}{6}\gamma^2 r^2 \right] \quad (2.27)$$

$$V_{\text{eff}}^{n'nM}(z) = \left\langle \Phi_{NM}(\rho, \varphi) \left| -\frac{2}{r} \right| \Phi_{N'M'}(\rho, \varphi) \right\rangle \quad (2.28)$$

Rezultaty pracy [54] zostały uznane za najdokładniejsze (exact) [32,51] i stały się miernikiem precyzyjności innych stosowanych metod. Tabela 25 zawiera porównanie wyników pracy [54] i kilku wcześniej wymienionych. Ostatnia kolumna tabeli zawiera wyniki obliczeń prezentowanych w punkcie następnym niniejszej pracy.

II.2.3. Nowy typ funkcji próbnej dla stanu podstawowego donoru.

Ewolucja funkcji stanu podstawowego płytkiego donoru wraz z polem magnetycznym od postaci funkcji atomowej do funkcji magnetycznej może być prześledzona po wprowadzeniu funkcji próbnej nowego typu dla procedury wariacyjnej:

$$\Psi = C \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^\delta r^{2\delta}\right) \quad (2.29)$$

gdzie $r = (\rho^2 + \lambda z^2)^{1/2}$ i β, δ, λ - parametry wariacyjne. Funkcja dla $\delta=1/2$ i $\lambda=1$ przechodzi w funkcję wodorową $1s$, dla $\delta=1$ jest to funkcja Yafeta i in. [34]. Powyższa postać funkcji próbnej będzie miała istotne znaczenie przy omawianiu zagadnienia magnetodonoru w modelu wielopasmowym. Średnia z hamiltonianu z równania (2.6) liczona za pomocą funkcji próbnej (2.29) wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} E(\beta, \delta, \lambda) &= \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \\ &= \left\{ \frac{1}{6} \left[\beta \left(\delta + \frac{1}{2} \right) (2 + \lambda) W_1 + \gamma^2 W_5 / \beta \right] - \beta^{1/2} P(\lambda) W_2 \right\} / W_3 \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdzie $W_n = \Gamma\left(\frac{n}{2\delta}\right)$ $\Gamma(x)$ - funkcja Γ Eulera

$$P(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^{1/2} \ln \left| \frac{1 + (1-\lambda)^{1/2}}{1 - (1-\lambda)^{1/2}} \right|$$

Relację uzyskanych wyników energii jonizacji (patrz (2.8)) do wyników prac poprzedników przedstawia tabela 25 opracowana na podstawie [51] (za pośrednictwem [32]). Łatwo

zauważyć, że w granicy dużych γ wyniki zbliżone są do rezultatów Yafeta i in. [34] (funkcja (2.14)) dla małych γ przypominają wartości energii wyznaczone przez Pokalitova i Rusanowa [36]. W stosunku do wyników pracy Rösnera i in. [54], uznanych za najdokładniejsze, rozbieżności wzrastają z γ od wartości prawie pokrywających się do niemal 5% różnicy dla $\gamma=100$. Wobec wielu prób wyznaczenia energii stanu podstawowego metodą wariacyjną w modelu jednopasmowym, przy użyciu różnych postaci funkcji próbnej, można stwierdzić, że metoda ta daje dobre wyniki dla $\gamma < 20$. Rysunek 11 przedstawia zależność energii stanu podstawowego od parametru γ . Zwraca uwagę niemal liniowa zależność $E(\gamma)$ dla wartości $\gamma > 2$ (przedział rozwinięcia magnetycznego u Rösnera i in. [54]). Rysunki 12+14 przedstawiają kolejno zależności $\beta(\gamma)$, $\delta(\gamma)$, $\lambda(\gamma)$. Również prawie liniowa zależność $\beta(\gamma)$ (rys.12) wskazuje na silny wpływ pola magnetycznego na prostopadłą do kierunku pola magnetycznego składową ruchu, można zatem potwierdzić relację $\beta \sim \lambda_B^{-1}$ dla dużych γ (patrz wyrażenia (2.15) i (2.17)). Początkowy szybki wzrost funkcji $\delta(\gamma)$ (rys.13) wskazuje na użyteczność funkcji (2.14) (Yafet i in. [34]) dla opisu donoru w półprzewodnikach, dla których γ osiąga wysoką wartość dla stosunkowo niskich pól magnetycznych np. InSb. Malejąca zależność $\lambda(\gamma)$ częściowo rekompensuje wzrost $\beta(\gamma)$ i jest wskaźnikiem łamania symetrii funkcji stanu ze sferycznej na elipsoidalną przez pole magnetyczne.

II.3. MODEL WIELOPASMOWY W OPISIE DONORU W POLU MAGNETYCZNYM W ZWIĄZKACH III-V.

II.3.1. Hamiltonian efektywny donoru.

Uwzględnienie nieparaboliczności pasm wymaga wyjścia z przybliżenia masy efektywnej i użycia modelu wielopasmowego. Równanie wyjściowe naszego zagadnienia przyjmuje postać:

$$\left[\frac{P^2}{2m} + V_o(r) + \frac{\hbar}{4m^2 c^2} (\sigma \times \nabla V_o(r)) P + \mu_B B \sigma + V(r) \right] \Psi = E \Psi \quad (2.31)$$

gdzie oznaczenia są analogiczne jak w równaniu (1.1) rozdziału I a ponadto występujące w (2.31):

$$V(r) = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.32)$$

reprezentuje potencjał kulombowski domieszki.

W równaniu (2.31) pominięto człon spin-orbitalny zależny od gradientu wolnozmiennego $V(r)$.

Wyrażenie (2.31) należy obecnie poddać analogicznej procedurze jak równanie (1.1) w rozdziale I, poszukując jego rozwiązania w postaci (1.2). Traktując wolnozmiennie funkcje $A(r)$, $V(r)$ i $f_1(r)$ jako stałe na przestrzeni komórki elementarnej otrzymujemy zagadnienie własne w formie:

$$\sum_l \left[\left(\frac{P^2}{2m} + \epsilon_{l0} + V - E \right) \delta_{l,l} + \pi_{l,l} P + H_{l,l}^{so} + \mu_B B \sigma_{l,l} \right] f_l(r) = 0 \quad (2.33)$$

H^{SO} - człon oddziaływania spin-orbita; $\pi_{1,1}$ definiuje (1.8). Zakładana wolnozmiennosc $V(r)$ przez autorów prac [18,38,71,40] nie może dotyczyć bezpośredniego sąsiedztwa domieszki, komplikacje wynikające z powyższego założenia będą tematem punktów II.3.5÷6. Tymczasem za autorami prac wyżej wspomnianych pozostawimy to założenie w niezmienionej formie. Dla potrzeb niniejszego rozdziału uprościmy procedurę z rozdziału I ograniczając się do wyznaczenia ściśle elementów macierzowych z (2.33) tylko pomiędzy trzema pasmami Γ_6 , Γ_8^V i Γ_7^V zaniedbując pozostałe. Tego typu przybliżenie dla elektronu w paśmie przewodnictwa w polu magnetycznym zaproponowali Bowers i Yafet [7] i stosując do zagadnienia płytkiego donoru Larsen [38], Zawadzki i Własak [71] oraz Obuchowicz i Własak [18]. Równanie (2.33) można wówczas przedstawić w postaci macierzowej:

$$[D + (V-E)I]F = 0 \quad (2.34)$$

Macierz D w bazie amplitud Luttingera-Kohna postaci $u_7 \pm u_{14}$ (1.24) przedstawia tabela 26. F reprezentuje ośmiowymiarowy wektor funkcji obwiedni f_1 .

II.3.2. Równanie ogólne procedury wariacyjnej.

Zaniedbując niewielkie człony mieszające funkcje f_j osiem równań (3.2) sprowadza się do dwóch:

$$\left[V - E + \kappa^2 \left(P_- \frac{1}{\varepsilon_0 + E - V} P_+ + \frac{2}{3} P_z \frac{1}{\varepsilon_0 + E - V} P_z + \frac{1}{3} P_+ \frac{1}{\varepsilon_0 + E - V} P_- + \frac{1}{3} P_z \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon_0 + E - V} P_z + \frac{2}{3} P_+ \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon_0 + E - V} P_- \right) \right] f_1 = 0 \quad (2.35a)$$

$$\left[V - E + \kappa^2 \left(P_+ \frac{1}{\varepsilon_0 + E - V} P_- + \frac{2}{3} P_z \frac{1}{\varepsilon_0 + E - V} P_z + \frac{1}{3} P_- \frac{1}{\varepsilon_0 + E - V} P_+ + \frac{1}{3} P_z \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon_0 + E - V} P_z + \frac{2}{3} P_- \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon_0 + E - V} P_+ \right) \right] f_2 = 0 \quad (2.35b)$$

gdzie

$$\kappa = -\frac{i}{m} \langle S | p_x | X \rangle \quad (2.36)$$

$$P_{\pm} = P_x \pm i P_y$$

Jak wykazali Zawadzki i Własak [71] metodą najbardziej właściwą dla rozwiązania równań (2.35) jest procedura wariacyjna. Traktując f_1 i f_2 jako wariacyjne funkcje próbne wyznaczamy wartości oczekiwane wyrażeń (2.35). Równanie ogólne otrzymujemy w postaci wielomianu piątego stopnia:

$$\sum_{i=0}^5 a_i E^i = 0 \quad (2.37)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 = & -d_3^2 (\langle T \rangle + \langle V \rangle) + d_1 d_3 \langle V^2 \rangle - d_2 \langle V^3 \rangle + d_1 \langle V^4 \rangle - \langle V^5 \rangle + \\ & + d_5 d_8 \langle VT \rangle - d_4 d_8 \langle V^2 T \rangle + 3 d_8 \langle V^3 T \rangle \mp \gamma \Delta_0 d_8 (d_3 - \frac{1}{2} d_1 \langle V \rangle + \\ & + \langle V^2 \rangle) + 2 d_7 d_8 \langle O_1 \rangle - 4 d_6 d_8 \langle VO_1 \rangle + 6 d_8 \langle V^2 O_1 \rangle \pm d_1 d_8 \langle O_2 \rangle + \\ & \mp 4 \Delta_0 d_8 \langle VO_2 \rangle; \end{aligned} \quad (2.38a)$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & d_3^2 - 2d_1d_3\langle V \rangle + 3d_2\langle V^2 \rangle - 4d_1\langle V^3 \rangle + 5\langle V^4 \rangle - d_5d_8\langle T \rangle + \\
& + 2d_4d_8\langle VT \rangle - 9d_8\langle V^2T \rangle \mp \gamma\Delta_0d_8\left(\frac{1}{2}d_1 - 2\langle V \rangle\right) + 4d_6d_8\langle O_1 \rangle + \\
& - 12d_8\langle VO_1 \rangle \pm 4\Delta_0d_8\langle O_2 \rangle; \quad (2.38b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & d_1d_3 - 2d_2\langle V \rangle + 6d_1\langle V^2 \rangle - 10\langle V^3 \rangle - d_4d_8\langle T \rangle + \\
& + 9d_8\langle VT \rangle \mp \gamma\Delta_0d_8 + 6d_8\langle O_1 \rangle; \quad (2.38c)
\end{aligned}$$

$$a_3 = d_2 - 4d_1\langle V \rangle - 3d_8\langle T \rangle + 10\langle V^2 \rangle; \quad (2.38d)$$

$$a_4 = d_1 - 5\langle V \rangle; \quad (2.38e)$$

$$a_5 = 1; \quad (2.38f)$$

znaki $\pm$ i $\mp$ odnoszą się odpowiednio : górny dla funkcji f_1 ,
dolny dla f_2 :

$$d_1 = 2(2\varepsilon_0 + \Delta_0); \quad (2.39a)$$

$$d_2 = 6\varepsilon_0^2 + 6\varepsilon_0\Delta_0 - \Delta_0^2; \quad (2.39b)$$

$$d_3 = \varepsilon_0(\varepsilon_0 + \Delta_0); \quad (2.39c)$$

$$d_4 = 9\varepsilon_0 + 5\Delta_0; \quad (2.39d)$$

$$d_5 = 9\varepsilon_0^2 + 10\varepsilon_0\Delta_0 + 2\Delta_0^2; \quad (2.39e)$$

$$d_6 = 3\varepsilon_0 + 2\Delta_0; \quad (2.39f)$$

$$d_7 = 3\varepsilon_0^2 + 4\varepsilon_0\Delta_0 + 2\Delta_0^2; \quad (2.39g)$$

$$d_8 = \frac{2}{3}\kappa^2; \quad (2.39h)$$

$$O_1 = (\rho^2 + z^2)^{-3/2} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right); \quad (2.40)$$

$$O_2 = (\rho^2 + z^2)^{-3/2} \left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\gamma \rho^2}{2} \right); \quad (2.41)$$

$$\gamma = \hbar\omega_c/2Ry^*; \quad (2.42)$$

ω_c - częstość cyklotronowa;

Ry^* - efektywny rydberg;

nawiasy trójkątne oznaczają średnią operatora wziętą z funkcji próbnej;

$V^n A$ - oznacza iloczyn lewostronny operatora A z potencjałem V w n -tej potęgze.

Larsen [38] zaniedbał elementy $\langle V^5 \rangle$, $\langle V^4 \rangle$, $\langle V^3 T \rangle$, $\langle V^2 O_1 \rangle$ i $\langle V O_2 \rangle$. Otrzymane w ten sposób równanie czwartego stopnia zredukował do stopnia trzeciego wprowadzając masę zależną od energii. Aby otrzymać stan podstawowy i jeden ze stanów wzbudzonych użył metody, którą można nazwać samouzgodnioną procedurą wariacyjną. Zawadzki i Własak [71] zaniedbali wszystkie elementy oprócz $\langle V \rangle$ i $\langle T \rangle$ i również otrzymali wielomian trzeciego stopnia na energię.

II.3.3. Wybór funkcji próbnych.

W zależności od wyboru postaci funkcji próbnej dla procedury wariacyjnej przedstawionej w poprzednim punkcie pracy otrzymywano różną zgodność z doświadczeniem. Rezultaty Larsena [38] (postać funkcji próbnej dla stanu podstawowego przedstawia wyrażenie (2.18)) osiągały dobrą zgodność z eksperymentem dla niskich pól magnetycznych. Zawadzki i Własak [71], bazujący na funkcjach próbnych Yafeta i in. [34], osiągnęli bardzo dużą dokładność dla pól wysokich. Obuchowicz i Własak [18] przedstawili próbę znalezienia funkcji próbnej dającej rezultaty poprawne dla pełnego zakresu pól magnetycznych. Funkcje próbne pracy [18]

bezpośrednio wiążą się z funkcjami stanów atomu wodoru.

Dla stanu podstawowego:

$$f_{1s} = C \exp(-\alpha r^{2\delta}) \quad (2.43)$$

gdzie $r = (\rho^2 + \lambda z^2)^{1/2}$, $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma \epsilon}{2\lambda} \right)^\delta$ i λ , ϵ , δ są parametrami wariacyjnymi. Łatwo zauważyć, że dla $\delta = 1/2$ i $\lambda = 1$ funkcja (2.43) przechodzi w funkcję wodorową $1s$, dla $\delta = 1$ jest to funkcja Yafeta, Keyesa i Adamsa [34]. Wprowadzenie parametru δ dało możliwość uzyskania uniwersalnej funkcji dla dowolnej wartości pola magnetycznego. Rezygnując z podstruktury parametru α funkcja (2.43) przekształca się bezpośrednio w postać funkcji (2.29). Autorzy pracy [18] w ślad za poprzednikami zaniedbali wszystkie elementy równań (2.38) za wyjątkiem

$$\langle V \rangle = -GLW_{0,3}^{0,2} \quad (2.44a)$$

$$\langle V^2 \rangle = 4G^2AW_{0,3}^{0,1} \quad (2.44b)$$

$$\langle T \rangle = \frac{G^2}{3\lambda} \left[\left(\delta + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) W_{0,3}^{0,1} + 2tsW_{0,3}^{0,5} \right] \quad (2.44c)$$

$$\langle VT \rangle = -\frac{G^3}{2\lambda} \left[\left(\delta^2(2+\lambda)L + 2\delta(2-\delta) \right) W_{0,3}^{1,0} + t[(2-\lambda)L - 2]W_{0,3}^{0,4} \right] \quad (2.44d)$$

$$\langle V^2T \rangle = \frac{2G^4}{\lambda} \left[\left((2\delta^2(1+\lambda) + \delta s)A - \delta(2\delta-3) \right) W_{0,3}^{1,-1} + 2t(A-1) \right] \quad (2.44e)$$

$$\langle O_1 \rangle = -\frac{\delta G^3}{\lambda} W_{0,3}^{1,0} \quad (2.44f)$$

$$\langle O_2 \rangle = -\frac{\gamma G}{4s} (2-\lambda L) W_{0,3}^{0,2} \quad (2.44g)$$

$$\langle VO_1 \rangle = \frac{G^4}{2y\lambda} (1+A) W_{0,3}^{1,-1} \quad (2.44h)$$

$$\langle VO_2 \rangle = \frac{\gamma G^2}{2s} [1 + (1 - 2\lambda)A] W_{0,3}^{0,1} \quad (2.44i)$$

gdzie $s = 1 - \lambda$; $t = \lambda^2 / s \epsilon^2$; $L = \frac{1}{\sqrt{s}} \ln \frac{1 + \sqrt{s}}{1 - \sqrt{s}}$;

$$G = \left(\frac{\gamma \epsilon}{2} \right)^{1/2}; \quad y = 1/2\delta; \quad A = \frac{1}{\sqrt{\lambda s}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{s}{\lambda}};$$

$$W_{k,l}^{m,n} = \frac{\Gamma(m+ny)}{\Gamma(k+ly)} \quad \text{ i } \quad \Gamma(x) - \text{ funkcja } \Gamma \text{ Eulera.}$$

Następna funkcja jest pochodną funkcji wodorowej $2p_z$:

$$f_{2p_z} = Cr^{2\delta} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} r^{2\delta}\right) \cos\theta \quad (2.45)$$

Wartości oczekiwane z (2.38) przyjmują postać:

$$\langle V \rangle = \frac{\sqrt{\lambda} D}{E} (2 - L) W_{2,3}^{2,2} \quad (2.46a)$$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{2\lambda D^2}{E} (A - 1) W_{2,3}^{2,1} \quad (2.46b)$$

$$\langle V^3 \rangle = - \frac{8\sqrt{\lambda} s D^3}{3E} W_{2,3}^{2,0} \quad (2.46c)$$

$$\langle V^4 \rangle = \frac{2\lambda D^4}{E} (1 - 2\lambda + A) W_{2,3}^{2,-1} \quad (2.46d)$$

$$\langle V^5 \rangle = - \frac{32\sqrt{\lambda} s D^5}{15E} (2 + 3\lambda) W_{2,3}^{2,-2} \quad (2.46e)$$

$$\langle O_1 \rangle = 0 \quad (2.46f)$$

$$\langle VO_1 \rangle = - \frac{1}{16} \langle V^4 \rangle \quad (2.46g)$$

$$\langle V^2 O_1 \rangle = - \frac{1}{8} \langle V^5 \rangle \quad (2.46h)$$

$$\langle O_2 \rangle = - \frac{\gamma \sqrt{\lambda} D}{2sE} \left(\frac{1+2\lambda}{3} - \frac{\lambda L}{2} \right) W_{2,3}^{2,2} \quad (2.46i)$$

$$\langle VO_2 \rangle = \frac{\gamma \lambda D^2}{8sE} [1 + 2\lambda + (1 - 4\lambda)A] W_{2,3}^{2,1} \quad (2.46j)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle = \frac{D^2}{2E} \left\{ \left[(4\delta^2 + \delta + \frac{5}{2}) \left(\frac{2}{3}(1+2\lambda) - \lambda(1+\lambda A) \right) + 2(1+\lambda) - \lambda(1+3\lambda)A \right] W_{2,3}^{2,1} \right. \\ \left. + 2x \left(\frac{1}{3}(2+\lambda) - \lambda A \right) W_{2,3}^{2,5} \right\} \end{aligned} \quad (2.46k)$$

$$\begin{aligned} \langle VT \rangle = \frac{\sqrt{\lambda} D^3}{E} \left\{ \left[2\delta^2 (3+2\lambda - \frac{1}{2}(2+3\lambda)L) - \frac{4}{3}s \right] W_{2,3}^{2,0} + \right. \\ \left. + x \left(3 - \frac{1}{2}(2+\lambda)L \right) W_{2,3}^{2,4} \right\} \end{aligned} \quad (2.46l)$$

$$\begin{aligned} \langle V^2 T \rangle = \frac{\lambda D^4}{E} \left\{ \left[(4\delta^2 - \delta + \frac{3}{2}) \left((1+3\lambda)A - 3 - \lambda \right) + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(1+6\lambda)A \right] W_{2,3}^{2,-1} + \right. \\ \left. + 2x \left[(1+2\lambda)A - 3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.46m)$$

$$\begin{aligned} \langle V^3 T \rangle = \frac{8\sqrt{\lambda} D^5}{3E} \left\{ \left[(-2\delta^2 + \delta - 1) \left(1+3\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda L \right) + \frac{1}{5}s(2+3\lambda) \right] W_{2,3}^{2,-2} + \right. \\ \left. - x \left(1+2\lambda - \frac{3}{2}\lambda L \right) W_{2,3}^{2,2} \right\} \end{aligned} \quad (2.46n)$$

gdzie ponadto

$$E = 1 - \lambda A; \quad D = G/2^y \sqrt{\lambda} \quad \text{ i } \quad x = 2^{4y} t$$

Żądanie ortogonalności pełnej funkcji falowej prowadzi do następujących relacji dla próbnych funkcji obwiedni:

$$\langle f_n, |f_n \rangle = \delta_{n,n} \quad (2.47a)$$

$$\langle P_i f_n, |P_i f_n \rangle = \delta_{n,n} \quad (2.47b)$$

gdzie $P_i = P_1, P_2, P_3$.

Dla wyższych stanów wzbudzonych funkcja obwiedni przyjmowana jest w postaci:

$$f_{pM} = C r^{2\delta} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} r^{2\delta}\right) \exp(iM\varphi) \sin\theta \quad M = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.48)$$

Spełnia ona warunki (2.47) w porównaniu z funkcjami (2.43) i (2.45). Dla $M = \pm 1$, $\delta = 1/2$ i $\lambda = 1$ przechodzi ona bezpośrednio w funkcje atomowe $2p_x$ i $2p_y$. Wartości oczekiwane wzięte z funkcją (2.48) są następujące:

$$\langle V \rangle = - \frac{D}{\sqrt{\lambda} B} (2 - \lambda L) W_{2,3}^{2,2} \quad (2.49a)$$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{2D^2}{B} [1 + (1 - 2\lambda)A] W_{2,3}^{2,1} \quad (2.49b)$$

$$\langle V^3 \rangle = - \frac{16sD^3}{3\sqrt{\lambda} B} W_{2,3}^{2,0} \quad (2.49c)$$

$$\langle V^4 \rangle = \frac{2D^4}{B} [3 - 2\lambda + (3 - 4\lambda)A] W_{2,3}^{2,-1} \quad (2.49d)$$

$$\langle V^5 \rangle = - \frac{64s(4 + \lambda)}{15\sqrt{\lambda} B} W_{2,3}^{2,-2} \quad (2.49e)$$

$$\langle O_1 \rangle = 0 \quad (2.49f)$$

$$\langle VO_1 \rangle = - \frac{1}{16} \langle V^4 \rangle \quad (2.49g)$$

$$\langle V^2 O_1 \rangle = - \frac{1}{8} \langle V^5 \rangle \quad (2.49h)$$

$$\langle O_2 \rangle = \frac{1}{8} M \langle V^3 \rangle - \frac{D^3}{B} \left(\frac{x}{\lambda s} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{2} (2 - 5\lambda) + \frac{1}{2} \lambda^2 L \right] W_{2,3}^{2,2} \quad (2.49i)$$

$$\langle VO_2 \rangle = \frac{1}{8} M \langle V^4 \rangle + \frac{D^4}{4B} \left(\frac{x}{s} \right)^{1/2} [3 - 6\lambda + (3 - 8\lambda + 8\lambda^2)A] W_{2,3}^{2,1} \quad (2.49j)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle = \frac{D^2}{B} \left\{ \left[\left(2\delta^2 + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{4} \right) \left((1 + \lambda)A - \frac{1}{3}(5 + \lambda) \right) + 1 + (M^2 s - \lambda)A \right] W_{2,3}^{2,1} + \right. \\ \left. + x \left[A - \frac{1}{3}(5 - 2\lambda) \right] W_{2,3}^{2,5} \right\} + M\gamma \quad (2.49k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle VT \rangle = & - \frac{D^3}{\sqrt{\lambda}B} \left\{ \left[\delta^2 (4+6\lambda - \lambda(4+\lambda)L) + \frac{1}{3} (2+6M^2)s \right] W_{2,3}^{2,0} + \right. \\ & \left. + x \left[2+\lambda + \frac{1}{2}\lambda(4-\lambda)L \right] W_{2,3}^{2,4} \right\} + M\gamma \langle V \rangle \end{aligned} \quad (2.49l)$$

$$\begin{aligned} \langle V^2 T \rangle = & \frac{2D^4}{B} \left\{ \left[\left(2\delta^2 - \frac{\delta}{2} + \frac{3}{4} \right) (1+3\lambda + (1-3\lambda+2\lambda^2)A) + \right. \right. \\ & - \frac{1}{4} [3+4\lambda + (3-6\lambda-4\lambda^2)A] + M^2 s (1+A) \left. \right] W_{2,3}^{2,-1} + \\ & \left. + x [1+2\lambda + (1-4\lambda)A] \right\} + M\gamma \langle V^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.49m)$$

$$\begin{aligned} \langle V^3 T \rangle = & - \frac{4D^5}{\sqrt{\lambda}B} \left\{ \left[\left(2\delta^2 - \delta + 1 \right) \left(\frac{2}{3} (2-3\lambda-2\lambda^2) + \lambda^2 L \right) + \right. \right. \\ & - \frac{2}{3} s \left(\left(\frac{7}{5} - M^2 \right) \lambda + \frac{18}{5} - 2M^2 \right) \left. \right] W_{2,3}^{2,-2} + \\ & \left. + x \left[\frac{2}{3} (2-5\lambda) + \lambda^2 L \right] W_{2,3}^{2,2} \right\} + M\gamma \langle V^3 \rangle \end{aligned} \quad (2.49n)$$

gdzie $B = A - 1$

Istnieje również inny nieskończony szereg funkcji spełniających wymagania (2.47) z funkcjami (2.43), (2.45) i (2.48) :

$$f_{dM} = Cr^{4\delta} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}r^{2\delta}\right) \exp(iM\varphi) \sin\theta \cos\theta \quad M=\pm 1, +2, \dots \quad (2.50)$$

Prototypem funkcji (2.50) są funkcje atomowe $3d_{x+z}$ i $3d_{y+z}$.

Odpowiednie wartości oczekiwane mają postać:

$$\langle V \rangle = - \frac{2Z}{\sqrt{\lambda}K} \left[\frac{2}{3} (1+2\lambda) - \lambda L \right] W_{4,3}^{4,2} \quad (2.51a)$$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{Z^2}{K} [1 + 2\lambda + (1-4\lambda)A] W_{4,3}^{4,1} \quad (2.51b)$$

$$\langle V^3 \rangle = - \frac{64s^2 Z^3}{5\sqrt{\lambda}K} W_{4,3}^{4,0} \quad (2.51c)$$

$$\langle V^4 \rangle = \frac{2Z^4}{K} \left[\frac{1}{3} (3-4\lambda+4\lambda^2) + (1-2\lambda)A \right] W_{4,3}^{4,-1} \quad (2.51d)$$

$$\langle V^5 \rangle = - \frac{128}{105} \frac{s^2 Z^5}{K} (4+3\lambda) W_{4,3}^{4,-2} \quad (2.51e)$$

$$\langle O_1 \rangle = 0 \quad (2.51f)$$

$$\langle VO_1 \rangle = - \frac{1}{16} \langle V^4 \rangle \quad (2.51g)$$

$$\langle V^2 O_1 \rangle = - \frac{1}{8} \langle V^5 \rangle \quad (2.51h)$$

$$\langle O_2 \rangle = \frac{1}{8} M \langle V^3 \rangle - \frac{2Z^3}{K} \left(\frac{x}{\lambda s} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{15} (2-9\lambda-8\lambda^2) + \frac{1}{2} \lambda^2 L \right] W_{4,3}^{4,2} \quad (2.51i)$$

$$\langle VO_2 \rangle = \frac{1}{8} M \langle V^4 \rangle + \frac{Z^4}{4K} \left(\frac{x}{s} \right)^{1/2} \left[3-10\lambda-8\lambda^2 + (1-4\lambda+8\lambda^2) A \right] W_{4,3}^{4,1} \quad (2.51j)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle = & \frac{Z^2}{K} \left\{ \left[(4\delta^2 + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{4}) ((1+5\lambda+2\lambda^2) A - \frac{1}{3} (13+11\lambda)) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} (5+4\lambda + (1-10\lambda) A) + M^2 s (A-1) \left. \right] W_{4,3}^{4,1} + \\ & + x \left((1+4\lambda) A - \frac{1}{3} (13+2\lambda) \right) W_{4,3}^{4,5} \left. \right\} + M\gamma \end{aligned} \quad (2.51k)$$

$$\begin{aligned} \langle VT \rangle = & \frac{2Z^3}{\sqrt{\lambda} K} \left\{ \left[-24\delta^2 \left(\frac{1}{3} (2+15\lambda+4\lambda^2) - \frac{1}{2} \lambda (4+3\lambda) L \right) + \frac{28}{5} s^2 - 4M^2 s^2 \right] W_{4,3}^{4,0} + \right. \\ & - x \left[\frac{1}{3} (2+13\lambda) - \frac{1}{2} \lambda (4+\lambda) L \right] W_{4,3}^{4,4} + M\gamma \langle V \rangle \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.51l)$$

$$\begin{aligned} \langle V^2 T \rangle = & \frac{Z^4}{K} \left\{ \left[(4\delta^2 - \frac{\delta}{2} + \frac{3}{4}) (1+15\lambda+2\lambda^2 + (1-7\lambda-12\lambda^2) A) + \right. \right. \\ & - \frac{1}{6} (6+41\lambda+10\lambda^2 + (6-27\lambda-36\lambda^2) A) + M^2 s (1-2\lambda+A) + \\ & - (2-\lambda+2\lambda^2 + (2-5\lambda) A) \left. \right] W_{4,3}^{4,-1} + x [1+14\lambda + (1-8\lambda-8\lambda^2) A] \left. \right\} + \\ & + M\gamma \langle V^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.51m)$$

$$\begin{aligned} \langle V^3 T \rangle = & - \frac{16}{15} \frac{Z^5}{\sqrt{\lambda} K} \left\{ \left[(4\delta^2 - \delta + 1) (2-7\lambda-12\lambda^2+2\lambda^3) + \frac{1}{7} s^2 (10-3\lambda) + \right. \right. \\ & + M^2 s (2+3\lambda) \left. \right] W_{4,3}^{4,-2} + x (2-9\lambda-8\lambda^2 + \frac{15}{2} \lambda^2 L) W_{4,3}^{4,2} \left. \right\} + \\ & + M\gamma \langle V^3 \rangle \end{aligned} \quad (2.51n)$$

gdzie $K = (1+2\lambda)A - 3$; $Z = G/3^Y \sqrt{\lambda}$

Warto zauważyć, że dla obu funkcji (2.43) i (2.45) oraz szeregów funkcji (2.48) i (2.50) zależność od kąta θ w granicy dużych wartości pola magnetycznego są porównywalne z wielomianami $P_0(\cos\theta)$ i $P_1(\cos\theta)$ występującymi w wielu funkcjach prac poprzedników (np. [35] i [71]).

II.3.4. Rezonanse magnetoptyczne donoru - dyskusja wyników.

Aby uzyskać wartości energii stanów donorowych należy minimalizować jeden z rzeczywistych pierwiastków wielomianu (2.37) w zależności od parametrów λ , ϵ i δ . Tabela 27 zawiera różnice energii (wyrażone w cm^{-1}) pomiędzy stanami wzbudzonymi a stanem podstawowym dla pięciu związków III-V InAs, InP, InSb, GaAs i GaSb w polu magnetycznym od 1 kGs do 70 kGs [18]. Parametry powyższych związków użyte w tych obliczeniach podaje tabela 28 (za [18]). Wyniki obliczeń numerycznych dokonanych na podstawie powyżej opisanej metody pokrywają się z danymi dla InAs zmierzonymi przez Holmesa i in. [58]. Różnica energii pomiędzy stanem określonym przez funkcję (2.48) z $M = +1$ a stanem podstawowym odpowiadają donorowemu rezonansowi cyklotronowemu z bardzo dużą dokładnością. Podobnie różnica energii dla stanu (2.50) z $M = +1$ pokrywa się niemal dokładnie z następnym mierzonym przejściem, którego intensywność jest porównywalna z donorowym rezonansem cyklotronowym. Biorąc pod uwagę jedynie

zmianę M , oba te przejścia są równoważne. Pewna niespójność z doświadczeniem dotyczy reguł wyboru. Podczas gdy przejście do stanu (2.48) jest dozwolone dla dowolnego kierunku pola magnetycznego, przejście do stanu (2.50) dla $\mathbf{B} \parallel [001]$ i polaryzacji σ_L jest zabronione. Jest to związane z parzystością funkcji (2.50) względem "z". Istnieje również pewna zgodność teorii z eksperymentem dla drugiej harmonicznej obu przejść (tzn. przejść pomiędzy stanem podstawowym a stanami $M = +2$ (2.48) i (2.50)). Jakkolwiek nowe funkcje dla płytkich stanów donorowych w związkach III-V użyte w przytoczonych obliczeniach są odpowiednie dla pełnego zakresu pól magnetycznych, nie spełniają wszystkich wymogów nałożonych przez powyższą teorię. Szczególnie parzystość tych funkcji względem "z" nie uwzględnia faktu, że w strukturze blendy cynkowej brak jest symetrii inwersyjnej, a więc reguły wyboru, a także intensywność przejść, są wyznaczane przy pomocy tych funkcji jedynie w przybliżeniu. Powyższe rozważania sugerują potrzebę poszukiwań lepszych funkcji próbnych w ramach rozpatrywanego modelu, o nieokreślonej parzystości względem "z". Można z góry przewidzieć interesujący rezultat: dla takich funkcji, zachowujących M jako dobrą liczbę kwantową, wszystkie domieszkowe przejścia magnetoptyczne, poza $1s - 2p_0$, będą miały strukturę wieloliniową.

II.3.5. Osobliwość stanu podstawowego donoru.

Przy dotychczasowych rozważaniach związanych ze stanem podstawowym donoru nie została podana przyczyna pominięcia następującego zbioru wartości oczekiwanych w wyrażeniach (2.44) $\langle V^3 \rangle$, $\langle V^4 \rangle$, $\langle V^5 \rangle$, $\langle V^3_T \rangle$ i $\langle V^2_{O_1} \rangle$. Wiąże się to z osobliwością tych wartości oczekiwanych wyznaczonych przy użyciu funkcji (2.43). Na przykład średnia $\langle V^3 \rangle$:

$$(V = -2/(\rho^2 + z^2)^{1/2})$$

$$\begin{aligned} \langle V^3 \rangle = & -8(2\pi/\sqrt{\lambda})C^2 \int_{-\pi}^{+\pi} [\sin(\theta)/(1 + \frac{1-\lambda}{\lambda}\cos^2(\theta))^{3/2}] d\theta \times \\ & \times \int_0^{\infty} r \exp(-2\alpha r^{2\delta}) dr \end{aligned} \quad (2.52)$$

ostatnia całka wyrażenia wynosi

$$\int_0^{\infty} r \exp(-2\alpha r^{2\delta}) dr = \frac{1}{2\delta} \Gamma(0) \quad (2.53)$$

Funkcja Γ Eulera dla argumentu zero nie ma wartości skończonej.

Do analogicznych rezultatów prowadzi zastosowanie funkcji dla stanu podstawowego Larsena [38] (2.18) jak i Yafeta i in. [34] (2.14) (użytej przez Zawadzkiego i Własaka [71]). Autorzy stanęli przed wyborem pomiędzy uproszczeniem równania (2.37) z zachowaniem postaci funkcji próbnej lub poszukiwaniu bardziej skomplikowanego rozwiązania. Wobec faktu, iż dla stanów wzbudzonych uwzględnienie tych pięciu elementów wnosi poprawkę do energii rzędu 0.1%, pominięto je

w obliczeniach stanu podstawowego.

Przyczyna zaistniałych trudności wiąże się z jednym z podstawowych założeń przytaczanej w tym rozdziale metody. Jest nim przyjęcie, że potencjał kulombowski donoru jest wolnozmienny na przestrzeni komórki elementarnej, co nie jest słuszne w pobliżu centrum domieszki.

Istnieją dwie metody rozwiązania powyższego problemu. Pierwsza [40] zachowuje założenie wolnozmienności potencjału donoru. Wartość oczekiwaną energii dla konkretnych funkcji próbnych wyznaczana jest bezpośrednio z równań (2.35) korzystając z relacji:

$$\langle f | P_{\pm, Z} g(E, V(r)) P_{\mp, Z} | f \rangle = \langle P_{\mp, Z} f | g(E, V(r)) | P_{\mp, Z} f \rangle$$

Powyższa metoda prowadzi do skomplikowanych obliczeń numerycznych wiążących procedurę samouzgodnioną z minimalizacją procedury wariacyjnej.

Drugą metodę [72] przedstawiam w następnym podrozdziale.

II.3.6. Nowe sformułowanie modelu donoru w przybliżeniu wielopasmowym.

Korzystając z zależności :

$$\frac{1}{R} = \frac{\eta}{R(R+\eta)} + \frac{1}{R+\eta} \quad (2.54)$$

można przedstawić potencjał kulombowski w postaci:

$$V(R) = V_r(R) + V_s(R) \quad (2.55)$$

gdzie $V_r(R)$ i $V_s(R)$ - składowe szybko i wolnozmiennie potencjału kulombowskiego na przestrzeni komórki elementarnej.

$$R = (\rho^2 + z^2)^{1/2} \quad (2.56)$$

Po uwzględnieniu wyrażenia (2.55) w (2.31) i poddaniu go analogicznej procedurze otrzymamy ponownie układ ośmiu równań:

$$\sum_{j=1}^8 [D'_{ij} + \delta_{ij}(V_s - E)] f_j = 0 \quad (2.57)$$

macierz D'_{ij} przedstawia tabela 29.

Stosując podobne przekształcenia jak w punkcie II.3.2 układ równań (2.57) redukuje się do dwóch:

$$\left[V_s - \varepsilon + \kappa^2 \left(P_- \frac{1}{\varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_+ + \frac{2}{3} P_z \frac{1}{\varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_z + \frac{1}{3} P_+ \frac{1}{\varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_- + \frac{1}{3} P_z \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_z + \frac{2}{3} P_- \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_- \right) \right] f_1 = 0 \quad (2.58a)$$

$$\left[V_s - \varepsilon + \kappa^2 \left(P_+ \frac{1}{\varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_- + \frac{2}{3} P_z \frac{1}{\varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_z + \frac{1}{3} P_- \frac{1}{\varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_+ + \frac{1}{3} P_z \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_z + \frac{2}{3} P_+ \frac{1}{\Delta_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon - V_s} P_+ \right) \right] f_2 = 0 \quad (2.58b)$$

$$\text{gdzie } \varepsilon = E - A \quad (2.59a)$$

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 + A - B \quad (2.59b)$$

$$A = \langle S | V_r | S \rangle \quad (2.59c)$$

$$B = \langle X | V_r | X \rangle \quad (2.59d)$$

Stosując procedurę wariacyjną dla równań (2.58) otrzymujemy równanie ogólne na energię w postaci:

$$\sum_{i=0}^5 a_i \varepsilon^i = 0 \quad (2.60)$$

Współczynniki powyższego wielomianu opisują równania (2.38)+(2.42) przy uwzględnieniu podstawień:

V_s w miejsce V ;

ε (def.(2.59a)) w miejsce E ;

ε'_0 (def.(2.59b)) w miejsce ε_0 ;

oraz nowych definicji operatorów O_1 i O_2 :

$$O_1 = \frac{1}{R(R+\eta)^2} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \quad (2.40)'$$

$$O_2 = \frac{1}{R(R+\eta)^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\gamma \rho^2}{2} \right); \quad (2.41)'$$

Funkcja próbna obwiedni dla stanu podstawowego donoru została obrana w postaci (2.29). Ma ona tę przewagę nad funkcją (2.43), że nie zawiera skomplikowanej podstruktury parametru α w eksponencie (2.43), która, aby zapobiec zerowaniu się wykładnika dla $B=0$ ($\gamma=0$), żądała aby parametr wariacyjny ε zdążył do nieskończoności w granicy zerowego pola magnetycznego. Odpowiednie wartości oczekiwane operatorów wchodzących do współczynników wielomianu (2.60) przyjmują formę:

$$\langle V_S^n \rangle = (-2)^n K I_n(r^2) \quad n=1,2,\dots,5 \quad (2.61a)$$

$$\langle V_{S1}^n \rangle = (-2)^{n+1} K \beta^\delta \delta I_n(r^{2\delta}/SZ^2) \quad n=0,1,2 \quad (2.61b)$$

$$\langle V_{S2}^n \rangle = (-1)^n 2^{n-1} K \gamma I_n((1-x^2)r^3/SZ^2) \quad n=0,1 \quad (2.61c)$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{6} [\beta(\delta+\frac{1}{2})(2+\lambda)\Gamma(t) + \gamma^2 \Gamma(5t)/\beta] / \Gamma(3t) \quad (2.61d)$$

$$\begin{aligned} \langle V_S^n \rangle = & (-2)^n K \{ \beta^\delta \delta [(2\delta+1) I_n(r^{2\delta}) - \beta^\delta \delta I_n(r^{4\delta}) + \\ & + 2(\delta-1)(\lambda-1) I_n(x^2 r^{2\delta}) - (\lambda-1) \beta^\delta \delta I_n(x^2 r^{4\delta})] + \\ & + \frac{1}{4} \gamma^2 I_n((1-x^2)r^4) \} \quad n=1,2,3 \quad (2.61e) \end{aligned}$$

gdzie $K = \delta \beta^{3/2} \Gamma(3t)$;

$$I_n(g(x,r)) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty [g(x,r) \exp(-\beta^\delta r^{2\delta}) / Z^n] dr dx;$$

$$Z = rS + \eta;$$

$$S = [1 + (1-\lambda)x^2/\lambda]^{1/2};$$

$$x = \lambda z/r;$$

η - stała dodatnia;

$$t = 1/2\delta.$$

Aby otrzymać energię stanu podstawowego dla danego pola magnetycznego należy minimalizować ze względu na parametry β , δ , λ jeden z rzeczywistych pierwiastków wielomianu (2.60).

Podobnie jak przy omawianiu donoru w przybliżeniu masy efektywnej (p.II.2.1) wskazane jest wyznaczenie energii jonizacji donoru czyli różnicy pomiędzy zerowym stanem Landaua pasma przewodnictwa a stanem podstawowym domieszki :

$$E_J = E_0 - E_b \quad (2.62)$$

W modelu jednopasmowym (p.II.2) najniższy stan pasma

przewodnictwa wyrażony w efektywnych rydbergach przyjmuje wartość γ (2.8). Uwzględnienie większej ilości pasm zaburza tę prostą relację.

W celu wyznaczenia energii E_0 należy pominąć w równaniu (2.34) potencjał kulombowski, czyli rozwiązać równanie postaci:

$$\sum_{j=1}^8 [D_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon] f_j = 0 \quad (2.63)$$

gdzie D_{ij} przedstawia tabela 26.

Podobnie jak w przypadku (2.34) wyrażenie (2.63) można zredukować do układu dwóch równań:

$$[\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_0)(\varepsilon + \varepsilon_0 + \Delta_0) - \kappa^2 P^2(\varepsilon + \varepsilon_0 + \frac{2}{3}\Delta_0) + \frac{1}{3}\kappa^2 \hbar^2 \Delta_0 \lambda_B^{-2}] f_1 = 0 \quad (2.64a)$$

$$[\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_0)(\varepsilon + \varepsilon_0 + \Delta_0) - \kappa^2 P^2(\varepsilon + \varepsilon_0 + \frac{2}{3}\Delta_0) - \frac{1}{3}\kappa^2 \hbar^2 \Delta_0 \lambda_B^{-2}] f_2 = 0 \quad (2.64b)$$

Układ (2.64) rozwiązuje się metodą standartową. Obierając cechowanie Landaua dla wektora potencjału pola magnetycznego $A = (-By, 0, 0)$ poszukuje się rozwiązania w postaci:

$$f_{1,2} = |n\rangle = \exp(i(k_z z + k_x x)) \phi_n \left(\frac{y - y_0}{\lambda_B} \right) \quad (2.65)$$

gdzie ϕ_n jest funkcją oscylatora harmonicznego a $y_0 = k_x \lambda_B^2$.

Z równań (2,64) otrzymuje się wyrażenie na wartości własne:

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_0)(\varepsilon + \varepsilon_0 + \Delta_0) - \kappa^2 \hbar^2 \left[\lambda_B^{-2} (2n+1) + k_z^2 \right] (\varepsilon + \varepsilon_0 + \frac{2}{3}\Delta_0) \pm \\ & \pm \frac{1}{3} \kappa^2 \hbar^2 \Delta_0 \lambda_B^{-2} = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

trzy pierwiastki tego równania (sześć wliczając spin) daje energię poziomów w pasmie przewodnictwa, lekkich dziur i pasmie spin-orbitalnie odczepionym. Zbiór wartości własnych dopełnia $\varepsilon = -\varepsilon_0$ odpowiadająca poziomowi dziur ciężkich. Znaki plus i minus dotyczą dwóch rzutów efektywnego spinu na kierunek z . Ostatni człon (2.66) określa rozczepienie paramagnetyczne proporcjonalne w tym przypadku do energii spin-orbitalnej.

Rozwiązanie równania (2.66) dla najniższego stanu Landaua pasma przewodnictwa ma postać ($n=0$, spin w górę, w efektywnych rydbergach) :

$$E_0 = 2 \left(\frac{-p}{3} \right)^{1/2} \cos(\varphi/3) - \frac{1}{3}(2\varepsilon_0 + \Delta_0) \quad (2.67)$$

gdzie φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) wyznaczone jest z warunku:

$$\cos \varphi = \frac{3q}{2p} \left(\frac{-p}{3} \right)^{-1/2} \quad (2.68)$$

oraz

$$p = \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + \Delta_0) - \frac{1}{3}(2\varepsilon_0 + \Delta_0)^2 - 2k_m^* \gamma \quad (2.69)$$

$$q = \frac{2}{27}(2\varepsilon_0 + \Delta_0)^3 - \frac{1}{3}\varepsilon_0 (\varepsilon_0 + \Delta_0)(2\varepsilon_0 + \Delta_0) - \frac{2}{3}k_m^* \gamma \varepsilon_0 \quad (2.70)$$

II.3.7. Dyskusja wyników.

Obliczenia numeryczne dokonano dla GaAs w zakresie pól magnetycznych od 0 do 100 kGs. Przyjęto wartości parametrów z tabeli 28. Wartości parametrów A i B (2.58) stanowią ułamek efektywnego rydberga, dla GaAs $\epsilon_0/Ry^* \approx 263,75$, zatem można śmiało położyć $\epsilon'_0 = \epsilon_0$ (por.(2.59b)). Stała dopasowania η określa odległość od centrum donoru, powyżej której można potencjał kulombowski uznać za wolnozmienny na przestrzeni komórki elementarnej. Wyniki najbardziej zbliżone do rzeczywistych otrzymano dla $\eta = 0.01 \times a_B^*$, co w przypadku GaAs wynosi około 1,0 Å. Jest to w przybliżeniu promień atomowy wiązania kowalencyjnego o liczbie koordynacyjnej 4 w kryształach dla pierwiastków z grup IV i VI [87] wprowadzających płytkie stany donorowe do struktury półprzewodników III-V. Jak wykazano w pracy [88] wiązanie kowalencyjne jest wiązaniem dominującym w kryształach GaAs. Zatem stała dopasowania η przyjmuje wartość odpowiadającą jej interpretacji fizycznej.

Rysunek 15 przedstawia zależność $\epsilon(B)$ ($\epsilon = E - A$). Różnica pomiędzy $\epsilon(0)$ a $-1/Ry^*$ jest rzędu błędu metody numerycznej użytej do obliczeń. Zatem A okazuje się mieć wartość zanedbywalnie małą. Rysunki 16+18 przedstawiają zależności parametrów wariacyjnych od pola magnetycznego. Zgodnie z przewidywaniami dla zerowego pola upodabniają one funkcję próbną do funkcji wodorowej. Wraz ze wzrostem pola przekształcają ją do funkcji wolnego elektronu [34].

Porównanie energii jonizacji wyznaczonej naszą metodą i najdokładniejszymi wynikami uzyskanymi w modelu jednopasmowym [54] przedstawia rysunek 19. Dla γ z przedziału od 0 do 2 względna różnica pomiędzy wynikami uzyskanymi powyższymi metodami nie przekracza 0.1%. A zatem uzyskaliśmy równie dokładne wyniki jak w pracy [54] traktowanej dotychczas jako miernik precyzyjności stosowanych metod wyznaczania stanów donoru w polu magnetycznym. Wobec faktu, że wpływ nieparaboliczności pasm uwidacznia się dla dużych wartości γ (>20) [40], powyższe porównanie jest uzasadnione. Podział potencjału nie pogarsza zgodności z doświadczeniem [58] uzyskanej przy traktowaniu nieskończonych wkładów do energii jako zaniedbywalnie małych [18]. W porównaniu z alternatywną pracą [40] pracę niniejszą cechuje większa prostota procedury numerycznej i mniej skomplikowana postać próbnej funkcji obwiedni.

ZESTAWIENIE WYNIKÓW

W niniejszej pracy wykorzystano model wielopasmowy do opisu dwóch zagadnień : anizotropii przejść magneto optycznych oraz stanów donorowych w polu magnetycznym w związkach półprzewodnikowych III-V.

Po raz pierwszy przedstawiono pełny pięciopasmowy hamiltonian efektywny (macierz 14×14) dla elektronów pasmowych w kryształach o strukturze blendy cynkowej w polu magnetycznym. Macierz ta określona została dla dowolnego kierunku pola magnetycznego. Uwzględnia oddziaływanie $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ z dalszymi pasmami do drugiego rzędu zaburzeń. Wyodrębnione zostały części macierzy generowane mechanizmami niesferyczności jak brak symetrii inwersyjnej kryształu blendy cynkowej i degeneracja pasma Γ_8 . Porównanie niniejszego hamiltonianu efektywnego dla pola w kierunku $[001]$ z jego odpowiednikiem trójpasmowym [15] zamieszczono na stronach 21 + 22, z trójpasmowym hamiltonianem efektywnym dla pola w płaszczyznach (100) i (110) [30] na stronach 23 i 24. Macierze uwzględniające pięć pasm zawierają prace [16,17]. Pfeffer i Zawadzki [17] uwzględniają jedynie oddziaływanie międzypasmowe pomiędzy pasmami $\Gamma_8^c, \Gamma_7^c, \Gamma_6, \Gamma_8^v$ i Γ_7^v pozostałe zaniedbując. Hamiltonian Rösslera [16] zawiera parametry oddziaływania pasm Γ_6, Γ_8^v i Γ_7^v z wyższymi pasmami

na wzór modelu trójpasmowego [15], część macierzy zawierająca sprzężenie pasm Γ_8^c i Γ_7^c ze sobą i z trzema niższymi pasmami ogranicza się jedynie do elementów zawierających parametry P_1 , Q i $\bar{\Delta}$. Ponadto w pracy [16] nie uwzględniono wpływu pozadiagonalnego parametru $\bar{\Delta}$ na postać diagonalnych parametrów energetycznych (patrz wzory (A.1) + (A.4) - dodatek A). Żaden z poprzedników nie określił hamiltonianu efektywnego dla dowolnego kierunku pola magnetycznego.

W dalszej części rozdziału I przedstawione zostały macierze oddziaływania elektron-foton (14x14) w funkcji kierunku pola magnetycznego dla trzech polaryzacji światła π , σ_R i σ_L . Na podstawie powyższych hamiltonianów wyznaczono reguły wyboru oraz zależności kątowe współczynników absorpcji dla jedno i dwufotonowych przejść elektronów pasmowych. Dotychczas nie było prób otrzymania reguł wyboru w ramach modelu pięciopasmowego. Weiler i in [15] podaje reguły wyboru dla jednofotonowych przejść wewnątrzpasmych dla pola magnetycznego w kierunkach [001], [110] i [111], wyróżniając przejścia sferyczne s i sk_H , indukowane brakiem symetrii inwersyjnej I i Ik_H oraz warpingiem W i Wk_H , gdzie k_H oznacza przejścia z $k_H \neq 0$. Dla powyższych kierunków pola i mechanizmów praca niniejsza przewiduje następujące przejścia nie zamieszczone w pracy [15]:

dla kierunku [001]

$$\sigma_R: -\omega_c (I), 2\omega_c - \omega_s, 4\omega_c + \omega_s (Wk_H);$$

$$\sigma_L: 4\omega_c - \omega_s, 6\omega_c + \omega_s (Wk_H);$$

$$\pi: 4\omega_c (Wk_H);$$

dla kierunku [110]:

$$\sigma_R: 3\omega_c + \omega_s (Ik_H), 2\omega_c - \omega_s, 4\omega_c + \omega_s (Wk_H);$$

$$\sigma_L: 5\omega_c - \omega_s (Ik_H), 4\omega_c - \omega_s, 6\omega_c + \omega_s (Wk_H);$$

$$\pi: 4\omega_c (Wk_H);$$

dla kierunku [111]:

$$\sigma_R: 2\omega_c + \omega_s (I, Wk_H), \omega_c + \omega_s (Ik_H, W), \omega_c, 3\omega_c (W),$$

$$2\omega_c - \omega_s, 4\omega_c + \omega_s (Wk_H);$$

$$\sigma_L: 2\omega_c (I), 2\omega_c - \omega_s, 4\omega_c + \omega_s (I, Wk_H), \omega_c - \omega_s, 3\omega_c + \omega_s (Ik_H)$$

$$3\omega_c, \omega_c + \omega_s (Ik_H, W);$$

$$\pi: 2\omega_c, 2\omega_c + \omega_s (I, Wk_H), \omega_c, \omega_c - \omega_s, 5\omega_c + \omega_s (Ik_H)$$

$$3\omega_c + \omega_s (Ik_H, W), 4\omega_c (Wk_H);$$

Ponadto wskazano na dodatkowe mechanizmy generujące przejścia wymienione w pracy [15]:

kierunek pola [110]:

$$\sigma_L: \omega_c (s, W) \text{ w pracy [15] tylko } s,$$

$$2\omega_c + \omega_s (sk_H, Wk_H) \text{ w pracy [15] tylko } sk_H;$$

$$\pi: \omega_c + \omega_s (s, W) \text{ w pracy [15] tylko } s;$$

kierunek pola [111]:

σ_R : $3\omega_c + \omega_s$ ($W, I k_H$) w pracy [15] tylko W ;

σ_L : ω_c ($s, I k_H, W$) w pracy [15] tylko s ,

$5\omega_c + \omega_s$ ($W, I k_H$) w pracy [15] tylko W ,

$2\omega_c + \omega_s$ ($s k_H, I, W k_H$) w pracy [15] tylko $s k_H$ i I ;

π : $\omega_c + \omega_s$ ($s, I k_H, W$) w pracy [15] tylko s .

Zaistniałe różnice wynikają z użycia w pracy [15] skalarne hamiltonianu oddziaływania elektron-foton do wyznaczenia reguł wyboru. Grisar i in. [13] podaje reguły wyboru dla przejść jednofotonowych generowanych mechanizmami s , $s k_H$, I , $I k_H$, W , $W k_H$ i IW , dla pola magnetycznego w kierunku [001]. W pracy [13] za mechanizmy generujące przejścia $\pm 2\omega_c + \omega_s, -\omega_s, -4\omega_c - \omega_s$ (σ_R), $\omega_s, 4\omega_c + \omega_s, \pm 2\omega_c - \omega_s$ (σ_L) oraz $\pm 2\omega_c$ (π) uznano I i $W k_H$, w pracy niniejszej ponadto IW . W pracy [29] podano reguły wyboru dla przejść jedno i dwufotonowych dla pola magnetycznego w płaszczyznach (100) i (110) generowanymi mechanizmami s , $s k_H$, I , $I k_H$, II , W , $W k_H$, WW i IW . W porównaniu z niniejszą pracą brak tam przejść opisanych w tabelach 15, 17 i 18 określonych dla funkcji $|\beta_0|$ ($W, W k_H$); $|\beta_0 \beta_i|$ $i=0, \dots, 4(WW)$ i $|\alpha_i \beta_0|$ $i=0, \dots, 3$ (IW). Brak tych przejść wynika z zaniedbania w pracy [29] kątowej zależności parametrów $\gamma^I, \gamma^{II}, \gamma^{III}$ dla B w płaszczyźnie (110) i $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ dla B w płaszczyźnie (110) reprezentowanej w niniejszej pracy przez funkcję β_0 .

Model prezentowany w rozdziale I w pełni przewiduje i opisuje dane eksperymentalne z jednym wyjątkiem - przejścia $2\omega_c$ dla pola w kierunku [100] i polaryzacji światła $\sigma_L + \sigma_R$ [24]. Żaden z mechanizmów anizotropii uwzględniony w powyższym modelu nie jest źródłem tego przejścia.

W drugim rozdziale pracy zaproponowano nową postać próbnej funkcji obwiedni procedury wariacyjnej dla opisu stanu podstawowego donoru w kryształach związku III-V w polu magnetycznym w ramach modelu jednopasmowego. Funkcja ta, o prostej postaci, w sposób płynny przekształca się od formy wodoropodobnej w granicy zerowego pola do funkcji elektronu swobodnego w zewnętrznym polu magnetycznym w granicy nieskończonego pola. Wobec wyników pracy niniejszej i prac poprzedników można stwierdzić, że metoda wariacyjna, przy użyciu różnych funkcji próbnych, daje dobre rezultaty dla $\gamma < 20$ (tab.25).

W celu uniknięcia konieczności zaniedbywania osobliwych wkładów do energii stanu podstawowego, zaproponowano w ostatniej części pracy, alternatywne do pracy [40], sformułowanie modelu donoru w przybliżeniu wielopasmowym. Kulombowski potencjał domieszki, traktowany dotychczas jako wolnozmienny na przestrzeni komórki elementarnej, został podzielony na dwie składowe : szybkozmienną i wolnozmienną. Pierwsza z nich uwzględniona została w hamiltonianie niezaburzonym, druga natomiast poddana została procedurze wariacyjnej. Otrzymane rezultaty dla InAs pokrywają się z danymi doświadczalnymi [58]. Wysoka zgodność wyników dla

GaAs z rezultatami bardzo dokładnej metody ekspansji [54] została po raz pierwszy uzyskana przy użyciu stosunkowo mało skomplikowanych obliczeń numerycznych i prostej postaci funkcji próbnej.

DODATEK A. Definicje parametrów z tabeli 1.

$$E_0 = \frac{\varepsilon_1 + \Delta_1 - \varepsilon_0}{2} - \left[\left(\frac{\varepsilon_1 + \Delta_1 - \varepsilon_0}{2} \right)^2 - \frac{\bar{\Delta}^2}{9} \right]^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

$$E_0' = \frac{\varepsilon_0 + \Delta_0 + \varepsilon_1}{2} - \left[\left(\frac{\varepsilon_0 + \Delta_0 - \varepsilon_1}{2} \right)^2 - \frac{4\bar{\Delta}^2}{9} \right]^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

$$E_1 = \frac{\varepsilon_0 + \Delta_0 + \varepsilon_1}{2} + \left[\left(\frac{\varepsilon_0 + \Delta_0 - \varepsilon_1}{2} \right)^2 - \frac{4\bar{\Delta}^2}{9} \right]^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

$$E_1' = \frac{\varepsilon_1 + \Delta_1 + \varepsilon_0}{2} + \left[\left(\frac{\varepsilon_1 + \Delta_1 + \varepsilon_0}{2} \right)^2 - \frac{\bar{\Delta}^2}{9} \right]^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta_0 = - \frac{3i\hbar}{4m_c^2} \langle X^v | [\nabla V, p]_y | Z^v \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta_1 = - \frac{3i\hbar}{4m_c^2} \langle X^c | [\nabla V, p]_y | Z^c \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\Delta} = - \frac{3i\hbar}{4m_c^2} \langle X^v | [\nabla V, p]_y | Z^c \rangle \quad (\text{A.7})$$

$$P_0 = - \frac{i\hbar}{m} \langle S | p_x | X^v \rangle \quad (\text{A.8})$$

$$P_1 = - \frac{i\hbar}{m} \langle S | p_x | X^c \rangle \quad (\text{A.9})$$

$$Q = - \frac{i\hbar}{m} \langle X^v | p_y | Z^c \rangle \quad (\text{A.10})$$

W poniższych wzorach index $\sigma=0,\dots,3$ zastępuje wyrażenia z

tabel w następujący sposób A^σ : $A^0=A$; $A^1=A'$; $A^2=A''$; $A^3=A'''$;

index $i = 0,1,2$.

$$\gamma_{1i}^\sigma = - A_{1i}^\sigma - B_{1i}^\sigma \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma_{2i}^\sigma = \frac{1}{6} A_{2i}^\sigma + \frac{1}{3} B_{2i}^\sigma \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma_{3i}^\sigma = \frac{1}{6} A_{3i}^\sigma + \frac{1}{3} B_{3i}^\sigma \quad (\text{A.13})$$

$$\kappa_i^\sigma = -\frac{2}{3}A_{4i}^\sigma - \frac{2}{3}B_{4i}^\sigma + \frac{23}{18}B_{4i}^{\sigma'} - \frac{3}{2}B_{4i}^{\sigma''} \quad (A.14)$$

$$q_i = -\frac{2}{3}B_{4i}^{0'} + \frac{2}{3}B_{4i}^{0''} \quad (A.15)$$

$$A_{1i}^\sigma = 1 + \frac{1}{3}(\tilde{F}_i^\sigma + 2\tilde{G}_i^\sigma + 2\tilde{H}_{1i}^\sigma + 2\tilde{H}_{2i}^\sigma) \quad (A.16)$$

$$A_{2i}^\sigma = -\tilde{F}_i^{\sigma+1} - 2\tilde{G}_i^{\sigma+1} + \tilde{H}_{1i}^{\sigma+1} - \tilde{H}_{2i}^{\sigma+1} \quad (A.17)$$

$$A_{3i}^\sigma = -\tilde{F}_i^{\sigma+1} + \tilde{G}_i^{\sigma+1} - \tilde{H}_{1i}^{\sigma+1} + \tilde{H}_{2i}^{\sigma+1} \quad (A.18)$$

$$A_{3i}^\sigma = \frac{1}{4}(\tilde{F}_i^\sigma - \tilde{G}_i^\sigma - \tilde{H}_{1i}^\sigma + \tilde{H}_{2i}^\sigma) \quad (A.19)$$

$$\tilde{F}_0^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \frac{|\langle X^v | p_x | \mu \rangle|^2}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (A.20)$$

$$\tilde{F}_0^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \frac{|\langle X^v | p_x | \mu \rangle|^2}{E_0' - \epsilon_\mu} \quad (A.21)$$

$$\tilde{F}_0^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^v | p_x | \mu \rangle|^2 \quad (A.22)$$

$$\tilde{F}_1^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \frac{|\langle X^c | p_x | \mu \rangle|^2}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (A.23)$$

$$\tilde{F}_1^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \frac{|\langle X^c | p_x | \mu \rangle|^2}{E_1' - \epsilon_\mu} \quad (A.24)$$

$$\tilde{F}_1^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^c | p_x | \mu \rangle|^2 \quad (A.25)$$

$$\tilde{F}_2^0 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^v \rangle \quad (A.26)$$

$$\tilde{F}_2^1 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^v \rangle \quad (A.27)$$

$$\tilde{F}_2^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^V \rangle \quad (A.28)$$

$$\tilde{F}_2^3 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_2^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^V \rangle \quad (A.29)$$

$$\tilde{G}_0^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^V | p_x | \mu \rangle|^2}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (A.30)$$

$$\tilde{G}_0^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^V | p_x | \mu \rangle|^2}{E_0' - \epsilon_\mu} \quad (A.31)$$

$$\tilde{G}_0^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^V | p_x | \mu \rangle|^2 \quad (A.32)$$

$$\tilde{G}_1^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^C | p_x | \mu \rangle|^2}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (A.33)$$

$$\tilde{G}_1^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^C | p_x | \mu \rangle|^2}{E_1' - \epsilon_\mu} \quad (A.34)$$

$$\tilde{G}_1^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^C | p_x | \mu \rangle|^2 \quad (A.35)$$

$$\tilde{G}_2^0 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^V \rangle \quad (A.36)$$

$$\tilde{G}_2^1 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^V \rangle \quad (A.37)$$

$$\tilde{G}_2^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^V \rangle \quad (A.38)$$

$$\tilde{G}_2^3 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | X^V \rangle \quad (A.39)$$

$$\tilde{H}_{10}^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{|\langle X^V | p_y | \mu \rangle|^2}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (A.40)$$

$$\tilde{H}_{10}^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{|\langle X^v | p_y | \mu \rangle|^2}{E_0' - \epsilon_\mu} \quad (A.41)$$

$$\tilde{H}_{10}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \left(\frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^v | p_y | \mu \rangle|^2 \quad (A.42)$$

$$\tilde{H}_{11}^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{|\langle X^c | p_y | \mu \rangle|^2}{E_1' - \epsilon_\mu} \quad (A.43)$$

$$\tilde{H}_{11}^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{|\langle X^c | p_y | \mu \rangle|^2}{E_1' - \epsilon_\mu} \quad (A.44)$$

$$\tilde{H}_{11}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^c | p_y | \mu \rangle|^2 \quad (A.45)$$

$$\tilde{H}_{12}^0 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.46)$$

$$\tilde{H}_{12}^1 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.47)$$

$$\tilde{H}_{12}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.48)$$

$$\tilde{H}_{12}^3 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.49)$$

$$\tilde{H}_{20}^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^v | p_y | \mu \rangle|^2}{E_0' - \epsilon_\mu} \quad (A.50)$$

$$\tilde{H}_{20}^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^v | p_y | \mu \rangle|^2}{E_0' - \epsilon_\mu} \quad (A.51)$$

$$\tilde{H}_{20}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^v | p_y | \mu \rangle|^2 \quad (A.52)$$

$$\tilde{H}_{21}^0 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^c | p_y | \mu \rangle|^2}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (A.53)$$

$$\tilde{H}_{21}^1 = \frac{2}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \frac{|\langle X^c | p_y | \mu \rangle|^2}{E_1' - \epsilon_\mu} \quad (A.54)$$

$$\tilde{H}_{21}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} \right) |\langle X^c | p_y | \mu \rangle|^2 \quad (A.55)$$

$$\tilde{H}_{22}^0 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.56)$$

$$\tilde{H}_{22}^1 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.57)$$

$$\tilde{H}_{22}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.58)$$

$$\tilde{H}_{22}^3 = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_{12}^-)} \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | p_y | X^v \rangle \quad (A.59)$$

$$B_{3i}^\sigma = B_{2i}^\sigma = -\frac{3}{2} B_{1i}^\sigma \quad (A.60)$$

$$B_{10}^0 = \frac{4}{3} i \sum_l \frac{p_y^{xv} V_x^{yv} - p_x^{xv} V_y^{yv}}{E_0 - \epsilon_l} \quad (A.61)$$

$$B_{10}^1 = \frac{4}{3} i \sum_l \frac{p_y^{xv} V_x^{yv} - p_x^{xv} V_y^{yv}}{E_0' - \epsilon_l} \quad (A.62)$$

$$B_{10}^2 = \frac{2}{3} i \sum_l \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_y^{xv} V_x^{yv} - p_x^{xv} V_y^{yv}) \quad (A.63)$$

$$B_{11}^0 = \frac{4}{3} i \sum_l \frac{p_y^{xc} V_x^{yc} - p_x^{xc} V_y^{yc}}{E_1 - \epsilon_l} \quad (A.64)$$

$$B_{11}^1 = \frac{4}{3}i \sum_l \frac{p_y^{xc} V_x^{yc} - p_x^{xc} V_y^{yc}}{E' - \epsilon} \quad (A.65)$$

$$B_{11}^2 = \frac{2}{3}i \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_1 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yc} - p_x^{xc} V_y^{yc}) \quad (A.66)$$

$$B_{12}^0 = \frac{2}{3}i \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.67)$$

$$B_{12}^1 = \frac{2}{3}i \sum_l \left(\frac{1}{E'_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.68)$$

$$B_{12}^2 = \frac{2}{3}i \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.69)$$

$$B_{12}^3 = \frac{2}{3}i \sum_l \left(\frac{1}{E'_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.70)$$

$$B_{40}^0 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3} \sum_l \frac{p_x^{xv} V_x^{xv} + 2p_y^{xv} V_y^{xv}}{E_0 - \epsilon_l} \quad (A.71)$$

$$B_{40}^1 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3} \sum_l \frac{p_x^{xv} V_x^{xv} + 2p_y^{xv} V_y^{xv}}{E'_0 - \epsilon_l} \quad (A.72)$$

$$B_{40}^2 = \frac{1}{4}g + \frac{1}{3} \sum_l \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_l} \right) (p_x^{xv} V_x^{xv} + 2p_y^{xv} V_y^{xv}) \quad (A.73)$$

$$B_{41}^0 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3} \sum_l \frac{p_x^{xc} V_x^{xc} + 2p_y^{xc} V_y^{xc}}{E_1 - \epsilon_l} \quad (A.74)$$

$$B_{41}^1 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3} \sum_l \frac{p_x^{xc} V_x^{xc} + 2p_y^{xc} V_y^{xc}}{E'_1 - \epsilon_l} \quad (A.75)$$

$$B_{41}^2 = \frac{1}{4}g + \frac{1}{3} \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_1 - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xc} + 2p_y^{xc} V_y^{xc}) \quad (A.76)$$

$$B_{42}^0 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3} \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} + 2p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.77)$$

$$B_{42}^1 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} + 2p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.78)$$

$$B_{42}^2 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} + 2p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.79)$$

$$B_{42}^3 = \frac{1}{4}g + \frac{2}{3}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} + 2p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.80)$$

$$B_{40}^{0'} = -i\sum_l \frac{p_x^{xv} V_x^{xv} - p_y^{xv} V_y^{xv}}{E_0' - \epsilon_l} \quad (A.81)$$

$$B_{40}^{1'} = -i\sum_l \frac{p_x^{xv} V_x^{xv} - p_y^{xv} V_y^{xv}}{E_0' - \epsilon_l} \quad (A.82)$$

$$B_{40}^{2'} = -\frac{i}{2}\sum_l \left(\frac{1}{E_0' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xv} V_x^{xv} - p_y^{xv} V_y^{xv}) \quad (A.83)$$

$$B_{41}^{0'} = -i\sum_l \frac{p_x^{xc} V_x^{xc} - p_y^{xc} V_y^{xc}}{E_1' - \epsilon_l} \quad (A.84)$$

$$B_{41}^{1'} = -i\sum_l \frac{p_x^{xc} V_x^{xc} - p_y^{xc} V_y^{xc}}{E_1' - \epsilon_l} \quad (A.85)$$

$$B_{41}^{2'} = -\frac{i}{2}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_1' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xc} - p_y^{xc} V_y^{xc}) \quad (A.86)$$

$$B_{42}^{0'} = -\frac{i}{2}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} - p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.87)$$

$$B_{42}^{1'} = -\frac{i}{2}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} - p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.88)$$

$$B_{42}^{2'} = -\frac{i}{2}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} - p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.89)$$

$$B_{42}^{3'} = -\frac{i}{2}\sum_l \left(\frac{1}{E_1' - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0' - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{xv} - p_y^{xc} V_y^{xv}) \quad (A.90)$$

$$B_{40}^{0''} = -i\sum_l \frac{p_y^{xv} V_x^{yv} - p_x^{xv} V_y^{yv}}{E_0' - \epsilon_l} \quad (A.91)$$

$$B_{40}^{1''} = -i\sum_l \frac{p_y^{xv} V_x^{yv} - p_x^{xv} V_y^{yv}}{E_0' - \epsilon_l} \quad (A.92)$$

$$B_{40}^{2''} = -\frac{i}{2} \sum_l \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xv} V_x^{yv} - p_x^{xv} V_y^{yv}) \quad (A.93)$$

$$B_{41}^{0''} = -i \sum_l \frac{p_y^{xc} V_x^{yc} - p_x^{xc} V_y^{yc}}{E_1 - \epsilon_l} \quad (A.94)$$

$$B_{41}^{1''} = -i \sum_l \frac{p_y^{xc} V_x^{yc} - p_x^{xc} V_y^{yc}}{E'_1 - \epsilon_l} \quad (A.95)$$

$$B_{41}^{2''} = -\frac{i}{2} \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_1 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yc} - p_x^{xc} V_y^{yc}) \quad (A.96)$$

$$B_{42}^{0''} = -\frac{i}{2} \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.97)$$

$$B_{42}^{1''} = -\frac{i}{2} \sum_l \left(\frac{1}{E'_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.98)$$

$$B_{42}^{2''} = -\frac{i}{2} \sum_l \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_l} \right) (p_y^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.99)$$

$$B_{42}^{3''} = -\frac{i}{2} \sum_l \left(\frac{1}{E'_1 - \epsilon_l} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_l} \right) (p_x^{xc} V_x^{yv} - p_x^{xc} V_y^{yv}) \quad (A.100)$$

$$p_x^{xv(c)} = \langle X^{v(c)} | p_x | 1 \rangle \quad (A.101)$$

$$p_x^{yv(c)} = \langle Y^{v(c)} | p_x | 1 \rangle \quad (A.102)$$

$$p_y^{xv(c)} = \langle X^{v(c)} | p_y | 1 \rangle \quad (A.103)$$

$$p_y^{yv(c)} = \langle Y^{v(c)} | p_y | 1 \rangle \quad (A.104)$$

$$V_x^{xv(c)} = \langle 1 | \frac{\partial V_0}{\partial x} | X^{v(c)} \rangle \quad (A.105)$$

$$V_x^{yv(c)} = \langle 1 | \frac{\partial V_0}{\partial x} | Y^{v(c)} \rangle \quad (A.106)$$

$$V_y^{xv(c)} = \langle 1 | \frac{\partial V_0}{\partial y} | X^{v(c)} \rangle \quad (A.107)$$

$$V_y^{yv(c)} = \langle 1 | \frac{\partial V_0}{\partial y} | Y^{v(c)} \rangle \quad (A.108)$$

g - czynnik giromagnetyczny swobodnego elektronu

Liniowy względem pędu parametr C_i^σ składa się z dwóch elementów K_{1i}^σ i K_{2i}^σ .

$$K_{10}^0 = - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \frac{\langle X^v | p_x | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | Y^v \rangle}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (A.109)$$

$$K_{10}^1 = - \frac{\hbar^2}{8\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^v | p_x | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | Y^v \rangle \quad (A.110)$$

$$K_{11}^0 = - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \frac{\langle X^c | p_x | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | Y^c \rangle}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (A.111)$$

$$K_{11}^1 = - \frac{\hbar^2}{8\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E'_1 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_x | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | Y^c \rangle \quad (A.112)$$

$$K_{12}^0 = - \frac{\hbar^2}{8\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_x | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | Y^v \rangle \quad (A.113)$$

$$K_{12}^1 = - \frac{\hbar^2}{8\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_x | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | Y^v \rangle \quad (A.114)$$

$$K_{12}^2 = - \frac{\hbar^2}{8\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E'_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_x | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | Y^v \rangle \quad (A.115)$$

$$K_{20}^0 = - \frac{\hbar^2}{2\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \frac{\langle X^v | p_y | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | X^v \rangle}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (A.116)$$

$$K_{20}^1 = - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^v | p_y | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | X^v \rangle \quad (A.117)$$

$$K_{21}^0 = - \frac{\hbar^2}{2\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \frac{\langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | X^c \rangle}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (A.118)$$

$$K_{21}^1 = - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E'_1 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^c | p_y | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | X^c \rangle \quad (A.119)$$

$$K_{22}^0 = - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_y | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | X^V \rangle \quad (\text{A.120})$$

$$K_{22}^1 = - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E'_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_y | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | X^V \rangle \quad (\text{A.121})$$

$$K_{22}^2 = - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{3}m^3 c^2} \sum_{\mu(\Gamma_{12})} \left(\frac{1}{E'_1 - \epsilon_\mu} + \frac{1}{E_0 - \epsilon_\mu} \right) \langle X^C | p_y | \mu \rangle \langle \mu | \frac{\partial V_0}{\partial z} p_x - \frac{\partial V_0}{\partial x} p_z | X^V \rangle \quad (\text{A.122})$$

$$N_1 = \frac{i}{m} \sum_{\mu(\Gamma_8)} \frac{1}{\epsilon_\mu} \langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_y | S \rangle \quad (\text{A.123})$$

$$N_{20} = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_8)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | Z^V \rangle}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.124})$$

$$N_{21} = \frac{1}{m} \sum_{\mu(\Gamma_8)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_x | Z^C \rangle}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.125})$$

$$N_{30} = -\frac{i}{m} \sum_{\mu(\Gamma_8)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_y | Z^V \rangle}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.126})$$

$$N_{31} = -\frac{i}{m} \sum_{\mu(\Gamma_8)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_y | Z^C \rangle}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.127})$$

$$F = -\frac{\hbar^2}{m^2} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{1}{\epsilon_\mu} |\langle S | p_x | \mu \rangle|^2 \quad (\text{A.128})$$

$$G_0 = \frac{2\hbar^2}{m^2} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_y | Z^V \rangle}{E_0 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.129})$$

$$G'_0 = \frac{2\hbar^2}{m^2} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_y | Z^V \rangle}{E'_0 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.130})$$

$$G_1 = \frac{2\hbar^2}{m^2} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_y | Z^c \rangle}{E_1 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.131})$$

$$G'_1 = \frac{2\hbar^2}{m^2} \sum_{\mu(\Gamma_{15}^-)} \frac{\langle S | p_x | \mu \rangle \langle \mu | p_y | Z^c \rangle}{E'_1 - \epsilon_\mu} \quad (\text{A.132})$$

Pozostałe wyrażenia wyjaśnione w tekście rozdziału 1.

LITERATURA

- [1] R.H.Parmenter, Phys.Rev. 100,573(1955);
- [2] L.D.Landau, Z.Physik 64,629(1930);
- [3] G.Dresselhaus, A.F.Kip i C.Kittel,
Phys.Rev. 98,368(1955);
- [4] G.Dresselhaus, A.F.Kip, C.Kittel i G.Wagner,
Phys.Rev.98,556(1955);
- [5] G.Dresselhaus, Phys.Rev. 100,580(1955);
- [6] E.O.Kane, J.Phys.Chem.Solids 1,249(1957);
- [7] R.Bowers, Y.Yafet, Phys.Rev. 115,1165(1959);
- [8] W.Zawadzki, *New Developments in Semiconductors*,
ed. P.R.Wallace i in.(Noordhoff,Leyden 1973)p.441;
- [9] C.Hermann i C.Weisbuch, Phys.Rev. B15,823(1977);
- [10] H.Sigg, H.J.A.Bluyssen i P.Wyder,
Solid State Commun. 48,897(1983);
- [11] G.Golubev, V.I.Ivanov-Omskii, I.G.Minervin, A.V.Osutin,
D.G.Polyakow, JETF Lett. 40,896(1984);
- [12] C.R.Pidgeon i R.N.Brown, Phys.Rev. 146,575(1966);
- [13] R.Grisar, H.Wachring, G.Bauer, J.Własak, J.Kowalski i
W.Zawadzki, Phys.Rev. B18,4355(1978);
- [14] J.Własak, *Teoria zjawisk magnetoptycznych w polprze-
wodnikach z wąską przerwą wzbronioną typu InSb*,
(praca doktorska- 1978);
- [15] M.H.Weiler, R.L.Aggarwal i B.Lax,
Phys.Rev. B17,3269(1978);
- [16] U.Rössler, Solid State Commun. 49,943(1984);

- [17] P.Pfeffer i W.Zawadzki, Phys.Rev. **B41**,1561(1990);
- [18] A.Obuchowicz i J.Własak,Acta Phys.Pol. **A79**,329(1991);
- [19] J.M.Luttinger, Phys.Rev. **102**,1030(1956);
- [20] N.R.Ogg, Proc.Phys.Soc.London **89**,443(1966);
- [21] H.J.Zeiger i G.W.Pratt, *Magnetic Interaction in Solids* (Oxford University Press, London 1973);
- [22] M.Braun i U.Rössler, J.Phys. **C18**,3365(1985);
- [23] J.M.Luttinger i W.Kohn, Phys.Rev. **97**,869(1955);
- [24] G.Favrot, R.L.Aggarwal i B.Lax,
Solid State Commun. **18**,577(1976);
- [25] W.Zawadzki, P.Pfeffer i H.Sigg,
Solid State Commun. **57**,777(1985);
- [26] H.Sigg, J.A.A.J.Perenboom, P.Pfeffer i W.Zawadzki,
Solid State Commun. **61**,685(1987);
- [27] M.Dobrowolska, Y.F.Chen, J.K.Furdyna i S.Rodriques,
Phys.Rev.Lett. **51**,134(1983);
- [28] Y.F.Chen, M.Dobrowolska i J.K.Furdyna,
Phys.Rev. **B31**,7989(1985);
- [29] J.Własak, J.Phys **C19**,3459(1986);
- [30] J.Własak, *Magnetoabsorbpcja w polprzewodnikach typu InSb*
(Wyd. Politechniki Wrocławskiej,Wrocław 1987);
- [31] J.Własak, Acta Phys. Pol. **A75**,61(1989);
- [32] W.Zawadzki, Landau Level Spectroscopy,ed. G.Landwehr i
E.I.Rashba (North-Holland - 1991) p.1305;
- [33] W.Ekardt, Solid State Commun. **16**,233(1975);
- [34] Y.Yafet, W.Keyes i E.N.Adams,
J.Phys.Chem.Solids **1**,137(1956);

- [35] R.F.Wallis i H.J.Bowlden,
J.Phys.Chem.Solids 7,1136(1958);
- [36] E.M.Pokatilov i M.M.Rusanov,
Fiz.Tverd.Tela 10,3117 (1968);
- [37] A.R.P.Rau, R.O.Mueller i L.Spruch,
Phys.Rev. A11,1865(1975);
- [38] D.M.Larsen, J.Phys.Chem.Solids 29,271(1968);
- [39] C.Aldrich i R.L.Greene,
Phys.Status Solidi B93,343 (1979);
- [40] W.Trzeciakowski, M.Baj, S.Huant i L.C.Brunel,
Phys.Rev. B33,6846(1986);
W.Trzeciakowski i D.Wasik, Phys.Rev. B33,6879(1986);
- [41] R.J.Elliott i R.Loudon, J.Phys.Chem.Solids 15,196(1960);
- [42] H.Hasegawa i R.E.Howard, J.Phys.Soc.Jpn. 31,783(1961);
- [43] A.G.Zhilich i B.S.Morozov, Fiz.Tverd.Tela 8,3559(1966);
- [44] A.Baldereschi i F.Bassani, Proc 10th Int.Conf.
on Physics of Semiconductors, ed. Keller (U.S. Atomic
Energy Commission - 1970) p.191;
- [45] M.von Ortenberg i G.Landwehr,
Phys. Status Solidi B37,K69(1970);
- [46] D.Cabib, E.Fabri i G.Frorio,
Solid State Commun. 9,1517(1971);
- [47] H.C.Praddaude, Phys.Rev. A6,1321(1972);
- [48] J.Simola i J.Virtamo, J.Phys. B11,3309(1978);
- [49] Y.Chen i B.Gil, Phys. Status Solidi B136,629(1986);
- [50] Y.Chen, B.Gil i H.Mathieu, Phys.Rev. B34,6912(1986);
- [51] Y.Chen, Ph.D.Thesis (Université des Sciences et

- Techniques du Languedoc, Groupe d'Etudes des Semiconducteurs, Montpellier, France) nieopublikowane;
- [52] Y.Chen, B.Gil i Mathieu,
Solid State Commun. 59,777(1986);
- [53] M.Altarelli i N.O.Lipari, Phys.Rev. **B9**,1733(1974);
- [54] W.Rösner, G.Wanner, H.Herold i H.Ruden,
J.Phys. **B17**,29(1984);
- [55] B.D.McCombe, Proc.Int.Conf. Application of High
Magnetic Fields in Semiconductors Physics
(Wurzburg) s.146;
- [56] B.D.McCombe i R.J.Wagner, Phys.Rev. **B4**,1285(1971);
- [57] C.J.Armistead, R.A.Stradling i Z.Wasilewski,
Semicond.Sci.Technol. 4,557(1989);
- [58] a) S.Holmes, R.A.Stradling, P.D.Wang, R.Drooped,
S.D.Parker i R.L.Williams, Semicond.Sci.Technol.
4,303(1989);
b) S.Holmes, R.A.Stradling, P.D.Wang (nieopublikowane);
- [59] R.Kaplan, J.Phys.Soc.Jpn.Suppl. 21,249(1966);
- [60] B.D.McCombe i R.Kaplan, Phys.Rev.Lett. 21,756(1968);
- [61] R.Kaplan, Phys.Rev. 181,1154(1969);
- [62] K.L.I.Kobayashi i E.Otsuka,
J.Phys.Chem.Solids 35,839(1974);
- [63] F.Kuchar, J.C.Ramage, R.A.Stradling i A.Lopez-Otero,
J.Phys. **C10**,5101(1977);
- [64] G.Appold, H.Pascher, R.Ebert, U.Steigenberger
i M.von Ortenberg, Phys.Status Solidi **B6**,557(1978);
- [65] A.V.Lewis, F.Kuchar, R.J.Nicholas, J.C.Ramage

- i L.Palmetshofer, Phys.Rev. **B28**,2244,(1983);
- [66] A.Raymond, J.L.Robert, W.Zawadzki i J.Własak,
J.Phys. **C17**,2381(1984);
- [67] F.Kuchar, R.Kaplan, R.J.Wagner, R.A.Cooke,
R.A.Stradling i P.Vogl, J.Phys. **C17**,6403,(1984);
- [68] Z.Wasilewski, R.A.Stradling, M.Baj, L.C.Brunel, S.Huant
W.Trzeciakowski i S.Porowski, Acta Phys.Pol. **A67**,405(1985);
- [69] L.C.Brunel, S.Huant, M.Baj i W.Trzeciakowski,
Phys.Rev. **B33**,6863(1986);
- [70] V.J.Goldman, H.D.Drew, M.Shayegan i D.A.Nelson,
Phys.Rev.Lett. **56**,968(1986);
- [71] W.Zawadzki i J.Własak, *Teoretical Aspects and New
Developments in Magneto-Optics*, ed.I.T.Devreese
(New York - Plenum 1980) p.347;
- [72] A.Obuchowicz i J.Własak, Acta Phys.Polonica (przyjęte
do publikacji);
- [73] L.Roth, B.Lax, i S.Zwardling, Phys.Rev. **114**,90(1959);
- [74] P.Pfeffer i W.Zawadzki, Solid State Commun. **57**,847(1986);
- [75] W.Zawadzki, Landau Level Spectroscopy, ed. G.Landwehr i
E.I.Rashba (North-Holland - 1991) p.483;
- [76] J.Zak i W.Zawadzki, Phys.Rev. **145**,536(1966);
- [77] P.Löwdin, J.Chem.Phys. **19**,1376 (1951);
- [78] G.L.Bir i G.E.Pikus, *Simmetria i dieformacjonnyje
efiekty w poluprowodnikach*, Izd.Nauka Moskwa 1972;
- [79] F.H.Pollak, C.W.Higginbotham i M.Cardona,
J.Phys.Soc.Jpn.Suppl. **21**,20(1966);
- [80] R.B.Dingle, Proc.Ray.Soc. **A212**,38(1952);

- [81] W.Zawadzki i J.Własak, J.Phys. C9,L663(1976);
- [82] J.Mycielski, G.Bastard i C.Rigaux,
Phys.Rev. B16,1675(1977)
- [83] J.Własak i W.Zawadzki, Mat. VIII Ogólnopolskiego
Seminarium Związków Półprzewodnikowych, Jaszowiec 1977,
prace IF PAN 75,225(1978);
- [84] W.Zawadzki i J.Własak, Proc.XIVConf. Physics of
Semiconductors, Edinburg 1978,
(Inst.Phys.Conf.ser.43D.p.413);
- [85] W.Zawadzki i J.Własak, Proc.Int.Conf. Applications of
High Magnetic Fields in Semiconductor Physics
(Oxford - 1978), ed.J.F.Ryan (Oxford Pergamon) p.384;
- [86] A.P.Prudnikov, J.A.Brytchkov i O.J.Minervin,
Integrals i Riady, Izd. Nauka, Moskwa 1981;
- [87] *Chemia Fizyczna* - praca zbiorowa, kom.red.: A.Bielecki,
K.Gumiński, B.Kamieński, K.Pigoń i L.Sobczyk,
PWN Warszawa 1980;
- [88] J.J.Demarco i R.J.Weiss, Phys.Lett. 13,209(1964).

SPIS TABEL

	str.
1. Hamiltonian efektywny $H_{[001]}$ dla pola magnetycznego w kierunku $[001]$	103
2. Parametry hamiltonianu efektywnego w modelu trójpasmowym (za [15]).....	108
3. Parametry hamiltonianu efektywnego w modelu pięciopasmowym.....	109
4. Macierz obrotu $T(\varphi, \psi, \theta)$	110
5. Część sferyczna H_S hamiltonianu efektywnego (1.27)...	111
6. Część H_I hamiltonianu efektywnego (1.27) indukowana brakiem symetrii inwersyjnej.....	115
7. Część H_W hamiltonianu efektywnego (1.27) indukowana warpingiem.....	119
8. Macierz prędkości (2.2) dla części sferycznej hamiltonianu (1.27) - polaryzacja π	122
9. Macierz prędkości (2.2) dla części sferycznej hamiltonianu (1.27) - polaryzacja σ_R	124
10. Macierz prędkości (2.2) dla części hamiltonianu (1.27) indukowanej brakiem symetrii inwersyjnej.....	127
11. Macierz prędkości (2.2) dla części hamiltonianu (1.27) indukowanej przez warping.....	131
12. Definicje niektórych parametrów występujących w tabelach 10 i 11.....	134
13. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych - przejścia sferyczne.....	136

14. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych	
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej..	136
15. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych	
- przejścia indukowane warpingiem.....	137
16. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych	
- przejścia indukowane dwukrotnie	
brakiem symetrii inwersyjnej.....	138
17. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych	
- przejścia indukowane dwukrotnie warpingiem.....	139
18. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych	
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej	
i warpingiem.....	141
19. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych	
- przejścia sferyczne.....	143
20. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych	
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej..	143
21. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych	
- przejścia indukowane warpingiem.....	144
22. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych	
- przejścia indukowane dwukrotnie	
brakiem symetrii inwersyjnej.....	145
23. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych	
- przejścia indukowane dwukrotnie warpingiem.....	147
24. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych	
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej	
i warpingiem.....	150

25. Energia jonizacji stanu podstawowego donoru w polu magnetycznym (2.8) dla niektórych wartości γ	153
26. Hamiltonian D_{ij} z równania (2.34) (II.3.1).....	154
27. Różnica energetyczna pomiędzy stanami wzbudzonymi a stanem podstawowym w cm^{-1} dla donoru w polu magnetycznym.....	155
28. Parametry pasmowe niektórych związków III-V.....	156
29. Macierz D'_{ij} z równania (2.51) (II.3.6).....	157

SPIS RYSUNKÓW

Rys. 1. Typowa struktura pasmowa półprzewodników o strukturze blendy cynkowej w pobliżu punktu Γ strefy Brillouina.

Rys. 2. Funkcja $|\alpha_0|$

- a) rzut perspektywiczny;
- b) mapa.

Rys. 3. Funkcja $|\alpha_1|$

- a) rzut perspektywiczny;
- b) mapa.

Rys. 4. Funkcja $|\alpha_2|$

- a) rzut perspektywiczny;
- b) mapa.

Rys. 5. Funkcja $|\alpha_3|$

- a) rzut perspektywiczny;
- b) mapa.

Rys. 6. Funkcja $|\beta_0|$

- a) rzut perspektywiczny;
- b) mapa.

Rys. 7. Funkcja $|\beta_1|$

- a) rzut perspektywiczny;
- b) mapa.

Rys. 8. Funkcja $|\beta_2|$

- a) rzut perspektywiczny;
- b) mapa.

Rys. 9. Funkcja $|\beta_3|$

a) rzut perspektywiczny;

b) mapa.

Rys. 10. Funkcja $|\beta_4|$

a) rzut perspektywiczny;

b) mapa.

Rys. 11. Model jednopasmowy - wykres zależności energii stanu podstawowego od parametru γ .

Rys. 12. Model jednopasmowy - wykres zależności parametru β od γ .

Rys. 13. Model jednopasmowy - wykres zależności parametru δ od γ .

Rys. 14. Model jednopasmowy - wykres zależności parametru λ od γ .

Rys. 15. Model trójpasmowy - wykres zależności energii $\epsilon = E - A$ od pola magnetycznego.

Rys. 16. Model trójpasmowy - wykres zależności parametru β od pola magnetycznego.

Rys. 17. Model trójpasmowy - wykres zależności parametru δ od pola magnetycznego.

Rys. 18. Model trójpasmowy - wykres zależności parametru λ od pola magnetycznego.

Rys. 19. Porównanie energii jonizacji wyznaczonymi na podstawie niniejszej pracy i Rösnera i in. [54] w funkcji parametru γ .

TABELA 1.a) Hamiltonian efektywny $H_{[001]}$ dla pola magnetycznego w kierunku $[001]$.

b)+n) Definicje bloków zawartych w tabeli 1a).

a)

	A_{11}	B_{11}	A_2	A_{31}	B_{21}	A_4
		S_1	B_{10}^*	B_{31}^*	0	B_{30}^*
			A_{10}	A_5	B_{20}	A_{30}
				A_{61}	B_{41}	A_7
					S_2	B_{40}^*
						A_{60}

$H_{[001]} =$

b)

$E_j - \frac{1}{2}\gamma_{1j}k^2 +$ $+\frac{1}{2}\gamma_{2j}F_3^1 +$ $-\frac{3}{2}(\kappa_j + \frac{9}{4}q_j)B$	$-C_j k_z - \frac{1}{2}\gamma_{2j}F_3^2 +$ $+i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{3j}F_4^z$	$(-C'_j k_z + \gamma'_{2j}F_3^2 +$ $-i\sqrt{3}\gamma'_{3j}F_4^z)/\sqrt{2}$
	$E_j - \frac{1}{2}\gamma_{1j}k^2 +$ $-\frac{1}{2}\gamma_{2j}F_3^1 +$ $+\frac{1}{2}(\kappa_j + \frac{1}{4}q_j)B$	$[-\gamma'_{2j}F_3^1 +$ $-(\kappa'_j + 1)B]/\sqrt{2}$
		$E'_j - \frac{1}{2}\gamma'_{1j}k^2 +$ $+(\kappa'_j + \frac{1}{2}q_j)B$

$A_{1j} =$

c)

$A_2 =$

$\frac{1}{3}\bar{\Delta}-\frac{1}{2}\gamma_{12}k_z^2+$ $+\frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^1+$ $-\frac{3}{2}(\kappa_2+\frac{9}{4}q_2)B$	$-Qk_z/\sqrt{3}-C_2k_z+$ $-\frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^2+$ $+i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^Z$	$\sqrt{\frac{2}{3}}Qk_z+$ $+(-C_2'k_z+\gamma_{22}'F_3^2+$ $-i\sqrt{3}\gamma_{32}'F_4^Z)/\sqrt{2}$
$-Qk_z/\sqrt{3}-C_2k_z+$ $-\frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^2+$ $-i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^Z$	$\frac{1}{3}\bar{\Delta}-\frac{1}{2}\gamma_{12}k_z^2+$ $-\frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^1+$ $+\frac{1}{2}(\kappa_2+\frac{1}{4}q_2)B$	$[-\gamma_{22}'F_3^1+$ $-(\kappa_2''+1)B]/\sqrt{2}$
$\sqrt{\frac{2}{3}}Qk_z+$ $+(-C_2''k_z+\gamma_{22}''F_3^2+$ $+i\sqrt{3}\gamma_{32}''F_4^Z)/\sqrt{2}$	$[-\gamma_{22}''F_3^1+$ $-(\kappa_2'+1)B]/\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\bar{\Delta}-\frac{1}{2}\gamma_{12}'k_z^2+$ $+(\kappa_2'+\frac{1}{2}q_2)B$

d)

$A_{3j} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}C_jk_-$	$\frac{1}{2}C_jk_+-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{3j}F_4^-$	$\frac{1}{8}C_j'k_+-\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{3j}'F_4^-$
$-\frac{1}{2}C_jk_+-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{3j}F_4^-$	$\frac{\sqrt{3}}{2}C_jk_-$	$(-\sqrt{3}C_j'k_-+$ $-3\gamma_{3j}'F_4^+)/\sqrt{8}$
$-\frac{1}{8}C_j'k_+-\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{3j}'F_4^-$	$(-\sqrt{3}C_j'k_-+$ $+3\gamma_{3j}'F_4^+)/\sqrt{8}$	0

e)

$A_4 =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}C_2k_-$	$-Qk_+/\sqrt{3}+$ $+\frac{1}{2}C_2k_+-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^-$	$-Qk_+/\sqrt{6}+$ $+\frac{1}{8}C_2'k_+-\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{32}'F_4^-$
$-Qk_+/\sqrt{3}+$ $-\frac{1}{2}C_2k_+-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^-$	$\frac{\sqrt{3}}{2}C_2k_-$	$Qk_-/\sqrt{2}+$ $+(-\sqrt{3}C_2'k_-+$ $-3\gamma_{32}'F_4^+)/\sqrt{8}$
$-Qk_+/\sqrt{6}+$ $-\frac{1}{8}C_2''k_+-\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{32}''F_4^-$	$-Qk_-/\sqrt{2}+$ $+(-\sqrt{3}C_2''k_-+$ $+3\gamma_{32}''F_4^+)/\sqrt{8}$	0

f)

$A_5 =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}C_2k_-$	$Qk_+/\sqrt{3}+$ $+\frac{1}{2}C_2k_+-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^-$	$Qk_+/\sqrt{6}+$ $+\frac{1}{8}C_2''k_+-\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{32}''F_4^-$
$Qk_+/\sqrt{3}+$ $-\frac{1}{2}C_2k_+-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^-$	$\frac{\sqrt{3}}{2}C_2k_-$	$-Qk_-/\sqrt{2}+$ $+(-\sqrt{3}C_2''k_-+$ $-3\gamma_{32}''F_4^+)/\sqrt{8}$
$Qk_+/\sqrt{6}+$ $-\frac{1}{8}C_2'k_+-\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{32}'F_4^-$	$Qk_-/\sqrt{2}+$ $+(-\sqrt{3}C_2'k_-+$ $+3\gamma_{32}'F_4^+)/\sqrt{8}$	0

g)

$A_{6j} =$

$E_j - \frac{1}{2}\gamma_{1j}k^2 +$ $+ \frac{1}{2}\gamma_{2j}F_3^1 +$ $+ \frac{3}{2}(\kappa_j + \frac{9}{4}q_j)B$	$-C_j k_z - \frac{1}{2}\gamma_{2j}F_3^2 +$ $+ i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{3j}F_4^Z$	$(-C'_j k_z - \gamma'_{2j}F_3^2 +$ $-i\sqrt{3}\gamma'_{3j}F_4^Z)/\sqrt{2}$
	$E_j - \frac{1}{2}\gamma_{1j}k^2 +$ $- \frac{1}{2}\gamma_{2j}F_3^1 +$ $- \frac{1}{2}(\kappa_j + \frac{1}{4}q_j)B$	$[-\gamma'_{2j}F_3^1 +$ $+ (\kappa''_j + 1)B]/\sqrt{2}$
		$E'_j - \frac{1}{2}\gamma'_{1j}k^2 +$ $- (\kappa'_j + \frac{1}{2}q_j)B$

h)

$A_7 =$

$\frac{1}{3}\Delta - \frac{1}{2}\gamma_{12}k^2 +$ $+ \frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^1 +$ $+ \frac{3}{2}(\kappa_2 + \frac{9}{4}q_2)B$	$-Qk_z/\sqrt{3} - C_2 k_z +$ $- \frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^2 +$ $+ i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^Z$	$\sqrt{\frac{2}{3}}Qk_z +$ $+ (-C'_2 k_z - \gamma'_{22}F_3^2 +$ $-i\sqrt{3}\gamma'_{32}F_4^Z)/\sqrt{2}$
$-Qk_z/\sqrt{3} - C_2 k_z +$ $- \frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^2 +$ $- i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{32}F_4^Z$	$\frac{1}{3}\Delta - \frac{1}{2}\gamma_{12}k^2 +$ $- \frac{1}{2}\gamma_{22}F_3^1 +$ $- \frac{1}{2}(\kappa_2 + \frac{1}{4}q_2)B$	$[-\gamma'_{22}F_3^1 +$ $+ (\kappa''_2 + 1)B]/\sqrt{2}$
$\sqrt{\frac{2}{3}}Qk_z +$ $+ (-C''_2 k_z - \gamma''_{22}F_3^2 +$ $+ i\sqrt{3}\gamma''_{32}F_4^Z)/\sqrt{2}$	$[-\gamma''_{22}F_3^1 +$ $+ (\kappa'_2 + 1)B]/\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\Delta - \frac{1}{2}\gamma'_{12}k^2 +$ $- (\kappa'_2 + \frac{1}{2}q_2)B$

i)

 $B_{1j} =$

$(P_{jk_-} + G_j F_4^+) / \sqrt{2}$
$(P_{jk_+} - G_j F_4^-) / \sqrt{6}$
$(-P_{jk_+} + G'_j F_4^-) / \sqrt{3}$

j)

 $B_{2j} =$

$N_{2j} F_3^1 + N_{3j} B$
$\sqrt{\frac{2}{3}} (P_{jk_z} + i G_j F_4^Z) + N_{2j} F_3^2$
$\sqrt{\frac{1}{3}} (P_{jk_z} + i G'_j F_4^Z)$

k)

 $B_{3j} =$

$N_{2j} F_3^1 - N_{3j} B$
$\sqrt{\frac{2}{3}} (P_{jk_z} + i G_j F_4^Z) - N_{2j} F_3^2$
$\sqrt{\frac{1}{3}} (P_{jk_z} + i G'_j F_4^Z)$

l)

 $B_{4j} =$

$(P_{jk_+} - G_j F_4^-) / \sqrt{2}$
$(-P_{jk_-} - G_j F_4^+) / \sqrt{6}$
$(P_{jk_-} + G'_j F_4^-) / \sqrt{3}$

m) $S_1 = (F + \frac{1}{2})k^2 + (N_1 + \frac{1}{2})B;$

n) $S_2 = (F + \frac{1}{2})k^2 - (N_1 + \frac{1}{2})B;$

gdzie

indeks $j=1,2;$

$$k_{\pm} = k_x \pm k_y; F_3^1 = 2k_z^2 - k_x^2 - k_y^2; F_3^2 = \sqrt{3}(k_x^2 - k_y^2);$$

$$F_4^{\pm} = \{k_z, k_{\pm}\}; F_4^Z = \{k_x, k_y\}; B = i[k_x, k_y];$$

 $i = \sqrt{-1}; [,]$ i $\{ , \}$ odpowiednio komutator i antykomutator;

Definicje pozostałych wielkości zawiera dodatek A.

TABELA 2. Parametry hamiltonianu efektywnego w modelu trójpasmowym (za [15]).

$f(k)$	k_α	k^2	$2k_z^2 - k_x^2 - k_y^2$ $\sqrt{3}(k_x^2 - k_y^2)$	$\{k_\alpha, k_\beta\}$	$i[k_\alpha, k_\beta]$
$\langle \Gamma_6 f(k) \Gamma_6 \rangle$		F			N_1
$\langle \Gamma_6 f(k) \Gamma_8 \rangle$	P		N_2	G	N_3
$\langle \Gamma_6 f(k) \Gamma_7 \rangle$	P			G'	
$\langle \Gamma_8 f(k) \Gamma_8 \rangle$	C	γ_1	γ_2	γ_3	κ, q
$\langle \Gamma_8 f(k) \Gamma_7 \rangle$	C'		γ'_2	γ'_3	κ''
$\langle \Gamma_7 f(k) \Gamma_7 \rangle$		γ'			κ'

TABELA 3. Parametry hamiltonianu efektywnego w modelu pięciopasmowym.

$f(k)$	k_α	k^2	$2k_z^2 - k_x^2 - k_y^2$ $\sqrt{3}(k_x^2 - k_y^2)$	$\{k_\alpha, k_\beta\}$	$i[k_\alpha, k_\beta]$
$\langle \Gamma_8^C f(k) \Gamma_8^C \rangle$	C_1	γ_{11}	γ_{21}	γ_{31}	κ_1, q_1
$\langle \Gamma_8^C f(k) \Gamma_7^C \rangle$	C'_1		γ'_{21}	γ'_{31}	κ''_1
$\langle \Gamma_8^C f(k) \Gamma_6^C \rangle$	P_1		N_{21}	G_1	N_{31}
$\langle \Gamma_8^C f(k) \Gamma_8^V \rangle$	Q, C_2	γ_{12}	γ_{22}	γ_{32}	κ_2, q_2
$\langle \Gamma_8^C f(k) \Gamma_7^V \rangle$	Q, C'_2		γ'_{22}	γ'_{32}	κ''_2
$\langle \Gamma_7^C f(k) \Gamma_7^C \rangle$		γ'_{11}			κ'_1
$\langle \Gamma_7^C f(k) \Gamma_6^C \rangle$	P_1			G'_1	
$\langle \Gamma_7^C f(k) \Gamma_8^V \rangle$	Q, C''_2		γ''_{22}	γ''_{32}	κ''', κ''_2
$\langle \Gamma_7^C f(k) \Gamma_7^V \rangle$		γ'_{12}			κ'_2
$\langle \Gamma_6^C f(k) \Gamma_6^C \rangle$		F			N_1
$\langle \Gamma_6^C f(k) \Gamma_8^V \rangle$	P_0		N_{20}	G_0	N_{30}
$\langle \Gamma_6^C f(k) \Gamma_7^V \rangle$	P_0			G'_0	
$\langle \Gamma_8^V f(k) \Gamma_8^V \rangle$	C_0	γ_{10}	γ_{20}	γ_{30}	κ_0, q_0
$\langle \Gamma_8^V f(k) \Gamma_7^V \rangle$	C'_0		γ'_{20}	γ'_{30}	κ''_0
$\langle \Gamma_7^V f(k) \Gamma_7^V \rangle$		γ'_{10}			κ'_0

Baza - $u_1, u_3, u_5, u_7, u_9, u_{11}, u_{13}, u_2, u_4, u_6, u_8, u_{10}, u_{12}, u_{14}$

[illegible]

gdzie

$$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha^3 \beta^3 c_1^3 & -\sqrt{3} \alpha^* \beta^3 s_1^2 c_1 \\ -\sqrt{3} \alpha^3 \beta^* s_1^2 c_1 & \alpha^* \beta^* c_1 (1 - 3 s_1^2) \end{pmatrix}; T_2 = \begin{pmatrix} -\alpha^* \beta^3 s_1^3 & -\sqrt{3} \alpha \beta^3 s_1 c_1^2 \\ \sqrt{3} \alpha^* \beta^* s_1 c_1^2 & \alpha \beta^* s_1 (1 - 3 c_1^2) \end{pmatrix};$$

$$T_3 = \alpha^* \beta^* c_1; \quad T_4 = \alpha \beta^* s_1;$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} \alpha^3 \beta^* {}^3s_1^3 & -\sqrt{3}\alpha^* \beta^* {}^3s_1 c_1^2 \\ \sqrt{3}\alpha^3 \beta s_1 c_1^2 & -\alpha^* \beta s_1 (1-3c_1^2) \end{pmatrix}; T_6 = \begin{pmatrix} \alpha^* {}^3\beta^* {}^3c_1^3 & \sqrt{3}\alpha\beta^* {}^3s_1^2 c_1 \\ \sqrt{3}\alpha^* {}^3\beta s_1^2 c_1 & \alpha\beta c_1 (1-3s_1^2) \end{pmatrix};$$

$$\alpha = e^{i\varphi/2} ; \beta = e^{i\psi/2} ; s_1 = \sin(\theta/2) ; c_1 = \cos(\theta/2).$$

TABELA 5. a) Część sferyczna H_s hamiltonianu efektywnego (1.27)
b) Definicje bloków zawartych w tabeli 5a).

a)

	A_{11}	B_{11}	A_2	A_{31}	B_{21}
		S_1	B_{10}^*	B_{21}^*	0
			A_{10}	A_5	B_{20}
				A_{61}	B_{31}
					S_2
					B_{30}^*
					A_{60}

$H_I =$

b)

$E_i - \frac{1}{2\lambda^2}(\gamma_{1i} + \gamma_{2i}) \times$ $\times (2a^+ a + 1) +$ $-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} - 2\gamma_{2i})k_3^2 +$ $-\frac{3}{2}(\kappa_i + \frac{9}{4}q_i)B$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_i^+ a^2$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_i^+ a^2$
$E_i - \frac{1}{2\lambda^2}(\gamma_{1i} - \gamma_{2i}) \times$ $\times (2a^+ a + 1) +$ $-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} + 2\gamma_{2i})k_3^2 +$ $+\frac{1}{2}(\kappa_i + \frac{1}{4}q_i)B$	$\{\gamma_{2i}' [\frac{1}{\lambda^2}(2a^+ a + 1) +$ $-2k_3^2] +$ $-(\kappa_i'' + 1)B\} / \sqrt{2}$	
		$E_i' - \frac{1}{2} \gamma_{2i}' [\frac{1}{\lambda^2}(2a^+ a + 1) +$ $+k_3^2] + (\kappa_i' + \frac{1}{2})B$

$A_{1i} =$

c)

	$\frac{1}{3}\bar{\Delta}-\frac{1}{2\lambda^2}(\gamma_{12}+\gamma_{22})\times$ $\times(2a^+a+1)+$ $-\frac{1}{2}(\gamma_{12}-2\gamma_{22})k_3^2+$ $-\frac{3}{2}(\kappa_2+\frac{9}{4}q_2)B$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\lambda^2}\gamma_2^+a^2$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\lambda^2}\gamma_2^+a^2$
$A_2 =$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\lambda^2}\gamma_2^+a^2$	$\frac{1}{3}\bar{\Delta}-\frac{1}{2\lambda^2}(\gamma_{12}-\gamma_{22})\times$ $\times(2a^+a+1)+$ $-\frac{1}{2}(\gamma_{12}+2\gamma_{22})k_3^2+$ $+\frac{1}{2}(\kappa_2+\frac{1}{4}q_2)B$	$\{\gamma'_{22}[\frac{1}{\lambda^2}(2a^+a+1)+$ $-2k_3^2]+$ $-(\kappa_2''+1)B\}/\sqrt{2}$
	$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\lambda^2}\gamma_2''a^2$	$\{\gamma''_{22}[\frac{1}{\lambda^2}(2a^+a+1)+$ $-2k_3^2]+$ $-(\kappa_2''+1)B\}/\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\bar{\Delta}-\frac{1}{2}\gamma'_{22}[\frac{1}{\lambda^2}(2a^+a+1)$ $+k_3^2]+(\kappa_2'+\frac{1}{2})B$

d)

	0	$\frac{\sqrt{6}}{\lambda}\gamma_{3i}k_3^a$	$\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\gamma'_{3i}k_3^a$
$A_{3i} =$	$\frac{\sqrt{6}}{\lambda}\gamma_{3i}k_3^a$	0	$\frac{3}{\lambda}\gamma'_{3i}k_3^{a+}$
	$\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\gamma'_{3i}k_3^a$	$-\frac{3}{\lambda}\gamma'_{3i}k_3^{a+}$	0

e)

	0	$\frac{\sqrt{6}}{\lambda}\gamma_{32}k_3^a$	$\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\gamma'_{32}k_3^a$
$A_4 =$	$\frac{\sqrt{6}}{\lambda}\gamma_{32}k_3^a$	0	$\frac{3}{\lambda}\gamma'_{32}k_3^{a+}$
	$\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\gamma''_{32}k_3^a$	$-\frac{3}{\lambda}\gamma''_{32}k_3^{a+}$	0

f)

$$A_5 =$$

0	$\frac{\sqrt{6}}{\lambda} \gamma_{32} k_3 a$	$\frac{\sqrt{3}}{\lambda} \gamma_{32}'' k_3 a$
$\frac{\sqrt{6}}{\lambda} \gamma_{32} k_3 a$	0	$\frac{3}{\lambda} \gamma_{32}'' k_3 a^+$
$\frac{\sqrt{3}}{\lambda} \gamma_{32}' k_3 a$	$-\frac{3}{\lambda} \gamma_{32}' k_3 a^+$	0

g)

$$A_{6i} =$$

$E_i - \frac{1}{2\lambda^2} (\gamma_{1i} + \gamma_{2i}) \times$ $\times (2a^+ a + 1) +$ $-\frac{1}{2} (\gamma_{1i} - 2\gamma_{2i}) k_3^2 +$ $+\frac{3}{2} (\kappa_i + \frac{9}{4} q_i) B$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_i^+ a^2$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_i^+ a^2$
	$E_i - \frac{1}{2\lambda^2} (\gamma_{1i} - \gamma_{2i}) \times$ $\times (2a^+ a + 1) +$ $-\frac{1}{2} (\gamma_{1i} + 2\gamma_{2i}) k_3^2 +$ $-\frac{1}{2} (\kappa_i + \frac{1}{4} q_i) B$	$\{ \gamma_{2i}' [\frac{1}{\lambda^2} (2a^+ a + 1) +$ $-2k_3^2] +$ $+ (\kappa_i'' + 1) B \} / \sqrt{2}$
		$E_i' - \frac{1}{2} \gamma_{2i}' [\frac{1}{\lambda^2} (2a^+ a + 1) +$ $+ k_3^2] - (\kappa_i' + \frac{1}{2}) B$

$A_7 =$	h)	$\frac{1}{3}\bar{\Delta} - \frac{1}{2\lambda^2}(\gamma_{12} + \gamma_{22}) \times \\ \times (2a^+ + 1) + \\ - \frac{1}{2}(\gamma_{12} - 2\gamma_{22})k_3^2 + \\ + \frac{3}{2}(\kappa_2 + \frac{9}{4}q_2)B$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_2^+ a^2$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_2'^+ a^2$
		$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_2^+ a^2$	$\frac{1}{3}\bar{\Delta} - \frac{1}{2\lambda^2}(\gamma_{12} - \gamma_{22}) \times \\ \times (2a^+ + 1) + \\ - \frac{1}{2}(\gamma_{12} + 2\gamma_{22})k_3^2 + \\ - \frac{1}{2}(\kappa_2 + \frac{1}{4}q_2)B$	$\{\gamma_{22}' [\frac{1}{\lambda^2}(2a^+ + 1) + \\ - 2k_3^2] + \\ + (\kappa_2'' + 1)B\} / \sqrt{2}$
		$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda^2} \gamma_2''^+ a^2$	$\{\gamma_{22}'' [\frac{1}{\lambda^2}(2a^+ + 1) + \\ - 2k_3^2] + \\ + (\kappa_2'' + 1)B\} / \sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\bar{\Delta} - \frac{1}{2}\gamma_{22}' [\frac{1}{\lambda^2}(2a^+ + 1) \\ + k_3^2] - (\kappa_2' + \frac{1}{2})B$

i)	$\frac{1}{\lambda} P_i a$	j)	0	k)	$\frac{1}{\lambda} P_i a^+$
$B_{1i} =$	$\sqrt{\frac{1}{3\lambda}} P_i a^+$	$B_{2i} =$	$\sqrt{\frac{2}{3}} P_i k_3$	$B_{3i} =$	$-\sqrt{\frac{1}{3\lambda}} P_i a$
	$-\sqrt{\frac{2}{3\lambda}} P_i a^+$		$\sqrt{\frac{1}{3}} P_i k_3$		$\sqrt{\frac{2}{3\lambda}} P_i a$

$$l) \quad S_1 = (F + \frac{1}{2}) [\frac{1}{\lambda^2}(2a^+ + 1) + k_3^2] + (N_1 + \frac{1}{2})B$$

$$m) \quad S_2 = (F + \frac{1}{2}) [\frac{1}{\lambda^2}(2a^+ + 1) + k_3^2] - (N_1 + \frac{1}{2})B$$

gdzie

$$\text{indeks } i = 0, 1; \quad \gamma_i^+ = \gamma_{2i} + \gamma_{3i}; \quad \lambda = (\hbar/eB)^{1/2}.$$

TABELA 6. a) Część H_I hamiltonianu efektywnego (1.27) indukowana brakiem symetrii inwersyjnej.

b)+n) Definicje bloków zawartych w tabeli 5a).

a)

$$H_I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & A_{11} & B_{11} & A_2 & A_{31} & B_{21} & A_4 \\ \hline & & 0 & B_{10}^* & B_{31}^* & 0 & B_{30}^* \\ \hline & & & A_{10} & A_5 & B_{20} & A_{30} \\ \hline & & & & A_{61} & B_{41} & A_7 \\ \hline & & & & & 0 & B_{40}^* \\ \hline & & & & & & A_{60} \\ \hline \end{array}$$

b)

$$A_{1i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_1 C_i & h_2 C_i & h_3 C'_i \\ \hline & 3h_1 C_i & h_4 C'_i \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array}$$

c)

$$A_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline d_1 Q + h_1 C_2 & d_2 Q + h_2 C_2 & -\sqrt{2} d_2 Q + h_3 C'_2 \\ \hline -d_2^* Q + h_2^* C_2 & -d_1 Q + 3h_1 C_2 & -\sqrt{2} d_1 Q + h_4 C'_2 \\ \hline \sqrt{2} d_2^* Q + h_3^* C_2'' & -\sqrt{2} d_1 Q - h_4 C_2'' & 0 \\ \hline \end{array}$$

d)

$$A_{3i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_5 C_i & h_6 C_i & h_7 C'_i \\ \hline -h_6 C_i & \sqrt{3} h_6^* C_i & -\sqrt{3} h_7^* C'_i \\ \hline -h_7 C'_i & -\sqrt{3} h_7^* C'_i & 0 \\ \hline \end{array}$$

e)

$$A_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_5 C_2 & d_3 Q + h_6 C_2 & \sqrt{\frac{1}{2}} d_3 Q + h_7 C'_2 \\ \hline d_3 Q - h_6 C_2 & \sqrt{3} h_6^* C_2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} d_3^* Q - \sqrt{3} h_7^* C'_2 \\ \hline \sqrt{\frac{1}{2}} d_3 Q - h_7 C''_2 & \sqrt{\frac{3}{2}} d_3^* Q - \sqrt{3} h_7^* C''_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

f)

$$A_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_5 C_2 & -d_3 Q + h_6 C_2 & -\sqrt{\frac{1}{2}} d_3 Q + h_7 C''_2 \\ \hline -d_3 Q - h_6 C_2 & \sqrt{3} h_6^* C_2 & \sqrt{\frac{3}{2}} d_3^* Q - \sqrt{3} h_7^* C''_2 \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{2}} d_3 Q - h_7 C'_2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} d_3^* Q - \sqrt{3} h_7^* C'_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

g)

$$A_{6i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -h_1 C_i & h_2^* C_i & h_3^* C'_i \\ \hline & -3h_1 C_i & h_4 C'_i \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array}$$

h)

$$A_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline d_1 Q - h_1 C_2 & d_2 Q + h_2^* C_2 & -\sqrt{2} d_2 Q + h_3^* C'_2 \\ \hline -d_2^* Q + h_2 C_2 & -d_1 Q - 3h_1 C_2 & -\sqrt{2} d_1 Q + h_4 C'_2 \\ \hline \sqrt{2} d_2^* Q + h_3 C''_2 & -\sqrt{2} d_1 Q - h_4 C''_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

j) $B_{1i} = \begin{array}{ c c c } \hline l_1^* G_i + n_1^* N_{2i} + b_1^* N_{3i} \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{3}} l_1 G_i + \sqrt{3} n_1 N_{2i} - \sqrt{3} b_1 N_{3i} \\ \hline \sqrt{\frac{2}{3}} l_1 G'_i \\ \hline \end{array}$	k) $B_{2i} = \begin{array}{ c c c } \hline n_2 N_{2i} - b_2 N_{3i} \\ \hline -l_2 G_i - n_3 N_{2i} + b_3 N_{3i} \\ \hline \sqrt{\frac{1}{2}} l_2 G'_i \\ \hline \end{array}$
l) $B_{3i} = \begin{array}{ c c c } \hline n_2 N_{2i} + b_2 N_{3i} \\ \hline l_2 G_i + n_3 N_{2i} + b_3 N_{3i} \\ \hline \sqrt{\frac{1}{2}} l_2 G'_i \\ \hline \end{array}$	j) $B_{4i} = \begin{array}{ c c c } \hline -l_1 G_i - n_1 N_{2i} - b_1 N_{3i} \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{3}} l_1^* G_i + \sqrt{3} n_1^* N_{2i} + \sqrt{3} b_1^* N_{3i} \\ \hline \sqrt{\frac{2}{3}} l_1^* G'_i \\ \hline \end{array}$

gdzie $i = 0, 1$;

$$b_1 = \frac{1}{2} \alpha_1^* B; \quad b_2 = -\frac{1}{2} \alpha_2 B; \quad b_3 = -\frac{3}{2} \sqrt{3} \alpha_0 B;$$

$$d_1 = -\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{11}{2\lambda}} (\alpha_1 a^+ - \alpha_1^* a) + 3\alpha_0 k_3 \right];$$

$$d_2 = -\frac{1}{2\sqrt{6}} \left[\frac{1}{\lambda} (3\alpha_3 a^+ + \alpha_1 a) - \sqrt{2} \alpha_2 k_3 \right];$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{\frac{11}{2\lambda}} (\alpha_2 a^+ - 3\alpha_0 a) + \alpha_1 k_3 \right];$$

$$h_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{31}{2\lambda}} (\alpha_1 a^+ + \alpha_1^* a);$$

$$h_2 = -\frac{1}{8} \left[\frac{\sqrt{2}}{\lambda} (3\alpha_3 a^+ - 5\alpha_1 a) + 2\alpha_2 k_3 \right];$$

$$h_3 = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{\lambda} (3\alpha_3 a^+ + \alpha_1 a) - \alpha_2 k_3 \right];$$

$$h_4 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{\lambda} (\alpha_1 a^+ - \alpha_1^* a) + 3\alpha_0 k_3 \right];$$

$$h_5 = \frac{\sqrt{3}}{8} \left[\frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \alpha_2 a + 3\alpha_3 k_3 \right];$$

$$h_6 = \frac{1}{8} \left[\frac{2\sqrt{2}}{\lambda} (\alpha_2 a^+ + 6\alpha_0 a) - \alpha_1 k_3 \right];$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} [\alpha_1 a^{+2} - 3\alpha_3^* a^2 - \alpha_1^* (2a^+ a + 1)] + 2\alpha_1^* k_3^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} k_3 (\alpha_0 a^+ + \alpha_2^* a) \right\};$$

$$l_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} [\alpha_2 a^{+2} - \alpha_2^* a^2 - 3\alpha_0 (2a^+ a + 1)] + 6\alpha_0 k_3^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} k_3 (\alpha_1 a^+ - \alpha_1^* a) \right\};$$

$$n_1 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} [3\alpha_1 a^{+2} + 3\alpha_3^* a^{2*} - \alpha_1^* (2a^+ a + 1)] + 2\alpha_0 k_3^2 + \frac{12\sqrt{2}}{\lambda} k_3 \alpha_0 a^+ \right\};$$

$$n_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} [6\alpha_0 a^{+2} - \alpha_2 (2a^+ a + 1)] + 2\alpha_2 k_3^2 - \frac{3\sqrt{2}}{\lambda} k_3 (\alpha_3 a^+ - \alpha_1 a) \right\};$$

$$n_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{\lambda^2} (\alpha_2 a^{+2} + \alpha_2^* a^{2*}) - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} k_3 (\alpha_1 a^+ + \alpha_1^* a) \right];$$

$$\alpha_0 = i \sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\varphi;$$

$$\alpha_1 = \sin \theta [2 \cos \theta \cos 2\varphi - i(1 - 3 \cos^2 \theta) \sin 2\varphi] e^{i\psi};$$

$$\alpha_2 = [2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos 2\varphi - i \cos \theta (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin 2\varphi] e^{2i\psi};$$

$$\alpha_3 = \sin \theta [2 \cos \theta \cos 2\varphi + i(1 + \cos^2 \theta) \sin 2\varphi] e^{3i\psi};$$

φ, θ, ψ - kąty Eulera określające kierunek pola magnetycznego.

$$\lambda = (\hbar/eB)^{1/2}.$$

TABELA 7. a) Część H_W hamiltonianu efektywnego (1.27) indukowana warpingiem.

b)+h) Definicje bloków zawartych w tabeli 5a).

a)

$$H_S =$$

A_{11}	0	A_2	A_{31}	0	A_4
	0	0	0	0	0
		A_{10}	A_5	0	A_{30}
			A_{61}	0	A_7
				0	0
					A_{60}

b)

$$A_{1i} =$$

$w_1 \gamma_i^+ + g_1 q_i$	$w_2 \gamma_i^- + g_2 q_i$	$-\sqrt{2} w_2 \gamma_i^-$
	$-w_1 \gamma_i^+ + 3g_1 q_i$	$-\sqrt{2} w_1 \gamma_i^+$
		0

c)

$$A_2 =$$

$w_1 \gamma_2^+ + g_1 q_2$	$w_2 \gamma_2^- + g_2 q_2$	$-\sqrt{2} w_2 \gamma_2^-$
$w_2^* \gamma_2^- + g_2^* q_2$	$-w_1 \gamma_2^+ + 3g_1 q_2$	$-\sqrt{2} w_1 \gamma_2^+$
$-\sqrt{2} w_2^* \gamma_2^-$	$-\sqrt{2} w_1 \gamma_2^+$	0

d)

$A_{3i} =$	$g_3 q_i$	$w_3 \gamma_{3i} + g_4 q_i$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3 \gamma'_{3i}$
	$w_3 \gamma_{3i} - g_4 q_i$	$\sqrt{3} g_4^* q_i$	$\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^* \gamma'_{3i}$
	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3 \gamma'_{3i}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^* \gamma'_{3i}$	0

e)

$A_4 =$	$g_3 q_2$	$w_3 \gamma_{32} + g_4 q_2$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3 \gamma'_{32}$
	$w_3 \gamma_{3i} - g_4 q_2$	$\sqrt{3} g_4^* q_2$	$\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^* \gamma'_{32}$
	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3 \gamma''_{32}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^* \gamma''_{32}$	0

f)

$A_5 =$	$g_3 q_2$	$w_3 \gamma_{32} + g_4 q_2$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3 \gamma''_{32}$
	$w_3 \gamma_{3i} - g_4 q_2$	$\sqrt{3} g_4^* q_2$	$\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^* \gamma''_{32}$
	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3 \gamma'_{32}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^* \gamma'_{32}$	0

g)

$A_{6i} =$	$w_1 \gamma_i^+ - g_1 q_i$	$-w_2^* \gamma_i^- + g_2^* q_i$	$\sqrt{2} w_2^* \gamma_i^-$
		$-w_1 \gamma_i^+ - 3g_1 q_i$	$-\sqrt{2} w_1 \gamma_i^+$
			0

h)

$A_7 =$	$w_1 \gamma_2^+ - g_1 q_2$	$-w_2^* \gamma_2^- + g_2^* q_2$	$\sqrt{2} w_2^* \gamma_2^-$
	$w_2 \gamma_2^- + g_2 q_2$	$-w_1 \gamma_2^+ - 3g_1 q_2$	$-\sqrt{2} w_1 \gamma_2^+$
	$\sqrt{2} w_2 \gamma_2^-$	$-\sqrt{2} w_1 \gamma_2^+$	0

gdzie $i = 0, 1$; $\gamma_i^+ = \gamma_{3i} + \gamma_{2i}$; $\gamma_i^- = \gamma_{3i} - \gamma_{2i}$;

$$g_1 = -\frac{3}{8}\beta_0 B;$$

$$g_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\beta_2 B;$$

$$g_3 = -\frac{3}{8}\beta_3 B;$$

$$g_4 = \frac{3\sqrt{3}}{8}\beta_1 B;$$

$$w_1 = \frac{3}{8}\left\{\frac{1}{\lambda^2}[\beta_2 a^{+2} + \beta_2^* a^{+2} + \beta_0(2a^+ a + 1)] - 2\beta_0 k_3^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} k_3(\beta_1 a^+ + \beta_1^* a)\right\};$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left\{\frac{1}{\lambda^2}[\beta_4 a^{+2} + \beta_0 a^{+2} + \beta_2(2a^+ a + 1)] - 2\beta_2 k_3^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} k_3(\beta_3 a^+ + \beta_1 a)\right\};$$

$$w_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{\lambda^2}[-\beta_3 a^{+2} + \beta_1^* a^{+2} + \beta_1(2a^+ a + 1)] - 2\beta_1 k_3^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} k_3(\beta_2 a^+ + \beta_0^* a)\right\};$$

$$\beta_0 = -\sin^2\theta(1+3\cos^2\theta) + \sin^4\theta\cos^2 2\varphi;$$

$$\beta_1 = \sin\theta\{\cos\theta[1-3\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2 2\varphi] + i\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin 4\varphi\}e^{i\psi};$$

$$\beta_2 = \sin^2\theta\{1-3\cos^2\theta - (1+\cos^2\theta)\cos^2 2\varphi - i\cos\theta\sin 4\varphi\}e^{2i\psi};$$

$$\beta_3 = \sin\theta\{\cos\theta[5-3\cos^2\theta - (3+\cos^2\theta)\cos^2 2\varphi] - i\frac{1}{2}(1+3\cos^2\theta)\sin 4\varphi\}e^{3i\psi};$$

$$\beta_4 = \{[4\sin^2\theta - (1+\cos^2\theta)] + [4\sin^2\theta + (1+\cos^2\theta)]\cos^2 2\varphi +$$

$$+ i\cos\theta(1+\cos^2\theta)\sin 4\varphi\}e^{4i\psi};$$

φ, θ, ψ - kąty Eulera określające kierunek pola magnetycznego;

$$\lambda = (\hbar/eB)^{1/2}.$$

TABELA 8. a) Macierz prędkości (2.2) dla części sferycznej hamiltonianu (1.27) - polaryzacja π ;
b)+g) wyjaśnienia symboli użytych w a).

a)

$$\left(\frac{\partial H_s}{\partial k}\right)_3 =$$

A_{11}	0	A_2	A_{31}	B_1	A_4
	S	0	B_1^*	0	B_0^*
		A_{10}	A_5	B_0	A_{30}
			A_{11}	0	A_2
				S	0
					A_{10}

b)

$-(\gamma_{11}-2\gamma_{21})k_3$	0	0
$A_{1i} =$	$-(\gamma_{11}+2\gamma_{21})k_3$	$-2\sqrt{2}\gamma'_{21}k_3$
		$-\gamma'_{11}k_3$

c)

$-(\gamma_{12}-2\gamma_{22})k_3$	0	0
$A_2 =$	0	$-(\gamma_{12}+2\gamma_{22})k_3$
	0	$-2\sqrt{2}\gamma'_{22}k_3$
		$-\gamma'_{12}k_3$

d)

$A_{3i} =$	0	$\sqrt{3}\gamma_{3i}k_-$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma'_{3i}k_-$
	$\sqrt{3}\gamma_{3i}k_-$	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma'_{3i}k_+$
	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma'_{3i}k_-$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma'_{3i}k_+$	0

e)

$A_4 =$	0	$\sqrt{3}\gamma_{32}k_-$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma'_{32}k_-$
	$\sqrt{3}\gamma_{32}k_-$	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma'_{32}k_+$
	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma''_{32}k_-$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma''_{32}k_+$	0

f)

$A_5 =$	0	$\sqrt{3}\gamma_{32}k_-$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma''_{32}k_-$
	$\sqrt{3}\gamma_{32}k_-$	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma''_{32}k_+$
	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma'_{32}k_-$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma'_{32}k_+$	0

g)

$B_i =$	0
	$\sqrt{\frac{2}{3}}P_i$
	$\sqrt{\frac{1}{3}}P_i$

h)

$$S = 2(F + \frac{1}{2})k_3$$

gdzie $i = 0, 1$;

definicje parametrów - patrz tabela 5 i dodoatek A.

TABELA 9. a) Macierz prędkości (2.2) dla części sferycznej hamiltonianu (1.27) - polaryzacja σ_R ; b) + n) wyjaśnienia symboli użytych w a).

a)

$$\left(\frac{\partial H_s}{\partial k} \right)_- =$$

A_{11}	B_{11}	A_2	A_{31}	0	A_4
B_{21}^*	S	B_{20}^*	0	0	0
A_2'	B_{10}	A_{10}	$-A_4^*$	0	A_{30}
A_{51}	0	A_6	A_{71}	B_{21}	A_8
0	0	0	$-B_{11}^*$	S	$-B_{10}^*$
A_6^*	0	A_{50}	A_8'	B_{20}	A_{70}

b)

	$-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} + \gamma_{2i})k_-$	0	0
$A_{1i} =$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_1^+ k_+$	$-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} - \gamma_{2i})k_-$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{2i}' k_-$
	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_1^+ k_+$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{2i}' k_-$	$-\frac{1}{2}\gamma_{1i}' k_-$

c)

	$-\frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{22})k_-$	0	0
$A_2 =$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2^+ k_+$	$-\frac{1}{2}(\gamma_{12} - \gamma_{22})k_-$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}' k_-$
	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_2^+ k_+$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}'' k_-$	$-\frac{1}{2}\gamma_{12}' k_-$

d)

$$A'_2 =$$

$-\frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{22})k_-$	0	0
$-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2^+ k_+$	$-\frac{1}{2}(\gamma_{12} - \gamma_{22})k_-$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}'' k_-$
$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_2'^+ k_+$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}' k_-$	$-\frac{1}{2}\gamma_{12}' k_-$

e)

$$A_{3i} =$$

0	0	0
0	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma_{3i}' k_3$
0	$-\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma_{3i}' k_3$	0

f)

$$A_4 =$$

0	0	0
0	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma_{32}' k_3$
0	$-\frac{3}{\sqrt{2}}\gamma_{32}'' k_3$	0

g)

$$A_{5i} =$$

0	$\sqrt{3}\gamma_{3i} k_3$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_{3i}' k_3$
$\sqrt{3}\gamma_{3i} k_3$	0	0
$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_{3i}' k_3$	0	0

h)

$$A_6 =$$

0	$\sqrt{3}\gamma_{32} k_3$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_{32}' k_3$
$\sqrt{3}\gamma_{32} k_3$	0	0
$\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_{32}'' k_3$	0	0

i)

$A_{7i} =$	$-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} + \gamma_{2i})k_-$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_i^+ k_+$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_i^+ k_+$
	0	$-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} - \gamma_{2i})k_-$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{2i}' k_-$
	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{2i}' k_-$	$-\frac{1}{2}\gamma_{1i}' k_-$

j)

$A_8 =$	$-\frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{22})k_-$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2^+ k_+$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_2^+ k_+$
	0	$-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} - \gamma_{2i})k_-$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}' k_-$
	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}'' k_-$	$-\frac{1}{2}\gamma_{12}' k_-$

k)

$A'_8 =$	$-\frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{22})k_-$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2^+ k_+$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_2''^+ k_+$
	0	$-\frac{1}{2}(\gamma_{1i} - \gamma_{2i})k_-$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}'' k_-$
	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{22}' k_-$	$-\frac{1}{2}\gamma_{12}' k_-$

l)

$B_{1i} =$	0
	$\sqrt{\frac{1}{6}}P_i$
	$-\sqrt{\frac{1}{3}}P_i$

m)

$B_{2i} =$	$\sqrt{\frac{1}{2}}P_i$
	0
	0

n) $S = (F + \frac{1}{2})k_-$

gdzie $i = 0, 1$;

definicje parametrów zawierają tabela 5 i dodatek A.

TABELA 10.a) Macierz prędkości (2.2) dla części hamiltonianu (1.27) indukowanej brakiem symetrii inwersyjnej; b)+u) wyjaśnienia symboli użytych w a).

a)

$$\frac{\partial H_I}{\partial k} =$$

A_{11}	B_{11}	A_2	A_{31}	B_{31}	A_4
B'_{21}	0	B'_{20}	B'_{41}	0	B'_{40}
A'_2	B_{10}	A_{10}	A_5	B_{30}	A_{30}
A'_{31}	B_{41}	A'_5	A_{61}	B_{21}	A_7
B'_{31}	0	B'_{30}	B'_{11}	0	B'_{10}
A'_4	B_{40}	A'_{30}	A'_7	B_{20}	A_{60}

b)

$h'_1 C_i$	$h'_2 C_i$	$h'_3 C'_i$
$h^{*'}_2 C_i$	$3h'_1 C_i$	$h'_4 C'_i$
$h^{*'}_3 C'_i$	$-h'_4 C'_i$	0

c)

$d'_1 Q + h'_1 C_2$	$d'_2 Q + h'_2 C_2$	$-\sqrt{2}d'_2 Q + h'_3 C'_2$
$-d^{*'}_2 Q + h^{*'}_2 C_2$	$-d'_1 Q + 3h'_1 C_2$	$-\sqrt{2}d'_1 Q + h'_4 C'_2$
$\sqrt{2}d^{*'}_2 Q + h^{*'}_3 C''_2$	$-\sqrt{2}d'_1 Q - h'_4 C''_2$	0

d)

$$A'_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -d'_1 Q + h'_1 C_2 & -d'_2 Q + h'_2 C_2 & \sqrt{2} d'_2 Q + h'_3 C''_2 \\ \hline d^{*'}_2 Q + h^{*'}_2 C_2 & d'_1 Q + 3h'_1 C_2 & \sqrt{2} d'_1 Q + h'_4 C''_2 \\ \hline -\sqrt{2} d^{*'}_2 Q + h^{*'}_3 C'_2 & \sqrt{2} d'_1 Q - h'_4 C'_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

e)

$$A_{3i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h'_5 C_i & h'_6 C_i & h'_7 C'_i \\ \hline -h'_6 C_i & \sqrt{3} h^{*'}_6 C_i & -\sqrt{3} h^{*'}_7 C'_i \\ \hline -h'_7 C'_i & -\sqrt{3} h^{*'}_7 C'_i & 0 \\ \hline \end{array}$$

f)

$$A'_{3i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h^{*'}_5 C_i & -h^{*'}_6 C_i & -h^{*'}_7 C'_i \\ \hline h^{*'}_6 C_i & \sqrt{3} h'_6 C_i & -\sqrt{3} h'_7 C'_i \\ \hline h^{*'}_7 C'_i & -\sqrt{3} h'_7 C'_i & 0 \\ \hline \end{array}$$

g)

$$A_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h'_5 C_2 & d'_3 Q + h'_6 C_2 & \sqrt{\frac{1}{2}} d'_3 Q + h'_7 C'_2 \\ \hline d'_3 Q - h'_6 C_2 & \sqrt{3} h^{*'}_6 C_2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h^{*'}_7 C'_2 \\ \hline \sqrt{\frac{1}{2}} d'_3 Q - h'_7 C''_2 & \sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h^{*'}_7 C''_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

h)

$$A'_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h^{*'}_5 C_2 & d'_3 Q - h^{*'}_6 C_2 & \sqrt{\frac{1}{2}} d'_3 Q - h^{*'}_7 C''_2 \\ \hline d^{*'}_3 Q + h^{*'}_6 C_2 & \sqrt{3} h'_6 C_2 & \sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h'_7 C''_2 \\ \hline \sqrt{\frac{1}{2}} d^{*'}_3 Q + h^{*'}_7 C'_2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h'_7 C'_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

i)

$$A_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h'_5 C_2 & -d'_3 Q + h'_6 C_2 & -\sqrt{\frac{1}{2}} d'_3 Q + h'_7 C''_2 \\ \hline -d'_3 Q - h'_6 C_2 & \sqrt{3} h'_6 C_2 & \sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h'_7 C''_2 \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{2}} d'_3 Q - h'_7 C'_2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h'_7 C'_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

j)

$$A'_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline h'_5 C_2 & -d'_3 Q - h'_6 C_2 & -\sqrt{\frac{1}{2}} d'_3 Q - h'_7 C'_2 \\ \hline -d'_3 Q + h'_6 C_2 & \sqrt{3} h'_6 C_2 & -\sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h'_7 C'_2 \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{2}} d'_3 Q + h'_7 C''_2 & \sqrt{\frac{3}{2}} d'_3 Q - \sqrt{3} h'_7 C''_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

k)

$$A_{6i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -h'_1 C_i & h'_2 C_i & h'_3 C_i \\ \hline h'_2 C_i & -3h'_1 C_i & h'_4 C_i \\ \hline h'_3 C_i & -h'_4 C_i & 0 \\ \hline \end{array}$$

l)

$$A_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline d'_1 Q - h'_1 C_2 & d'_2 Q + h'_2 C_2 & -\sqrt{2} d'_2 Q + h'_3 C'_2 \\ \hline -d'_2 Q + h'_2 C_2 & -d'_1 Q - 3h'_1 C_2 & -\sqrt{2} d'_1 Q + h'_4 C'_2 \\ \hline \sqrt{2} d'_2 Q + h'_3 C''_2 & -\sqrt{2} d'_1 Q - h'_4 C''_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

m)

$$A'_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -d'_1 Q - h'_1 C_2 & -d'_2 Q + h'_2 C_2 & \sqrt{2} d'_2 Q + h'_3 C''_2 \\ \hline d'_2 Q + h'_2 C_2 & d'_1 Q - 3h'_1 C_2 & \sqrt{2} d'_1 Q + h'_4 C''_2 \\ \hline -\sqrt{2} d'_2 Q + h'_3 C'_2 & \sqrt{2} d'_1 Q - h'_4 C'_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

n)

$$B_{1i} = \begin{array}{|c|} \hline l_1^{*'} G_i + n_1^{*'} N_{2i} \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{3}} l_1^{*'} G_i + \sqrt{3} n_1^{*'} N_{2i} \\ \hline \sqrt{\frac{2}{3}} l_1^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

o)

$$B_{2i} = \begin{array}{|c|} \hline -l_1^{*'} G_i - n_1^{*'} N_{2i} \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{3}} l_1^{*'} G_i + \sqrt{3} n_1^{*'} N_{2i} \\ \hline \sqrt{\frac{2}{3}} l_1^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

p)

$$B_{3i} = \begin{array}{|c|} \hline n_2^{*'} N_{2i} \\ \hline -l_2^{*'} G_i - n_3^{*'} N_{2i} \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{2}} l_2^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

q)

$$B_{4i} = \begin{array}{|c|} \hline n_2^{*'} N_{2i} \\ \hline -l_2^{*'} G_i + n_3^{*'} N_{2i} \\ \hline -\sqrt{\frac{1}{2}} l_2^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

r)

$$B'_{1i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline l_1^{*'} G_i + n_1^{*'} N_{2i} & -\sqrt{\frac{1}{3}} l_1^{*'} G_i + \sqrt{3} n_1^{*'} N_{2i} & \sqrt{\frac{2}{3}} l_1^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

s)

$$B'_{2i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -l_1^{*'} G_i - n_1^{*'} N_{2i} & -\sqrt{\frac{1}{3}} l_1^{*'} G_i + \sqrt{3} n_1^{*'} N_{2i} & \sqrt{\frac{2}{3}} l_1^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

t)

$$B'_{3i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline n_2^{*'} N_{2i} & l_2^{*'} G_i + n_3^{*'} N_{2i} & \sqrt{\frac{1}{2}} l_2^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

u)

$$B'_{4i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline n_2^{*'} N_{2i} & l_2^{*'} G_i + n_3^{*'} N_{2i} & \sqrt{\frac{1}{2}} l_2^{*'} G_i \\ \hline \end{array}$$

gdzie $i = 1, 2$; definicje parametrów zawierają dodatek A
i tabela 12

TABELA 11.a) Macierz prędkości (2.2) dla części hamiltonianu (1.27) indukowanej przez warping;
b)+1) wyjaśnienia symboli użytych w a).

a)

$$\frac{\partial H_W}{\partial k} =$$

A_{11}	0	A_2	A_{31}	0	A_4
0	0	0	0	0	0
A'_2	0	A_{10}	A_5	0	A_{30}
A'_{31}	0	A'_5	A_{61}	0	A_7
0	0	0	0	0	0
A'_4	0	A'_{30}	A'_7	0	A_{60}

b)

$$A_{1i} =$$

$w'_1 \gamma_i^+$	$w'_2 \gamma_i^-$	$-\sqrt{2} w'_2 \gamma_i^-$
$w_2^{*-} \gamma_i^-$	$-w'_1 \gamma_i^+$	$-\sqrt{2} w'_1 \gamma_i^+$
$-\sqrt{2} w_2^{*-} \gamma_i^-$	$-\sqrt{2} w'_1 \gamma_i^+$	0

c)

$$A_2 =$$

$w'_1 \gamma_2^+$	$w'_2 \gamma_2^-$	$-\sqrt{2} w'_2 \gamma_2^-$
$w_2^{*-} \gamma_2^-$	$-w'_1 \gamma_2^+$	$-\sqrt{2} w'_1 \gamma_2^+$
$-\sqrt{2} w_2^{*-} \gamma_2^-$	$-\sqrt{2} w'_1 \gamma_2^+$	0

d)

$A'_2 =$

$w'_1 \gamma_2^+$	$w'_2 \gamma_2^-$	$-\sqrt{2} w'_2 \gamma_2^{--}$
$w_2^{*-'} \gamma_2^-$	$-w'_1 \gamma_2^+$	$-\sqrt{2} w'_1 \gamma_2^{+-}$
$-\sqrt{2} w_2^{*-'} \gamma_2^{--}$	$-\sqrt{2} w'_1 \gamma_2^{+-}$	0

e)

$A_{3i} =$

0	$w'_3 \gamma_{3i}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w'_3 \gamma'_{3i}$
$w'_3 \gamma_{3i}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{3i}$
$\sqrt{\frac{1}{2}} w'_3 \gamma'_{3i}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{3i}$	0

f)

$A_4 =$

0	$w'_3 \gamma_{32}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w'_3 \gamma'_{32}$
$w'_3 \gamma_{32}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{32}$
$\sqrt{\frac{1}{2}} w'_3 \gamma'_{32}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{32}$	0

g)

$A'_4 =$

0	$w_3^{*-'} \gamma_{32}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{32}$
$w_3^{*-'} \gamma_{32}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w'_3 \gamma'_{32}$
$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{32}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} w'_3 \gamma'_{32}$	0

h)

$A_5 =$

0	$w'_3 \gamma_{32}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w'_3 \gamma'_{32}$
$w'_3 \gamma_{32}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{32}$
$\sqrt{\frac{1}{2}} w'_3 \gamma'_{32}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*-'} \gamma'_{32}$	0

i)

$A'_5 =$

0	$w_3^{*'} \gamma_{32}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3^{*'} \gamma_{32}$
$w_3^{*'} \gamma_{32}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*'} \gamma_{32}$
$\sqrt{\frac{1}{2}} w_3^{*'} \gamma_{32}''$	$\sqrt{\frac{3}{2}} w_3^{*'} \gamma_{32}''$	0

j)

$A_{6i} =$

$w_1' \gamma_i^+$	$-w_2^{*'} \gamma_i^-$	$\sqrt{2} w_2^{*'} \gamma_i^-$
$-w_2' \gamma_i^-$	$-w_1' \gamma_i^+$	$-\sqrt{2} w_1' \gamma_i^+$
$\sqrt{2} w_2' \gamma_i^-$	$-\sqrt{2} w_1' \gamma_i^+$	0

k)

$A_7 =$

$w_1' \gamma_2^+$	$-w_2^{*'} \gamma_2^-$	$\sqrt{2} w_2^{*'} \gamma_2^-$
$-w_2' \gamma_2^-$	$-w_1' \gamma_2^+$	$-\sqrt{2} w_1' \gamma_2^+$
$\sqrt{2} w_2' \gamma_2^-''$	$-\sqrt{2} w_1' \gamma_2^+''$	0

l)

$A'_7 =$

$w_1' \gamma_2^+$	$-w_2^{*'} \gamma_2^-$	$\sqrt{2} w_2^{*'} \gamma_2^-''$
$-w_2' \gamma_2^-$	$-w_1' \gamma_2^+$	$-\sqrt{2} w_1' \gamma_2^+''$
$\sqrt{2} w_2' \gamma_2^-'$	$-\sqrt{2} w_1' \gamma_2^+'$	0

gdzie $i = 1, 2$; definicje parametrów zawierają dodatek A oraz tabele 7 i 12.

TABELA 12. Definicje niektórych parametrów występujących w tabelach 10 i 11.

	$A'_+ (\sigma_R)$	$A'_3 (\pi)$
d'_1	$-\alpha_1/4$	$-3\alpha_0/2$
d'_2	$-\sqrt{3}\alpha_3/4$	$\alpha_2/2\sqrt{3}$
$d_2^{*,*}$	$-\alpha_1^*/4\sqrt{3}$	$d_2^{*,*}$
d'_3	$\alpha_2/2\sqrt{3}$	$\alpha_1/\sqrt{3}$
$d_3^{*,*}$	$-\sqrt{3}\alpha_0/2$	$d_3^{*,*}$
h'_1	$\sqrt{3}\alpha_1/8$	0
h'_2	$-3\alpha_3/8$	$-\alpha_2/4$
$h_2^{*,*}$	$5\alpha_1^*/8$	$h_2^{*,*}$
h'_3	$-3\alpha_3/4\sqrt{2}$	$\alpha_2/4\sqrt{2}$
$h_3^{*,*}$	$-\alpha_1^*/4\sqrt{2}$	$h_3^{*,*}$
h'_4	$\sqrt{3}\alpha_1/4\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}\alpha_0/4\sqrt{2}$
h'_5	0	$3\sqrt{3}\alpha_3/8$
$h_5^{*,*}$	$\sqrt{3}\alpha_2^*$	$h_5^{*,*}$
h'_6	$\alpha_2/4$	$-\alpha_1/8$
$h_6^{*,*}$	$-3\alpha_0/2$	$h_6^{*,*}$
h'_7	$-\alpha_2/4\sqrt{2}$	$-\alpha_1/4\sqrt{2}$
$h_7^{*,*}$	$-3\alpha_0/4\sqrt{2}$	$h_7^{*,*}$
l'_1	$\sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_1 k_+ - \alpha_1^* k_- + 2\alpha_0 k_3)$	$\sqrt{2}(\alpha_0 k_+ + \alpha_2^* k_- + 6\alpha_0 k_3)$
$l_1^{*,*}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}(3\alpha_3^* k_+ - \alpha_1 k_- + 2\alpha_2 k_3)$	$l_1^{*,*}$
l'_2	$-\sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha_2 k_+ - 3\alpha_0 k_- + 2\alpha_1 k_3)$	$-2\sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha_1 k_+ - \alpha_1^* k_- + 6\alpha_0 k_3)$

TABELA 12.c.d.

	$A'_+(\sigma_R)$	$A'_3(\pi)$
n'_1	$\frac{1}{4}(3\alpha_1 k_+ - \alpha_1^* k_- + 12\alpha_0 k_3)$	$3\alpha_0 k_+ + \alpha_1^* k_3$
$n_1^{*'}$	$\frac{1}{4}(3\alpha_3^* k_+ - \alpha_1 k_-)$	$n_1^{*'}$
n'_2	$\frac{1}{2}(\alpha_2 k_- - 3\alpha_3 k_3)$	$\frac{1}{2}(-3\alpha_3 k_+ - 3\alpha_1 k_- + 4\alpha_2 k_3)$
$n_2^{*'}$	$\frac{1}{2}(-\alpha_0 k_+ - \alpha_2^* k_- - 3\alpha_1^* k_3)$	$n_2^{*'}$
n'_3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_2 k_+ - \alpha_1 k_3)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 k_+ + \alpha_1^* k_-)$
w'_1	$\frac{3}{8}(\beta_2 k_+ + \beta_0 k_- - 2\beta_1 k_3)$	$-\frac{3}{4}(\beta_1 k_+ + \beta_1^* k_- + 2\beta_0 k_3)$
w'_2	$\frac{\sqrt{3}}{8}(\beta_4 k_+ + \beta_2 k_- - 2\beta_3 k_3)$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}(\beta_3 k_+ + \beta_1 k_- + 2\beta_2 k_3)$
$w_2^{*'}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}(\beta_0 k_+ + \beta_2^* k_- - 2\beta_1^* k_3)$	$w_2^{*'}$
w'_3	$\frac{\sqrt{3}}{4}(-\beta_3 k_+ + \beta_1 k_- + 2\beta_2 k_3)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_2 k_+ + \beta_0 k_- - 2\beta_1 k_3)$
$w_3^{*'}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}(\beta_1 k_+ + \beta_1^* k_- + 2\beta_0 k_3)$	$w_3^{*'}$

gdzie $k_{\pm} = k_1 \pm k_2$; α_i i β_i ($i=1,2,\dots$) określone są w tabelach 6 i 7.

TABELA 13. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych
- przejścia sferyczne.

Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
0	-1	+1	0 (k_H)
-1	0 (k_H)	+2 (k_H)	+1
+1	-2 (k_H)	0 (k_H)	-1

(k_H)- przejście dozwolone dla $k_H \neq 0$

TABELA 14. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
$ \alpha_0 $	0 -1 +1	-1 (k_H) 0 -2	+1 (k_H) +2 0	0 +1 (k_H) -1 (k_H)
$ \alpha_1 $	0 -1 +1	-2; 0 -1; +1 (k_H) -3; -1 (k_H)	0; +2 +1; +3 (k_H) -1; +1 (k_H)	-1; +1 (k_H) 0; +2 (k_H) -2; 0
$ \alpha_2 $	0 -1 +1	-3; +1 (k_H) -2; +2 -4; 0	-1; +3 (k_H) 0; +4 -2; +2	-2; +2 -1; +3 (k_H) -3; +1 (k_H)
$ \alpha_3 $	0 -1 +1	-4; +2 -3; +3 (k_H) -5; +1 (k_H)	-2; +4 -1; +5 (k_H) -3; +3 (k_H)	-3; +3 (k_H) -2; +4 -4; +2

(k_H)- przejście dozwolone dla $k_H \neq 0$

α_i - definicje tabela 6

TABELA 15. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych
- przejścia indukowane warpingiem.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
$ \beta_0 $	0 -1 +1	-1 0 (k_H) -2 (k_H)	+1 +2 (k_H) 0 (k_H)	0 (k_H) +1 -1
$ \beta_1 $	0 -1 +1	-2; 0 (k_H) -1; +1 -3; -1	0; +2 (k_H) +1; +3 -1; +1	-1; +1 0; +2 (k_H) -2; 0 (k_H)
$ \beta_2 $	0 -1 +1	-3; +1 -2; +2 (k_H) -4; 0 (k_H)	-1; +3 0; +4 (k_H) -2; +2 (k_H)	-2; +2 (k_H) -1; +3 -3; +1
$ \beta_3 $	0 -1 +1	-4; +2 (k_H) -3; +3 -5; +1	-2; +4 (k_H) -1; +5 -3; +3	-3; +3 -2; +4 (k_H) -4; +2 (k_H)
$ \beta_4 $	0 -1 +1	-5; +3 -4; +4 (k_H) -6; +2 (k_H)	-3; +5 -2; +6 (k_H) -4; +4 (k_H)	-4; +4 (k_H) -3; +5 -5; +3

(k_H)- przejście dozwolone dla $k_H \neq 0$

β_i - definicje tabela 7

TABELA 16. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych
- przejścia indukowane dwukrotnie brakiem symetrii
inwersyjnej.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
$ \alpha_0 ^2$	0 -1 +1	-1 0 -2 (k_H) (k_H)	+1 +2 0 (k_H) (k_H)	0 +1 -1 (k_H)
$ \alpha_0\alpha_1 $	0 -1 +1	-2; 0 -1; +1 -3; -1 (k_H)	0; +2 +1; +3 -1; +1 (k_H)	-1; +1 0; +2 -2; 0 (k_H) (k_H)
$ \alpha_1 ^2$	0 -1 +1	-3; -1; +1 -2; 0; +2 -4; -2; 0 (k_H) (k_H)	-1; +1; +3 0; +2; +4 -2; 0; +2 (k_H) (k_H)	-2; 0; +2 -1; +1; +3 -3; -1; +1 (k_H)
$ \alpha_0\alpha_2 $	0 -1 +1	-3; +1 -2; +2 -4; 0 (k_H) (k_H)	-1; +3 0; +4 -2; +2 (k_H) (k_H)	-2; +2 -1; +3 -3; +1 (k_H)
$ \alpha_1\alpha_2 $	0 -1 +1	-4; -2; 0; +2 -3; -1; +1; +3 -5; -3; -1; +1 (k_H)	-2; 0; +2; +4 -1; +1; +3; +5 -3; -1; +1; +3 (k_H)	-3; -1; +1; +3 -2; 0; +2; +4 -4; -2; 0; +2 (k_H) (k_H)
$ \alpha_0\alpha_3 $	0 -1 +1	-4; +2 -3; +3 -5; +1 (k_H)	-2; +4 -1; +5 -3; +3 (k_H)	-3; +3 -2; +4 -4; +2 (k_H) (k_H)
$ \alpha_2 ^2$	0 -1 +1	-5; -1; +3 -4; 0; +4 -6; -2; +2 (k_H) (k_H)	-3; +1; +5 -2; +2; +6 -4; 0; +4 (k_H) (k_H)	-4; 0; +4 -3; +1; +5 -5; -1; +3 (k_H)
$ \alpha_1\alpha_3 $	0 -1 +1	-5; -3; +1; +3 -4; -2; +2; +4 -6; -4; 0; +2 (k_H) (k_H)	-3; -1; +3; +5 -2; 0; +4; +6 -4; -2; +2; +4 (k_H) (k_H)	-4; -2; +2; +4 -3; -1; +3; +5 -5; -3; +1; +3 (k_H)
$ \alpha_2\alpha_3 $	0 -1 +1	-6; -2; 0; +4 -5; -1; +1; +5 -7; -3; -1; +3 (k_H)	-4; 0; +2; +6 -3; +1; +3; +7 -5; -1; +1; +5 (k_H)	-5; -1; +1; +5 -4; 0; +2; +6 -6; -2; 0; +4 (k_H) (k_H)
$ \alpha_3 ^2$	0 -1 +1	-7; -1; +5 -6; 0; +6 -8; -2; +4 (k_H) (k_H)	-5; +1; +7 -4; +2; +8 -6; 0; +6 (k_H) (k_H)	-6; 0; +6 -5; +1; +7 -7; -1; +5 (k_H)

(k_H)- przejście dozwolone dla $k_H \neq 0$

α_i - definicje tabela 6

TABELA 17. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych
- przejścia indukowane dwukrotnie warpingiem.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
β_0^2	0 -1 +1	-1 0 -2 (k_H) (k_H)	+1 +2 0 (k_H) (k_H)	0 +1 -1 (k_H)
$ \beta_0\beta_1 $	0 -1 +1	-2; 0 -1; +1 -3; -1 (k_H)	0; +2 +1; +3 -1; +1 (k_H)	-1; +1 0; +2 -2; 0 (k_H) (k_H)
$ \beta_1 ^2$	0 -1 +1	-3; -1; +1 -2; 0; +2 -4; -2; 0 (k_H) (k_H) (k_H)	-1; +1; +3 0; +2; +4 -2; 0; +2 (k_H) (k_H) (k_H)	-2; 0; +2 -1; +1; +3 -3; -1; +1 (k_H)
$ \beta_0\beta_2 $	0 -1 +1	-3; +1 -2; +2 -4; 0 (k_H) (k_H) (k_H)	-1; +3 0; +4 -2; +2 (k_H) (k_H) (k_H)	-2; +2 -1; +3 -3; +1 (k_H)
$ \beta_1\beta_2 $	0 -1 +1	-4; -2; 0; +2 -3; -1; +1; +3 -5; -3; -1; +1 (k_H) (k_H) (k_H)	-2; 0; +2; +4 -1; +1; +3; +5 -3; -1; +1; +3 (k_H) (k_H) (k_H)	-3; -1; +1; +3 -2; 0; +2; +4 -4; -2; 0; +2 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \beta_0\beta_3 $	0 -1 +1	-4; +2 -3; +3 -5; +1 (k_H) (k_H) (k_H)	-2; +4 -1; +5 -3; +3 (k_H) (k_H) (k_H)	-3; +3 -2; +4 -4; +2 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \beta_2 ^2$	0 -1 +1	-5; -1; +3 -4; 0; +4 -6; -2; +2 (k_H) (k_H) (k_H)	-3; +1; +5 -2; +2; +6 -4; 0; +4 (k_H) (k_H) (k_H)	-4; 0; +4 -3; +1; +5 -5; -1; +3 (k_H)
$ \beta_1\beta_3 $	0 -1 +1	-5; -3; +1; +3 -4; -2; +2; +4 -6; -4; 0; +2 (k_H) (k_H) (k_H)	-3; -1; +3; +5 -2; 0; +4; +6 -4; -2; +2; +4 (k_H) (k_H) (k_H)	-4; -2; +2; +4 -3; -1; +3; +5 -5; -3; +1; +3 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \beta_0\beta_4 $	0 -1 +1	-5; +3 -4; +4 -6; +2 (k_H) (k_H) (k_H)	-3; +5 -2; +6 -4; +4 (k_H) (k_H) (k_H)	-4; +4 -3; +5 -5; +3 (k_H)
$ \beta_2\beta_3 $	0 -1 +1	-6; -2; 0; +4 -5; -1; +1; +5 -7; -3; -1; +3 (k_H) (k_H) (k_H)	-4; 0; +2; +6 -3; +1; +3; +7 -5; -1; +1; +5 (k_H) (k_H) (k_H)	-5; -1; +1; +5 -4; 0; +2; +6 -6; -2; 0; +4 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \beta_1\beta_4 $	0 -1 +1	-6; -4; +2; +4 -5; -3; +3; +5 -7; -5; +1; +3 (k_H) (k_H) (k_H)	-4; -2; +4; +6 -3; -1; +5; +7 -5; -3; +3; +5 (k_H) (k_H) (k_H)	-5; -3; +3; +5 -4; -2; +4; +6 -6; -4; +2; +4 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \beta_3 ^2$	0 -1 +1	-7; -1; +5 -6; 0; +6 -8; -2; +4 (k_H) (k_H) (k_H)	-5; +1; +7 -4; +2; +8 -6; 0; +6 (k_H) (k_H) (k_H)	-6; 0; +6 -5; +1; +7 -7; -1; +5 (k_H)

TABELA 17. c.d.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
$ \beta_2 \beta_4 $	0 -1 +1	-7; -3; +1; +5 -6; -2; +2; +6 (k_H) -8; -4; 0; +4 (k_H)	-5; -1; +3; +7 -4; 0; +4; +8 (k_H) -6; -2; +2; +6 (k_H)	-6; -2; +2; +6 (k_H) -5; -1; +3; +7 -7; -3; +1; +5
$ \beta_3 \beta_4 $	0 -1 +1	-8; -2; 0; +6 (k_H) -7; -1; +1; +7 -9; -3; -1; +5	-6; 0; +2; +8 (k_H) -5; +1; +3; +9 -7; -1; +1; +7	-7; -1; +1; +7 -6; 0; +2; +8 (k_H) -8; -2; 0; +6 (k_H)
$ \beta_4 ^2$	0 -1 +1	-9; -1; +7 -8; 0; +8 (k_H) -10; -2; +6 (k_H)	-7; +1; +9 -6; +2; +10 (k_H) -8; 0; +8 (k_H)	-8; 0; +8 (k_H) -7; +1; +9 -9; -1; +7

(k_H)- przejście dozwolone dla $k_H \neq 0$

β_i - definicje tabela 7

TABELA 18. Reguły wyboru dla przejść jednofotonowych
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej
i warpingiem

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
$ \alpha_0\beta_0 $	0 -1 +1	-1 0 -2 (k_H)	+1 +2 0 (k_H)	0 +1 -1 (k_H)
$ \alpha_0\beta_1 $ $ \alpha_1\beta_0 $	0 -1 +1	-2; 0 -1; +1 (k_H) -3; -1 (k_H)	0; +2 +1; +3 (k_H) -1; +1 (k_H)	-1; +1 (k_H) 0; +2 (k_H) -2; 0 (k_H)
$ \alpha_1\beta_1 $	0 -1 +1	-3; -1; +1 (k_H) -2; 0; +2 (k_H) -4; -2; 0 (k_H)	-1; +1; +3 (k_H) 0; +2; +4 (k_H) -2; 0; +2 (k_H)	-2; 0; +2 (k_H) -1; +1; +3 (k_H) -3; -1; +1 (k_H)
$ \alpha_0\beta_2 $ $ \alpha_2\beta_0 $	0 -1 +1	-3; +1 (k_H) -2; +2 (k_H) -4; 0 (k_H)	-1; +3 (k_H) 0; +4 (k_H) -2; +2 (k_H)	-2; +2 (k_H) -1; +3 (k_H) -3; +1 (k_H)
$ \alpha_1\beta_2 $ $ \alpha_2\beta_1 $	0 -1 +1	-4; -2; 0; +2 (k_H) -3; -1; +1; +3 (k_H) -5; -3; -1; +1 (k_H)	-2; 0; +2; +4 (k_H) -1; +1; +3; +5 (k_H) -3; -1; +1; +3 (k_H)	-3; -1; +1; +3 (k_H) -2; 0; +2; +4 (k_H) -4; -2; 0; +2 (k_H)
$ \alpha_0\beta_3 $ $ \alpha_3\beta_0 $	0 -1 +1	-4; +2 (k_H) -3; +3 (k_H) -5; +1 (k_H)	-2; +4 (k_H) -1; +5 (k_H) -3; +3 (k_H)	-3; +3 (k_H) -2; +4 (k_H) -4; +2 (k_H)
$ \alpha_2\beta_2 $	0 -1 +1	-5; -1; +3 (k_H) -4; 0; +4 (k_H) -6; -2; +2 (k_H)	-3; +1; +5 (k_H) -2; +2; +6 (k_H) -4; 0; +4 (k_H)	-4; 0; +4 (k_H) -3; +1; +5 (k_H) -5; -1; +3 (k_H)
$ \alpha_1\beta_3 $ $ \alpha_3\beta_1 $	0 -1 +1	-5; -3; +1; +3 (k_H) -4; -2; +2; +4 (k_H) -6; -4; 0; +2 (k_H)	-3; -1; +3; +5 (k_H) -2; 0; +4; +6 (k_H) -4; -2; +2; +4 (k_H)	-4; -2; +2; +4 (k_H) -3; -1; +3; +5 (k_H) -5; -3; +1; +3 (k_H)
$ \alpha_0\beta_4 $	0 -1 +1	-5; +3 (k_H) -4; +4 (k_H) -6; +2 (k_H)	-3; +5 (k_H) -2; +6 (k_H) -4; +4 (k_H)	-4; +4 (k_H) -3; +5 (k_H) -5; +3 (k_H)
$ \alpha_2\beta_3 $ $ \alpha_3\beta_2 $	0 -1 +1	-6; -2; 0; +4 (k_H) -5; -1; +1; +5 (k_H) -7; -3; -1; +3 (k_H)	-4; 0; +2; +6 (k_H) -3; +1; +3; +7 (k_H) -5; -1; +1; +5 (k_H)	-5; -1; +1; +5 (k_H) -4; 0; +2; +6 (k_H) -6; -2; 0; +4 (k_H)
$ \alpha_1\beta_4 $	0 -1 +1	-6; -4; +2; +4 (k_H) -5; -3; +3; +5 (k_H) -7; -5; +1; +3 (k_H)	-4; -2; +4; +6 (k_H) -3; -1; +5; +7 (k_H) -5; -3; +3; +5 (k_H)	-5; -3; +3; +5 (k_H) -4; -2; +4; +6 (k_H) -6; -4; +2; +4 (k_H)
$ \alpha_3\beta_3 $	0 -1 +1	-7; -1; +5 (k_H) -6; 0; +6 (k_H) -8; -2; +4 (k_H)	-5; +1; +7 (k_H) -4; +2; +8 (k_H) -6; 0; +6 (k_H)	-6; 0; +6 (k_H) -5; +1; +7 (k_H) -7; -1; +5 (k_H)

TABELA 18. c.d.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R Δn	σ_L Δn	π Δn
$ \alpha_2 \beta_4 $	0 -1 +1	-7; -3; +1; +5 (k_H) -6; -2; +2; +6 -8; -4; 0; +4	-5; -1; +3; +7 (k_H) -4; 0; +4; +8 -6; -2; +2; +6	-6; -2; +2; +6 -5; -1; +3; +7 (k_H) -7; -3; +1; +5 (k_H)
$ \alpha_3 \beta_4 $	0 -1 +1	-8; -2; 0; +6 -7; -1; +1; +7 (k_H) -9; -3; -1; +5 (k_H)	-6; 0; +2; +8 -5; +1; +3; +9 (k_H) -7; -1; +1; +7 (k_H)	-7; -1; +1; +7 (k_H) -6; 0; +2; +8 -8; -2; 0; +6

(k_H)- przejście dozwolone dla $k_H \neq 0$

α_i, β_i - definicje tabele 6 i 7

TABELA 19. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych
- przejścia sferyczne.

Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn	$\sigma_R \pi$ Δn	$\sigma_L \pi$ Δn	$\sigma_R \sigma_L$ i $\pi\pi$ Δn
0	-2	+2	-1 (k_H)	+1 (k_H)	0
-1	-1 (k_H)	+3 (k_H)	0	+2 (k_H)	+1 (k_H)
+1	-3 (k_H)	+1 (k_H)	-2	0	-1 (k_H)

(k_H) - przejście dozwolone z $k_H \neq 0$

TABELA 20. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn	$\sigma_R \pi$ Δn	$\sigma_L \pi$ Δn	$\sigma_R \sigma_L$ i $\pi\pi$ Δn
$ \alpha_0 $	0 -1 +1	-2 (k_H) -1 (k_H) -3 (k_H)	+2 (k_H) +3 (k_H) +1	-1 0 (k_H) -2 (k_H)	+1 +2 (k_H) 0 (k_H)	0 (k_H) +1 (k_H) -1
$ \alpha_1 $	0 -1 +1	-3; -1 -2; 0 (k_H) -4; -2 (k_H)	+1; +3 +2; +4 (k_H) 0; +2 (k_H)	-2; 0 (k_H) -1; +1 -3; -1	0; +2 (k_H) +1; +3 -1; +1	-1; +1 0; +2 (k_H) -2; 0 (k_H)
$ \alpha_2 $	0 -1 +1	-4; 0 (k_H) -3; +1 -5; -1	0; +4 (k_H) +1; +5 -1; +3	-3; +1 -2; +2 (k_H) -4; 0 (k_H)	-1; +3 0; +4 (k_H) -2; +2 (k_H)	-2; +2 (k_H) -1; +3 -3; +1
$ \alpha_3 $	0 -1 +1	-5; +1 -4; +2 (k_H) -6; 0 (k_H)	-1; +5 0; +6 (k_H) -2; +4 (k_H)	-4; +2 (k_H) -3; +3 -5; +1	-2; +4 (k_H) -1; +5 -3; +3	-3; +3 -2; +4 (k_H) -4; +2 (k_H)

(k_H) - przejście dozwolone z $k_H \neq 0$

α_i - definicje tabela 6

TABELA 21. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych
- przejścia indukowane warpingiem.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn	$\sigma_R \pi$ Δn	$\sigma_L \pi$ Δn	$\sigma_R \sigma_L$ i $\pi\pi$ Δn
$ \beta_0 $	0 -1 +1	-2 -1 (k_H) -3 (k_H)	+2 +3 (k_H) +1 (k_H)	-1 (k_H) 0 -2	+1 (k_H) +2 0	0 +1 (k_H) -1 (k_H)
$ \beta_1 $	0 -1 +1	-3; -1 (k_H) -2; 0 -4; -2	+1; +3 (k_H) +2; +4 0; +2	-2; 0 -1; +1 (k_H) -3; -1 (k_H)	0; +2 +1; +3 (k_H) -1; +1 (k_H)	-1; +1 (k_H) 0; +2 -2; 0
$ \beta_2 $	0 -1 +1	-4; 0 -3; +1 (k_H) -5; -1 (k_H)	0; +4 +1; +5 (k_H) -1; +3 (k_H)	-3; +1 (k_H) -2; +2 -4; 0	-1; +3 (k_H) 0; +4 -2; +2	-2; +2 -1; +3 (k_H) -3; +1 (k_H)
$ \beta_3 $	0 -1 +1	-5; +1 (k_H) -4; +2 -6; 0	-1; +5 (k_H) 0; +6 -2; +4	-4; +2 -3; +3 (k_H) -5; +1 (k_H)	-2; +4 -1; +5 (k_H) -3; +3 (k_H)	-3; +3 (k_H) -2; +4 -4; +2
$ \beta_4 $	0 -1 +1	-6; +2 -5; +3 (k_H) -7; +1 (k_H)	-2; +6 -1; +7 (k_H) -3; +5 (k_H)	-5; +3 (k_H) -4; +4 -6; +2	-3; +5 (k_H) -2; +6 -4; +4	-4; +4 -3; +5 (k_H) -5; +3 (k_H)

(k_H) - przejście dozwolone z $k_H \neq 0$

β_i - definicje tabela 7

TABELA 22. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych
- przejścia indukowane dwukrotnie brakiem symetrii
inwersyjnej

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn
$ \alpha_0 ^2$	0 -1 +1	-2 -1 (k_H) -3 (k_H)	+2 +3 (k_H) +1 (k_H)
$ \alpha_0 \alpha_1 $	0 -1 +1	-3; -1 (k_H) -2; 0 -4; -2	+1; +3 (k_H) +2; +4 0; +2
$ \alpha_1 ^2$	0 -1 +1	-4; -2; 0 -3; -1; +1 (k_H) -5; -3; -1 (k_H)	0; +2; +4 +5; +3; +1 (k_H) -1; +1; +3 (k_H)
$ \alpha_0 \alpha_2 $	0 -1 +1	-4; 0 -3; +1 (k_H) -5; -1 (k_H)	0; +4 +1; +5 (k_H) -1; +3 (k_H)
$ \alpha_1 \alpha_2 $	0 -1 +1	-5; -3; -1; +1 (k_H) -4; -2; 0; +2 -6; -4; -2; 0	-1; +1; +3; +5 (k_H) 0; +2; +4; +6 -2; 0; +2; +4
$ \alpha_0 \alpha_3 $	0 -1 +1	-5; +1 (k_H) -4; +2 -6; 0	-1; +5 (k_H) 0; +6 -2; +4
$ \alpha_2 ^2$	0 -1 +1	-6; -2; +2 -5; -1; +3 (k_H) -7; -3; +1 (k_H)	-2; +2; +6 -1; +3; +7 (k_H) -3; +1; +5 (k_H)
$ \alpha_1 \alpha_3 $	0 -1 +1	-6; -4; 0; +2 -5; -3; +1; +3 (k_H) -7; -5; -1; +1 (k_H)	-2; 0; +4; +6 -1; +1; +5; +7 (k_H) -3; -1; +3; +5 (k_H)
$ \alpha_2 \alpha_3 $	0 -1 +1	-7; -3; -1; +3 (k_H) -6; -2; 0; +4 -8; -4; -2; +2	-3; +1; +3; +7 (k_H) -2; +2; +4; +8 -4; 0; +2; +6
$ \alpha_3 ^2$	0 -1 +1	-8; -2; +4 -7; -1; +5 (k_H) -9; -3; +3 (k_H)	-4; +2; +8 -3; +3; +9 (k_H) -5; +1; +7 (k_H)

TABELA 22. c.d.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R^π Δn	σ_L^π Δn	$\sigma_R \sigma_L^i \pi \pi$ Δn
$ \alpha_0 ^2$	0 -1 +1	-1 0 -2 (k_H)	+1 +2 0 (k_H)	0 +1 -1 (k_H) (k_H)
$ \alpha_0 \alpha_1 $	0 -1 +1	-2; 0 -1; +1 (k_H) -3; -1 (k_H)	0; +2 +1; +3 (k_H) -1; +1 (k_H)	-1; +1 (k_H) 0; +2 -2; 0
$ \alpha_1 ^2$	0 -1 +1	-3; -1; +1 (k_H) -2; 0; +2 -4; -2; 0	-1; +1; +3 (k_H) 0; +2; +4 -2; 0; +2	-2; 0; +2 -1; +1; +3 (k_H) -3; -1; +1 (k_H)
$ \alpha_0 \alpha_2 $	0 -1 +1	-3; +1 (k_H) -2; +2 -4; 0	-1; +3 (k_H) 0; +4 -2; +2	-2; +2 -1; +3 (k_H) -3; +1 (k_H)
$ \alpha_1 \alpha_2 $	0 -1 +1	-4; -2; 0; +2 -3; -1; +1; +3 (k_H) -5; -3; -1; +1 (k_H)	-2; 0; +2; +4 -1; +1; +3; +5 (k_H) -3; -1; +1; +3 (k_H)	-3; -1; +1; +3 (k_H) -2; 0; +2; +4 -4; -2; 0; +2
$ \alpha_0 \alpha_3 $	0 -1 +1	-4; +2 -3; +3 (k_H) -5; +1 (k_H)	-2; +4 -1; +5 (k_H) -3; +3 (k_H)	-3; +3 (k_H) -2; +4 -4; +2
$ \alpha_2 ^2$	0 -1 +1	-5; -1; +3 (k_H) -4; 0; +4 -6; -2; +2	-3; +1; +5 (k_H) -2; +2; +6 -4; 0; +4	-4; 0; +4 -3; +1; +5 (k_H) -5; -1; +3 (k_H)
$ \alpha_1 \alpha_3 $	0 -1 +1	-5; -3; +1; +3 (k_H) -4; -2; +2; +4 -6; -4; 0; +2	-3; -1; +3; +5 (k_H) -2; 0; +4; +6 -4; -2; +2; +4	-4; -2; +2; +4 -3; -1; +3; +5 (k_H) -5; -3; +1; +3 (k_H)
$ \alpha_2 \alpha_3 $	0 -1 +1	-6; -2; 0; +4 -5; -1; +1; +5 (k_H) -7; -3; -1; +3 (k_H)	-4; 0; +2; +6 -3; +1; +3; +7 (k_H) -5; -1; +1; +5 (k_H)	-5; -1; +1; +5 (k_H) -4; 0; +2; +6 -6; -2; 0; +4
$ \alpha_3 ^2$	0 -1 +1	-7; -1; +5 (k_H) -6; 0; +6 -8; -2; +4	-5; +1; +7 (k_H) -4; +2; +8 -6; 0; +6	-6; 0; +6 -5; +1; +7 (k_H) -7; -1; +5 (k_H)

 (k_H) - przejście dozwolone z $k_H \neq 0$ α_i - definicje tabela 6

TABELA 23. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych
- przejścia indukowane warpingiem.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn
$ \beta_0 ^2$	0 -1 +1	-2 -1 (k_H) -3 (k_H)	+2 +3 (k_H) +1 (k_H)
$ \beta_0 \beta_1 $	0 -1 +1	-3; -1 (k_H) -2; 0 -4; -2	+1; +3 (k_H) +2; +4 0; +2
$ \beta_1 ^2$	0 -1 +1	-4; -2; 0 -3; -1; +1 (k_H) -5; -3; -1 (k_H)	0; +2; +4 +5; +3; +1 (k_H) -1; +1; +3 (k_H)
$ \beta_0 \beta_2 $	0 -1 +1	-4; 0 -3; +1 (k_H) -5; -1 (k_H)	0; +4 +1; +5 (k_H) -1; +3 (k_H)
$ \beta_1 \beta_2 $	0 -1 +1	-5; -3; -1; +1 (k_H) -4; -2; 0; +2 -6; -4; -2; 0	-1; +1; +3; +5 (k_H) 0; +2; +4; +6 -2; 0; +2; +4
$ \beta_0 \beta_3 $	0 -1 +1	-5; +1 (k_H) -4; +2 -6; 0	-1; +5 (k_H) 0; +6 -2; +4
$ \beta_2 ^2$	0 -1 +1	-6; -2; +2 -5; -1; +3 (k_H) -7; -3; +1 (k_H)	-2; +2; +6 -1; +3; +7 (k_H) -3; +1; +5 (k_H)
$ \beta_1 \beta_3 $	0 -1 +1	-6; -4; 0; +2 -5; -3; +1; +3 (k_H) -7; -5; -1; +1 (k_H)	-2; 0; +4; +6 -1; +1; +5; +7 (k_H) -3; -1; +3; +5 (k_H)
$ \beta_0 \beta_4 $	0 -1 +1	-6; +2 -5; +3 (k_H) -7; +1 (k_H)	-2; +6 -1; +7 (k_H) -3; +5 (k_H)
$ \beta_2 \beta_3 $	0 -1 +1	-7; -3; -1; +3 (k_H) -6; -2; 0; +4 -8; -4; -2; +2	-3; +1; +3; +7 (k_H) -2; +2; +4; +8 -4; 0; +2; +6
$ \beta_1 \beta_4 $	0 -1 +1	-7; -5; +1; +3 (k_H) -6; -4; +2; +4 -8; -6; 0; +2	-3; -1; +5; +7 (k_H) -2; 0; +6; +8 -4; -2; +4; +6
$ \beta_3 ^2$	0 -1 +1	-8; -2; +4 -7; -1; +5 (k_H) -9; -3; +3 (k_H)	-4; +2; +8 -3; +3; +9 (k_H) -5; +1; +7 (k_H)

TABELA 23. c.d.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn
$ \beta_2 \beta_4 $	0 -1 +1	-8; -4; 0; +4 -7; -3; +1; +5 (k_H) -9; -5; -1; +3 (k_H)	-4; 0; +4; +8 -3; +1; +5; +9 (k_H) -5; -1; +3; +7 (k_H)
$ \beta_3 \beta_4 $	0 -1 +1	-9; -3; -1; +5 (k_H) -8; -2; 0; +6 -10; -4; -2; +4	-5; +1; +3; +9 (k_H) -4; +2; +4; +10 -6; 0; +2; +8
$ \beta_4 ^2$	0 -1 +1	-10; -2; +6 -9; -1; +7 (k_H) -11; -3; +5 (k_H)	-6; +2; +10 -5; +3; +11 (k_H) -7; +1; +9 (k_H)

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \pi$ Δn	$\sigma_L \pi$ Δn	$\sigma_R \sigma_L i \pi \pi$ Δn
$ \beta_0 ^2$	0 -1 +1	-1 (k_H) 0 -2	+1 (k_H) +2 0	0 +1 (k_H) -1 (k_H)
$ \beta_0 \beta_1 $	0 -1 +1	-2; 0 -1; +1 (k_H) -3; -1 (k_H)	0; +2 +1; +3 (k_H) -1; +1 (k_H)	-1; +1 (k_H) 0; +2 -2; 0
$ \beta_1 ^2$	0 -1 +1	-3; -1; +1 (k_H) -2; 0; +2 -4; -2; 0	-1; +1; +3 (k_H) 0; +2; +4 -2; 0; +2	-2; 0; +2 -1; +1; +3 (k_H) -3; -1; +1 (k_H)
$ \beta_0 \beta_2 $	0 -1 +1	-3; +1 (k_H) -2; +2 -4; 0	-1; +3 (k_H) 0; +4 -2; +2	-2; +2 -1; +3 (k_H) -3; +1 (k_H)
$ \beta_1 \beta_2 $	0 -1 +1	-4; -2; 0; +2 -3; -1; +1; +3 (k_H) -5; -3; -1; +1 (k_H)	-2; 0; +2; +4 -1; +1; +3; +5 (k_H) -3; -1; +1; +3 (k_H)	-3; -1; +1; +3 (k_H) -2; 0; +2; +4 -4; -2; 0; +2
$ \beta_0 \beta_3 $	0 -1 +1	-4; +2 -3; +3 (k_H) -5; +1 (k_H)	-2; +4 -1; +5 (k_H) -3; +3 (k_H)	-3; +3 (k_H) -2; +4 -4; +2
$ \beta_2 ^2$	0 -1 +1	-5; -1; +3 (k_H) -4; 0; +4 -6; -2; +2	-3; +1; +5 (k_H) -2; +2; +6 -4; 0; +4	-4; 0; +4 -3; +1; +5 (k_H) -5; -1; +3 (k_H)
$ \beta_1 \beta_3 $	0 -1 +1	-5; -3; +1; +3 (k_H) -4; -2; +2; +4 -6; -4; 0; +2	-3; -1; +3; +5 (k_H) -2; 0; +4; +6 -4; -2; +2; +4	-4; -2; +2; +4 -3; -1; +3; +5 (k_H) -5; -3; +1; +3 (k_H)

TABELA 23. c.d.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	σ_R^π Δn	σ_L^π Δn	$\sigma_R \sigma_L^i \pi\pi$ Δn
$ \beta_0 \beta_4 $	0 -1 +1	-5; +3 (k_H) -4; +4 -6; +2	-3; +5 (k_H) -2; +6 -4; +4	-4; +4 -3; +5 (k_H) -5; +3 (k_H)
$ \beta_2 \beta_3 $	0 -1 +1	-6; -2; 0; +4 -5; -1; +1; +5 (k_H) -7; -3; -1; +3 (k_H)	-4; 0; +2; +6 -3; +1; +3; +7 (k_H) -5; -1; +1; +5 (k_H)	-5; -1; +1; +5 (k_H) -4; 0; +2; +6 -6; -2; 0; +4
$ \beta_1 \beta_4 $	0 -1 +1	-6; -4; +2; +4 -5; -3; +3; +5 (k_H) -7; -5; +1; +3 (k_H)	-4; -2; +4; +6 -3; -1; +5; +7 (k_H) -5; -3; +3; +5 (k_H)	-5; -3; +3; +5 (k_H) -4; -2; +4; +6 -6; -4; +2; +4
$ \beta_3 ^2$	0 -1 +1	-7; -1; +5 (k_H) -6; 0; +6 -8; -2; +4	-5; +1; +7 (k_H) -4; +2; +8 -6; 0; +6	-6; 0; +6 -5; +1; +7 (k_H) -7; -1; +5 (k_H)
$ \beta_2 \beta_4 $	0 -1 +1	-7; -3; +1; +5 (k_H) -6; -2; +2; +6 -8; -4; 0; +4	-5; -1; +3; +7 (k_H) -4; 0; +4; +8 -6; -2; +2; +6	-6; -2; +2; +6 -5; -1; +3; +7 (k_H) -7; -3; +1; +5 (k_H)
$ \beta_3 \beta_4 $	0 -1 +1	-8; -2; 0; +6 -7; -1; +1; +7 (k_H) -9; -3; -1; +5 (k_H)	-6; 0; +2; +8 -5; +1; +3; +9 (k_H) -7; -1; +1; +7 (k_H)	-7; -1; +1; +7 (k_H) -6; 0; +2; +8 -8; -2; 0; +6
$ \beta_4 ^2$	0 -1 +1	-9; -1; +7 (k_H) -8; 0; +8 -10; -2; +6	-7; +1; +9 (k_H) -6; +2; +10 -8; 0; +8	-8; 0; +8 -7; +1; +9 (k_H) -9; -1; +7 (k_H)

(k_H) - przejście dozwolone z $k_H \neq 0$

β_i - definicje tabela 7

TABELA 24. Reguły wyboru dla przejść dwufotonowych
- przejścia indukowane brakiem symetrii inwersyjnej
i warpingiem.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn
$ \alpha_0 \beta_0 $	0 -1 +1	-2 -1 -3 (k_H)	+2 +3 +1 (k_H)
$ \alpha_0 \beta_1 $ $ \alpha_1 \beta_0 $	0 -1 +1	-3; -1 -2; 0 -4; -2 (k_H) (k_H)	+1; +3 +2; +4 0; +2 (k_H) (k_H)
$ \alpha_1 \beta_1 $	0 -1 +1	-4; -2; 0 -3; -1; +1 -5; -3; -1 (k_H)	0; +2; +4 +5; +3; +1 -1; +1; +3 (k_H)
$ \alpha_0 \beta_2 $ $ \alpha_2 \beta_0 $	0 -1 +1	-4; 0 -3; +1 -5; -1 (k_H)	0; +4 +1; +5 -1; +3 (k_H)
$ \alpha_1 \beta_2 $ $ \alpha_2 \beta_1 $	0 -1 +1	-5; -3; -1; +1 -4; -2; 0; +2 -6; -4; -2; 0 (k_H) (k_H) (k_H)	-1; +1; +3; +5 0; +2; +4; +6 -2; 0; +2; +4 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \alpha_0 \beta_3 $ $ \alpha_3 \beta_0 $	0 -1 +1	-5; +1 -4; +2 -6; 0 (k_H) (k_H) (k_H)	-1; +5 0; +6 -2; +4 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \alpha_2 \beta_2 $	0 -1 +1	-6; -2; +2 -5; -1; +3 -7; -3; +1 (k_H)	-2; +2; +6 -1; +3; +7 -3; +1; +5 (k_H)
$ \alpha_1 \beta_3 $ $ \alpha_3 \beta_1 $	0 -1 +1	-6; -4; 0; +2 -5; -3; +1; +3 -7; -5; -1; +1 (k_H) (k_H) (k_H)	-2; 0; +4; +6 -1; +1; +5; +7 -3; -1; +3; +5 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \alpha_0 \beta_4 $	0 -1 +1	-6; +2 -5; +3 -7; +1 (k_H)	-2; +6 -1; +7 -3; +5 (k_H)
$ \alpha_2 \beta_3 $ $ \alpha_3 \beta_2 $	0 -1 +1	-7; -3; -1; +3 -6; -2; 0; +4 -8; -4; -2; +2 (k_H) (k_H) (k_H)	-3; +1; +3; +7 -2; +2; +4; +8 -4; 0; +2; +6 (k_H) (k_H) (k_H)
$ \alpha_1 \beta_4 $	0 -1 +1	-7; -5; +1; +3 -6; -4; +2; +4 -8; -6; 0; +2 (k_H) (k_H) (k_H)	-3; -1; +5; +7 -2; 0; +6; +8 -4; -2; +4; +6 (k_H) (k_H) (k_H)

TABELA 24. c.d.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \sigma_R$ Δn	$\sigma_L \sigma_L$ Δn
$ \alpha_3 \beta_3 $	0 -1 +1	-8; -2; +4 (k_H) -7; -1; +5 -9; -3; +3	-4; +2; +8 (k_H) -3; +3; +9 -5; +1; +7
$ \alpha_2 \beta_4 $	0 -1 +1	-8; -4; 0; +4 (k_H) -7; -3; +1; +5 -9; -5; -1; +3	-4; 0; +4; +8 (k_H) -3; +1; +5; +9 -5; -1; +3; +7
$ \alpha_3 \beta_4 $	0 -1 +1	-9; -3; -1; +5 -8; -2; 0; +6 (k_H) -10; -4; -2; +4 (k_H)	-5; +1; +3; +9 -4; +2; +4; +10 (k_H) -6; 0; +2; +8 (k_H)

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \pi$ Δn	$\sigma_L \pi$ Δn	$\sigma_R \sigma_L^i \pi \pi$ Δn
$ \alpha_0 \beta_0 $	0 -1 +1	-1 0 (k_H) -2 (k_H)	+1 +2 (k_H) 0 (k_H)	0 (k_H) +1 -1
$ \alpha_0 \beta_1 $ $ \alpha_1 \beta_0 $	0 -1 +1	-2; 0 (k_H) -1; +1 -3; -1	0; +2 (k_H) +1; +3 -1; +1	-1; +1 0; +2 (k_H) -2; 0 (k_H)
$ \alpha_1 \beta_1 $	0 -1 +1	-3; -1; +1 -2; 0; +2 (k_H) -4; -2; 0 (k_H)	-1; +1; +3 0; +2; +4 (k_H) -2; 0; +2 (k_H)	-2; 0; +2 (k_H) -1; +1; +3 -3; -1; +1
$ \alpha_0 \beta_2 $ $ \alpha_2 \beta_0 $	0 -1 +1	-3; +1 -2; +2 (k_H) -4; 0 (k_H)	-1; +3 0; +4 (k_H) -2; +2 (k_H)	-2; +2 (k_H) -1; +3 -3; +1
$ \alpha_1 \beta_2 $ $ \alpha_2 \beta_1 $	0 -1 +1	-4; -2; 0; +2 (k_H) -3; -1; +1; +3 -5; -3; -1; +1	-2; 0; +2; +4 (k_H) -1; +1; +3; +5 -3; -1; +1; +3	-3; -1; +1; +3 -2; 0; +2; +4 (k_H) -4; -2; 0; +2 (k_H)
$ \alpha_0 \beta_3 $ $ \alpha_3 \beta_0 $	0 -1 +1	-4; +2 (k_H) -3; +3 -5; +1	-2; +4 (k_H) -1; +5 -3; +3	-3; +3 -2; +4 (k_H) -4; +2 (k_H)
$ \alpha_2 \beta_2 $	0 -1 +1	-5; -1; +3 -4; 0; +4 (k_H) -6; -2; +2 (k_H)	-3; +1; +5 -2; +2; +6 (k_H) -4; 0; +4 (k_H)	-4; 0; +4 (k_H) -3; +1; +5 -5; -1; +3
$ \alpha_1 \beta_3 $ $ \alpha_3 \beta_1 $	0 -1 +1	-5; -3; +1; +3 -4; -2; +2; +4 (k_H) -6; -4; 0; +2 (k_H)	-3; -1; +3; +5 -2; 0; +4; +6 (k_H) -4; -2; +2; +4 (k_H)	-4; -2; +2; +4 (k_H) -3; -1; +3; +5 -5; -3; +1; +3

TABELA 24. c.d.

$f(\varphi, \theta)$	Δs	$\sigma_R \pi$ Δn	$\sigma_L \pi$ Δn	$\sigma_R \sigma_L i \pi \pi$ Δn
$ \alpha_0 \beta_4 $	0 -1 +1	-5; +3 -4; +4 (k_H) -6; +2 (k_H)	-3; +5 -2; +6 (k_H) -4; +4 (k_H)	-4; +4 (k_H) -3; +5 -5; +3
$ \alpha_2 \beta_3 $ $ \alpha_3 \beta_2 $	0 -1 +1	-6; -2; 0; +4 (k_H) -5; -1; +1; +5 -7; -3; -1; +3	-4; 0; +2; +6 (k_H) -3; +1; +3; +7 -5; -1; +1; +5	-5; -1; +1; +5 -4; 0; +2; +6 (k_H) -6; -2; 0; +4 (k_H)
$ \alpha_1 \beta_4 $	0 -1 +1	-6; -4; +2; +4 (k_H) -5; -3; +3; +5 -7; -5; +1; +3	-4; -2; +4; +6 (k_H) -3; -1; +5; +7 -5; -3; +3; +5	-5; -3; +3; +5 -4; -2; +4; +6 (k_H) -6; -4; +2; +4 (k_H)
$ \alpha_3 \beta_3 $	0 -1 +1	-7; -1; +5 -6; 0; +6 (k_H) -8; -2; +4 (k_H)	-5; +1; +7 -4; +2; +8 (k_H) -6; 0; +6 (k_H)	-6; 0; +6 (k_H) -5; +1; +7 -7; -1; +5
$ \alpha_2 \beta_4 $	0 -1 +1	-7; -3; +1; +5 -6; -2; +2; +6 (k_H) -8; -4; 0; +4 (k_H)	-5; -1; +3; +7 -4; 0; +4; +8 (k_H) -6; -2; +2; +6 (k_H)	-6; -2; +2; +6 (k_H) -5; -1; +3; +7 -7; -3; +1; +5
$ \alpha_3 \beta_4 $	0 -1 +1	-8; -2; 0; +6 (k_H) -7; -1; +1; +7 -9; -3; -1; +5	-6; 0; +2; +8 (k_H) -5; +1; +3; +9 -7; -1; +1; +7	-7; -1; +1; +7 -6; 0; +2; +8 (k_H) -8; -2; 0; +6 (k_H)

(k_H) - przejście dozwolone z $k_H \neq 0$

α_i i β_i - definicje tabele 6 i 7

Tabela 25. Energia jonizacji stanu podstawowego donoru w polu magnetycznym (2.8), dla niektórych wartości γ .

γ	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
0.2	1.200	1.040	1.181	-	-	1.180	1.181	1.181	1.181	1.181
0.5	1.362	1.251	1.394	-	-	-	1.394	1.394	-	1.392
1.0	1.605	1.524	1.659	1.661	1.363	1.662	1.662	1.661	1.662	1.654
2.0	1.995	1.908	2.035	2.041	1.800	2.044	2.045	2.041	2.044	2.024
3.0	2.213	2.191	2.314	-	-	-	2.329	2.324	2.329	2.299
4.0	2.428	2.420	2.541	-	-	-	2.562	2.554	2.562	2.522
5.0	2.608	2.616	2.735	2.750	2.570	2.759	2.761	2.751	2.764	2.713
10.0	3.259	3.474	3.448	3.337	-	-	-	3.476	3.496	3.415
20.0	4.046	4.231	4.351	4.392	4.299	-	-	4.397	4.431	4.303
50.0	5.286	5.755	5.892	5.956	5.932	-	-	5.975	-	5.812
100.0	6.348	7.200	7.367	7.457	7.494	-	-	7.477	7.578	7.247

Obliczenia wykonane przez różnych autorów różnymi metodami.

a - Ekardt [33];

b - Yafet, Keyes i Adams [34];

c - Pokatilov i Rusanov [36];

d - Larsen [38];

e - Altarelli i Lipari [53];

f - Aldrich i Greene [39];

g - Cabib, Fabri i Fiorio [46];

h - Chen, Gil i Mathieu [50];

i - Rösner, Wanner, Herold i Ruden [54] ("exact");

j - praca niniejsza.

Dane a+i za [51].

Tabela 26. Hamiltonian D_{ij} z równania (2.34) (II.3.1)

0	κP_+	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_-$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_-$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$
κP_-	$-\varepsilon_o$	0	0	0	0	0	0
$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_+$	0	$-\varepsilon_o$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	0	0	0
$-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_+$	0	0	$-\varepsilon_o - \Delta_o$	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$	0	0	0
0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$	0	κP_-	$-\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_+$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_+$
0	0	0	0	κP_+	$-\varepsilon_o$	0	0
$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	0	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_-$	0	$-\varepsilon_o$	0
$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_-$	0	0	$-\varepsilon_o - \Delta_o$

Oznaczenia wyjaśnione w tekście rozdziału II

Tabela 27. Różnice energetyczne pomiędzy stanami wzbudzonymi a stanem podstawowym w cm^{-1} dla donoru w polu magnetycznym. Funkcje stanów określone w II.3.3.

stan wzbudzony		1 kGs	10 kGs	30 kGs	50 kGs	70 kGs
InAs						
2p _o		9.09	16.13	26.19	33.81	40.31
pM	M=-3	9.77	13.30	17.16	19.44	21.09
	M=-2	8.96	11.43	14.72	16.84	18.54
	M=-1	7.34	9.11	12.87	16.20	19.34
	M= 1	11.30	48.13	125.79	198.22	266.36
	M= 2	16.92	88.81	234.99	367.52	489.63
	M= 3	21.66	128.17	339.64	527.24	697.46
dM	M=-3	10.94	18.39	28.68	36.67	43.66
	M=-2	10.48	17.88	29.24	38.56	46.99
	M=-1	9.94	18.87	34.91	49.14	62.44
	M= 1	13.91	57.79	147.05	229.22	306.04
	M= 2	18.41	95.08	248.64	387.13	514.43
	M= 3	22.83	133.14	350.29	542.38	716.47
InP						
2p _o			46.26	50.93	56.04	60.94
pM	M=-3	-	53.30	54.88	57.41	59.87
	M=-2	-	49.85	50.13	51.82	53.64
	M=-1	-	42.04	41.20	42.10	43.39
	M= 1	-	52.79	73.36	95.50	117.87
	M= 2	-	71.36	114.33	158.24	201.84
	M= 3	-	85.56	150.95	216.38	280.88
dM	M=-3	-	57.84	63.36	69.08	74.42
	M=-2	-	55.80	60.64	66.05	71.24
	M=-1	-	52.93	57.95	63.95	69.91
	M= 1	-	63.70	90.11	117.32	144.32
	M= 2	-	77.32	124.83	172.43	219.34
	M= 3	-	90.09	159.40	228.00	295.32
InSb						
2p _o		5.37	13.52	24.06	31.92	38.55
pM	M=-3	5.37	9.05	12.36	14.44	16.06
	M=-2	4.76	7.72	10.85	13.12	15.06
	M=-1	3.78	6.87	12.34	17.31	21.97
	M= 1	10.66	72.46	192.13	295.38	387.12
	M= 2	18.47	135.44	349.69	526.86	680.69
	M= 3	25.87	195.80	494.44	734.58	940.33
dM	M=-3	6.55	15.08	26.83	36.32	44.74
	M=-2	6.27	15.58	29.95	42.11	53.10
	M=-1	6.17	15.58	42.16	62.53	81.19
	M= 1	13.04	84.20	218.72	333.60	435.17
	M= 2	19.97	142.79	365.60	549.19	708.35
	M= 3	27.04	201.35	506.07	750.71	960.20

Tabela 27. cd.

stan wzbudzony		10 kGs	30 kGs	50 kGs	70 kGs
GaAs					
2p _o		36.96	43.48	49.68	55.28
pM	M=-3	41.68	44.93	48.23	51.09
	M=-2	38.53	40.41	42.84	45.06
	M=-1	32.04	32.60	34.29	36.07
	M= 1	46.05	74.43	103.70	132.84
	M= 2	66.52	123.83	181.01	237.32
	M= 3	83.61	169.68	254.46	337.51
dM	M=-3	46.19	53.61	60.33	66.28
	M=-2	44.37	51.25	57.82	63.80
	M=-1	42.13	49.63	57.26	64.50
	M= 1	56.13	91.43	126.60	161.11
	M= 2	72.36	134.64	195.90	255.88
	M= 3	88.12	178.33	266.45	352.49
GaSb					
2p _o		18.50	26.77	33.22	38.76
pM	M=-3	18.62	22.94	25.86	28.12
	M=-2	16.56	19.87	22.24	24.13
	M=-1	13.19	15.89	18.30	20.51
	M= 1	35.72	82.73	128.49	173.13
	M= 2	61.49	152.44	239.67	323.88
	M= 3	85.81	220.09	347.64	269.75
dM	M=-3	22.62	31.35	38.04	43.79
	M=-2	21.65	30.55	37.75	44.15
	M=-1	21.22	32.35	42.14	51.26
	M= 1	43.74	99.03	151.92	203.13
	M= 2	66.56	162.95	254.74	343.09
	M= 3	89.80	228.34	359.39	484.63

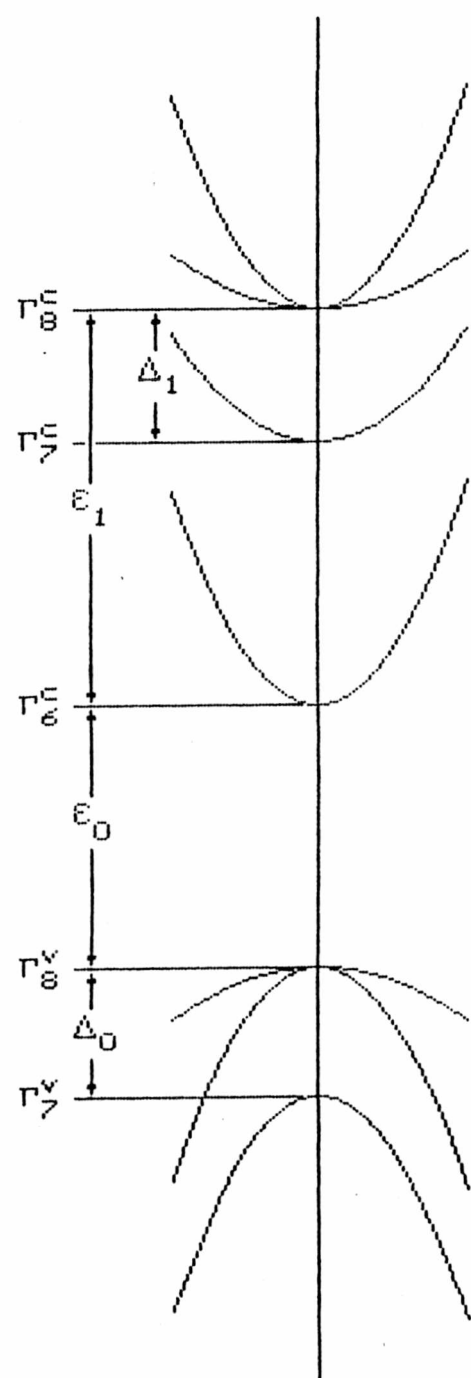
Tabela 28. Parametry pasmowe niektórych związków III-V.

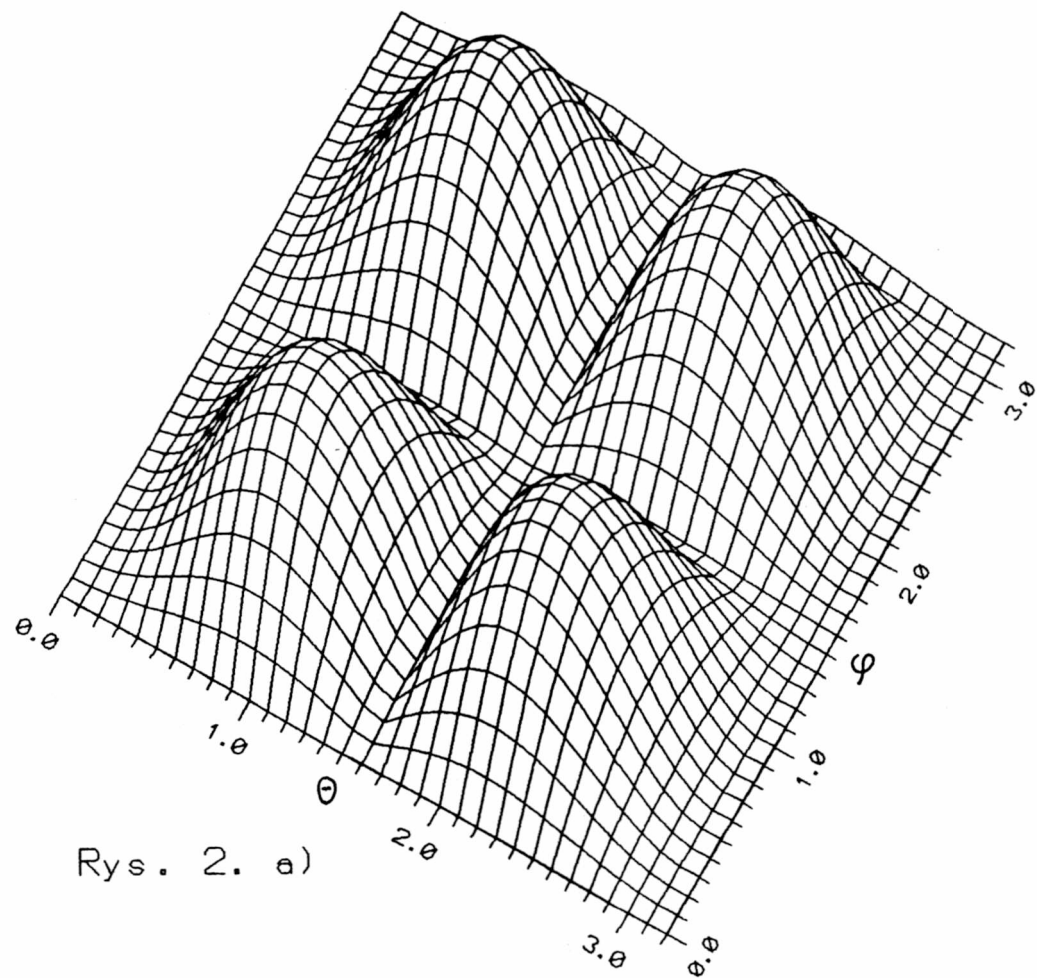
Związek	ϵ_o [meV]	Δ_o [meV]	m/m_o	Ry^* [meV]
InAs	418.0	380.0	0.023	1.4
InP	1423.6	108.0	0.08	7.4
InSb	235.2	803.0	0.0135	0.65
GaAs	1519.2	341.0	0.0665	5.76
GaSb	811.3	754.0	0.0412	2.28

Tabela 29. Hamiltonian D'_{ij} z równania (2.57) (II.3.6)

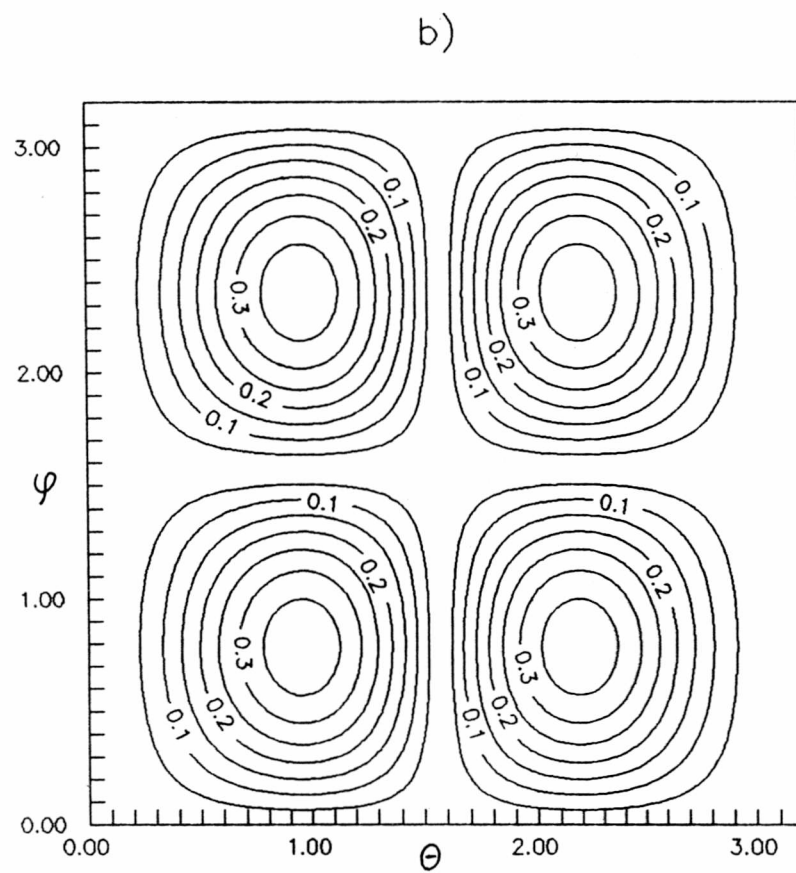
A	κP_+	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_-$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_-$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$
κP_-	$B-\varepsilon_o$	0	0	0	0	0	0
$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_+$	0	$B-\varepsilon_o$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	0	0	0
$-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_+$	0	0	$B-\varepsilon_o-\Delta_o$	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$	0	0	0
0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$	A	κP_-	$-\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_+$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_+$
0	0	0	0	κP_+	$B-\varepsilon_o$	0	0
$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_z$	0	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_-$	0	$B-\varepsilon_o$	0
$\sqrt{\frac{1}{3}}\kappa P_z$	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa P_-$	0	0	$B-\varepsilon_o-\Delta_o$

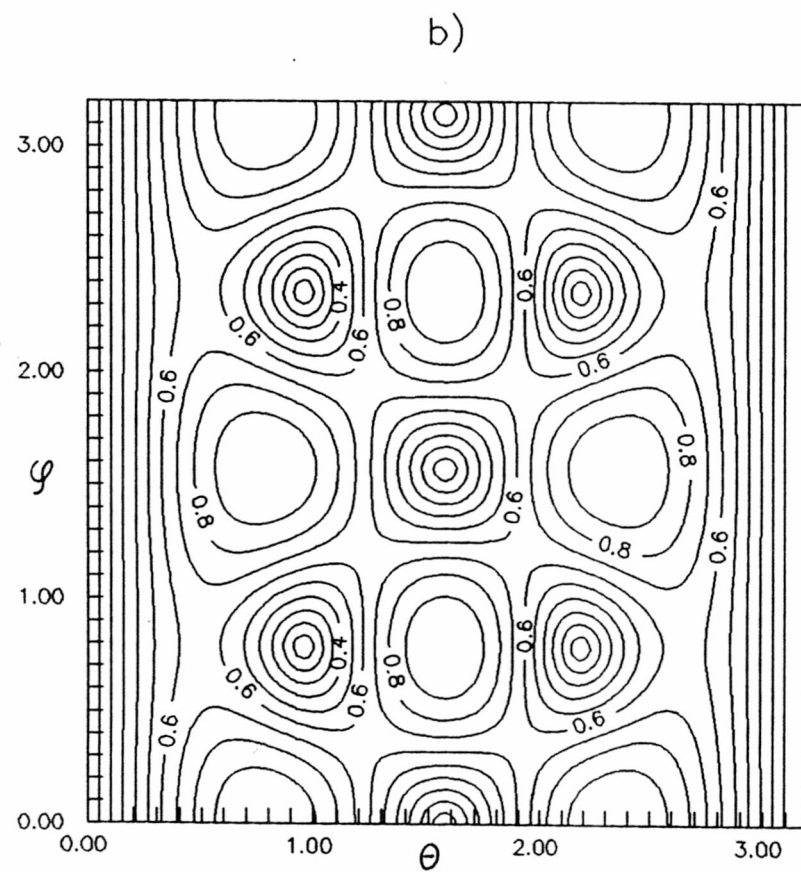
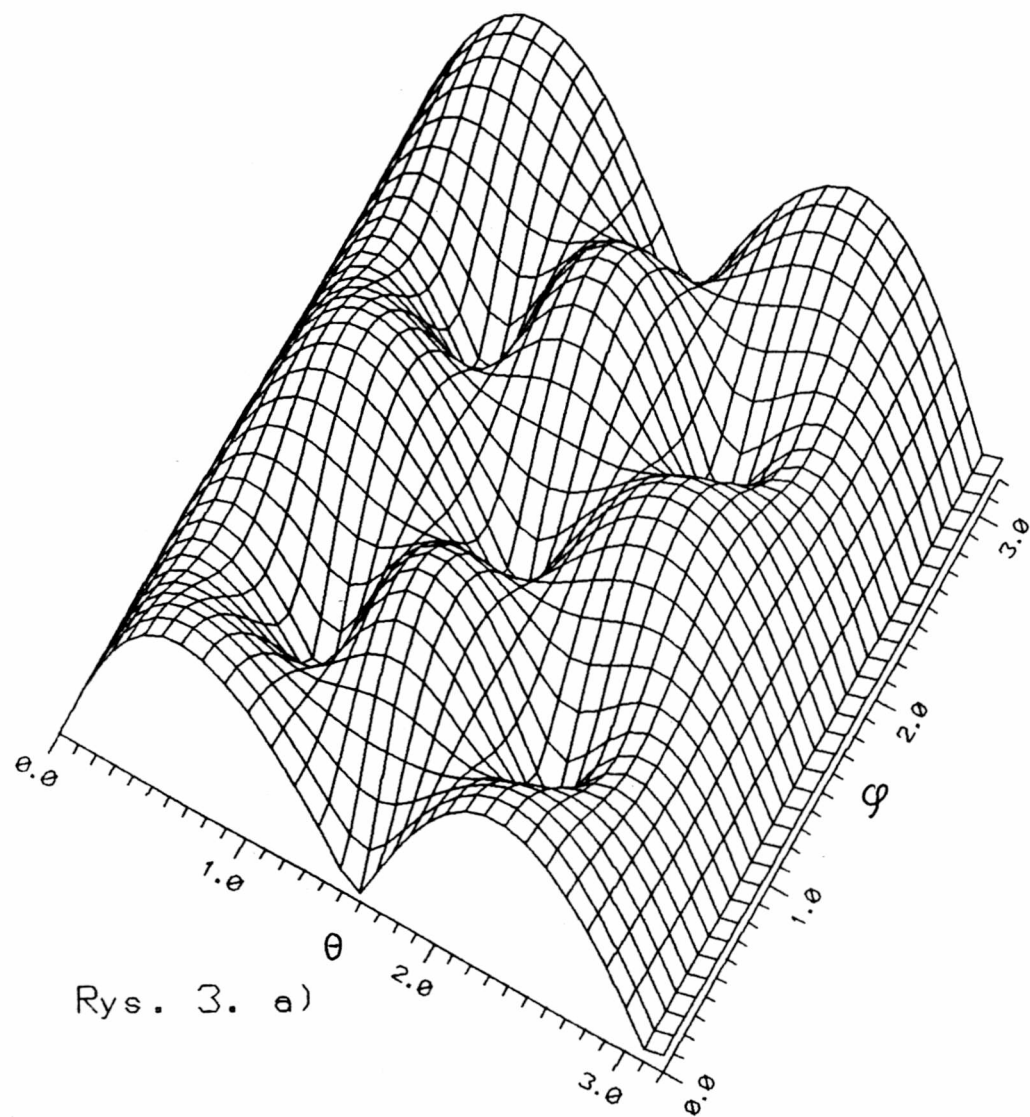
Oznaczenia wyjaśnione w tekście rozdziału II

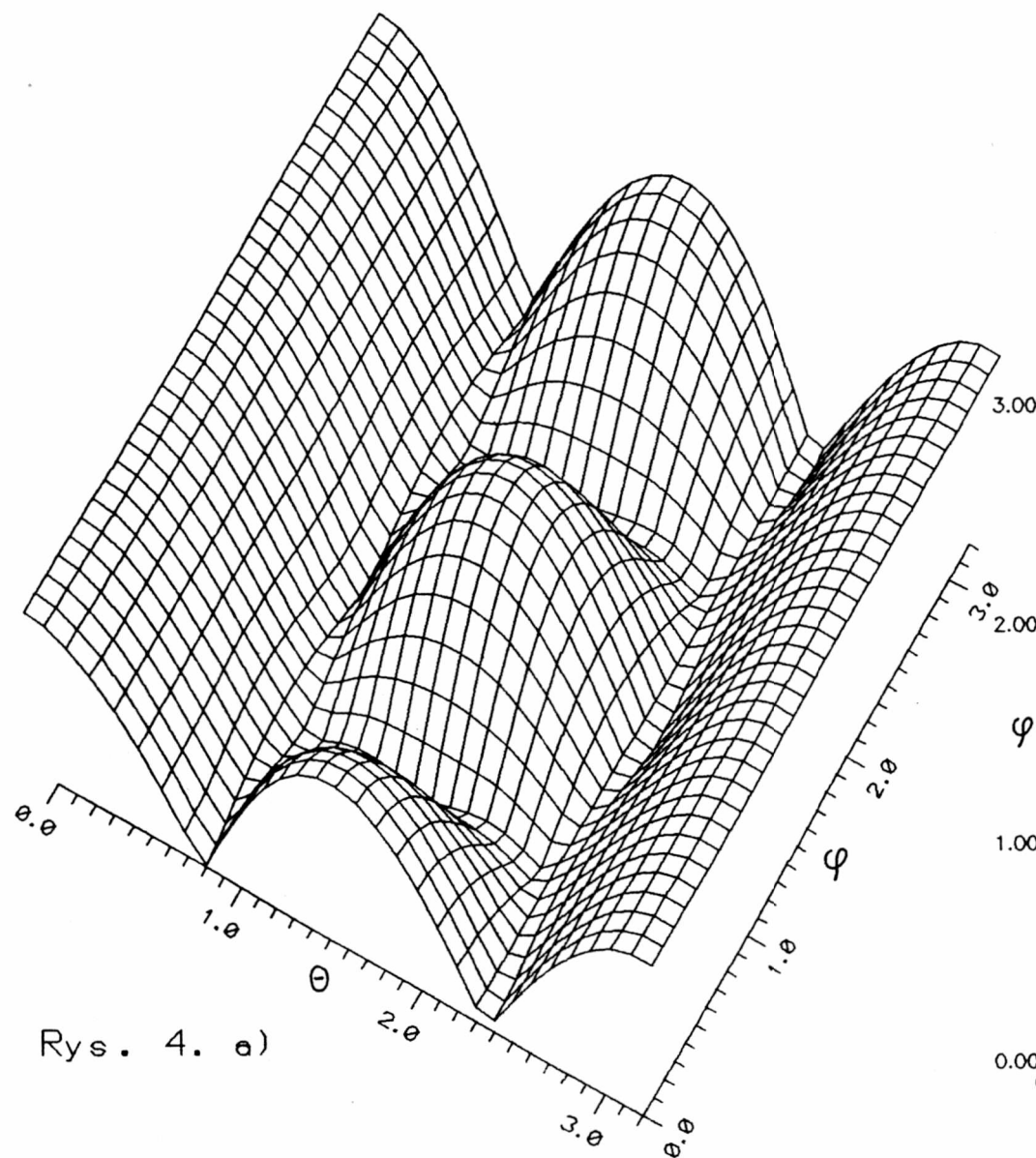




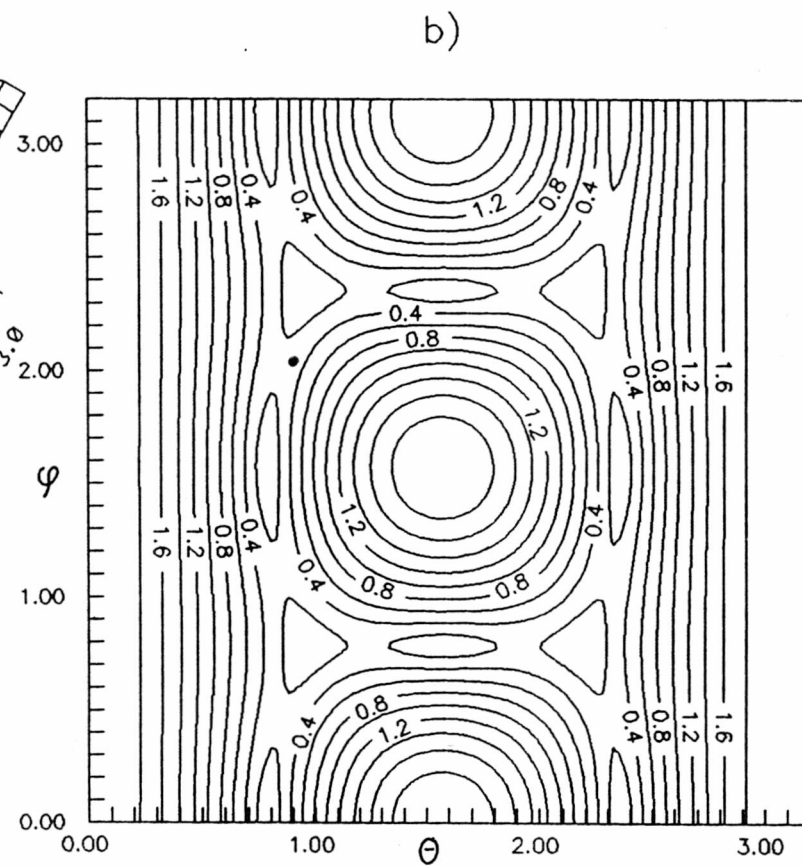
Rys. 2. a)

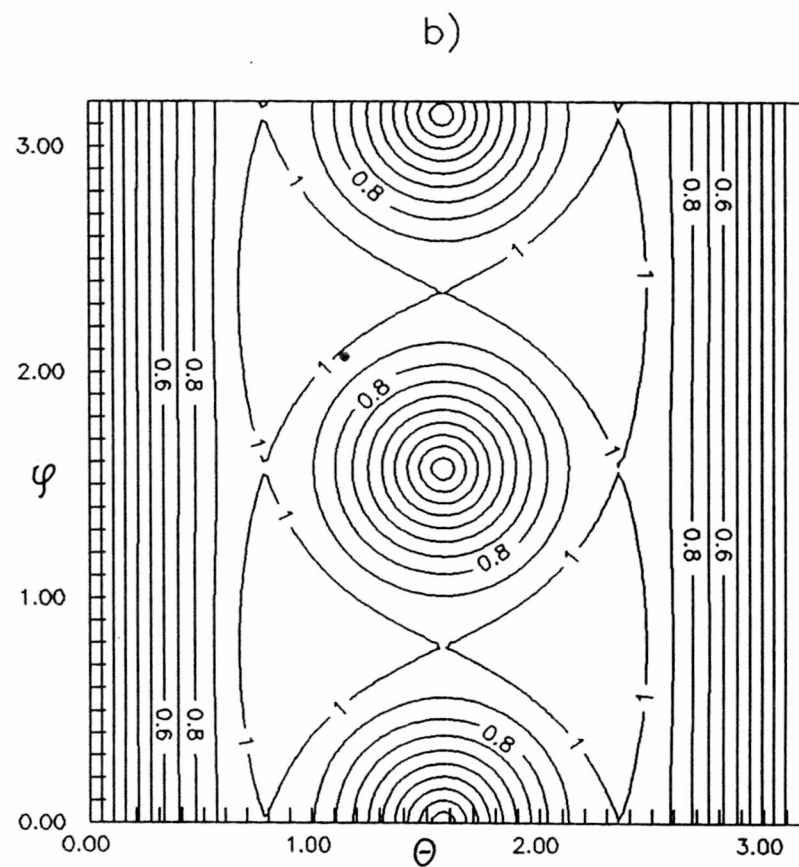
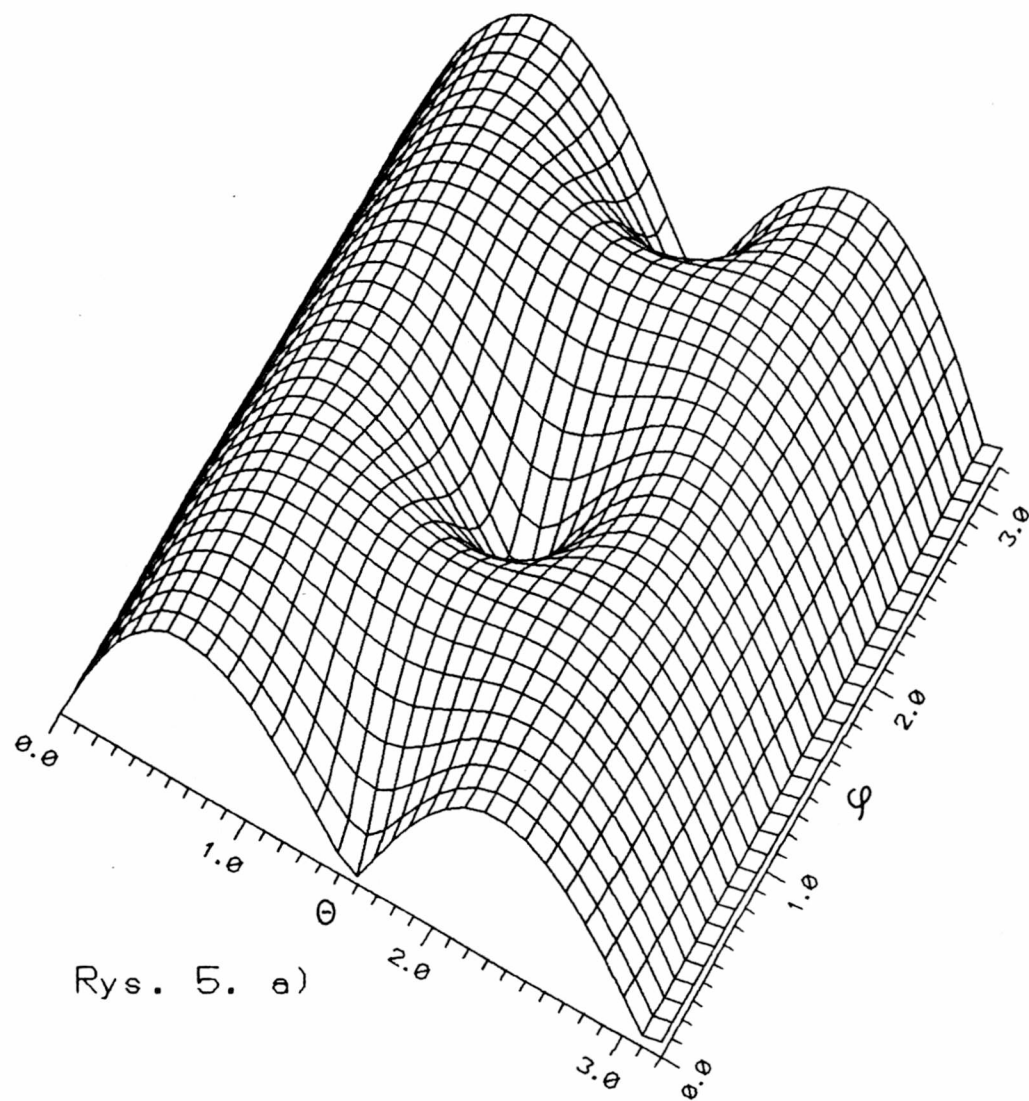


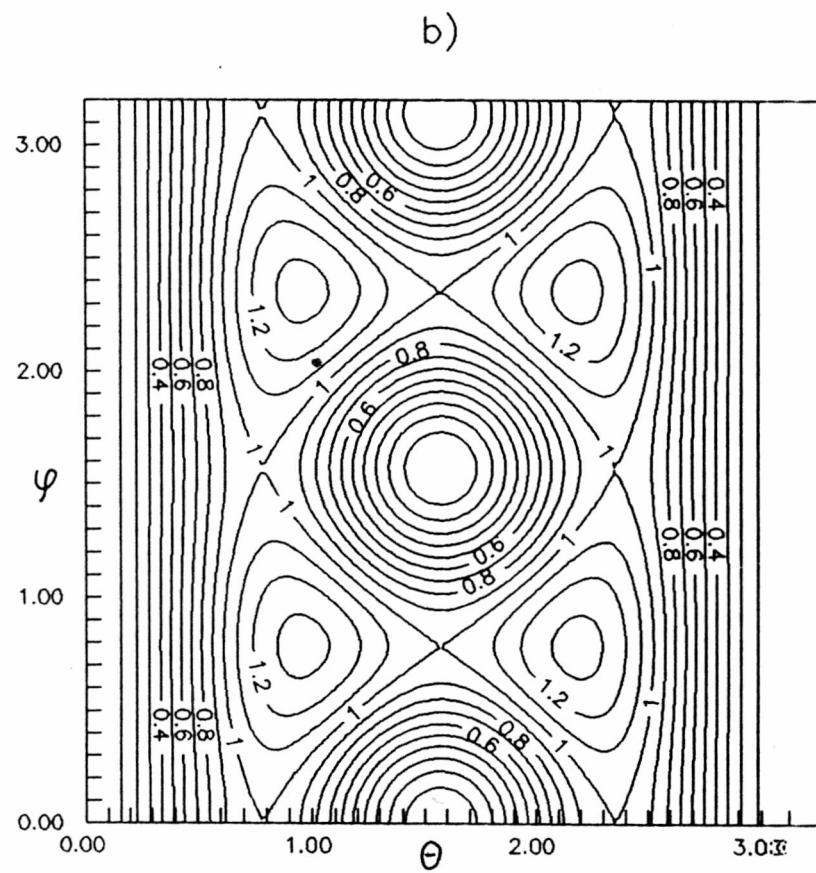
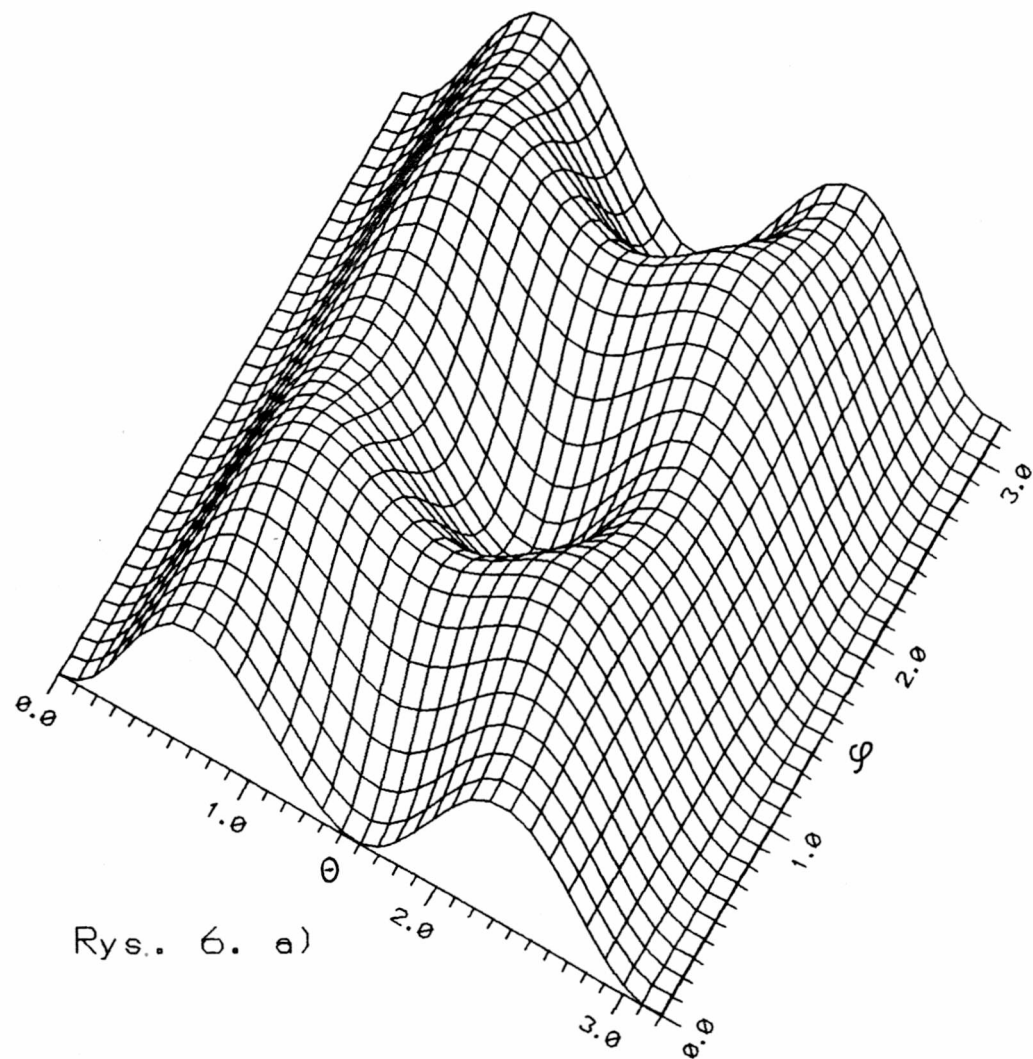


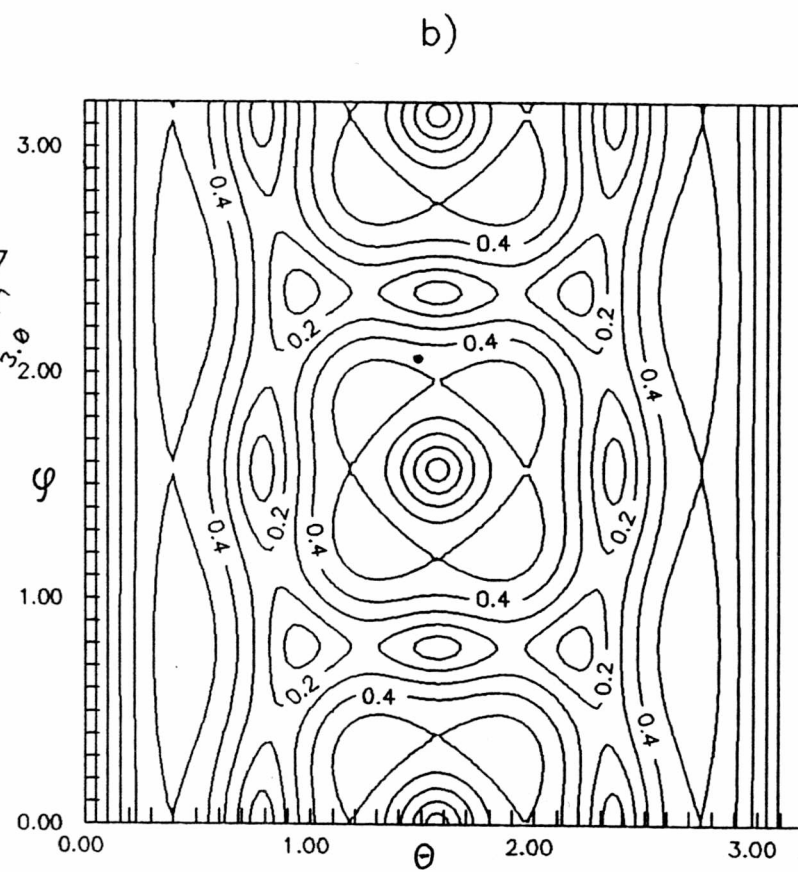
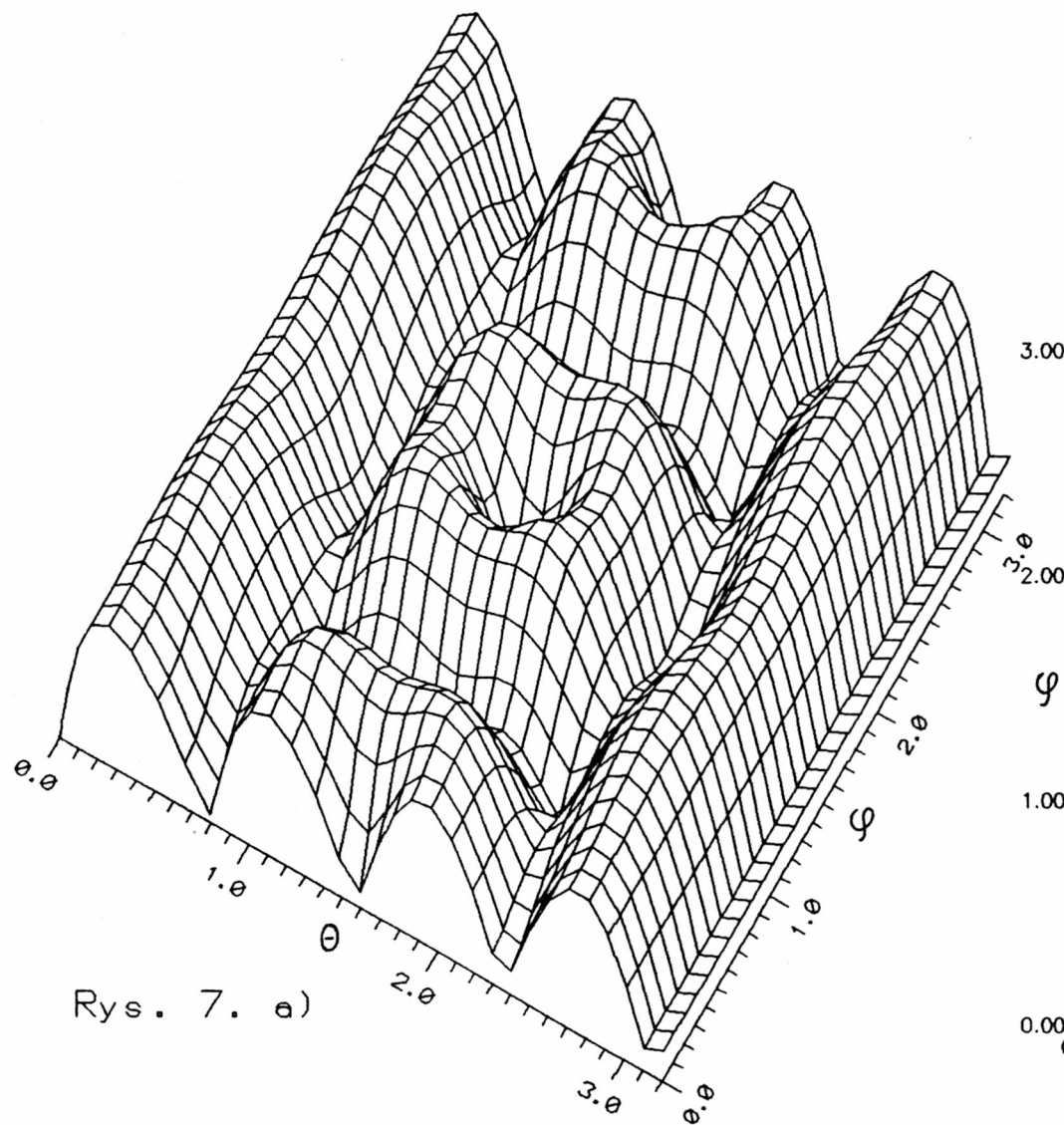


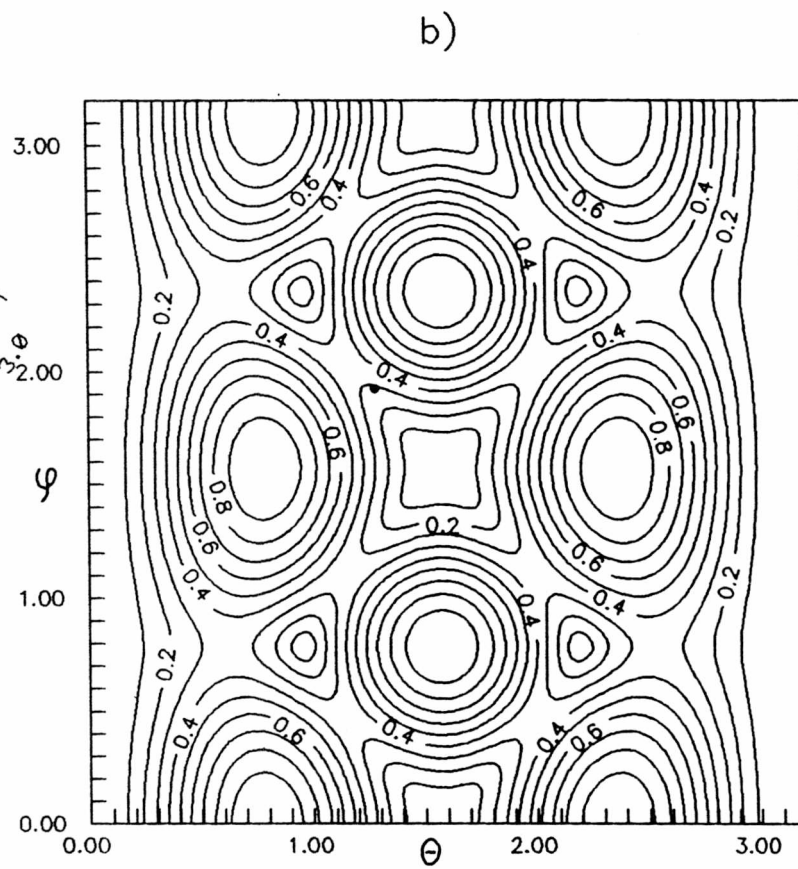
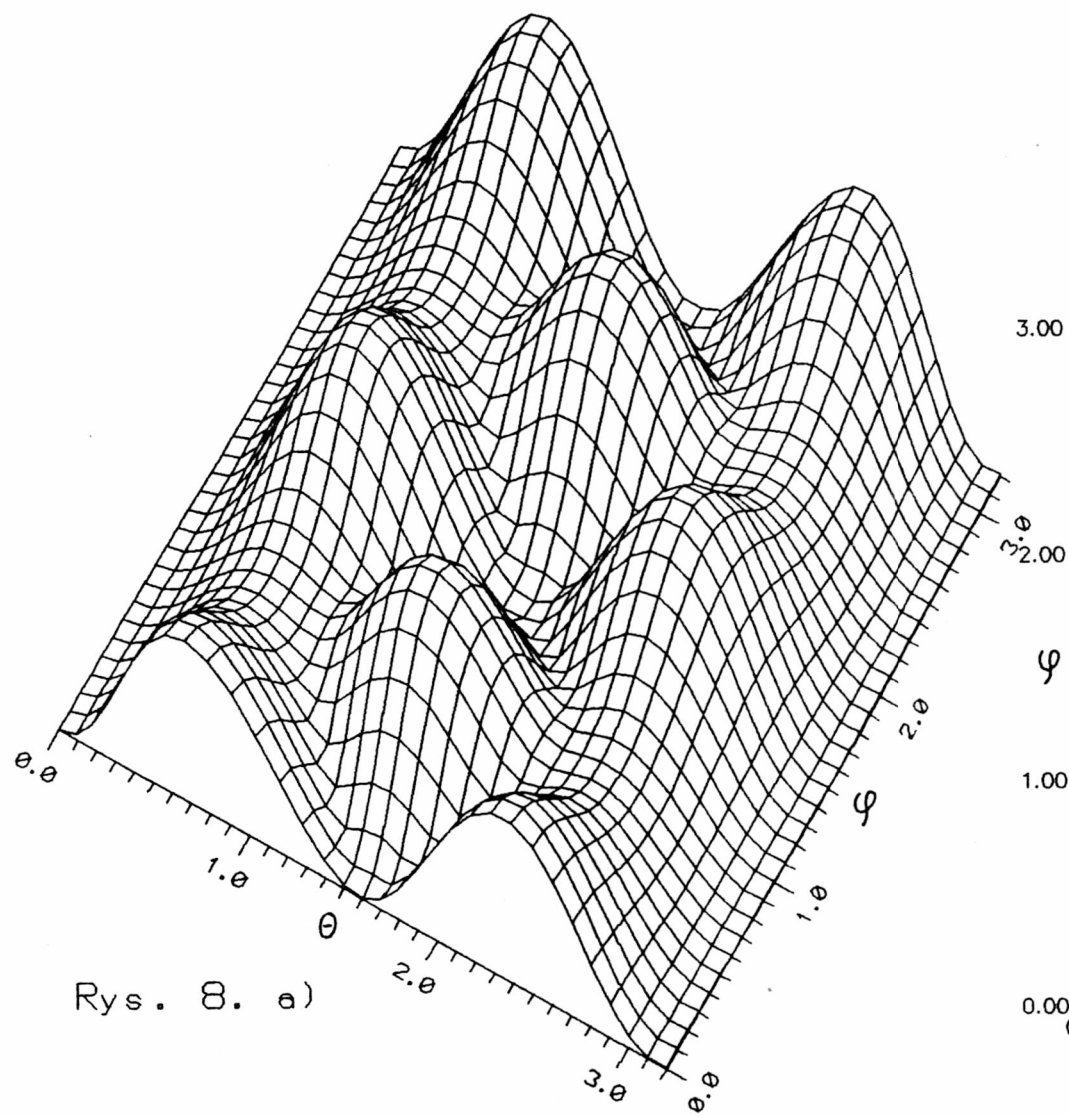
Rys. 4. a)

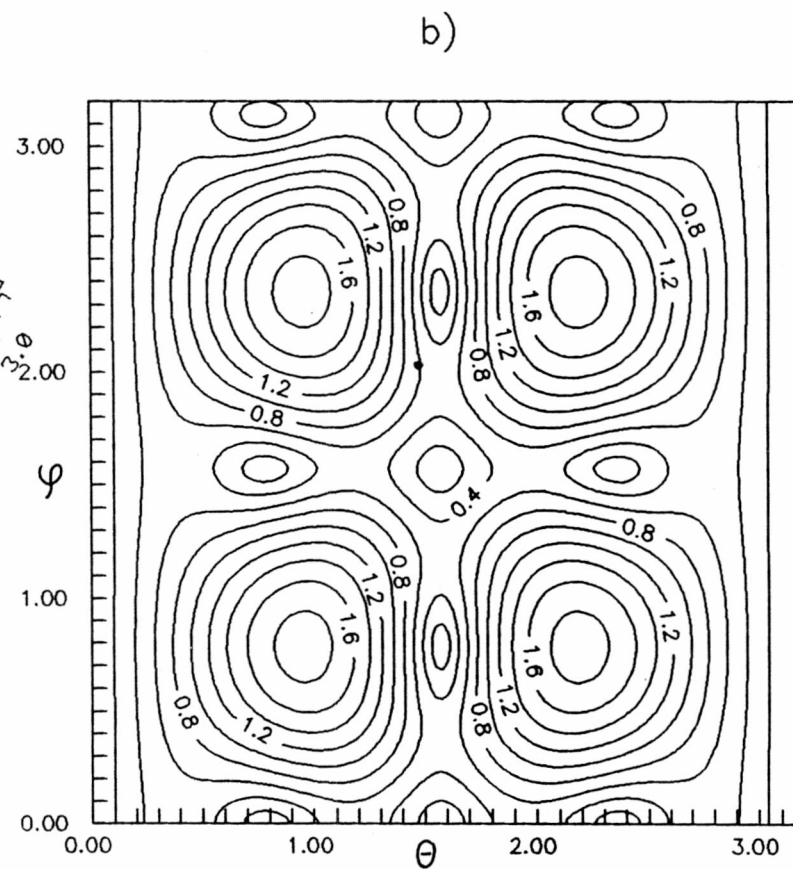
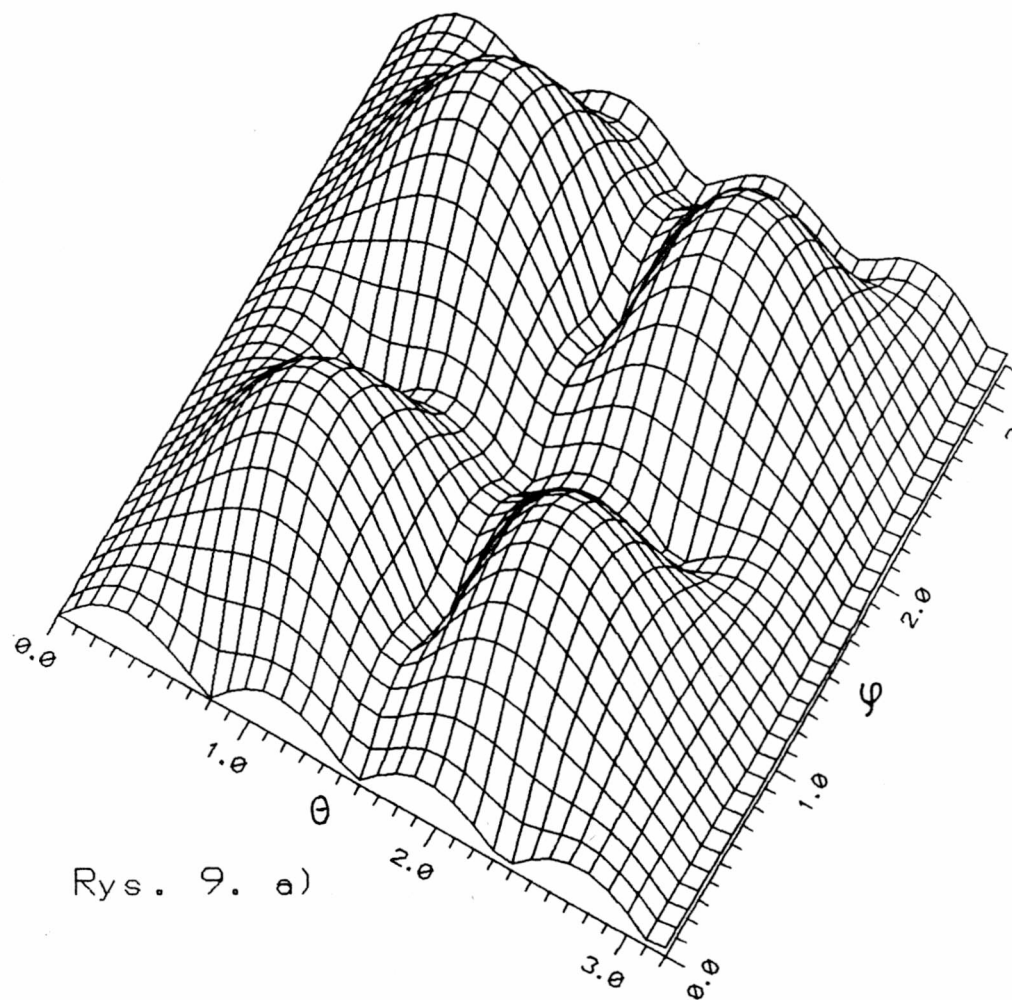


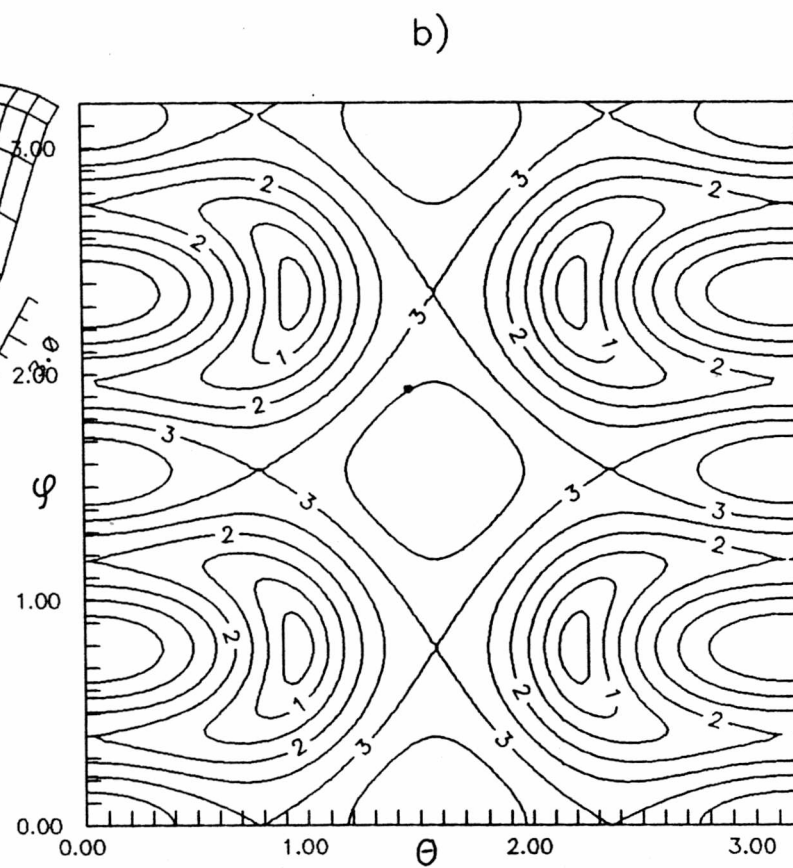
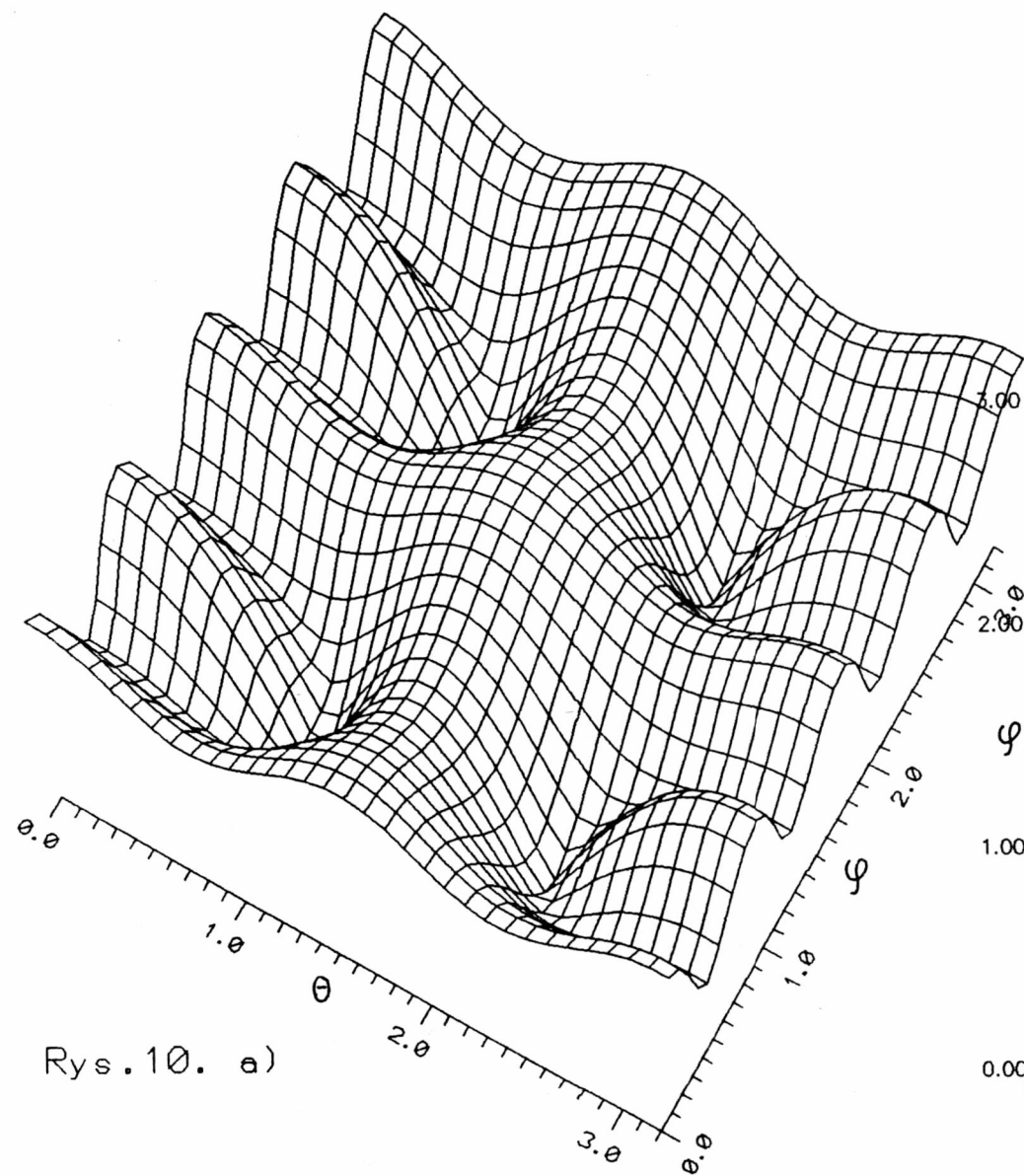




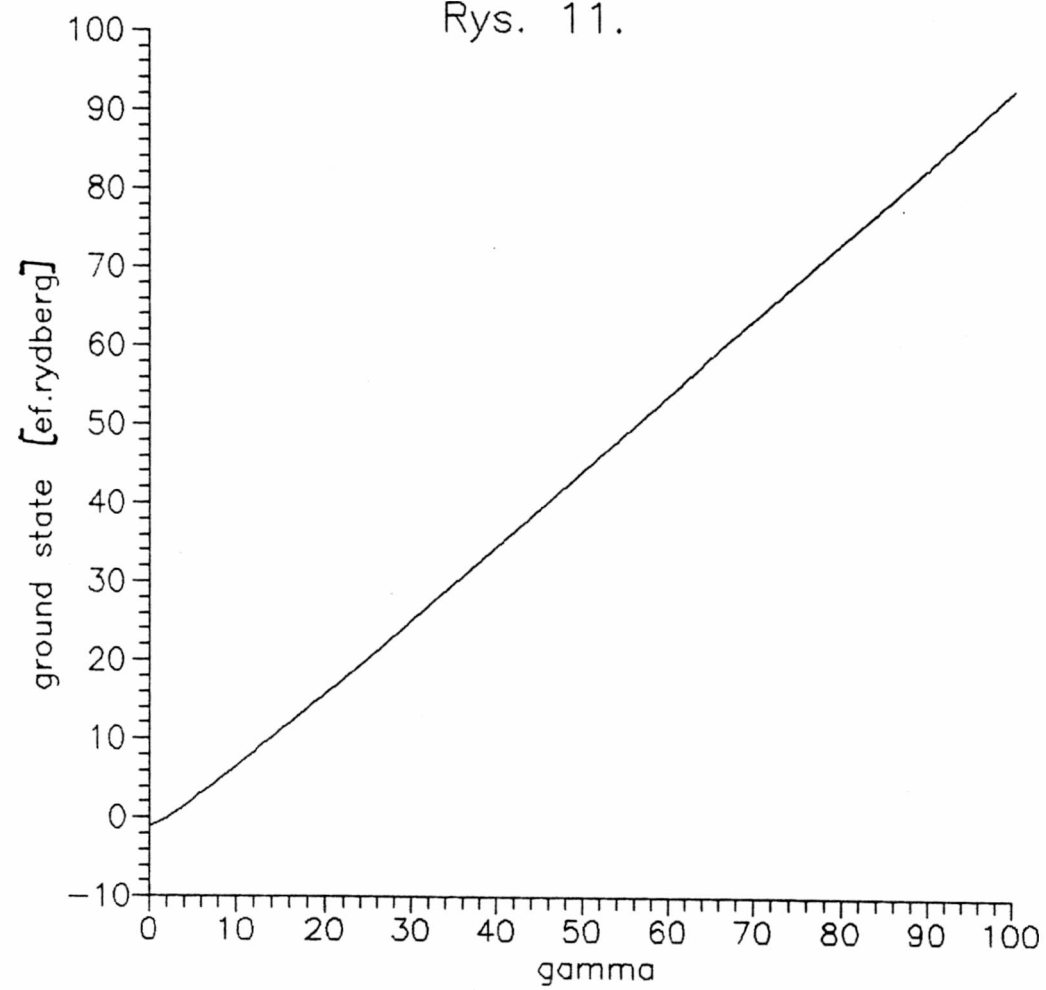




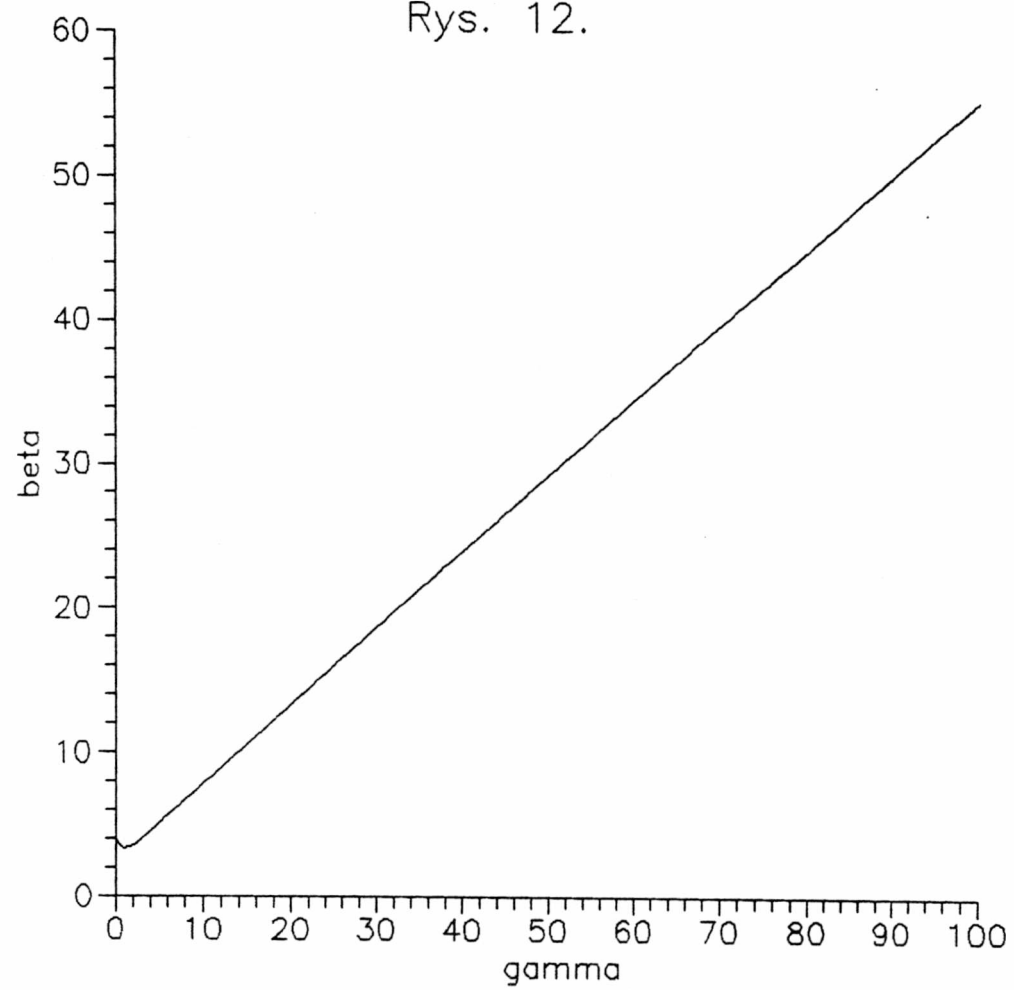




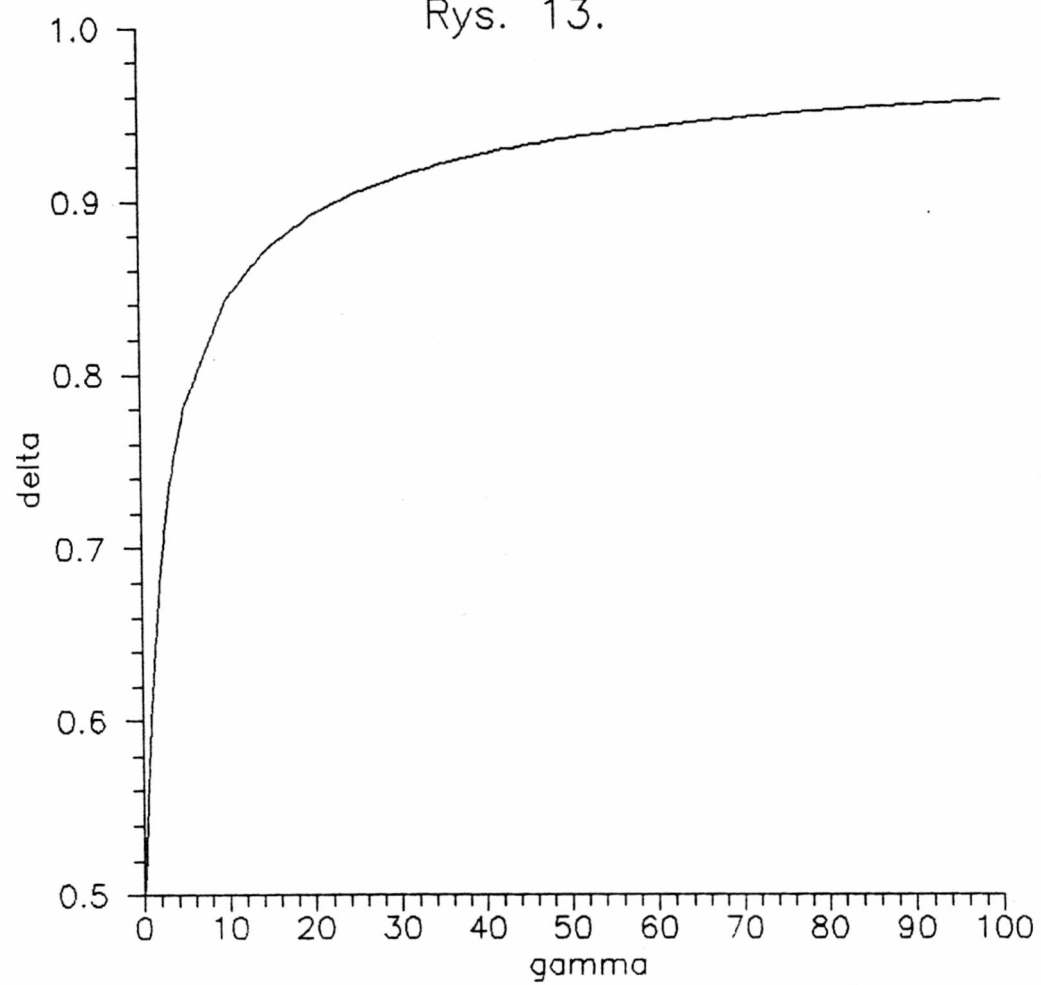
Rys. 11.



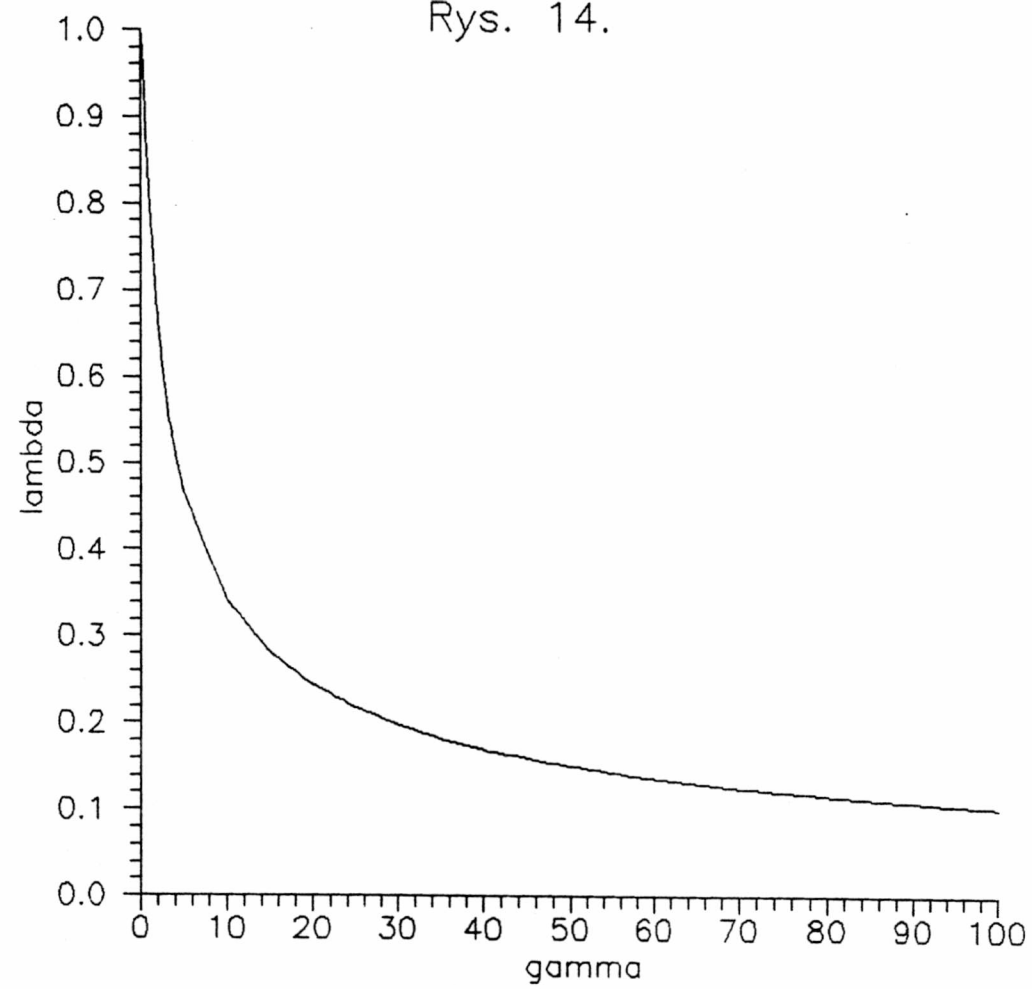
Rys. 12.



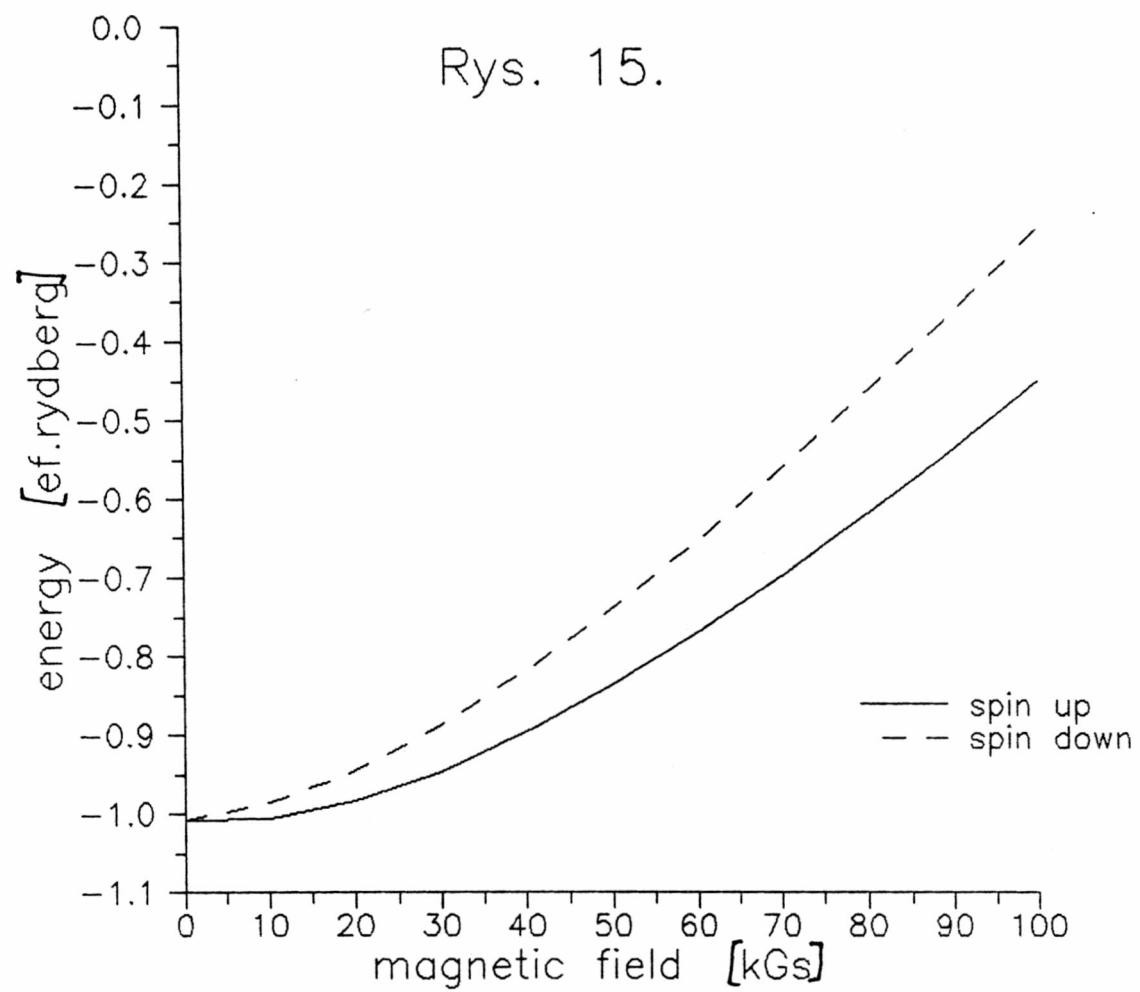
Rys. 13.

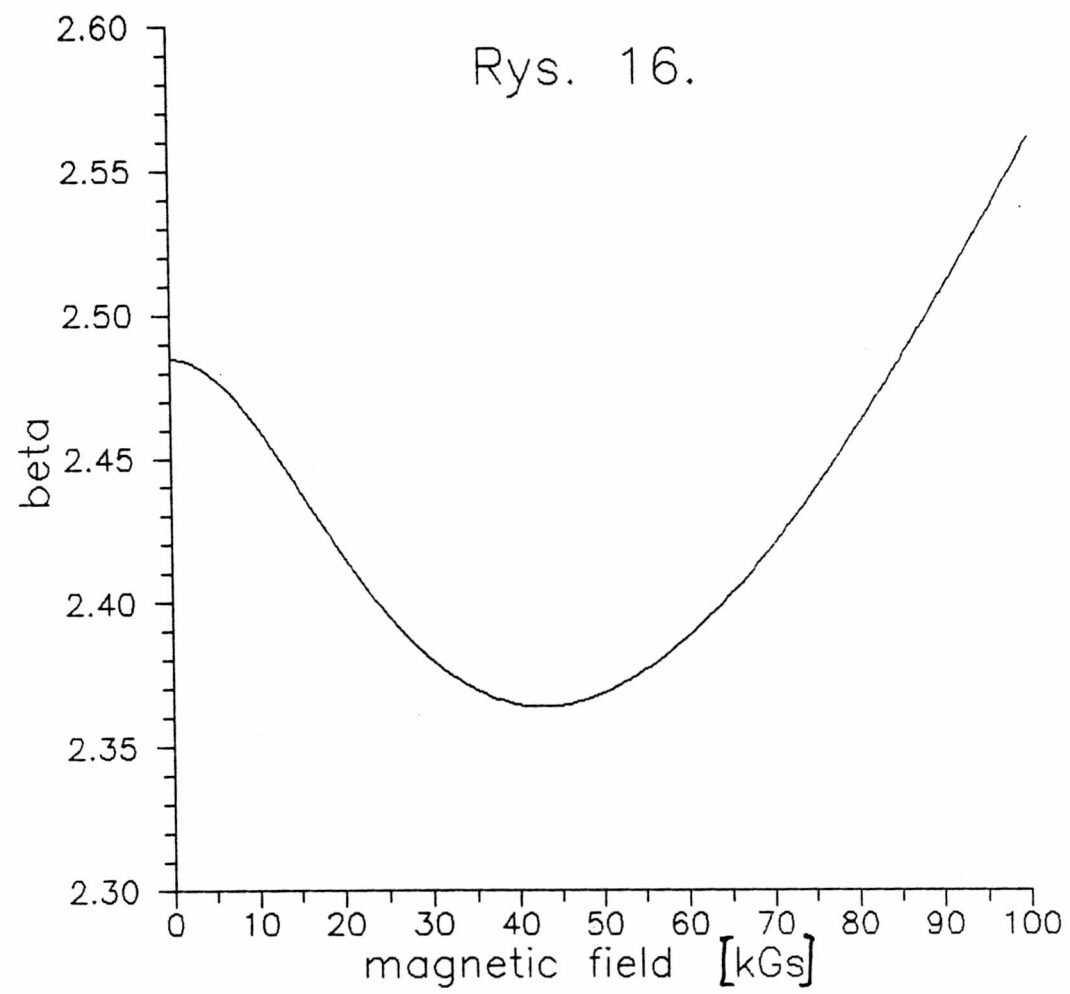


Rys. 14.

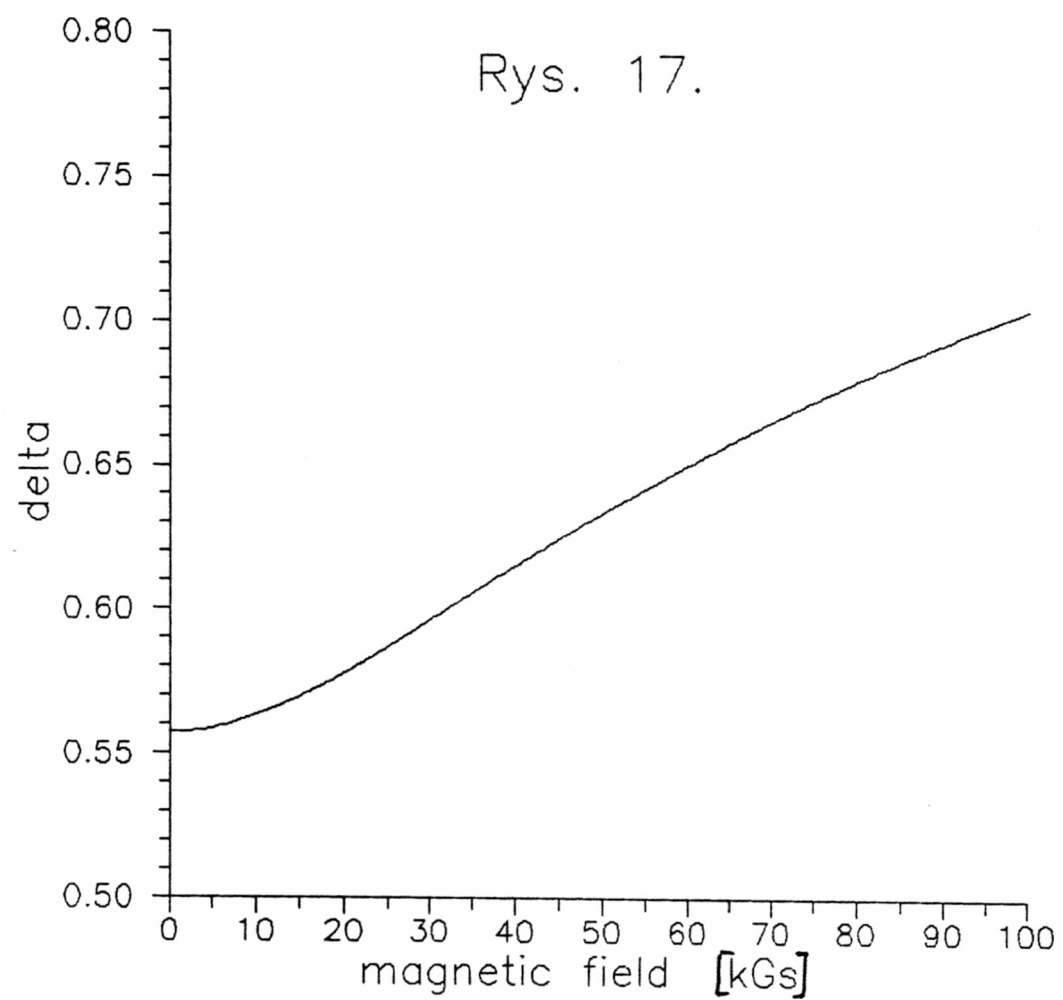


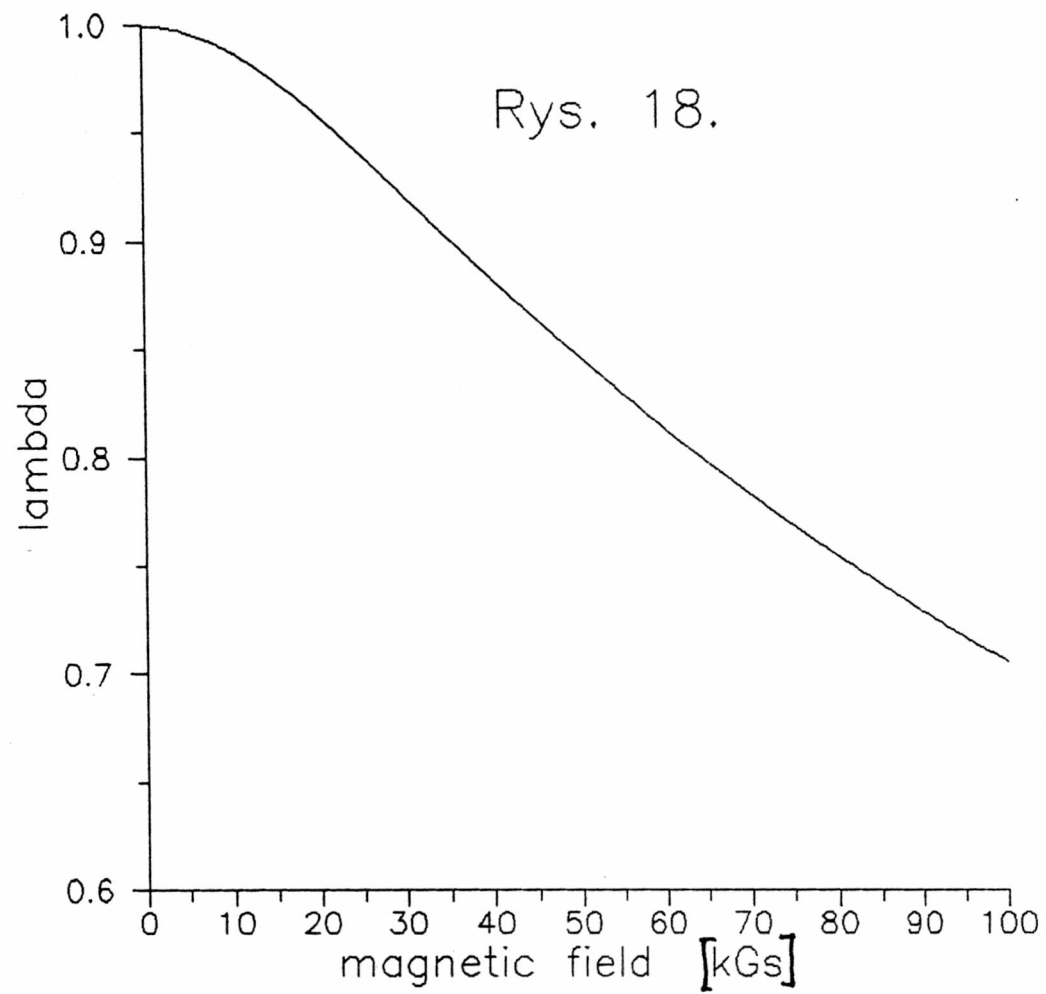
Rys. 15.





Rys. 17.





Rys. 19.

