Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport nr PRE - 37 /80

STATYKA SPRĘŻYSTYCH POWŁOK WIELOWARSTWOWYCH

Kazimierz Myślecki

Praca doktorska

Promotor: Doc. dr inż. Czesław Sapian

Słowa kluczowe: powłoka warstwowa

Wrocław 1980

Spis rzeczy

1. WSTĘP

1.1 Wprowadzenie

Powłoki wielowarstwowe są zbudowane, na ogół, z warstw o różnych własnościach fizycznych i wytrzymałościowych. Taka koncepcja pozwala na bardziej oszczędne stosowanie materiałów konstrukcyjnych, a jednocześnie na uzyskanie odpowiedniej izolacji cieplnej wzgl. akustycznej itp. Optymalne zaprojektowanie, zarówno pod względem ekonomicznym, wytrzymałościowym i użytkowym, jest uzależnione od umiejętności właściwej jakościowej i ilościowej oceny pracy poszczególnych warstw. Pełne wykorzystanie zalet układu wielowarstwowego jest możliwe przy dysponowaniu odpowiednim algorytmem jego rozwiązywania.

Wśród metod sprowadzenia trójwymiarowych zagadnień teorii sprężystości do dwuwymiarowych równań teorii powłok należy wyróżnić dwie grupy polegające na [14] :

1/ rozkładzie wektora przemieszczenia lub tensora naprężenia w szereg względem współrzędnej normalnej,

2/ założeniu postaci przemieszczenia lub rozkładu naprężeń po grubości powłoki.

Rozkładu w szereg dokonuje się najczęściej w bazie zwykłych wielomianów [5] i wielomianów Legendre'a [15].

Grupę metod z pkt 2/ można podzielić na dwie podgrupy. Do pierwszej zalicza się metody, w których przyjmuje się założenia dla całej powłoki wielowarstwowej. Otrzymane stąd równania są podobne do odpowiednich równań dla powłok jednorodnych.

W pierwszych pracach z teorii powłok wielowarstwowych [8] stosowano założenie Krichhoffa - Love'a /włókna prostoliniowe powłoki, prostopadłe do powierzchni podstawowej w konfiguracji początkowej, pozostają proste i prostopadłe w konfiguracji aktualnej/. Takie podejście ma ograniczone zastosowanie do powłok cienkich o podobnych własnościach warstw. W pracach [6 , 9] uwzględniono deformację ścinania, zastępując pochodną wektora przemieszczenia wewnątrz powłoki względem współrzędnej normalnej, wyrażeniem różnicowym zawierającym miary deformacji poprzecznej. Ogólna struktura równań różniczkowych nie zależy tutaj od ilości warstw. Natomiast, w pracy [12] założono rozkład naprężeń stycznych; uwzględniono również poprzeczne odkształcenia normalne.

W drugiej podgrupie dla każdej warstwy przyjmuje się niezależne miary odkształceń poprzecznych. Często pojedyncze warstwy traktuje się jako powłoki jednorodne i rozpatruje warunki zgodności naprężeń i przemieszczeń na powierzchniach międzywarstwowych [3]. Autorzy [1] zastosowali do opisu geometrii powłoki współrzędne warstwowe. Otrzymany układ równań jest bardzo przejrzysty. Zwrócono tam ponadto uwagę na analogię pomiędzy teorią powierzchni Cosserat z wieloma wektorami kierunkowymi, a teorią powłok wielowarstwowych.

Pełniejszy przegląd kierunków rozwoju teorii powłok wielowarstwowych, jak również obszerną bibliografię, można znaleźć w pracy [10].

1.2 Cel i układ pracy

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie równań statyki powłok wielowarstwowych z uwzględnieniem odkształceń poprzecznych. W oparciu o opis ruchu powłok jednorodnych podany w monografii [5], sformułowano założenie kinematyczne dla powłok wielowarstwowych. Równania równowagi otrzymano z zasady prac przygotowanych, a związki konstytutywne z prawa Hooke'a. Rozważania ograniczono do zagadnień liniowych i powłok o stałej grubości.
Otrzymane równanie bardzo łatwo można przystosować do szczególnych typów powłok /gdzie nie ma potrzeby uwzględniania deformacji poprzecznych w każdej warstwie/, odrzucając pewne składniki równań lub całe równania.
Zagadnienie znacznie się wówczas upraszcza.
Ponadto, podano uproszczony sposób uwzględnienia odkształceń poszczególnych ścinania.

Wyniki uzyskane w pracy są oryginalne, a w szczególnym przypadku powłok jednorodnych zgadzają się z podanymi w wielu publikacjach.

W rozdziale drugim sformułowano równania statyki powłok wielowarstwowych z uwzględnieniem odkształceń poprzecznych w każdej warstwie. Przyjęto założenie, że prostoliniowe włókna prostopadłe do powierzchni podstawowej przyjmują po odkształceniu postać łamanej. Odcinki łamanej zawarte są w obrębie warstw i mogą mieć inną długość niż przed odkształceniem.
Z zasady prac przygotowanych uzyskano $3 + 3 \times No$ równań równowagi dla sił wewnętrznych /No - liczba warstw/.
Jako siły wewnętrzne przyjęto zwykłe napięcie siłowe $N^{\alpha\beta}$ i momentowe $M^{\alpha\beta}$ [4, 5], jak również napięcia warstwowe, na ogół, nie mające prostej interpretacji.

W rozdziale trzecim przyjęto założenie Kirchhoffa-Love'a. Obliczono również naprężenia $\sigma^{\alpha\beta}$ ze związków konstytutywnych.

Rozdział czwarty zawiera przybliżony sposób uwzględnienia odkształceń poprzecznych ścinania. Tutaj miarą poprzecznych deformacji jest jeden wektor dla wszystkich warstw.
Z równań równowagi oblicza się siły poprzeczne w warstwach w zależności od całkowitej siły poprzecznej. Związek konstytutywny między siłami poprzecznymi a wektorem poprzecznych deformacji wyprowadza się z rozważań energetycznych. Przyjęto jednakowy współczynnik Poissona w każdej warstwie.

W rozdziale piątym pokazano jak można uzyskać równania powłok trójwarstwowych z ogólnych równań rozdziału drugiego. Odkształcenia poprzeczne uwzględniono tylko w warstwie wewnętrznej. Dla płaskich powłok podano rozkład naprężeń $\sigma^{\alpha\beta}$.

Rozdział szósty zawiera przykład. Rozwiązano trójwarstwową nieskończoną powłokę walcową. Powłoka jest utwierdzona wzdłuż przeciwległych tworzących i poddana stałemu obciążeniu promieniowemu, Otrzymuje się wtedy układ zwyczajnych równań różniczkowych o stałych współczynnikach.
Uzyskano dokładne rozwiązanie zagadnienia przy pomocy równań rozdz. piątego i przy założeniu Kirchhoffa-Love'a. Obliczone siły wewnętrzne i przemieszczenia porównano dla różnych grubości powłoki i warstw oraz modułów sprężystości.

Rozdział siódmy zawiera uwagi końcowe.

Oznaczenia, stosowane w pracy, są wzorowane na monografii [5].

2. STATYKA POWŁOK WIELOWARSTWOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM DEFORMACJI POPRZECZNYCH W KAŻDEJ WARSTWIE

2.1 Geometria konfiguracji początkowej

Przyjmuje się stałą grubość powłoki i warstw.

Powierzchnia podstawowa S jest równoległa do powierzchni granicznych.

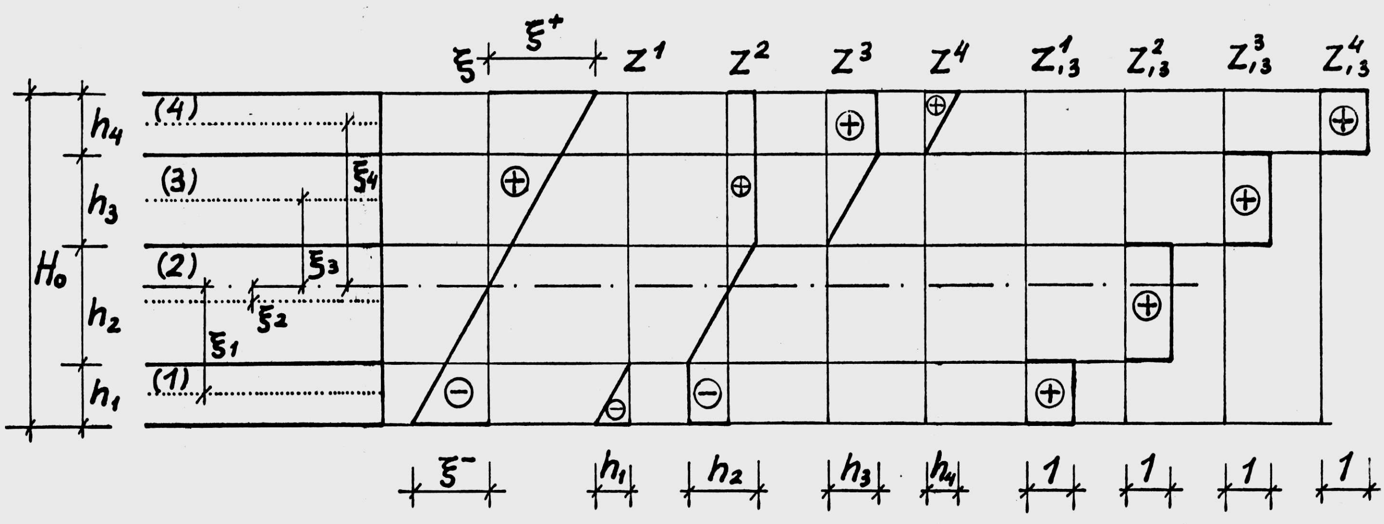
Geometrię powłoki opisuje się w normalnym układzie współrzędnych. Podobnie jak w pracy [1] przyjęto współrzędne warstwowe pokazane na rys. 1.

Małymi literami alfabetu łacińskiego i greckiego oznaczono wskaźniki tensorowe. Przebiegają one zbiory odpowiednio: 1, 2, 3 i 1, 2 . Duże litery alfabetu łacińskiego określają numery warstw i przyjmują wartości: 1, 2 ,..., No /No - liczba warstw/.

Do wszystkich wskaźników stosuje się umowę sumacyjną. Przecinek przed wskaźnikiem oznacza pochodną cząstkową, a kreska pionowa pochodną kowariantną w odniesieniu do tensora metrycznego powierzchni podstawowej w konfiguracji początkowej.

W szczególności przecinek przed wskaźnikiem 3 oznacza pochodną cząstkową względem współrzędnej normalnej ξ .

Obiekty geometryczne oznaczone dużymi literami odnoszą się do konfiguracji początkowej, małymi - konfiguracji aktualnej.



Rys. 1

Wektor położenia dowolnego punktu wewnątrz powłoki można zapisać w postaci

$$\vec{P}(\Theta^{\alpha},\xi) = \vec{R}(\Theta^{\alpha}) + Z^{K}(\xi)\,\vec{D}_{K}(\Theta^{\alpha}), \tag{2.1}$$

gdzie:

$\vec{R}$ - wektor położenia punktów powierzchni podstawowej S,

$\vec{D}_K$ - wektor kierunkowy warstwy K,

Z^K - współrzędna warstwowa,

Θ^{α} - współrzędne krzywoliniowe na powierzchni podstawowej.

Dla powłok o stałej grubości warstw wygodnie jest założyć

$$\vec{D}_K = \vec{A}_3 \quad ; \qquad K = 1,2,\ldots,N_o .$$

$\vec{A}_3$ jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni podstawowej.

Wektor $\vec{P}$ przyjmie wtedy postać

$$\vec{P} = \vec{R} + \xi\vec{A}_3 . \tag{2.2}$$

We wzorze (2.2) wykorzystano własność

$$\sum_{K=1}^{N_o} Z^K = \xi . \tag{2.3}$$

Powierzchnię brzegową Ω określamy równaniem

$$\vec{P}_o = \vec{R}_o + \xi\vec{A}_3 \tag{2.4}$$

$\vec{R}_o$ jest równaniem krzywej C przecięcia powierzchni podstawowej S i brzegowej Ω.

Wektory bazy w obszarze powłoki oblicza się w znany sposób

$$\vec{G}_\alpha = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \Theta^\alpha} = \mu_\alpha^\beta \vec{A}_\beta , \qquad \vec{G}_3 = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi} = \vec{A}_3 . \tag{2.5}$$

Wktory $\vec{A}_\alpha = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \Theta^\alpha}$ tworzą bazę powierzchni podstawowej, a

$$\mu_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \xi B_\alpha^\beta \tag{2.6}$$

jest translatorem [4, 7].
Symbole δ_α^β i B_α^β oznaczają deltę Kroneckera i drugi fundamentalny tensor powierzchni podstawowej [13].
Bazę wzajemną można wyrazić przez wektory kontrawariantne powierzchni podstawowej

$$\vec{G}^\alpha = (\mu^{-1})_\beta^\alpha \vec{A}^\beta , \qquad \vec{G}^3 = \vec{A}_3 . \tag{2.7}$$

Translatory $(\mu^{-1})_\alpha^\beta$ obliczamy z równania

$$\mu_\alpha^\beta (\mu^{-1})_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\beta , \tag{2.8}$$

$$(\mu^{-1})_\alpha^\beta = \frac{1}{\mu} [\delta_\alpha^\beta + \xi (B_\alpha^\beta - 2H\delta_\alpha^\beta)] , \tag{2.9}$$

gdzie

$$\mu = \det|\mu_\alpha^\beta| = 1 - 2\xi H + \xi^2 K , \tag{2.10}$$

a $H = \frac{1}{2} B_\alpha^\alpha$ i $K = \det|B_\alpha^\beta|$ są średnią krzywizną i krzywizną Gaussa [13].

2.2 Geometria konfiguracji aktualnej i stan odkształcenia

Załóżmy, że Θ^α i ξ są współrzędnymi konwekcyjnymi. Wektor położenia punktu powłoki zapiszemy w postaci

$$\vec{p} = \vec{r} + z^K \vec{d}_K . \tag{2.11}$$

Dokonując podstawień:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{u} ,$$

$$\vec{a}_K = \vec{a}_3 + \vec{\gamma}_K,$$
$$\vec{a}_3 = \vec{A}_3 + \vec{\beta}, \tag{2.12}$$

otrzymamy

$$\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{u} + \xi\vec{A}_3 + \xi\vec{\beta} + Z^K\vec{\gamma}_K, \tag{2.13}$$

gdzie

$\vec{u}$ jest wektorem przemieszczenia powierzchni podstawowej,

$\vec{\gamma}_K$ jest wektorem deformacji poprzecznej.

Wektor $\vec{\beta} = \beta_\alpha \vec{A}^\alpha$ obliczymy z zależności

$$|\vec{a}_3| = 1,$$
$$\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_\alpha = 0. \tag{2.14}$$

Kropką oznaczono iloczyn skalarny.

Z (2,12) mamy

$$\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta^\alpha} = \vec{A}_\alpha + \vec{u}_{,\alpha}, \tag{2.15}$$

a z (2,14) i (2,12)

$$\beta_\alpha = -\vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{A}_3 = -(u_{3,\alpha} + B_\alpha^\beta u_\beta). \tag{2.16}$$

Wektory bazy określone są wzorami

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \Theta^\alpha} = \mu_\alpha^\beta \vec{A}_\beta + \vec{u}_{,\alpha} + \xi\vec{\beta}_{,\alpha} + Z^K\vec{\gamma}_{K,\alpha},$$
$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \xi} = \vec{A}_3 + \vec{\beta} + Z^K_{,3}\vec{\gamma}_K. \tag{2.17}$$

Z (2.2) i (2.13) otrzymamy wektor przemieszczenia punktów powłoki

$$\vec{v} = \vec{\rho} - \vec{P} = \vec{u} + \xi\vec{\beta} + Z^K\vec{\gamma}_K. \tag{2.18}$$

Stan odkształcenia powłoki opiszemy trójwymiarowym tensorem, który w przypadku współrzędnych konwekcyjnych przybiera postać [5]

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j - \vec{G}_i \cdot \vec{G}_j) \tag{2.19}$$

lub

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{G}_i \cdot \vec{v}_{,j} - \vec{G}_j \cdot \vec{v}_{,i}). \tag{2.20}$$

Po odrzuceniu składników nieliniowych będzie

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mu^{\gamma}_{\alpha}\vec{A}_{\gamma}\cdot\vec{u}_{,\beta} + \xi\mu^{\gamma}_{\alpha}\vec{A}_{\gamma}\cdot\vec{\beta}_{,\beta} + Z^{K}\mu^{\gamma}_{\alpha}\vec{A}_{\gamma}\cdot\vec{\gamma}_{K,\beta} + \\
&\quad + \mu^{\gamma}_{\beta}\vec{A}_{\gamma}\cdot\vec{u}_{,\alpha} + \xi\mu^{\gamma}_{\beta}\vec{A}_{\gamma}\cdot\vec{\beta}_{,\alpha} + Z^{K}\mu^{\gamma}_{\beta}\vec{A}_{\gamma}\cdot\vec{\gamma}_{K,\alpha}), \\
e_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(Z^{K}_{,3}\mu^{\beta}_{\alpha}\vec{A}_{\beta}\cdot\vec{\gamma}_{K} + Z^{K}\vec{A}_{3}\cdot\vec{\gamma}_{K,\alpha}), \\
e_{33} &= Z^{K}_{,3}\vec{A}_{3}\cdot\vec{\gamma}_{K}.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Pochodne $\vec{v}_{,\alpha}$ oblicza się ze wzoru [5]

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{,\alpha} &= (v_{\lambda}|_{\alpha} - B_{\lambda\alpha}v_{3})\vec{A}^{\lambda} + (v_{3,\alpha} + B^{\lambda}_{\alpha}v_{\lambda})\vec{A}_{3} = \\
&= (v^{\lambda}|_{\alpha} - B^{\lambda}_{\alpha}v_{3})\vec{A}_{\lambda} + (v_{3,\alpha} + B_{\alpha\lambda}v^{\lambda})\vec{A}_{3}.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Ostatecznie

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mu^{\gamma}_{\alpha}\varepsilon_{\gamma\beta} + \xi\mu^{\gamma}_{\alpha}\varkappa_{\gamma\beta} + Z^{K}\mu^{\gamma}_{\alpha}\gamma_{K\gamma\beta} + \\
&\quad + \mu^{\gamma}_{\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha} + \xi\mu^{\gamma}_{\beta}\varkappa_{\gamma\alpha} + Z^{K}\mu^{\gamma}_{\beta}\gamma_{K\gamma\alpha}), \\
e_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(Z^{K}_{,3}\mu^{\beta}_{\alpha}\gamma_{K\beta} + Z^{K}\varepsilon_{K\alpha 3}), \\
e_{33} &= Z^{K}_{,3}\gamma_{K3}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Tutaj

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\gamma\beta} &= u_{\gamma}|_{\beta} - B_{\gamma\beta}u_{3}, \\
\gamma_{K\gamma\beta} &= \gamma_{K\gamma}|_{\beta} - B_{\gamma\beta}\gamma_{K3}, \\
\varkappa_{\gamma\beta} &= \beta_{\gamma}|_{\beta} = -u_{3,\gamma\beta} - B^{\alpha}_{\gamma}|_{\beta}u_{\alpha} - B^{\alpha}_{\gamma}u_{\alpha}|_{\beta}, \\
\varepsilon_{K\alpha 3} &= \gamma_{K3,\alpha} + B^{\beta}_{\alpha}\gamma_{K\beta},
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

są dwuwymiarowymi tensorami odkształcenia.

2.3 Równania równowagi i warunki brzegowe

Równania równowagi i warunki brzegowe otrzymamy z zasady prac przygotowanych dla ośrodka trójwymiarowego

$$W_w = W_z \,.$$

W_w i W_z są odpowiednio, pracą przygotowaną sił wewnętrznych i zewnętrznych.

$$W_w = \iiint_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} \, dV = \iiint_V (\sigma^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha 3} \delta e_{\alpha 3} + \sigma^{33} \delta e_{33}) \, dV. \qquad (2.25)$$

V jest obszarem jaki zajmuje powłoka, a σ^{ij} symetrycznym tensorem naprężenia.

Podstawiając (2.21) do (2.25) i wprowadzając $dV = \mu \, dS \, d\xi$ [5] można wyrazić

$$\begin{aligned} W_w = \iint_S (& N^{\alpha\beta} \vec{A}_\beta \cdot \delta \vec{u}_{,\alpha} + M^{\alpha\beta} \vec{A}_\beta \cdot \delta \vec{\beta}_{,\alpha} + M^{K\alpha\beta} \vec{A}_\beta \cdot \delta \vec{\gamma}_{K,\alpha} + \\ & + N^{K\alpha 3} \vec{A}_\alpha \cdot \delta \vec{\gamma}_K + M^{K\alpha 3} \vec{A}_3 \cdot \delta \vec{\gamma}_{K,\alpha} + N^{K33} \vec{A}_3 \cdot \delta \vec{\gamma}_K) \, dS . \end{aligned} \qquad (2.26)$$

W ostatnim wyrażeniu przyjęto oznaczenia sił wewnętrznych

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma^{\alpha\gamma} \mu^\beta_\gamma \, d\xi \,, \\ M^{\alpha\beta} &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma^{\alpha\gamma} \mu^\beta_\gamma \, \xi \, d\xi \,, \\ M^{K\alpha\beta} &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma^{\alpha\gamma} \mu^\beta_\gamma \, z^K d\xi \,, \\ N^{K\alpha 3} &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma^{\beta 3} \mu^\alpha_\beta \, z^K_{,3} \, d\xi \,, \\ M^{K\alpha 3} &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma^{\alpha 3} z^K d\xi \,, \\ N^{K33} &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma^{33} z^K_{,3} \, d\xi \,. \end{aligned} \qquad (2.27)$$

Przekształcamy składniki w (2.26) według schematu

$$N^{\alpha\beta} \vec{A}_\beta \cdot \delta \vec{u}_{,\alpha} = (N^{\alpha\beta} \vec{A}_\beta \cdot \delta \vec{u})|_\alpha - (N^{\alpha\beta} \vec{A}_\beta)|_\alpha \cdot \delta \vec{u}$$

i zastosujemy twierdzenie Greena [11] .

Otrzymamy

$$W_w = \iint\limits_S (-N^{\alpha\beta}|_\alpha \delta u_\beta - N^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \delta u_3 + M^{\alpha\beta}|_\alpha B_\beta^\gamma \delta u_\gamma -$$
$$- M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} \delta u_3 - M^{\kappa\alpha\beta}|_\alpha \delta \gamma_{\kappa\beta} - M^{\kappa\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \delta \gamma_{\kappa 3} + N^{\kappa\beta 3} \delta \gamma_{\kappa\beta} -$$
$$- M^{\kappa\alpha 3}|_\alpha \delta \gamma_{\kappa 3} + M^{\kappa\alpha 3} B_\alpha^\beta \delta \gamma_{\kappa\beta} + N^{\kappa 33} \delta \gamma_{\kappa 3}) dS + \qquad (2.28)$$
$$+ \int\limits_C (N^{\alpha\beta} \nu_\alpha \delta u_\beta - M^{\alpha\beta} B_\beta^\gamma \nu_\alpha \delta u_\gamma - M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \delta u_{3,\beta} +$$
$$+ M^{\kappa\alpha\beta} \nu_\alpha \delta \gamma_{\kappa\beta} + M^{\kappa\alpha 3} \nu_\alpha \delta \gamma_{\kappa 3} + M^{\alpha\beta}|_\alpha \nu_\beta \delta u_3) dC ,$$

gdzie

$\vec{\nu} = \nu_\alpha \vec{A}^\alpha = \nu_\alpha^* \vec{G}^\alpha$ jest wektorem normalnym krzywej C i stycznym do powierzchni S (rys. 2).

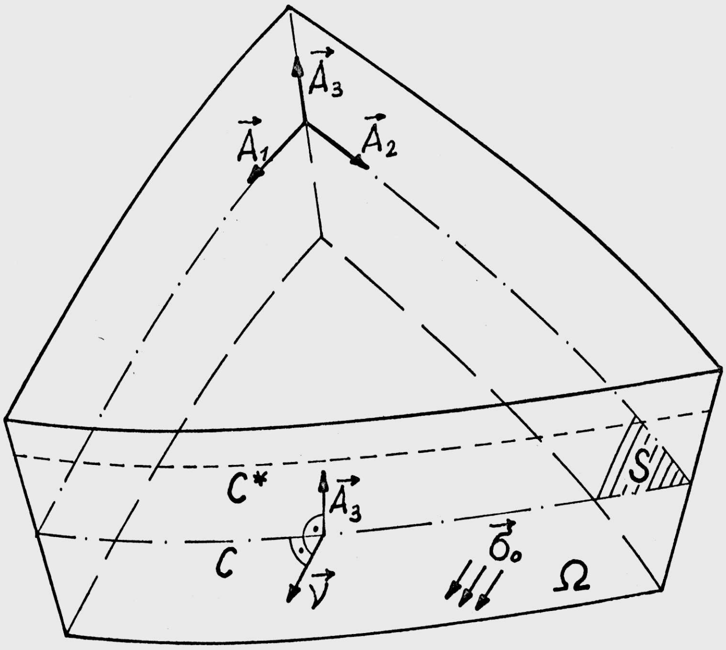
Wprowadzając związek [5]

$$u_{3,\beta} = \nu_\beta \frac{\partial u_3}{\partial \nu} - \bar{\varepsilon}_{\beta\alpha} \nu^\alpha \frac{\partial u_3}{\partial C} \qquad (2.29)$$

i podstawiając do (2.28) otrzymuje się wyrażenie dla ostatniej całki w (2.28)

$$\int\limits_C [N^{\alpha\beta} \nu_\alpha \delta u_\beta - M^{\alpha\beta} B_\beta^\gamma \nu_\alpha \delta u_\gamma - M^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \delta \frac{\partial u_3}{\partial \nu} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial C} (\bar{\varepsilon}_{\beta\gamma} \nu_\alpha \nu^\gamma M^{\alpha\beta}) \delta u_3 + M^{\kappa\alpha\beta} \nu_\alpha \delta \gamma_{\kappa\beta} + M^{\kappa\alpha 3} \nu_\alpha \delta \gamma_{\kappa 3} +$$
$$+ M^{\alpha\beta}|_\alpha \nu_\beta \delta u_3] dC \qquad (2.30)$$

Symbolem $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ oznaczono alternator na powierzchni S , a $\frac{\partial}{\partial \nu}$ oznacza pochodną w kierunku wektora $\vec{\nu}$.



Rys. 2

Pracę przygotowaną sił zewnętrznych podzielimy na dwie części: W_{Z1} - pracę sił na powierzchni brzegowej, i W_{Z2} - pracę sił na powierzchniach granicznych oraz sił objętościowych.

Wektor naprężeń $\vec{\sigma}_o$ na powierzchni brzegowej można zapisać w postaci

$$\vec{\sigma}_o = \sigma_o^{\alpha\beta} \nu_\alpha^* \vec{G}_\beta + \sigma_o^{\alpha 3} \nu_\alpha^* \vec{A}_3 , \tag{2.31}$$

a element powierzchni Ω [4]

$$d\Omega = dC^* d\xi \tag{2.32}$$

Wówczas

$$W_{Z1} = \iint_\Omega \vec{\sigma}_o \delta \vec{v}_o \, d\Omega = \iint_\Omega (\sigma_o^{\alpha\beta} \mu_\beta^r \vec{A}_r + \sigma_o^{\alpha 3} \vec{A}_3) \cdot (\delta \vec{u}_o + \xi \delta \vec{\beta}_o + Z^K \delta \vec{\gamma}_{oK}) \nu_\alpha^* dC^* d\xi . \tag{2.33}$$

Między elementami łuku krzywych C i C* można znaleźć związek [4]

$$\nu_\alpha^* dC^* = \mu \nu_\alpha dC \tag{2.34}$$

W rezultacie (2.33) przyjmie postać

$$W_{Z1} = \int_C (N_o^{\alpha\beta} \nu_\alpha \delta u_{o\beta} + Q_o^{\alpha 3} \delta u_{o3} - M_o^{\alpha\beta} \nu_\alpha B_\beta^r \delta u_{or} - M_o^{\alpha\beta} \nu_\alpha \delta u_{o3,\beta} + M_o^{K\alpha\beta} \nu_\alpha \delta \gamma_{oK\beta} + M_o^{K\alpha 3} \nu_\alpha \delta \gamma_{oK3}) dC . \tag{2.35}$$

Wskaźnikiem "o" oznaczono siły i przemieszczenia na powierzchni brzegowej
Definicje sił brzegowych $N_o^{\alpha\beta}, M_o^{\alpha\beta}, M_o^{K\alpha\beta}$ i $M_o^{K\alpha 3}$ są identyczne z podanymi w (2.27) po zamianie σ^{ij} na σ_o^{ij}
Natomiast

$$Q_o^{\alpha 3} = \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma_o^{\alpha 3} d\xi . \tag{2.36}$$

Jeżeli do (2.35) wprowadzimy (2.29) dla u_{o3} , to

$$W_{Z1} = \int_C [N_o^{\alpha\beta} \nu_\alpha \delta u_{o\beta} + Q_o^{\alpha 3} \delta u_{o3} - M_o^{\alpha\beta} \nu_\alpha B_\beta^r \delta u_{or} - M_o^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \delta \frac{\partial u_{o3}}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial C} (\varepsilon_{\beta\gamma} \nu_\alpha \nu^r M_o^{\alpha\beta}) \delta u_{o3} + M_o^{K\alpha\beta} \nu_\alpha \delta \gamma_{K\beta} + M_o^{K\alpha 3} \nu_\alpha \delta \gamma_{oK3}] dC . \tag{2.37}$$

Oznaczmy przez $\vec{q}^+$ i $\vec{q}^-$ pole sił przyłożonych do powierzchni granicznych S^+ i S^-.

Pole sił objętościowych można wyrazić w postaci

$$\vec{t} = Z_{13}^K \vec{t}_K . \tag{2.38}$$

$\vec{t}_K$ - jest polem sił objętościowych w warstwie K /niezależnym od współrzędnej ξ /.
Wtedy

$$W_{Z2} = \iint_{S^+} \vec{q}^+ \cdot \delta \vec{v}^+ dS^+ + \iint_{S^-} \vec{q}^- \cdot \delta \vec{v}^- dS^- + \iiint_V Z_{13}^K \vec{t}_K \cdot \delta \vec{v} dV . \tag{2.39}$$

Wprowadzając związki

$$dS^+ = \mu^+ dS , \quad dS^- = \mu^- dS ,$$

$$\vec{v}^+ = \vec{u} + \xi^+ \vec{\beta} + Z^{+K} \vec{\gamma}_K , \quad \vec{v}^- = \vec{u} + \xi^- \vec{\beta} + Z^{-K} \vec{\gamma}_K ,$$

$$dV = \mu \, dS \, d\xi ,$$

gdzie

$$\mu^{+}=\mu(\xi^{+}),\quad \mu^{-}=\mu(\xi^{-}),$$
$$Z^{+K}=Z^{K}(\xi^{+}),\quad Z^{-K}=Z^{K}(\xi^{-}), \tag{2.40}$$

otrzymamy

$$W_{Z2}=\iint_S [F^{\alpha}\delta u_{\alpha}+F^{3}\delta u_{3}-L^{\alpha}(\delta u_{3,\alpha}+B^{\beta}_{\alpha}\delta u_{\beta})+ + L^{K\alpha}\delta\gamma_{K\alpha}+L^{K3}\delta\gamma_{K3}]dS \tag{2.41}$$

lub po zastosowaniu twierdzenia Greena

$$W_{Z2}=\iint_S (F^{\alpha}\delta u_{\alpha}+F^{3}\delta u_{3}-L^{\alpha}B^{\beta}_{\alpha}\delta u_{\beta}+L^{K\alpha}\delta\gamma_{K\alpha}+ +L^{K3}\delta\gamma_{K3}+L^{\alpha}|_{\alpha}\delta u_{3})dS-\int_C L^{\alpha}\nu_{\alpha}\delta u_{3}\,dC. \tag{2.42}$$

We wzorach (2.41) i (2.42) przyjęto oznaczenia

$$\vec{F}=F^{i}\vec{A}_{i}=\vec{q}^{+}\mu^{+}+\vec{q}^{-}\mu^{-}+\int_{\xi^{-}}^{\xi^{+}}\mu\,\vec{t}_{K}Z^{K}_{,3}d\xi,$$
$$\vec{L}=L^{i}\vec{A}_{i}=\vec{q}^{+}\mu^{+}\xi^{+}+\vec{q}^{-}\mu^{-}\xi^{-}+\int_{\xi^{-}}^{\xi^{+}}\mu\,\vec{t}_{K}Z^{K}_{,3}\xi\,d\xi, \tag{2.43}$$
$$\vec{L}^{K}=L^{Ki}\vec{A}_{i}=\vec{q}^{+}\mu^{+}Z^{+K}+\vec{q}^{-}\mu^{-}Z^{-K}+\int_{\xi^{-}}^{\xi^{+}}\mu\,\vec{t}_{M}Z^{M}_{,3}Z^{K}d\xi.$$

Z porównania prac przygotowanych otrzymamy następujący układ równań równowagi

$$N^{\alpha\gamma}|_{\alpha}-B^{\gamma}_{\beta}M^{\alpha\beta}|_{\alpha}-B^{\gamma}_{\alpha}L^{\alpha}+F^{\gamma}=0,$$
$$B_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta}+L^{\alpha}|_{\alpha}+F^{3}=0,$$
$$M^{K\gamma\alpha}|_{\gamma}-N^{K\alpha 3}-B^{\alpha}_{\gamma}M^{K\gamma 3}+L^{K\alpha}=0, \tag{2.44}$$
$$B_{\alpha\beta}M^{K\alpha\beta}+M^{K\alpha 3}|_{\alpha}-N^{K33}+L^{K3}=0,$$

i warunki brzegowe

$$(N^{\alpha\gamma}-B^{\gamma}_{\beta}M^{\alpha\beta})\nu_{\alpha}=(N^{\alpha\gamma}_{o}-B^{\gamma}_{\beta}M^{\alpha\beta}_{o})\nu_{\alpha},$$

$$M^{\alpha\beta}|_{\alpha}\nu_{\beta}-\frac{\partial}{\partial C}(\varepsilon_{\alpha\gamma}M^{\alpha\beta}\nu_{\beta}\nu^{\gamma})=(Q^{\beta 3}_{o}-L^{\beta})\nu_{\beta}-\frac{\partial}{\partial C}(\varepsilon_{\alpha\gamma}M^{\alpha\beta}_{o}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}),$$

$$M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta = M_o^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta \,,$$
$$M^{K\alpha\beta}\nu_\alpha = M_o^{K\alpha\beta}\nu_\alpha \,, \qquad (2.45)$$
$$M^{K\alpha 3}\nu_\alpha = M_o^{K\alpha 3}\nu_\alpha \,,$$

lub

$$u_\alpha = u_{o\alpha}\,, \quad u_3 = u_{o3}\,,$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial \nu} = \frac{\partial u_{o3}}{\partial \nu}\,, \qquad (2.46)$$
$$\gamma_{K\alpha} = \gamma_{oK\alpha}\,, \quad \gamma_{K3} = \gamma_{oK3}\,.$$

Powyższe równania, dla $N_o = 1$, są podobne do podanych w pracy [5].

2.4 Związki konstytutywne

Uogólnione prawo Hooke'a, dla ośrodka trójwymiarowego, ma postać [2]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} e_{kl} \,, \qquad (2.47)$$

gdzie C^{ijkl} jest tensorem sprężystości.

Oznaczając przez C_K^{ijkl} tensor sprężystości w warstwie K, dla całego obszaru powłoki można zapisać

$$C^{ijkl} = Z^K_{,3}\, C_K^{ijkl} \,. \qquad (2.48)$$

Załóżmy, że w każdej warstwie występuje symetria własności sprężystych względem powierzchni środkowej warstwy. Wówczas

$$C_K^{\alpha\beta\gamma 3} = C_K^{\alpha 3\gamma\delta} = C_K^{\alpha 333} = C_K^{333\delta} = 0 \qquad (2.49)$$

zgodnie z [4].

Zapiszmy tensory C_K^{ijkl} w bazie na powierzchni podstawowej [4]

$$
\begin{aligned}
C_K^{\alpha\beta\gamma\delta} &= (\mu^{-1})^{\alpha}_{\varepsilon}(\mu^{-1})^{\beta}_{\lambda}(\mu^{-1})^{\gamma}_{\varkappa}(\mu^{-1})^{\delta}_{\nu} A_K^{\varepsilon\lambda\varkappa\nu}, \\
C_K^{\alpha\beta 33} &= (\mu^{-1})^{\alpha}_{\gamma}(\mu^{-1})^{\beta}_{\delta} A_K^{\gamma\delta 33}, \\
C_K^{\alpha 3\gamma 3} &= (\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta}(\mu^{-1})^{\gamma}_{\delta} A_K^{\beta 3\delta 3}, \\
C_K^{3333} &= A_K^{3333}.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Tensory $A_K^{\varepsilon\lambda\varkappa\nu}$, $A_K^{\gamma\delta 33}$ i $A_K^{\beta 3\delta 3}$ są tensorami powierzchniowymi /nie zależą od współrzędnej ξ /.

W szczególnym przypadku warstw izotropowych mamy

$$
\begin{aligned}
A_K^{\varepsilon\lambda\varkappa\nu} &= \lambda_K A^{\varepsilon\lambda}A^{\varkappa\nu} + \mu_K (A^{\varepsilon\varkappa}A^{\lambda\nu} + A^{\varepsilon\nu}A^{\lambda\varkappa}), \\
A_K^{\gamma\delta 33} &= \lambda_K A^{\gamma\delta}, \\
A_K^{\beta 3\delta 3} &= \mu_K A^{\beta\delta}, \\
A_K^{3333} &= \lambda_K + 2\mu_K,
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

gdzie λ_K i μ_K są stałymi Lamégo dla materiału warstwy K, a $A^{\varepsilon\lambda}$ jest tensorem metrycznym powierzchni podstawowej.

Związki konstytutywne dla sił wewnętrznych w powłoce otrzymamy podstawiając (2.48), (2.50) i (2.23) do zależności (2.27).
Wtedy będzie

$$
\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa} \Big[& \varepsilon_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa} Z^K_{,3} \, d\xi + \\
& + \varkappa_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa} \xi Z^K_{,3} \, d\xi + \gamma_{M\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa} Z^M Z^K_{,3} \, d\xi \Big] + \\
& + A_K^{\mu\beta 33} \gamma_{M3} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} Z^M_{,3} Z^K_{,3} \, d\xi, \\
M^{\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa} \Big[& \varepsilon_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa} \xi Z^K_{,3} \, d\xi + \\
& + \varkappa_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa} \xi^2 Z^K_{,3} \, d\xi + \gamma_{M\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa} \xi Z^M Z^K_{,3} \, d\xi \Big] + \\
& + A_K^{\mu\beta 33} \gamma_{M3} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu} \xi Z^M_{,3} Z^K_{,3} \, d\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{L\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa}\Big[&\varepsilon_{\tau\epsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\epsilon}_{\varkappa}Z^L Z^K_{,3}\,d\xi + \\
&+\mathcal{H}_{\tau\epsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\epsilon}_{\varkappa}\,\xi Z^L Z^K_{,3}\,d\xi + \gamma_{M\tau\epsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\epsilon}_{\varkappa}Z^L Z^M Z^K_{,3}\,d\xi\Big] + \\
&+A_K^{\mu\beta 33}\gamma_{M3}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}Z^L Z^M_{,3}Z^K_{,3}\,d\xi\,, \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

$$
N^{M\alpha 3} = A_K^{\alpha 3\lambda 3}\gamma_{L\lambda}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu Z^K_{,3}Z^L_{,3}Z^M_{,3}\,d\xi + A_K^{\alpha 3\tau 3}\varepsilon_{L\beta 3}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\beta}_{\tau}Z^L Z^K_{,3}Z^M_{,3}\,d\xi\,,
$$

$$
\begin{aligned}
M^{M\alpha 3} = &A_K^{\varepsilon 3\lambda 3}\gamma_{L\lambda}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\alpha}_{\varepsilon}Z^M Z^L_{,3}Z^K_{,3}\,d\xi + \\
&+A_K^{\varepsilon 3\tau 3}\varepsilon_{L\beta 3}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\alpha}_{\varepsilon}(\mu^{-1})^{\beta}_{\tau}Z^M Z^L Z^K_{,3}\,d\xi\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N^{M33} = A_K^{\varepsilon\delta 33}\Big[&\varepsilon_{\varepsilon\beta}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\beta}_{\delta}Z^M_{,3}Z^K_{,3}\,d\xi + \mathcal{H}_{\varepsilon\beta}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\beta}_{\delta}\,\xi Z^M_{,3}Z^K_{,3}\,d\xi + \\
&+\gamma_{L\varepsilon\beta}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu(\mu^{-1})^{\beta}_{\delta}Z^L Z^M_{,3}Z^K_{,3}\,d\xi\Big] + A_K^{3333}\gamma_{L3}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu Z^K_{,3}Z^L_{,3}Z^K_{,3}\,d\xi\,.
\end{aligned}
$$

3. RÓWNANIA WIELOWARSTWOWYCH POWŁOK PRZY ZAŁOŻENIU KIRCHHOFFA - LOVE'A

Założenie Kirchhoffa - Love'a, zapisane przez wielkości geometryczne podane wyżej, przyjmie postać

$$\vec{d}_K = \vec{a}_3 \qquad K = 1, 2, \ldots, N_0 . \tag{3.1}$$

Wektory $\vec{\gamma}_K$ znikają dla każdej warstwy.
Wobec (3.1) , ze współrzędnych tensora odkształcenia (2.23), pozostaną tylko:

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mu_\alpha^\beta \varepsilon_{\beta\gamma} + \mu_\gamma^\delta \varepsilon_{\delta\alpha} + \xi \mu_\alpha^\beta \mathcal{H}_{\beta\gamma} + \xi \mu_\gamma^\delta \mathcal{H}_{\delta\alpha}\right). \tag{3.2}$$

Tensory $\varepsilon_{\beta\gamma}$ i $\mathcal{H}_{\beta\gamma}$ zdefiniowano w (2.24).

Zastosowanie zasady prac przygotowanych dla tensora od - kształcenia prowadzi do następujących równań równowagi

$$\begin{aligned} &N^{\alpha\gamma}|_\alpha - B_\beta^\gamma M^{\alpha\beta}|_\alpha - B_\alpha^\gamma L^\alpha + F^\gamma = 0, \\ &B_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + L^\alpha|_\alpha + F^3 = 0 , \end{aligned} \tag{3.3}$$

i warunków brzegowych

$$\begin{aligned} &(N^{\alpha\gamma} - B_\beta^\gamma M^{\alpha\beta})\nu_\alpha = (N_0^{\alpha\gamma} - B_\beta^\gamma M_0^{\alpha\beta})\nu_\alpha , \\ &M^{\alpha\beta}|_\alpha \nu_\beta - \frac{\partial}{\partial C}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma} M^{\alpha\beta}\nu_\beta \nu^\gamma) = (Q_0^{\beta 3} - L^\beta)\nu_\beta - \frac{\partial}{\partial C}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma} M_0^{\alpha\beta}\nu_\beta \nu^\gamma), \end{aligned} \tag{3.4}$$

lub

$$\begin{aligned} &u_\alpha = u_{0\alpha} , \\ &u_3 = u_{03} , \\ &\frac{\partial u_3}{\partial \nu} = \frac{\partial u_{03}}{\partial \nu} . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Definicje sił wewnętrznych i obciążeń są identyczne z podanymi w rozdziale drugim poz. (2.27).

Układ (3.3) należy uzupełnić jeszcze równaniami, z których można obliczyć siły poprzeczne $Q^{\alpha 3}$ [4]

$$M^{\alpha\beta}|_{\alpha} - Q^{\beta 3} + L^{\alpha} = 0 \tag{3.6}$$

gdzie

$$Q^{\beta 3} = \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu\, \sigma^{\beta 3} d\xi \ . \tag{3.7}$$

Można zauważyć, że związki konstytutywne otrzymamy odrzucając w (2.52) składniki z $\gamma_{M\tau\varepsilon}$ i γ_{M3}. Wówczas

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} &= A_K^{\mu\beta\tau\varkappa} [\varepsilon_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\varkappa}^{\varepsilon} Z_{,3}^K d\xi + \\
&+ \varkappa_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi Z_{,3}^K d\xi] , \\
M^{\alpha\beta} &= A_K^{\mu\beta\tau\varkappa} [\varepsilon_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi Z_{,3}^K d\xi + \\
&+ \varkappa_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^2 Z_{,3}^K d\xi] .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Przejdźmy obecnie do wyznaczenia naprężeń $\sigma^{\alpha\beta}$. Rozważania przeprowadzimy dla powłoki, w której powierzchnia podstawowa jest płaska w konfiguracji początkowej. Zakładamy również, że wszystkie warstwy są izotropowe.
Translatory (2.6) przyjmą teraz prostą postać

$$\begin{aligned}
&\mu_{\alpha}^{\beta} = (\mu^{-1})_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} , \\
&\mu = 1 ,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

a związek (2.47) dla naprężeń $\sigma^{\alpha\beta}$ będzie

$$\sigma^{\alpha\beta} = Z_{,3}^K A_K^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} \ . \tag{3.10}$$

Tensory $A_K^{\alpha\beta\gamma\delta}$ i $e_{\gamma\delta}$ są podane w (2.51) i (3.2).

Napiszmy związki (3.8) uwzględniając (3.9) i (2.51). Po przekształceniach

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} &= [\alpha_1 A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + \alpha_2 (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma})] \varepsilon_{\gamma\delta} + \\
&+ [\alpha_3 A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + \alpha_4 (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma})] \varkappa_{\gamma\delta} ,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$M^{\alpha\beta} = [\alpha_3 A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + \alpha_4 (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma})] \varepsilon_{\gamma\delta} +$$
$$+ [\alpha_5 A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + \alpha_6 (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma})] \varkappa_{\gamma\delta} .$$

Współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ obliczamy ze wzorów:

$$\alpha_1 = \lambda_K \int_{\xi^-}^{\xi^+} Z^K_{;3}\, d\xi \,, \quad \alpha_2 = \mu_K \int_{\xi^-}^{\xi^+} Z^K_{;3}\, d\xi \,,$$
$$\alpha_3 = \lambda_K \int_{\xi^-}^{\xi^+} \xi Z^K_{;3}\, d\xi \,, \quad \alpha_4 = \mu_K \int_{\xi^-}^{\xi^+} \xi Z^K_{;3}\, d\xi \,, \qquad (3.12)$$
$$\alpha_5 = \lambda_K \int_{\xi^-}^{\xi^+} \xi^2 Z^K_{;3}\, d\xi \,, \quad \alpha_6 = \mu_K \int_{\xi^-}^{\xi^+} \xi^2 Z^K_{;3}\, d\xi \,.$$

Równania (3.11) można odwrócić ze względu na $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$. Otrzymuje się wówczas

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = [\beta_1 A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} + \beta_2 (A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} + A_{\alpha\delta} A_{\beta\gamma})] N^{\gamma\delta} +$$
$$+ [\beta_3 A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} + \beta_4 (A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} + A_{\alpha\delta} A_{\beta\gamma})] M^{\gamma\delta} ,$$
$$\varkappa_{\alpha\beta} = [\beta_3 A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} + \beta_4 (A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} + A_{\alpha\delta} A_{\beta\gamma})] N^{\gamma\delta} + \qquad (3.13)$$
$$+ [\beta_5 A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} + \beta_6 (A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} + A_{\alpha\delta} A_{\beta\gamma})] M^{\gamma\delta} ,$$

gdzie współczynniki $\beta_1, \ldots, \beta_6$ mają postać

$$\beta_1 = \frac{\alpha_6 [\alpha_1 (\alpha_5 + \alpha_6) - \alpha_3 (\alpha_3 + \alpha_4)] + \alpha_4 (\alpha_5 \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_6)}{4(\alpha_2 \alpha_6 - \alpha_4^2)[(\alpha_3 + \alpha_4)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_5 + \alpha_6)]} ,$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_6}{4(\alpha_2 \alpha_6 - \alpha_4^2)} ,$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_4 [\alpha_3 (\alpha_3 + \alpha_4) - \alpha_1 (\alpha_5 + \alpha_6)] + \alpha_2 (\alpha_3 \alpha_6 - \alpha_5 \alpha_4)}{4(\alpha_2 \alpha_6 - \alpha_4^2)[(\alpha_3 + \alpha_4)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_5 + \alpha_6)]} ,$$

$$\beta_4 = \frac{\alpha_4}{4(\alpha_4^2 - \alpha_2\alpha_6)} \, , \tag{3.14}$$

$$\beta_5 = \frac{\alpha_2[\alpha_5(\alpha_1+\alpha_2) - \alpha_3(\alpha_4+\alpha_3)] + \alpha_4(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)}{4(\alpha_2\alpha_6 - \alpha_4^2)[(\alpha_3+\alpha_4)^2 - (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_5+\alpha_6)]} \, ,$$

$$\beta_6 = \frac{\alpha_2}{4(\alpha_2\alpha_6 - \alpha_4^2)} \, .$$

Zapiszmy związek (3.10) , wykorzystując równania (3.13). Otrzymamy

$$\sigma^{\alpha\beta} = 2A^{\alpha\beta}Z^{K}_{,3}\{[\beta_1\lambda_K + \beta_1\mu_K + \beta_2\lambda_K + \xi(\beta_3\lambda_K + \beta_3\mu_K + \beta_4\lambda_K)]N^{\lambda}_{\lambda} +$$

$$+ [\beta_3\lambda_K + \beta_3\mu_K + \beta_4\lambda_K + \xi(\beta_5\lambda_K + \beta_5\mu_K + \beta_6\lambda_K)]M^{\lambda}_{\lambda}\} + \tag{3.15}$$

$$+ 4Z^{K}_{,3}[(\beta_2\mu_K + \xi\beta_4\mu_K)N^{\alpha\beta} + (\beta_4\mu_K + \xi\beta_6\mu_K)M^{\alpha\beta}] \, .$$

Gdy założymy ponadto, że $\frac{\lambda_K}{\mu_K} = \frac{\lambda_M}{\mu_M}$ /współczynnik Poissona w każdej warstwie jest jednakowy/, to (3.15) przyjmie postać

$$\sigma^{\alpha\beta} = 4Z^{K}_{,3}[(\beta_2\mu_K + \xi\beta_4\mu_K)N^{\alpha\beta} + (\beta_4\mu_K + \xi\beta_6\mu_K)M^{\alpha\beta}] \, . \tag{3.16}$$

Warto zwrócić uwagę, że dla powłok jednorodnych wzór (3.15) sprowadza się do ogólnie przyjętej postaci

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{N^{\alpha\beta}}{H_0} + \frac{12\xi}{H_0^3}M^{\alpha\beta} \, . \tag{3.17}$$

W (3.17) przyjęto dodatkowo powierzchnię środkową powłoki jako powierzchnię podstawową.

4. UPROSZCZONY SPOSÓB UWZGLĘDNIENIA POPRZECZNYCH DEFORMACJI ŚCINANIA

Przyjmijmy dla wszystkich warstw jednakowy wektor kierunkowy $\vec{d}$; miarą deformacji poprzecznych jest więc jeden wektor $\vec{\gamma}$.
Pole wektorowe $\vec{\gamma}$ jest styczne do powierzchni podstawowej w konfiguracji początkowej /pomijamy odkształcenia normalne w kierunku ξ /

$$\vec{\gamma} = \gamma_\alpha \vec{A}^\alpha . \tag{4.1}$$

Tensor odkształcenia otrzymamy, podstawiając w (2.23) $\gamma_{K\alpha} = \gamma_\alpha$, $\gamma_{K3} = 0$ i wykorzystując własność (2.3).

$$\begin{aligned} e_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}\left(\mu^\beta_\alpha \varepsilon_{\beta\gamma} + \xi \mu^\beta_\alpha \varrho_{\beta\gamma} + \mu^\delta_\gamma \varepsilon_{\delta\alpha} + \xi \mu^\delta_\gamma \varrho_{\delta\alpha}\right), \\ e_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}\gamma_\alpha , \\ e_{33} &= 0 , \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie

$$\varrho_{\beta\gamma} = \beta_\beta|_\gamma + \gamma_\beta|_\gamma = -(u_{3,\beta} + B^\alpha_\beta u_\alpha)|_\gamma + \gamma_\beta|_\gamma . \tag{4.3}$$

Tensorowi (4.2) odpowiadają, po zastosowaniu zasady prac przygotowanych, następujące równania równowagi

$$\begin{aligned} & N^{\alpha\gamma}|_\alpha - B^\gamma_\beta M^{\alpha\beta}|_\alpha - B^\gamma_\alpha L^\alpha + F^\gamma = 0 , \\ & B_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + L^\alpha|_\alpha + F^3 = 0 , \\ & M^{\beta\alpha}|_\beta - Q^{\alpha 3} + L^\alpha = 0 , \end{aligned} \tag{4.4}$$

i warunki brzegowe

$$\begin{aligned} & (N^{\alpha\gamma} - B^\gamma_\beta M^{\alpha\beta})\nu_\alpha = (N_0^{\alpha\gamma} - B^\gamma_\beta M_0^{\alpha\beta})\nu_\alpha , \\ & M^{\alpha\beta}|_\alpha \nu_\beta - \frac{\partial}{\partial C}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma} M^{\alpha\beta}\nu_\beta \nu^\gamma) = (Q_0^{\beta 3} - L^\beta)\nu_\beta - \frac{\partial}{\partial C}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma} M_0^{\alpha\beta}\nu_\beta \nu^\gamma) , \\ & M^{\alpha\beta}\nu_\alpha = M_0^{\alpha\beta}\nu_\alpha , \end{aligned} \tag{4.5}$$

lub

$$u_\alpha = u_{o\alpha} ,$$

$$u_3 = u_{o3} , \qquad (4.6)$$

$$\gamma_\alpha - \nu_\alpha \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = \gamma_{o\alpha} - \nu_\alpha \frac{\partial u_{o3}}{\partial \nu} .$$

Związki kontytutywne dla $N^{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$ można również otrzymać zamieniając w (3.8) tensor $\mathcal{H}_{\tau\varepsilon}$ na $\varrho_{\tau\varepsilon}$

$$N^{\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa} [\varepsilon_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^\alpha_\mu (\mu^{-1})^\varepsilon_\varkappa Z^K_{,3} d\xi +$$
$$+ \varrho_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^\alpha_\mu (\mu^{-1})^\varepsilon_\varkappa \xi Z^K_{,3} d\xi] ,$$
$$M^{\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa} [\varepsilon_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^\alpha_\mu (\mu^{-1})^\varepsilon_\varkappa \xi Z^K_{,3} d\xi + \qquad (4.7)$$
$$+ \varrho_{\tau\varepsilon} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu (\mu^{-1})^\alpha_\mu (\mu^{-1})^\varepsilon_\varkappa \xi^2 Z^K_{,3} d\xi] .$$

Związki kontytutywne dla sił poprzecznych $Q^{\alpha 3}$ zapiszemy wg [4,5] w postaci

$$Q^{\alpha 3} = \alpha_o A^{\alpha\beta} \gamma_\beta . \qquad (4.8)$$

α_o jest tutaj współczynnikiem, który określimy niżej.

Można zauważyć, że przy założeniach (3.9) otrzymamy identyczny rozkład naprężeń normalnych jak w (3.15) i (3.16).

Załóżmy, że powłoka składa się z dużej liczby warstw. Wówczas można przyjąć stały rozkład naprężeń stycznych na grubości warstwy.

Energia właściwa ścinania w warstwie K przyjmie postać

$$U_K = \frac{1}{2h_{(K)}\mu_{(K)}} A_{\alpha\beta} Q^{(K)\alpha 3} Q^{(K)\beta 3} , \qquad (4.9)$$

gdzie

$$Q^{K\alpha 3} = \int_{\xi^-}^{\xi^+} \mu \sigma^{\alpha 3} Z^K_{,3} d\xi .$$

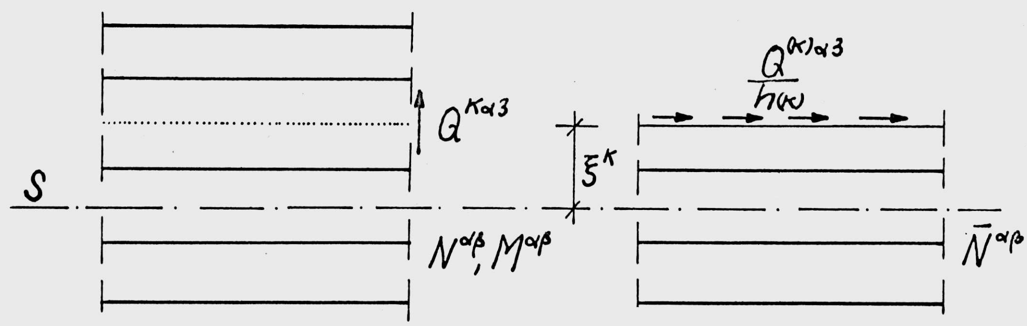
Wskaźniki ujęte w nawiasy nie podlegają sumowaniu.

Energią właściwą ścinania dla siły poprzecznej (4.8) można zapisać

$$U=\frac{1}{2\alpha_0}A_{\alpha\beta}Q^{\alpha 3}Q^{\beta 3}. \qquad (4.10)$$

Wyraźmy obecnie siły $Q^{K\alpha 3}$ przez $Q^{\alpha 3}$.
Rozważania przeprowadzimy przy założeniach (3.9) i $\frac{\lambda_K}{\mu_K}=\frac{\lambda_M}{\mu_M}$.
Pominiemy również wpływ obciążeń zewn. na rozkład naprężeń.

Przetnijmy powłokę wzdłuż powierzchni środkowej warstwy K (rys. 3) i rozpatrzmy równowagę jednej z odciętych części.



Rys. 3

Wektorem obciążenia F^α jest tutaj $\frac{Q^{(K)\alpha 3}}{h_{(K)}}$.

Równanie równowagi $(4.4)_1$ odciętej części powłoki przyjmie postać

$$\bar{N}^{\alpha\beta}|_\alpha=-\frac{Q^{(K)\alpha 3}}{h_{(K)}}, \qquad (4.11)$$

gdzie

$$\bar{N}^{\alpha\beta}=\int_{\xi^-}^{\xi^K}\sigma^{\alpha\beta}d\xi. \qquad (4.12)$$

Korzystając z (3.16) otrzymamy

$$\bar{N}^{\alpha\beta}=4\int_{\xi^-}^{\xi^K}Z^M_{,3}[(\beta_2\mu_M+\xi\beta_4\mu_M)N^{\alpha\beta}+(\beta_4\mu_M+\xi\beta_6\mu_M)M^{\alpha\beta}]d\xi=$$

$$=\psi_K N^{\alpha\beta}+\varphi_K M^{\alpha\beta}. \qquad (4.13)$$

$$
\begin{aligned}
\psi_K &= 4\int_{\xi^-}^{\xi^K} Z^M_{,3}\,\mu_M(\beta_2+\xi\beta_4)\,d\xi\,, \\
\varphi_K &= 4\int_{\xi^-}^{\xi^K} Z^M_{,3}\,\mu_M(\beta_4+\xi\beta_6)\,d\xi\,.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Podstawmy (4.13) do równania (4.11), które przyjmie postać

$$\psi_K N^{\alpha\beta}|_\alpha + \varphi_K M^{\alpha\beta}|_\alpha = -\frac{Q^{(K)\beta 3}}{h_{(K)}}\,. \tag{4.15}$$

Wobec równań równowagi (4.4) i poczynionych założeń:

$$N^{\alpha\beta}|_\alpha = 0\,, \quad M^{\alpha\beta}|_\alpha = Q^{\beta 3}.$$

Możemy więc zapisać

$$Q^{K\beta 3} = -h_{(K)}\,\varphi_{(K)}\,Q^{\beta 3}. \tag{4.16}$$

Dla powłok jednorodnych znajdziemy /powierzchnia podstawowa jest powierzchnią środkową/

$$\lim_{h_K\to 0}\frac{Q^{(K)\beta 3}}{h_{(K)}} = \sigma^{\beta 3}(\xi) = -\lim_{h_K\to 0}\varphi_K Q^{\beta 3} = -\varphi(\xi)Q^{\beta 3} = \frac{6}{H_0^3}\left(\frac{H_0^2}{4}-\xi^2\right)Q^{\beta 3}. \tag{4.17}$$

Taki rozkład naprężeń stycznych jest powszechnie przyjęty w teorii powłok cienkich.

Zsumujmy obie strony (4.16) po wszystkich warstwach

$$\sum_{K=1}^{N_0} Q^{K\beta 3} = -\sum_{K=1}^{N_0} h_K\,\varphi_K\,Q^{\beta 3} \tag{4.18}$$

Suma po lewej stronie (4.18) jest równa $Q^{\beta 3}$.
Otrzymamy więc z (4.18) warunek

$$\sum_{K=1}^{N_0} h_K\,\varphi_K = -1\,. \tag{4.19}$$

Warunek (4.19) nie jest na ogół spełniony /ze wzgl. na przyjęcie stałego rozkładu naprężeń stycznych w warstwie/. Błąd w (4.19) jest niewielki i już dla trzech warstw o po-

dobnej grubości wynosi około 6 %.
Nieścisłość tą można usunąć przyjmując zamiast (4.16) związek

$$Q^{K\beta 3} = \frac{h_{(K)}\,\varphi_{(K)}}{C}\, Q^{\beta 3} , \qquad (4.20)$$

gdzie $C = \sum_{K=1}^{N_0} h_K \varphi_K$.

Podstawmy (4.20) do wyrażeń (4.9) i wykonajmy sumowanie po wszystkich warstwach.
Wówczas

$$U = \sum_{K=1}^{N_0} U_K = \frac{1}{2C^2} \sum_{K=1}^{N_0} \frac{h_K \varphi_K^2}{\mu_K} A_{\alpha\beta}\, Q^{\alpha 3} Q^{\beta 3} . \qquad (4.21)$$

Porównując prawe strony (4.10) i (4.21) znajdziemy

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{C^2} \sum_{K=1}^{N_0} \frac{h_K \varphi_K^2}{\mu_K} . \qquad (4.22)$$

Podobnie jak wyżej obliczmy α_0 dla powłok jednorodnych /przy $N_0 \to \infty$ /

$$C = \lim_{\substack{N_0 \to \infty \\ \max h_K \to 0}} \sum_{K=1}^{N_0} h_K \varphi_K = \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \varphi(\xi)\, d\xi = -1 ,$$

$$\frac{1}{\alpha_0} = \lim_{\substack{N_0 \to \infty \\ \max h_K \to 0}} \sum_{K=1}^{N_0} \frac{\varphi_K^2}{\mu_K} h_K = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} [\varphi(\xi)]^2 d\xi = \frac{6}{5\mu_0 H_0} ,$$

czyli

$$\alpha_0 = \frac{5}{6} \mu_0 H_0 . \qquad (4.23)$$

μ_0 jest stałą Lamégo dla powłoki jednorodnej.
Współczynnik α_0 w postaci (4.23) jest stosowany w teorii powłok cienkich przez wielu autorów.

5. POWŁOKI TRÓJWARSTWOWE

Optymalny rozkład warstw w powłoce trójwarstwowej otrzymamy przyjmując cienkie i sztywne warstwy zewnętrzne i stosunkowo grubą, podatną warstwę wewnętrzną. W warstwie wewnętrznej celowe jest uwzględnienie odkształceń poprzecznych /zarówno przesunięć jak i odkształceń normalnych/. Natomiast w cienkich i sztywnych warstwach zewnętrznych odkształcenia poprzeczne można pominąć.

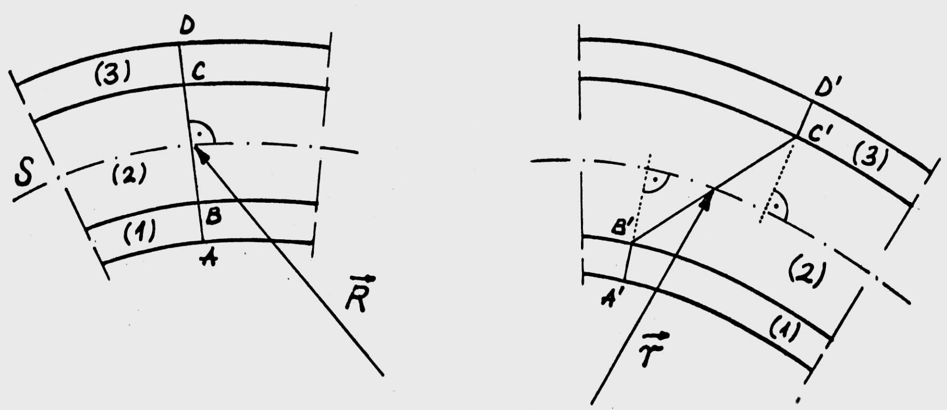
Model powłoki trójwarstwowej, uwzględniający powyższe postulaty, można otrzymać z ogólnego modelu powłoki wielowarstwowej, podanego w rozdz. 2, przyjmując:

$$N_0 = 3, \quad \vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_3 = \vec{0}, \tag{5.1}$$

$$\vec{\gamma}_2 = \gamma_{2\alpha} \vec{A}^{\alpha} + \gamma_{23} \vec{A}_3 . \tag{5.2}$$

Wskaźnik warstwowy „2", celem uniknięcia niejasności, będzie niżej pisany z lewej strony litery rdzeniowej.

Odkształcenie włókna prostopadłego do powierzchni podstawowej pokazano schematycznie na rys. 4.



Rys. 4

Przystosowanie podstawowych równań z rozdz. 2 jest proste. Wystarczy w definicji tensora odkształcenia (2.23), równaniach równowagi (2.44) i warunkach brzegowych (2.45), (2.46) ustalić wskaźnik warstwowy $K=2$, a w związkach konstytutywnych (2.52) wskaźniki $M=2$ i $L=2$.

Otrzymamy następującą postać tensora odkształcenia

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}\left(\mu^{\beta}_{\alpha}\varepsilon_{\beta\gamma} + \xi\mu^{\beta}_{\alpha}\varkappa_{\beta\gamma} + Z^{2}\mu^{\beta}_{\alpha}\,{}_{2}\gamma_{\beta\gamma} + \right.\\
&\qquad \left. + \mu^{\delta}_{\gamma}\varepsilon_{\delta\alpha} + \xi\mu^{\delta}_{\gamma}\varkappa_{\delta\alpha} + Z^{2}\mu^{\delta}_{\gamma}\,{}_{2}\gamma_{\delta\alpha}\right),\\
e_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}\left(Z^{2}_{,3}\mu^{\beta}_{\alpha}\,{}_{2}\gamma_{\beta} + Z^{2}\,{}_{2}\varepsilon_{\alpha 3}\right),\\
e_{33} &= Z^{2}_{,3}\,{}_{2}\gamma_{3},
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

równań równowagi

$$
\begin{aligned}
&N^{\alpha\gamma}|_{\alpha} - B^{\gamma}_{\beta}M^{\alpha\beta}|_{\alpha} - B^{\gamma}_{\alpha}L^{\alpha} + F^{\gamma} = 0,\\
&B_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + L^{\alpha}|_{\alpha} + F^{3} = 0,\\
&{}^{2}M^{\gamma\alpha}|_{\gamma} - {}^{2}N^{\alpha 3} - B^{\alpha}_{\gamma}\,{}^{2}M^{\gamma 3} + {}^{2}L^{\alpha} = 0,\\
&B_{\alpha\beta}\,{}^{2}M^{\alpha\beta} + {}^{2}M^{\alpha 3}|_{\alpha} - {}^{2}N^{33} + {}^{2}L^{3} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

warunków brzegowych

$$
\begin{aligned}
&(N^{\alpha\gamma} - B^{\gamma}_{\beta}M^{\alpha\beta})\nu_{\alpha} = (N^{\alpha\beta}_{o} - B^{\gamma}_{\beta}M^{\alpha\beta}_{o})\nu_{\alpha},\\
&M^{\alpha\beta}|_{\alpha}\nu_{\beta} - \frac{\partial}{\partial c}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma}M^{\alpha\beta}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}) = (Q^{\beta 3}_{o} - L^{\beta})\nu_{\beta} - \frac{\partial}{\partial c}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma}M^{\alpha\beta}_{o}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}),\\
&M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\nu_{\beta} = M^{\alpha\beta}_{o}\nu_{\alpha}\nu_{\beta},\\
&{}^{2}M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha} = {}^{2}M^{\alpha\beta}_{o}\nu_{\alpha},\\
&{}^{2}M^{\alpha 3}\nu_{\alpha} = {}^{2}M^{\alpha 3}_{o}\nu_{\alpha},
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
&u_{\alpha} = u_{o\alpha}, \quad u_{3} = u_{o3},\\
&\frac{\partial u_{3}}{\partial \nu} = \frac{\partial u_{o3}}{\partial \nu},\\
&{}_{2}\gamma_{\alpha} = {}_{2}\gamma_{o\alpha}, \quad {}_{2}\gamma_{3} = {}_{2}\gamma_{o3},
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

i związków konstytutywnych

$$N^{\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa}\Big[\varepsilon_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}\,(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,\mathcal{H}_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,\xi\, Z^K_{,3}\,d\xi + {}_2\mathcal{K}_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,Z^2 Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,A_K^{\mu\beta 33}\;{}_2\mathcal{K}_3\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}\,Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\,,$$

$$M^{\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa}\Big[\varepsilon_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,\xi\, Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,\mathcal{H}_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,\xi^2 Z^K_{,3}\,d\xi + {}_2\mathcal{K}_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,\xi\, Z^2 Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,A_K^{\mu\beta 33}\;{}_2\mathcal{K}_3\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}\,\xi\, Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\,, \qquad (5.7)$$

$${}^2M^{\alpha\beta} = A_K^{\mu\beta\tau\varkappa}\Big[\varepsilon_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}\,(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,Z^2 Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,\mathcal{H}_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,\xi\, Z^2 Z^K_{,3}\,d\xi + {}_2\mathcal{K}_{\tau\varepsilon}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}(\mu^{-1})^{\varepsilon}_{\varkappa}\,(Z^2)^2 Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,A_K^{\mu\beta 33}\;{}_2\mathcal{K}_3\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\mu}\,Z^2 Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\,,$$

$${}^2N^{\alpha 3} = A_K^{\alpha 3\lambda 3}\;{}_2\mathcal{K}_\lambda\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\, Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi \;+\; A_K^{\alpha 3\tau 3}\;{}_2\varepsilon_{\beta 3}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\beta}_{\tau}\,Z^2 Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\,,$$

$${}^2M^{\alpha 3} = A_K^{\varepsilon 3\lambda 3}\;{}_2\mathcal{K}_\lambda\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\varepsilon}\,Z^2 Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,A_K^{\varepsilon 3\tau 3}\;{}_2\varepsilon_{\beta 3}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\varepsilon}\,(\mu^{-1})^{\beta}_{\tau}\,(Z^2)^2 Z^K_{,3}\,d\xi\,,$$

$${}^2N^{33} = A_K^{\varepsilon\delta 33}\Big[\varepsilon_{\varepsilon\beta}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\beta}_{\delta}\,Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi + \mathcal{H}_{\varepsilon\beta}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\beta}_{\delta}\,\xi\, Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\; +$$

$$+\,{}_2\mathcal{K}_{\varepsilon\beta}\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\,(\mu^{-1})^{\beta}_{\delta}\,Z^2 Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\Big] + A_K^{3333}\;{}_2\mathcal{K}_3\int_{\xi^-}^{\xi^+}\mu\, Z^2_{,3}\,Z^K_{,3}\,d\xi\,.$$

Ze względu na założenie (5.1), w bilansie prac przygotowanych, nie wystąpiła praca naprężeń stycznych w warstwach zewnętrznych. Równania równowagi należy uzupełnić dodatkowym równaniem, z którego można obliczać całkowitą siłę poprzeczną $Q^{\alpha 3}$.

Podobnie jak w rozdz. 3 zapiszemy

$$M^{\beta\alpha}|_{\beta} - Q^{\alpha 3} + L^{\alpha} = 0 \; . \tag{5.8}$$

W dalszym ciągu wyznaczymy rozkład naprężeń $\sigma^{\alpha\beta}$. Załóżmy, że materiał warstw jest izotropowy i powierzchnia podstawowa w konfiguracji początkowej jest płaska oraz jest powierzchnią środkową. Przyjmijmy ponadto jednakowe własności sprężyste i grubości warstw zewnętrznych.

Związki konstytutywne $(5.7)_{1,2,3,6}$ przyjmują postać

$$\begin{aligned}
&N^{\alpha\beta} = [\delta_1 A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} + \delta_2 (A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma})]\varepsilon_{\gamma\delta} + \delta_3 A^{\alpha\beta}\,{}_2\gamma_3 \; , \\
&{}^2N^{33} = \delta_3 A^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \delta_4\, {}_2\gamma_3 \; , \\
&M^{\alpha\beta} = [\pi_1 A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} + \pi_2 (A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma})]\mathcal{H}_{\gamma\delta} + \\
&\qquad + [\pi_3 A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} + \pi_4 (A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma})]\,{}_2\gamma_{\gamma\delta} \; , \\
&{}^2M^{\alpha\beta} = [\pi_3 A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} + \pi_4 (A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma})]\mathcal{H}_{\gamma\delta} + \\
&\qquad + [\pi_5 A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} + \pi_6 (A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma})]\,{}_2\gamma_{\gamma\delta} \; ,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

gdzie współczynniki $\delta_1, \ldots, \delta_4$ i $\pi_1, \ldots, \pi_6$ oblicza się ze wzorów

$$\delta_1 = \lambda_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} Z^K_{,3}\, d\xi \; , \quad \delta_2 = \mu_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} Z^K_{,3}\, d\xi \; ,$$

$$\delta_3 = \lambda_2 h_2 \; , \quad \delta_4 = (\lambda_2 + 2\mu_2) h_2 \; ,$$

$$\pi_1 = \lambda_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \xi^2 Z^K_{,3} d\xi , \quad \pi_2 = \mu_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \xi^2 Z^K_{,3} d\xi ,$$

$$\pi_3 = \lambda_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \xi Z^2 Z^K_{,3} d\xi , \quad \pi_4 = \mu_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \xi Z^2 Z^K_{,3} d\xi , \tag{5.10}$$

$$\pi_5 = \lambda_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} (Z^2)^2 Z^K_{,3} d\xi , \quad \pi_6 = \mu_K \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} (Z^2)^2 d\xi .$$

Związki (5.9) można potraktować jako dwa układy równań ze względu na $\varepsilon_{\gamma\delta}, {}_2\gamma_3$ i $\varkappa_{\gamma\delta}, {}_2\gamma_{\gamma\delta}$. Po rozwiązaniu otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\gamma\delta} &= [\eta_1 A_{\gamma\delta} A_{\alpha\beta} + \eta_2 (A_{\gamma\alpha} A_{\delta\beta} + A_{\gamma\beta} A_{\delta\alpha})] N^{\alpha\beta} + \eta_3 A_{\gamma\delta} {}^2N^{33} , \\
{}_2\gamma_3 &= \eta_3 A_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \eta_4 {}^2N^{33} , \\
\varkappa_{\gamma\delta} &= [\omega_1 A_{\gamma\delta} A_{\alpha\beta} + \omega_2 (A_{\gamma\alpha} A_{\beta\delta} + A_{\gamma\beta} A_{\delta\alpha})] M^{\alpha\beta} + \\
&\quad + [\omega_3 A_{\gamma\delta} A_{\alpha\beta} + \omega_4 (A_{\gamma\alpha} A_{\beta\delta} + A_{\gamma\beta} A_{\delta\alpha})] {}^2M^{\alpha\beta} , \\
{}_2\gamma_{\gamma\delta} &= [\omega_3 A_{\gamma\delta} A_{\alpha\beta} + \omega_4 (A_{\gamma\alpha} A_{\beta\delta} + A_{\gamma\beta} A_{\delta\alpha})] M^{\alpha\beta} + \\
&\quad + [\omega_5 A_{\gamma\delta} A_{\alpha\beta} + \omega_6 (A_{\gamma\alpha} A_{\beta\delta} + A_{\gamma\beta} A_{\delta\alpha})] {}^2M^{\alpha\beta} .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Współczynniki $\eta_1, \ldots, \eta_4$ wyrazimy przez $\delta_1, \ldots, \delta_4$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{\delta_1}{4(\delta_1+\delta_2)\delta_2} + \frac{\delta_3^2}{4(\delta_1+\delta_2)[(\delta_1+\delta_2)\delta_4 - \delta_3^2]} , \\
\eta_2 &= \frac{1}{4\delta_2} , \quad \eta_3 = \frac{\delta_3}{2[\delta_3^2 - (\delta_1+\delta_2)\delta_4]} , \\
\eta_4 &= \frac{\delta_1+\delta_2}{\delta_4(\delta_1+\delta_2) - \delta_3^2} .
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Pomiędzy współczynnikami $\omega_1, \ldots, \omega_6$, a $\pi_1, \ldots, \pi_6$ istnieją identyczne zależności jak między $\beta_1, \ldots, \beta_6$, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ w poz. (3.14)

$$\omega_1 = \frac{\pi_6[\pi_1(\pi_5+\pi_6)-\pi_3(\pi_3+\pi_4)]+\pi_4(\pi_5\pi_4-\pi_3\pi_6)}{4(\pi_2\pi_6-\pi_4^2)[(\pi_3+\pi_4)^2-(\pi_1+\pi_2)(\pi_5+\pi_6)]},$$

$$\omega_2 = \frac{\pi_6}{4(\pi_2\pi_6-\pi_4^2)},$$

$$\omega_3 = \frac{\pi_4[\pi_3(\pi_3+\pi_4)-\pi_1(\pi_5+\pi_6)]+\pi_2(\pi_3\pi_6-\pi_5\pi_4)}{4(\pi_2\pi_6-\pi_4^2)[(\pi_3+\pi_4)^2-(\pi_1+\pi_2)(\pi_5+\pi_6)]},$$

$$\omega_4 = \frac{\pi_4}{4(\pi_4^2-\pi_2\pi_6)}, \tag{5.13}$$

$$\omega_5 = \frac{\pi_2[\pi_5(\pi_1+\pi_2)-\pi_3(\pi_3+\pi_4)]+\pi_4(\pi_1\pi_4-\pi_2\pi_3)}{4(\pi_2\pi_6-\pi_4^2)[(\pi_3+\pi_4)^2-(\pi_1+\pi_2)(\pi_5+\pi_6)]},$$

$$\omega_6 = \frac{\pi_2}{4(\pi_2\pi_6-\pi_4^2)}.$$

Podstawiając $(5.3)_1$ i (5.11) do związków konstytutywnych (3.10) otrzymamy

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}\Big\{&[2z^{\kappa}_{,3}(\eta_1\lambda_\kappa+\eta_1\mu_\kappa+\eta_2\lambda_\kappa)+z^2_{,3}\lambda_2\eta_3]N^{\lambda}_{\lambda}+\\
&+[2z^{\kappa}_{,3}\eta_3(\lambda_\kappa+\mu_\kappa)+z^2_{,3}\lambda_2\eta_4]\,{}^2N^{33}\Big\}+ \qquad (5.14)\\
&+2z^{\kappa}_{,3}A^{\alpha\beta}\Big\{[\xi(\omega_1\lambda_\kappa+\omega_1\mu_\kappa+\omega_2\lambda_\kappa)+z^2(\omega_3\lambda_\kappa+\omega_3\mu_\kappa+\omega_4\lambda_\kappa)]M^{\lambda}_{\lambda}+\\
&+[\xi(\omega_3\lambda_\kappa+\omega_3\mu_\kappa+\omega_4\lambda_\kappa)+z^2(\omega_5\lambda_\kappa+\omega_5\mu_\kappa+\omega_6\lambda_\kappa)]\,{}^2M^{\lambda}_{\lambda}\Big\}+\\
&+4z^{\kappa}_{,3}[\eta_2\mu_\kappa N^{\alpha\beta}+(\xi\omega_2+z^2\omega_4)\mu_\kappa M^{\alpha\beta}+(\xi\omega_4+z^2\omega_6)\mu_\kappa\,{}^2M^{\alpha\beta}].
\end{aligned}$$

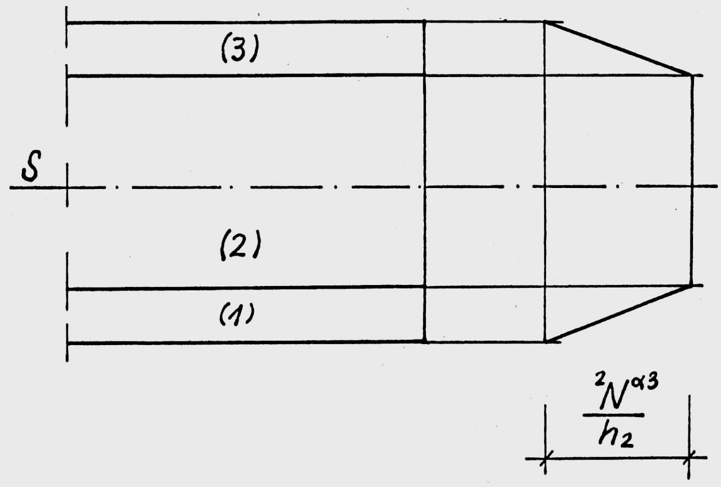
Przyjmując $h_1 = h_3 = 0$, otrzymuje się powłokę jednorodną i wzór (5.15) przyjmie postać (3.17)

Dla cienkich powłok z symetrycznie rozmieszczonymi warstwami można założyć stały rozkład naprężeń stycznych w warstwie wewnętrznej.

Wówczas

$$\sigma^{\alpha 3} = \frac{{}^{2}N^{\alpha 3}}{h_2} . \qquad (5.15)$$

W warstwach zewnętrznych rozkład naprężeń $\sigma^{\alpha 3}$ można uzupełnić wg rys. 5 /bez uwzględnienia obciążeń na powierzchniach granicznych/.



Rys. 5

Z podanego wyżej rozkładu wynika przybliżona zależność między ${}^{2}N^{\alpha 3}$ i $Q^{\alpha 3}$,

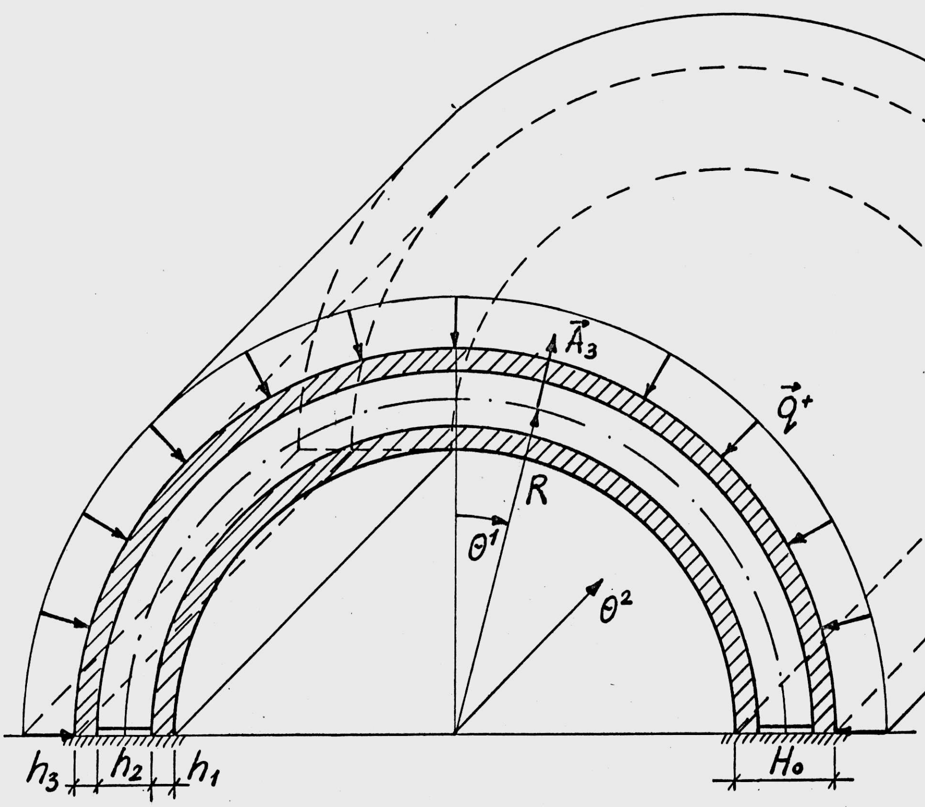
$$ {}^{2}N^{\alpha 3} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} Q^{\alpha 3} . \qquad (5.16)$$

6. PRZYKŁAD

Rozpatruje się nieskończoną, trójwarstwową powłokę walcową, pokazaną na rys. 6. Materiał powłoki jest izotropowy. Warstwy zewnętrzne o grubościach $h_1 = h_3$ charakteryzują się jednakowymi stałymi Lamégo, $\lambda_1 = \lambda_3$ i $\mu_1 = \mu_3$. Przyjmując, we wszystkich warstwach, współczynnik Poissona V = 0,25, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 , \\ \lambda_2 &= \mu_2 , \\ \lambda_3 &= \mu_3 . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Stałe obciążenie $\vec{q}^+$ jest prostopadłe do powierzchni środkowej /rys. 6./ Pomija się wpływ sił objętościowych.



Rys. 6

W tak sformułowanym zagadnieniu, przemieszczania i siły wewnętrzne są niezależne od współrzędnej Θ^2 .

Rozwiązanie uzyskuje się, stosując najpierw równania podane w rozdz. 5. /przy dodatkowym założeniu ${}_2\gamma_3 = 0$ /.

Współczynniki pierwszej i drugiej podstawowej formy powierzchni walcowej mają postać

$$A_{11} = R^2\ , \quad A_{22} = 1\ , \quad A_{12} = A_{21} = 0\ ,$$
$$A^{11} = \frac{1}{R^2}\ , \quad A^{22} = 1\ , \quad A^{12} = A^{21} = 0\ , \tag{6.2}$$

$$B_{11} = -R\ , \quad B_{22} = B_{12} = B_{21} = 0\ ,$$
$$B_1^1 = -\frac{1}{R}\ , \quad B_2^2 = B_1^2 = B_2^1 = 0. \tag{6.3}$$

Translatory obliczamy ze związków (2.6), (2.9) i (2.10), uwzględniając, że $K = 0$ i $H = -\frac{1}{2R}$.
Otrzymamy

$$\mu_1^1 = 1 + \frac{\xi}{R}\ ; \quad \mu_2^2 = 1\ , \quad \mu = 1 + \frac{\xi}{R}\ ,$$
$$(\mu^{-1})_1^1 = \frac{1}{1 + \frac{\xi}{R}}\ , \quad (\mu^{-1})_2^2 = 1\ . \tag{6.4}$$

Na powierzchni walcowej wszystkie symbole Christoffela są równe zeru. Nie znikające pochodne kowariantne będą tu [illegible] zwyczajnymi pochodnymi względem zmiennej Θ^1 .

Wektor obciążenia $\vec{F}$, wobec $(6.4)_3$, przyjmie postać

$$\vec{F} = \vec{q}^+ \mu^+ = -q\left(1 + \frac{H_0}{2R}\right)\vec{A}_3\ .$$

Wówczas, otrzymamy następujące tensory odkształcenia (2.24)

$$\varepsilon_{11} = \frac{d u_1}{d\Theta^1} + R u_3\ ,$$

$$\gamma_{11} \,{}_2\!= \frac{d\,{}_2\gamma_1}{d\Theta^1}\ , \tag{6.5}$$

$$\varkappa_{11} = \frac{1}{R}\frac{du_1}{d\theta^1} - \frac{d^2 u_3}{d(\theta^1)^2},$$

$${}_2\varepsilon_{13} = -\frac{1}{R}\,{}_2\gamma_1$$

i równania równowagi (5.4)

$$\frac{dN^{11}}{d\theta^1} + \frac{1}{R}\frac{dM^{11}}{d\theta^1} = 0,$$

$$RN^{11} - \frac{d^2M^{11}}{d(\theta^1)^2} = -q\left(1+\frac{H_0}{2R}\right), \tag{6.6}$$

$${}^2N^{13} - \frac{d}{d\theta^1}{}^2M^{11} - \frac{1}{R}{}^2M^{13} = 0.$$

Równania (6.5) i (6.6) uzupełnimy jeszcze, związkami konstytutywnymi (5.7), które mają tutaj postać

$$\begin{aligned}
N^{11} &= \varrho_1 \varepsilon_{11} + \varrho_2 \varkappa_{11} + \varrho_3\, {}_2\gamma_{11},\\
M^{11} &= \varrho_2 \varepsilon_{11} + \varrho_4 \varkappa_{11} + \varrho_5\, {}_2\gamma_{11},\\
{}^2M^{11} &= \varrho_3 \varepsilon_{11} + \varrho_5 \varkappa_{11} + \varrho_6\, {}_2\gamma_{11},\\
{}^2N^{13} &= \varrho_7\, {}_2\gamma_1,\\
{}^2M^{13} &= \varrho_8\, {}_2\varepsilon_{13}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Współczynniki $\varrho_1, \ldots, \varrho_8$ oblicza się ze wzorów

$$\varrho_1 = \frac{3\mu_1}{R^3}\left[\ln\frac{2R-h_2}{2R-H_0} + \ln\frac{2R+H_0}{2R+h_2}\right] + \frac{3\mu_2}{R^3}\ln\frac{2R+h_2}{2R-h_2},$$

$$\varrho_2 = \frac{6\mu_1}{R^3}h_1 + \frac{3\mu_2}{R^3}h_2 - R\varrho_1,$$

$$\varrho_3 = \frac{3\mu_1}{2R^3} h_2 \ln \frac{4R^2 - H_0^2}{4R^2 - h_2^2} + \frac{3\mu_2}{R^3} h_2 - \frac{3\mu_2}{R^2} \ln \frac{2R+h_2}{2R-h_2} ,$$

$$\varrho_4 = -R\,\varrho_2 ,$$

$$\varrho_5 = -R\,\varrho_3 , \qquad (6.8)$$

$$\varrho_6 = \frac{3\mu_1 h_2^2}{4R^3} \ln \frac{(2R-h_2)(2R+H_0)}{(2R+h_2)(2R-H_0)} - \frac{3\mu_2 h_2}{R^2} + \frac{3\mu_2}{R} \ln \frac{2R+h_2}{2R-h_2} ,$$

$$\varrho_7 = \frac{\mu_2 h_2}{R^2} ,$$

$$\varrho_8 = R\mu_2 \ln \frac{2R+h_2}{2R-h_2} - R^2 \varrho_7 .$$

Odkształcenia (6.5) podstawiamy do związków (6.7), a następnie do równań równowagi (6.6). Otrzymuje się stąd układ trzech zwyczajnych równań różniczkowych z niewiadomymi funkcjami u_1, u_3 i ${}_2\gamma_1$.

Równania te rozwiązuje się metodą eliminacji, przyjmując warunki brzegowe dla sztywnego zamocowania w postaci

$$u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 ,$$

$$u_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 ,$$

$$\frac{du_3}{d\theta'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{du_3}{d\theta'}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 , \qquad (6.9)$$

$${}_2\gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = {}_2\gamma_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Po rozwiązaniu, otrzymamy

$$u_1 = c_1 \sin\theta' + c_2 \operatorname{sh}\alpha\theta' + c_3 \theta' \cos\theta' + c_4 \theta' ,$$

$$u_3 = c_5 \cos\theta' + c_6 \operatorname{ch}\alpha\theta' + c_7 \theta' \sin\theta' + c_8 , \qquad (6.10)$$

$${}_2\gamma_1 = c_9 \sin\theta' + c_{10} \operatorname{sh}\alpha\theta' .$$

Parametr α , w argumencie funkcji hiperbolicznych, oblicza się ze wzoru

$$\alpha^2 = \frac{(\varrho_7 R^2 + \varrho_8)\varrho_2}{R^2(R\varrho_3^2 + \varrho_2\varrho_6)} \quad .$$

Siły wewnętrzne można teraz policzyć ze związków konstytutywnych (6.7) , uwzględniając zależności (6.5). Otrzymamy

$$\begin{aligned} N^{11} &= c_{11}\sin\theta^1 + c_{12} \,, \\ M^{11} &= c_{13}\sin\theta^1 + c_{14} \,, \\ {}^2M^{11} &= c_{15}\cos\theta^1 + c_{16}\,\mathrm{ch}\,\alpha\theta^1 + c_{17}\theta^1\sin\theta^1 + c_{18} \,, \\ {}^2N^{13} &= \varrho_7(c_9\sin\theta^1 + c_{10}\,\mathrm{sh}\,\alpha\theta^1) \,, \\ {}^2M^{13} &= -\frac{1}{R}\varrho_8(c_9\sin\theta^1 + c_{10}\,\mathrm{sh}\,\alpha\theta^1) \,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Obliczmy jeszcze z równania równowagi (5.8) siłę poprzeczną Q^{13}

$$Q^{13} = \frac{dM^{11}}{d\theta^1} = c_{13}\cos\theta^1 \,. \tag{6.12}$$

Uzyskanie jawnej postaci stałych $c_1, \dots, c_{18}$, które są zależne od współczynników $\varrho_1, \dots, \varrho_8$ i promienia R, jest trudne. Obliczenia wykonano przy pomocy maszyny cyfrowej. Wyniki, dla niektórych wartości $\frac{H_0}{R}$, $\frac{h_1}{H_0}$ i $\frac{\mu_2}{\mu_1}$, przedstawiono na wykresach poniżej.

W dalszym ciągu dla porównania, rozwiązuje się zagadnienie, przyjmując założenie Kirchhoffa - Love'a /rozdz. 2/.

Zapiszmy, niezbędne związki

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{du_1}{d\theta^1} + Ru_3 \,, \\ \varkappa_{11} &= \frac{1}{R}\frac{du_1}{d\theta^1} - \frac{d^2u_3}{d(\theta^1)^2} \,, \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN^{11}}{d\theta^1} + \frac{1}{R}\frac{dM^{11}}{d\theta^1} &= 0 \,, \\ RN^{11} - \frac{d^2M^{11}}{d(\theta^1)^2} &= -q\left(1 + \frac{H_0}{2R}\right) \,, \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$N^{11} = \varrho_1 \varepsilon_{11} + \varrho_2 \varkappa_{11} ,$$
$$M^{11} = \varrho_2 \varepsilon_{11} + \varrho_4 \varkappa_{11} . \tag{6.15}$$

Zastosowanie podanej poprzednio procedury, prowadzi do następujących rozwiązań:

$$u_1 = \frac{q(2R+H_0)}{R[8\varrho_2-(\pi^2-8)\varrho_1 R]}\,\theta^1(\pi\cos\theta^1-4) ,$$

$$u_3 = \frac{\pi q(2R+H_0)}{R^2[8\varrho_2-(\pi^2-8)\varrho_1 R]}\left(\frac{\pi}{2}-\cos\theta^1-\theta^1\sin\theta^1\right) ,$$

$$N^{11} = \frac{2\pi q\varrho_2(2R+H_0)}{R^2[8\varrho_2-(\pi^2-8)\varrho_1 R]}\cos\theta^1 - \frac{q(2R+H_0)}{2R^2} , \tag{6.16}$$

$$M^{11} = \frac{\pi q\varrho_2(2R+H_0)}{2R[8\varrho_2-(\pi^2-8)\varrho_1 R]}(\pi-4\cos\theta^1) ,$$

$$Q^{13} = \frac{2\pi q\varrho_2(2R+H_0)}{R[8\varrho_2-(\pi^2-8)\varrho_1 R]}\sin\theta^1 .$$

W celu uzyskania współrzędnych fizycznych, otrzymanych wektorów i tensorów, wykorzystuje się znane zależności [5,11]

$$\{u_{\langle 1\rangle}, {}_2\gamma_{\langle 1\rangle}\} = \frac{1}{\sqrt{A_{11}}}\{u_1, {}_2\gamma_1\} = \frac{1}{R}\{u_1, {}_2\gamma_1\} ,$$

$$u_{\langle 3\rangle} = u_3 ,$$

$$\{N^{\langle 11\rangle}, M^{\langle 11\rangle}, {}^2M^{\langle 11\rangle}\} = A_{11}\{N^{11}, M^{11}, {}^2M^{11}\} = R^2\{N^{11}, M^{11}, {}^2M^{11}\} , \tag{6.17}$$

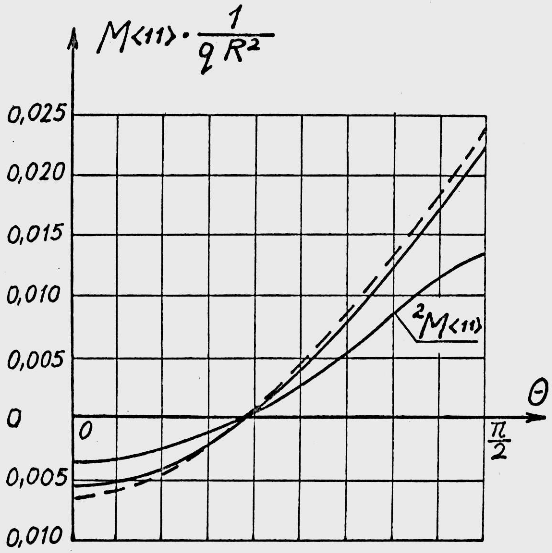
$$\{{}^2N^{\langle 13\rangle}, {}^2M^{\langle 13\rangle}, Q^{\langle 13\rangle}\} = \sqrt{A_{11}}\{{}^2N^{13}, {}^2M^{13}, Q^{13}\} = R\{{}^2N^{13}, {}^2M^{13}, Q^{13}\} .$$

Niżej przedstawiono wykresy fizycznych współrzędnych przemieszczeń i sił wewnętrznych.

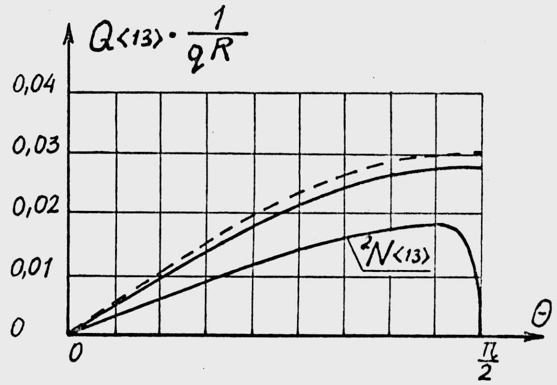
——————— rozwiązanie wg rozdz. 5

– – – – – rozwiązanie przy założeniu Kirchhoffa-Love'a.

$$\frac{H_o}{R} = \frac{1}{5}\ ,\ \frac{h_1}{H_o} = \frac{1}{4}\ ,\ \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2}$$

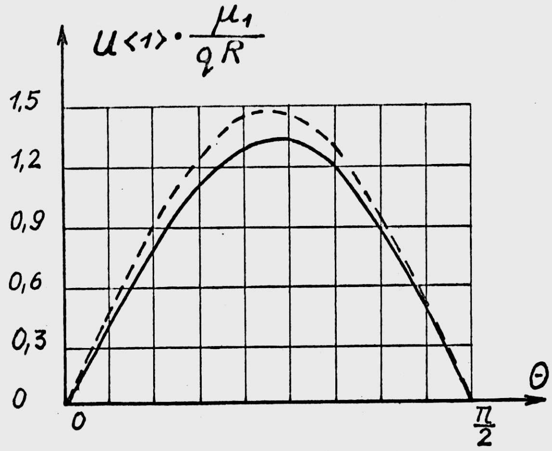


Rys. 7

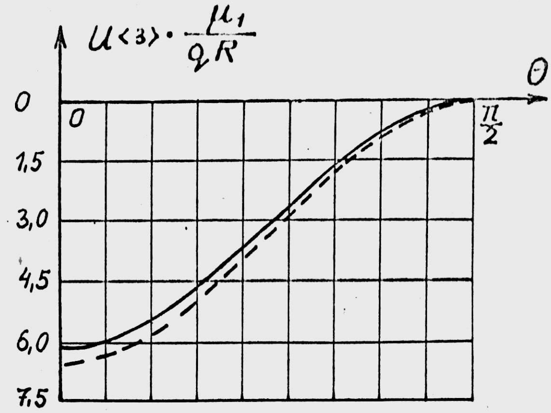


Rys. 8

$$\frac{H_o}{R} = \frac{1}{5}\ ,\ \frac{h_1}{H_o} = \frac{1}{4}\ ,\ \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{20}$$

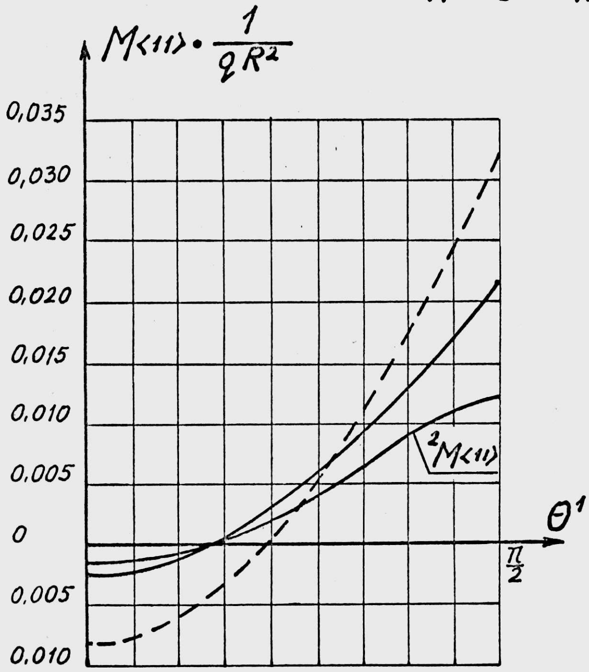


Rys. 9

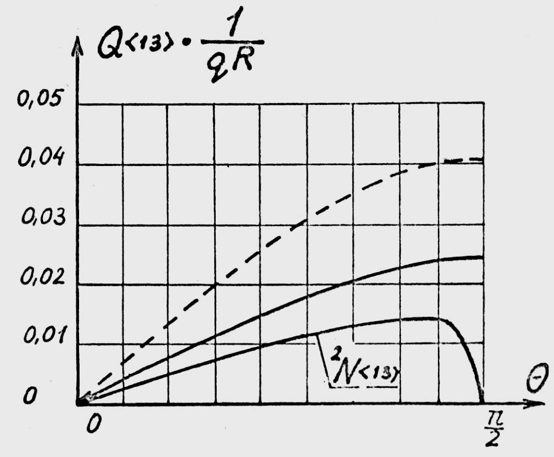


Rys. 10

$$\frac{H_0}{R}=\frac{1}{5}\,,\ \frac{h_1}{H_0}=\frac{1}{4}\,,\ \frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{1}{20}$$

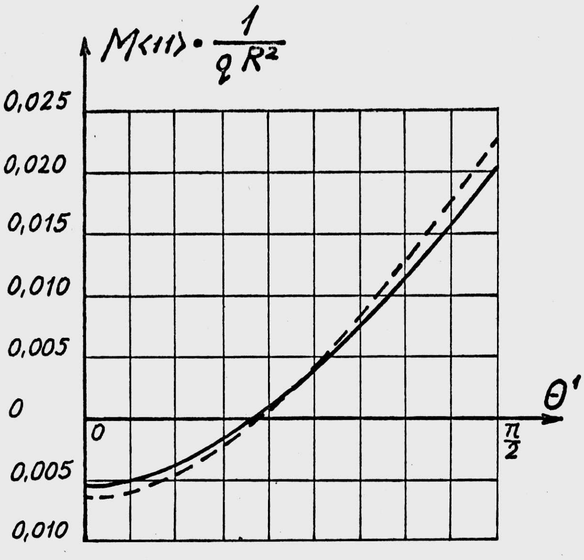


Rys. 11

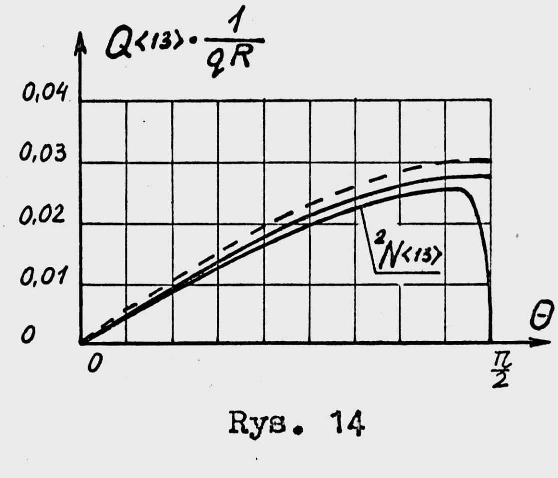


Rys. 12

$$\frac{H_0}{R}=\frac{1}{5}\,,\ \frac{h_1}{H_0}=\frac{1}{16}\,,\ \frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{1}{2}$$

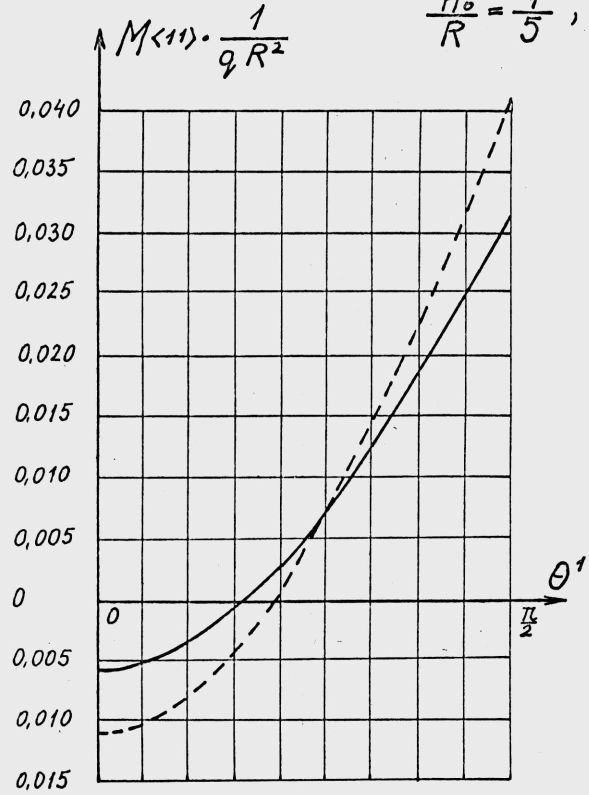


Rys. 13

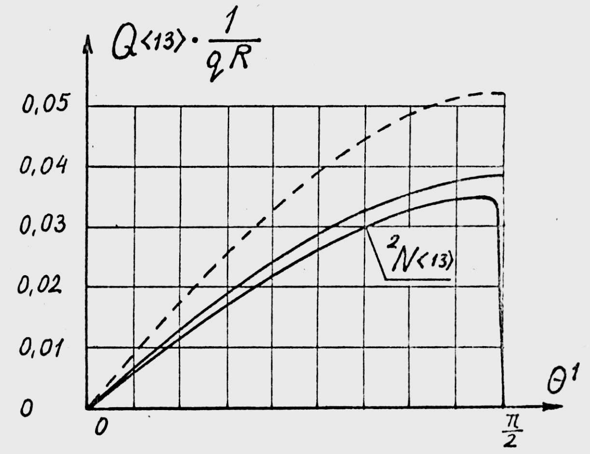


Rys. 14

$$\frac{H_o}{R} = \frac{1}{5}\ ,\quad \frac{h_1}{H_o} = \frac{1}{16}\ ,\quad \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{20}$$

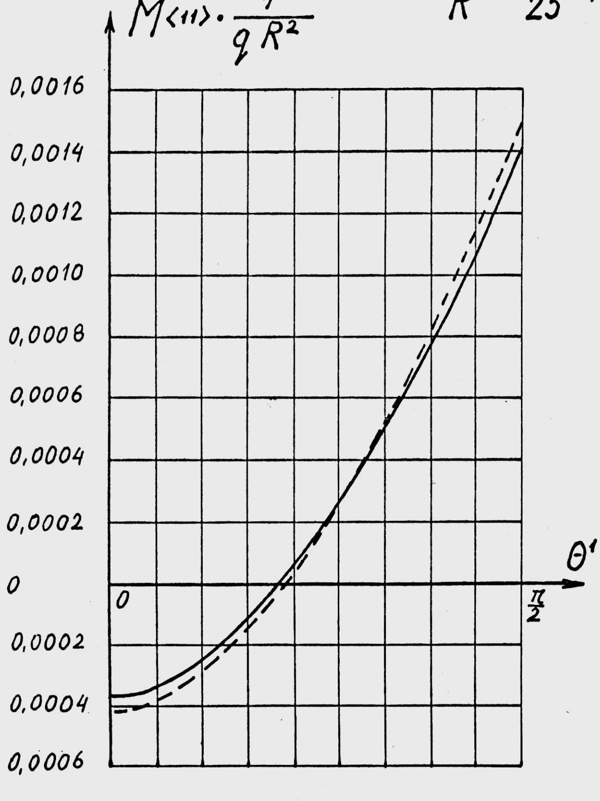


Rys. 15

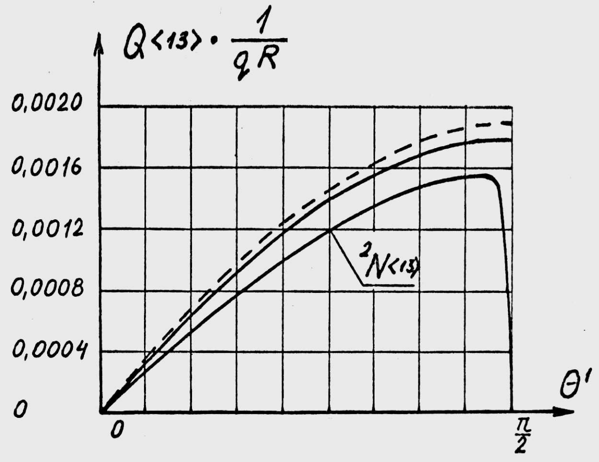


Rys. 16

$$\frac{H_o}{R} = \frac{1}{25}\ ,\quad \frac{h_1}{H_o} = \frac{1}{8}\ ,\quad \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{20}$$



Rys. 17



Rys. 18

Znaczące różnice w wartościach sił wewnętrznych i przemieszczeń, z obu metod, otrzymano przy $\frac{H_0}{R} \geqslant \frac{1}{10}$.
Gdy powłoka jest cienka $\left(\frac{H_0}{R} \leqslant \frac{1}{25}\right)$ wyniki różnią się nieznacznie / mniej niż 5% /.
Porównanie rys.7 z rys.11 lub rys.8 z rys.12 prowadzi do wniosku, że przy stosunkowo podatnej warstwie wewnętrznej $\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \ll 1\right)$ istotne jest uwzględnienie odkształceń poprzecznych. Natomiast zmiana $\frac{h_1}{H_0}$ nie ma większego wpływu na różnicę w wynikach / por. rys.11 i rys.15 /.

Z rys.18 można odczytać dla $\Theta' = \frac{4\pi}{9}$

$$ {}^{2}N^{\langle 13\rangle} = 0{,}001567\, qR \,, $$

$$ Q^{\langle 13\rangle} = 0{,}001829\, qR \,. $$

Z (5.16) znajdziemy oszacowanie

$$ {}^{2}N^{\langle 13\rangle} = \frac{6}{7} Q^{\langle 13\rangle} \,, $$

a po podstawieniu wartości $Q^{\langle 13\rangle}$ otrzymuje się

$$ {}^{2}N^{\langle 13\rangle} = 0{,}001568\, qR \,. $$

Przybliżona zależność (5.16), wynikająca z rozkładu naprężeń $\sigma^{\alpha 3}$ (rys.5), jest tutaj bardzo dobrze spełniona. Podobnie jest dla innych wartości parametrów:

$$ \frac{H_0}{R} \leqslant \frac{1}{25} \,, \quad \frac{h_1}{H_0} \leqslant \frac{1}{8} \,. $$

7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano kilka sposobów rozwiązywania powłok wielowarstwowych. Przyjęcie jednego z nich zależy od wielu czynników. Znaczenie ma tutaj rodzaj zagadnienia /grubość powłoki, obciążenie, własności sprężyste warstw itp./ jak również możliwość rozwiązania dużego układu równań różniczkowych. Przyjęcie niezależnych miar odkształceń poprzecznych w każdej warstwie (rozdz. 2) prowadzi do układu równań różniczkowych z $3 + 3 \times N_0$ niewiadomymi funkcjami przemieszczeń. /N_0 - liczba warstw/. Rozmiar zagadnienia rośnie więc szybko wraz z liczbą warstw i przerasta niekiedy możliwości obliczeniowe. Celowe jest, w uzasadnionych przypadkach, przyjęcie dodatkowych założeń i pominięcie efektów drugorzędnych /rozdz. 5/.
Pomimo uproszczeń można uzyskać dosyć dokładne rozwiązanie problemu mniejszym nakładem środków

W rozdziałach trzecim i czwartym zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia trzech lub pięciu składowych przemieszczeń i nie zależy od liczby warstw. Rozwiązania podane w wymienionych rozdziałach zasługują na uwagę również ze względu na analogię z odpowiednimi rozwiązaniami powłok jednorodnych /różnice występują tylko wwspółczynnikach związków konstytutywnych/. Można więc tutaj stosować, po niewielkiej modyfikacji, dobrze znane i sprawdzone algorytmy, a nawet programy EMC.

W rozdziałach: trzecim, czwartym i piątym wyznaczono rozkład naprężeń $\sigma^{\alpha\beta}$ dla powłok płaskich.
Podobne rezultaty można by otrzymać zakładając cienkość powłoki zakrzywionej. W tensorach odkształcenia (3.2), (4.2) i (5.3) wykorzystuje się postać translatorów (2.6) i pomija składniki z ξ^2 jako małe. W definicjach sił wewnętrznych i związkach konstytutywnych przyjmuje się przybliżone zależności

$$\mu \cong 1, \; \mu_\alpha^\beta - (\mu^{-1})_\alpha^\beta \cong \delta_\alpha^\beta .$$

Rozkłady naprężeń: (3.15), (3.16) i (5.14) przystosowuje się do powłok zakrzywionych /bez uproszczeń geometrycznych/ wstawiając w miejsce $\sigma^{\alpha\beta}$ wyrażenie $\mu \sigma^{\alpha\gamma} \mu_\gamma^\beta$ podobnie jak w [5]. Wówczas, spełnione są tożsamościowo równości wynikające z definicji sił wewnętrznych (2.27)

W przykładzie (rozdz. 6) porównano rozwiązania wg metod podanych w rozdziałach trzecim i piątym. Jako parametry zagadnienia przyjęto:

$$\frac{H_0}{R}, \ \frac{h_1}{H_0}, \ \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Analiza wykresów wykazuje, że parametr drugi - $\frac{h_1}{H_0}$ ma wpływ drugorzędny na różnice wartości sił wewnętrznych, otrzymanych z obu metod, w porównaniu z wpływem parametrów pozostałych /por. rys. 7 i rys. 13 oraz rys. 7 i rys. 11/. W przypadku powłok stosunkowo grubych i podatnej warstwy wewnętrznej różnice są duże i przekraczają 50 % (rys. 11). W omawianym przykładzie dla $\frac{H_0}{R} \leqslant \frac{1}{25}$ wyniki różnią się nieznacznie. Przy innych obciążeniach /szczególnie skupionych/ uwzględnienie odkształceń poprzecznych może mieć istotne znaczenie również w powłokach cienkich.

Warto zwrócić uwagę na dobre spełnienie zależności (5.16) co potwierdza przyjęty przybliżony rozkład naprężeń stycznych (rys. 5).

Geometryczny warunek brzegowy ${}_2\gamma_\alpha = 0$, wynikający z zasady prac przygotowanych i zastosowany w przykładzie, jest równoważny założeniu, że warstwa wewnętrzna nie przenosi, w sztywnym zamocowaniu, siły tnącej. Jest to zgodne z intuicją, jeżeli warstwy zewnętrzne są dużo sztywniejsze. Ponadto, zaburzenie wykresu siły ${}^2N^{13}$, wywołane takim warunkiem brzegowym, występuje tylko w pobliżu zamocowania. Dalej zmienności ${}^2N^{13}$ i Q^{13} są podobne.

Ogólne założenie kinematyczne przyjęte w rozdz. 2 /liniowość przemieszczeń w obrębie warstwy/ nie zapewnia równości naprężeń $\sigma^{\alpha 3}$ i σ^{33} na granicy warstw. Gdy liczba warstw jest duża różnice naprężeń w warstwach sąsiednich są niewielkie i nie spełnienie warunku ciągłości $\sigma^{\alpha 3}$ i σ^{33} nie może powodować znacznych błędów w rozwiązaniu.

Mgr inż. Kazimierz Myślecki
Instytut Inżynierii Lądowej
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
bud. A - 1, tel. 22-09-94
50-370 Wrocław

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych Instytutu Inżynierii Lądowej w 1980 r.

LITERATURA

1. Epstein M., Glockner P.G., Nonlinear analysis of multilayered shells, Int. J. of Solids and Struct., 13, 11, 1977.
2. Fung Y.C., Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa, 1969.
3. Librescu L.I., Some results concerning the refined theory of elastic multilayered shells, Rer. Roum. Sci. Techn. - Méc. Appl., 20, 1, 2, 1975.
4. Naghdi P.M., Fundations of elastic shell theory, Progress in Solid Mechanics, vol. IV, North - Holland Publ. Comp., Amsterdam 1963.
5. Naghdi P.M., The theory of shells and plates, Handbuch der Physik, vol. VIa/2, Springer Verlag, Berlin - - Heidelberg - New York 1972.
6. Sun C.T., Theory of laminated plates, J. Appl. Mech., 38, 3, 1971.
7. Woźniak Cz., Nieliniowa teoria powłok, PWN, Warszawa 1966.
8. Амбарцумян С.А., Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, Москва 1961.
9. Герштейн М.С., Геометрически нелинейные уравнения движения упругой многослойной оболочки, Механика полимеров, 5, 1973.
10. Григолюк Э.И., Коган Ф.А., Современное состояние теории многослойных оболочек, П.М., 8, 6. 1972.
11. Мак-Коннел А.Дж., Введение в тензорный анализ, Физматгиз, Москва 1963.
12. Рассказов А.О., К теории многослойных ортотропных пологих оболочек, П.М., 12, 11, 1976.
13. Сокольников И., Тензорный анализ, "Наука", Москва 1971.
14. Хорошун Л.П., О построении уравнений слоистых пластин и оболочек, П.М. 14. 10, 1978.
15. Чепига В.Е., К уточненной теории слоистых оболочек, П.М. 12, 11, 1976.

ANALYSE STATIQUE DES COQUES EN VOILE MINCE
ELASTIQUES MULTICOUCHES

Résumé

Dans cette thèse, ont été établies les équations principales statiques pour les coques en voile mince multicouches avec prise en compte des déformations transversales. Tout d'abord il faut considerer, dans chaque couche indépendemment, la masse des déformations transversales au cisaillement et des déformations transversales normales. D'après le principe des travaux virtuels, on obtient ici $3(N_0 + 1)$ équations d'équilibre (N_0 - nombre de couches). Les relations constitutives sont établies d'après la loi de Hooke.
Ensuite sont prises en compte les hypothèses de Kirchhoff-Love et est également présentée la façon de considerer de manière simplifiée, les déformations transversales. Ainsi ont été établies des équations semblables aux équations obtenues pour les coques en voile mince homogènes. Une approche spéciale a été appliquée pour les coques sandwich. Ces considérations sont illustrées par un exemple, dans lequel est peésentée la solution pour une coque en forme de cylindre infini.

Odbiorcy:	Egz.
1. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
2. Biblioteka i Ośrodek Informacji Naukowo - Téchnicznej Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej	1
3. Redakcja Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej	1
4. Promotor	1
5. Recenzenci	2
6. Ośrodki obce Politechnika Gdańska Politechnika Krakowska Politechnika Warszawska	3
7. Autor	1
Razem:	10