

Tomasz Wiśniewski

Uniwersytet Szczeciński

KONCEPCJA WYCENY OPCJI RZECZYWISTYCH METODĄ SYMULACJI MONTE CARLO

1. Wstęp

Zmniejszanie poziomu ryzyka specyficznego, na które narażone jest przedsiębiorstwo, może być realizowane wieloma metodami. Dzięki odpowiedniemu doborowi wykorzystywanej technologii, sposobów organizacji przedsiębiorstwa, warunków umów, harmonogramów działań i podziałowi skomplikowanych przedsięwzięć na etapy praktycznie każdy projekt inwestycyjny realizowany przez przedsiębiorstwo ma większą wartość niż wynikałoby to z analizy statycznej¹, prowadzonej metodami dyskontowymi (por. [Trigeorgis 1996, s. 121-124; Wiśniewski 2003, s. 28-30]). Cechy te umożliwiają dopasowanie realizacji projektu do faktycznie występujących warunków zewnętrznych i poprzez to minimalizowanie wpływu ryzyka specyficznego na działalność przedsiębiorstwa. Wybory technologii, organizacji itp. są zawsze indywidualne i odróżniają poszczególne firmy od siebie. Te charakterystyki umożliwiające elastyczne dopasowanie realizacji projektu do zmiennych warunków otoczenia nazywane są opcjami realnymi². Wycena

¹ Autor postuluje odejście od częstego w latach dziewięćdziesiątych klasyfikowania miar oceny efektywności inwestycji opartych na dyskontowaniu jako miar dynamicznych. Jak pokazuje analiza opcyjna, miary te nie uwzględniają dynamiki rozwoju sytuacji, a tylko statyczny rozkład w czasie nadwyżek operacyjnych i ryzyko systematyczne (statyczny, czyli bazujący na jednym scenariuszu – jednym zestawie danych wejściowych). Natomiast dynamika reakcji kierownictwa firmy na zmienne warunki otoczenia jest rozpatrywana w analizie opcyjnej. Z tej perspektywy zarówno tradycyjne, jak i dyskontowe metody oceny efektywności inwestycji są metodami statycznymi.

² W artykule przyjęto polskie terminy: opcje rzeczywiste lub opcje realne jako tłumaczenie angielskiego terminu *real options*.

opcji realnych jest zadaniem złożonym i natrafia na szereg trudności o charakterze zarówno metodologicznym, jak i praktycznym (por. [Wiśniewski 2004]).

Interesującą alternatywą do wyceny opcji metodami analitycznymi lub opartymi na drzewach dwu- lub wielomianowych jest zastosowanie metody symulacyjnej Monte Carlo. Metoda ta jest dziś jedną z powszechnie wykorzystywanych metod wyceny opcji finansowych. Do wzrostu jej popularności w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku przyczynił się rozwój techniki komputerowej i oprogramowania, umożliwiające wykorzystanie tej metody numerycznej na szerszą skalę i z mniejszymi kosztami.

Główna zaleta tej metody to możliwość użycia różnych funkcji opisujących zmienność instrumentu bazowego. Możliwa jest zatem wycena tą metodą opcji na instrumencie, którego zmienność opisana jest innymi równaniami niż geometryczny ruch Browna – np. ruchy Browna z powrotem do średniej lub ruchy Browna ze skokami. Ta konstatacja skłania do wniosku, że możliwe jest również podstawienie za równanie opisujące zmienność instrumentu bazowego nie tylko pojedynczego równania, ale też całego modelu opisującego zmienność wartości instrumentu bazowego. Ponieważ w przypadku opcji realnych instrumentem bazowym jest projekt inwestycyjny, więc modelem opisującym jego wartość może być model wyceny wartości projektu służący do wyceny metodą zdyskontowanych przepływów pieniężnych.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie koncepcji wyceny opcji realnych, bazującej na metodzie Monte Carlo. Poruszone zostaną również główne problemy, jakie można napotkać przy próbie wykorzystania tej metody do wyceny opcji realnych.

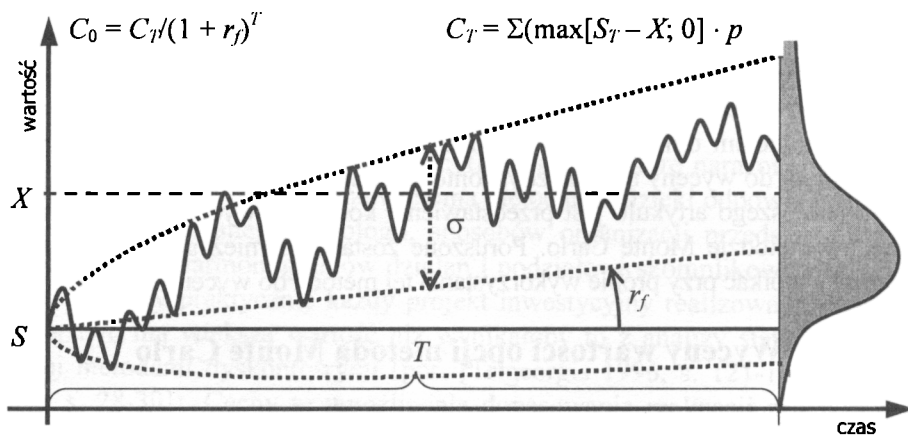
2. Wyceny wartości opcji metodą Monte Carlo

Wycena opcji metodą Monte Carlo została zaproponowana przez P. Boyla (por. [Boyle 1977, s. 323-338]). Opiera się ona na obserwacji J. Coxa i S. Rossa o neutralności wobec ryzyka środowiska wyceny opcji (por. [Cox, Ross, Rubinstein 1979, s. 229-264]). Wartość bieżąca opcji w takim otoczeniu może być obliczona poprzez zdyskontowanie stopą wolną od ryzyka wartości opcji w momencie jej wygaśnięcia. Wartość opcji w momencie wygaśnięcia jest z kolei średnią wartością opcji uzyskaną w wielu przebiegach symulacyjnych. W metodzie tej wielokrotnie generuje się bowiem ścieżki zmiany wartości instrumentu bazowego z uwzględnieniem parametrów opisujących zmienność tego instrumentu, symulując dzięki temu jego wartość końcową. W przypadku opcji kupna opcja dla każdej ścieżki będzie warta $S_T - X$, jeżeli $S_T > X$, natomiast w przeciwnym przypadku wartość opcji będzie równa zero. Ponieważ formuła opisująca zmiany wartości instrumentu bazowego (geometryczny ruch Browna – GRB) jest formułą iteracyjną i zawiera element losowy, to praktycznie każdy przebieg symulacyjny będzie generować różną ścieżkę zmian wartości, dochodząc do określonych wartości końcowych instrumentu bazowego z prawdopodobieństwem wynikającym z rozkładu logaryt-

miczno-normalnego (rys. 1 z pokazaną jedną ścieżką zmian wartości instrumentu bazowego i rozkładem końcowym wszystkich ścieżek).

Na bazie tak otrzymanej wartości końcowej instrumentu bazowego oraz warunków brzegowych charakteryzujących granicę opłacalności wykonania opcji wylicza się wartość opcji w momencie wygaśnięcia w pojedynczym przebiegu symulacyjnym. Procedurę tę powtarza się wielokrotnie w celu właściwego uwzględnienia końcowego rozkładu wartości instrumentu bazowego.

Ścieżki wartości instrumentu bazowego powinny być generowane zgodnie z równaniami opisującymi geometryczny ruch Browna. Z uwagi na dyskretny charakter symulacji musi to być dyskretna wersja równania opisująca ruchy Browna. Można się posłużyć równaniem (1), podanym w dalszej części artykułu. Zgodnie z założeniami wyceny w warunkach obojętności wobec ryzyka za oczekiwaną wartość wzrostu instrumentu bazowego przyjmuje się stopę wolną od ryzyka.



- gdzie: S – wartość instrumentu bazowego w momencie $t = 0$ (w opcji rzeczowej najczęściej jest to wartość brutto projektu inwestycyjnego),
 S_T – wartość instrumentu bazowego w momencie $t = T$,
 X – cena wykonania opcji (w opcji rzeczowej nakłady inwestycyjne na wykonanie opcji),
 T – czas trwania opcji,
 r_f – stopa dyskontowa wolna od ryzyka,
 C_0 – wartość opcji w momencie $t = 0$,
 C_T – wartość opcji w momencie $t = T$,
 p – prawdopodobieństwo zajścia scenariusza ($p = 1/M$, gdzie M to liczba iteracji wykonanych metodą Monte Carlo).

Rys. 1. Koncepcja wyceny opcji za pomocą symulacji Monte Carlo

Źródło: opracowanie własne.

Dyskretyzacja formy ciągłej GRB polega na podziale czasu życia opcji T na m równych kroków. Tak więc zachodzi równość $\Delta t = T / m$. Liczba kroków przyjęta

do opisu zmian wartości instrumentu bazowego nie powinna być zbyt mała. Praktyczne wyliczenia wykazują, iż czas życia opcji należy podzielić na co najmniej 50 kroków. Przy zbyt niskiej liczbie kroków dyskretyzujących ruch Browna otrzymuje się niedokładne wyniki, natomiast przy zbyt dużej liczbie kroków ruchu Browna rośnie zapotrzebowanie na moc obliczeniową komputera. Trzeba pamiętać, że w metodzie Monte Carlo każda ścieżka zmian wartości instrumentu bazowego symulowana jest wielokrotnie, tak więc wydłużenie symulacji pojedynczej ścieżki powoduje zmnożenie tej zmiany przez liczbę iteracji Monte Carlo.

$$S(k+1) = S(k) \cdot \exp\left((r_f - \sigma^2 / 2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon(k)\right) \quad (1)$$

gdzie: $S(i)$ – wartość instrumentu w okresie i -tym,
 r_f – stopa dyskontowa wolna od ryzyka,
 σ – odchylenie standardowe wartości instrumentu bazowego,
 $\varepsilon(i)$ – zmienna losowa o standaryzowanym rozkładzie normalnym w i -tym okresie,
 Δt – czas pojedynczego, dyskretnego kroku.

Jak wynika z przedstawionego opisu metody, jest ona stosunkowo prosta w przypadku obliczania wartości europejskiej opcji kupna. W przypadku prób ustalenia wartości opcji amerykańskich metoda Monte Carlo wymaga zastosowania specjalnych technik, które umożliwiają poznanie wartości opcji o dowolnym momencie wykonania (por. [Charnes 2000, s. 155-156]).

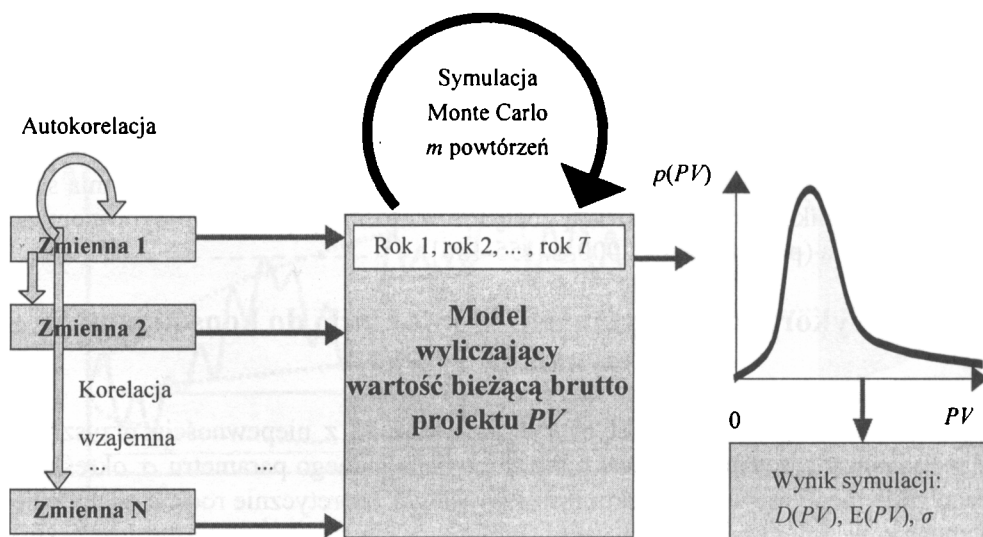
3. Wykorzystanie symulacji Monte Carlo do konsolidacji czynników ryzyka

W analizie opcji rzeczywistych ryzyko związane z niepewnością przyszłych stanów natury przedstawiane jest tylko za pomocą jednego parametru σ , określającego zmienność wartości projektu inwestycyjnego. Teoretycznie roczne odchylenie standardowe zmian wartości projektu (lub też roczna wariancja wartości projektu) kompletnie opisuje ryzyko związane z projektem. Uproszczenie to wynika z założeń metod wyceny opcji finansowych. Jednym z głównych założeń jest twierdzenie, iż zmiany wartości instrumentu bazowego (a w przypadku opcji rzeczywistych – zmiany wartości projektu inwestycyjnego) są zdefiniowane za pomocą równania geometrycznych ruchów Browna (por. [Black, Scholes 1973, s. 637-654]). Równanie to zakłada, że niepewność dotycząca kształtowania się wartości instrumentu bazowego w przyszłości zależy od jednego czynnika, którego wpływ na ten instrument da się wyrazić poprzez jeden parametr – roczne odchylenie standardowe wartości projektu od jego wartości oczekiwanej.

W realnym świecie niepewność związana z kształtowaniem wartości projektu inwestycyjnego zależy od wielu zmiennych wejściowych, które same obciążone są niepewnością i są skorelowane same ze sobą w czasie oraz z innymi zmiennymi wejściowymi. Do wyceny wartości opcji realnych zależnych od wielu czynników

można zastosować szereg szczegółowych metod, uwzględniających wiele źródeł niepewności o różnej charakterystyce. Jedną z nich jest metoda konsolidacji składników ryzyka.

Metoda konsolidacji składników ryzyka, zaproponowana przez T. Copelanda i V. Antikarova [Copeland, Antikarov 2001, s. 244-253], polega na zastosowaniu symulacji Monte Carlo do wyliczenia skonsolidowanej miary zmienności na podstawie modelu służącego do obliczenia wartości brutto projektu (rys. 2). Metoda ta umożliwia uwzględnienie więcej niż dwóch źródeł ryzyka, przy czym ryzyko to powinno mieć charakter rynkowy, co oznacza, że jego wartość ulega zmniejszeniu wraz z upływem czasu. Przykładami czynników ryzyka uwzględnianymi w tej metodzie mogą być cena, popyt lub koszty zmienne.



Rys. 2. Użycie symulacji Monte Carlo do konsolidacji zmienności

Źródło: opracowanie własne.

Do oceny skumulowanego ryzyka niezbędne jest ustalenie rozkładów zmiennych wejściowych obciążonych ryzykiem rynkowym. Zmienne te mogą być od siebie niezależne lub też podlegać autokorelacji oraz korelacji wzajemnej pomiędzy sobą. Charakterystyki te można uwzględnić w czasie losowania kolejnych scenariuszy w procedurze symulacji Monte Carlo (por. rys. 2). Otrzymany metodą symulacji Monte Carlo rozkład zmiennej wyjściowej (wartości brutto projektu) pozwala na oszacowanie różnych parametrów tego rozkładu. Odchylenie standardowe zwrotów otrzymane jako wynik symulacji może być użyte w dalszych wyliczeniach wartości opcji wieloczynnikowej jako skonsolidowana wartość zmienności wszystkich czyn-

ników ryzyka rynkowego. W dalszym etapie tej metody stosuje się tradycyjne techniki wyceny opcji, z wykorzystaniem jednego odchylenia standardowego, które zawiera w sobie skonsolidowany wpływ wszystkich czynników ryzyka.

4. Koncepcja wyceny opcji rzeczywistych bazująca na symulacji Monte Carlo

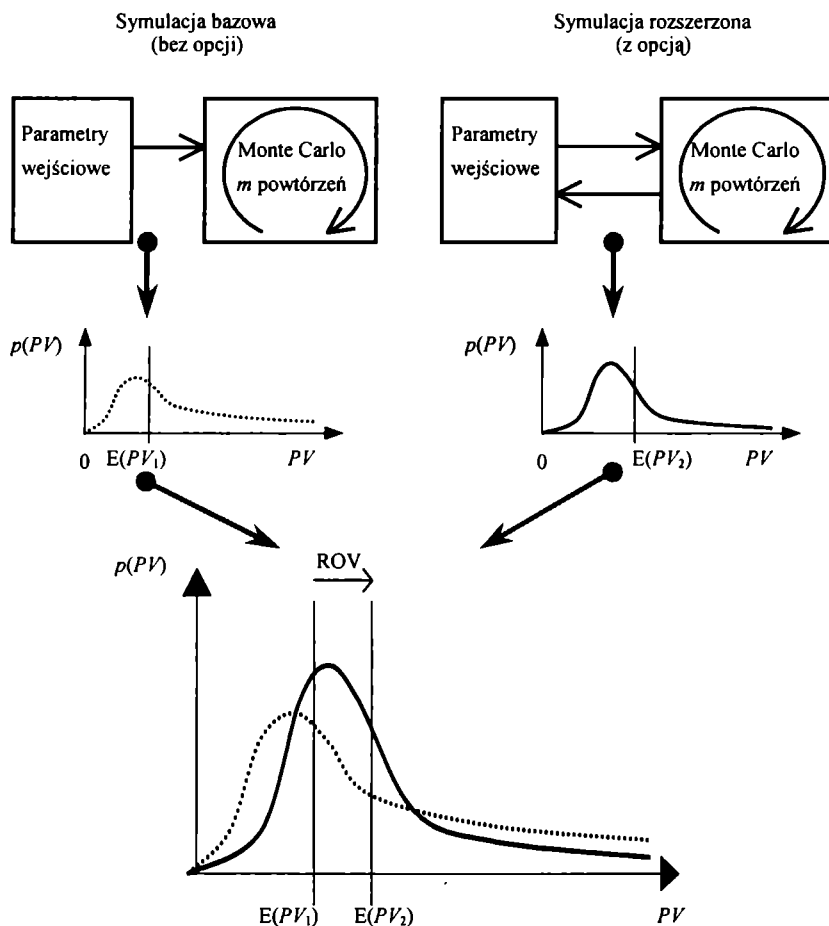
Bardziej szczegółowa analiza metody konsolidacji składników ryzyka Copelanda i Antikarova wykazuje, że w szczególnym przypadku może ona wymagać dwukrotnego użycia techniki symulacji Monte Carlo – raz w celu wyliczenia wartości skonsolidowanej zmienności wynikającej z wpływu wielu składników ryzyka na sumaryczną zmienność projektu, drugi zaś raz w celu wyliczenia wartości opcji – jeżeli technika Monte Carlo zostanie wybrana do wyceny wartości opcji rzeczywistej. Z drugiej strony przy wycenie opcji metodą Monte Carlo możliwe jest użycie dowolnego równania opisującego zmienność instrumentu bazowego. W przypadku opcji rzeczywistych instrumentem bazowym jest sam projekt inwestycyjny, a zmienność jego wartości powinna być brana pod uwagę przy wycenie opcji. Ponieważ jednak jedną z metod obliczania wartości projektu inwestycyjnego jest metoda zdyskontowanych przepływów pieniężnych, więc ze szczególnym „równaniem” opisującym zachowanie wartości projektu inwestycyjnego może być powiązanych wiele równań służących wyliczeniu wartości projektu metodą DCF.

Powyższe wnioski nasuwają pomysł obliczenia wartości opcji poprzez porównanie wyników dwóch symulacji Monte Carlo, uwzględniających wpływ wielu czynników ryzyka i różniących się zachowaniem firmy wobec opcji. Pierwsza symulacja byłaby realizowana przy założeniu braku wykonania opcji pomimo zmienności parametrów wejściowych. Symulacja ta jest zatem identyczna z symulacją stosowaną przez T. Copelanda i V. Antikarova w celu obliczenia skonsolidowanej zmienności. Tym razem jednak poszukiwanym parametrem nie jest zmienność zwrotów σ , a oczekiwana wartość brutto projektu $E(PV_1)$ (rys. 3). Ta wartość projektu bez realizacji opcji stanowi bazę porównawczą do wyliczenia wartości opcji.

Druga symulacja Monte Carlo prowadzona jest podobnie jak pierwsza, z tą różnicą, że model wyliczający wartość brutto projektu powinien zawierać formuły warunkowego wykonania opcji uaktywniających się tylko w przypadku takiego zestawu wylosowanych zmiennych wejściowych, który czyniłby opłacalnym wykonanie opcji. W tym przypadku wartości zmiennych wejściowych po wykonaniu opcji musiałyby być zmodyfikowane zgodnie z charakterem realizowanej opcji rzeczywistej.

Odejmując średnią wartość brutto projektu inwestycyjnego z opcją $E(PV_2)$ od wartości brutto projektu inwestycyjnego bez opcji $E(PV_1)$, można poznać wartość samej opcji rzeczywistej z uwzględnieniem wielu składników ryzyka. Nie jest to jednak jedyny parametr, którego analizę umożliwia opisywana metoda. Przesunięcie osi rzędnych o wartość początkowych nakładów inwestycyjnych na osi odcię-

tych pozwoli na obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu projektu ($NPV > 0$) w projekcie bez opcji i z opcją.



Rys. 3. Idea wyceny opcji wieloczynnikowych metodą dwukrotnej symulacji Monte Carlo (opis w tekście)

Źródło: opracowanie własne.

Na przykład opcja rozszerzenia działalności przy korzystnym splocie czynników decyzyjnych powinna powiększać wartość np. takiej zmiennej wejściowej jak sprzedaż, co musiałoby mieć swoje odzwierciedlenie zarówno w wyższych przychodach, jak i w wyższych kosztach. W przypadku wykonania tej opcji model powinien uwzględnić również poniesienie kosztu wykonania opcji, czyli dodatkowe nakłady inwestycyjne lub inne koszty związane z realizacją wyższej sprzedaży.

Jeżeli jednak wygenerowany w symulacji Monte Carlo scenariusz wskazywałby na nieopłacalność realizacji opcji, model zachowywałby się identycznie jak model użyty w symulacji bazowej. Otrzymana w wyniku takiej symulacji oczekiwana wartość projektu brutto $E(PV_2)$ jest wartością projektu wraz z opcją, czyli odpowiada wartości rozszerzonej projektu inwestycyjnego w terminologii przyjętej przy opisie opcji rzeczywistych [Trigeorgis 1996, s. 124]. W rzeczywistości metoda wyceny opcji realnych poprzez symulację Monte Carlo modelu wyceny DCF będzie wymagała przygotowania dwóch scenariuszy rozwoju sytuacji i określenia dla nich dwóch zestawów danych wejściowych – scenariusza bazowego bez realizacji opcji i scenariusza z realizacją opcji. Część z parametrów wejściowych nie będzie ulegać zmianie – będą to zmienne niezależne od realizowanej opcji, jak np. zmienne rynkowe, część zaś parametrów będzie musiała być zmieniona w przypadku scenariusza z uwzględnioną opcją – np. zwiększenie zdolności produkcyjnych związane z realizacją opcji rozszerzenia działalności spowoduje ukształtowanie się kosztów zmiennych i stałych na innym poziomie, różne mogą być też rozkłady zmiennych zależnych od scenariusza w porównaniu z rozkładami ze scenariusza bazowego.

Zaprezentowana metoda pozwala na wyliczenie wartości opcji zarówno kupna, jak i sprzedaży. W odniesieniu do opcji realnych związanych z inwestycjami rzeczowymi opcja kupna będzie oznaczała wszelkie możliwości związane z uruchomieniem projektu lub zwiększeniem jego wielkości, gdy będzie to korzystne. Opcje sprzedaży natomiast będą dotyczyły sytuacji, w której skala projektu będzie mogła być zmniejszana, realizacja projektu inwestycyjnego będzie mogła być zawieszana lub też firma będzie przygotowana na rezygnację z projektu inwestycyjnego przy niekorzystnym splocie czynników zewnętrznych.

5. Wady i zalety symulacyjnej metody wyceny opcji realnych

Podstawowe zalety przedstawionej koncepcji metody dwukrotnej symulacji Monte Carlo to:

- Możliwość uwzględniania wielu czynników wpływających na wartość opcji rzeczywistej – dzieje się tak dzięki wykorzystaniu w metodzie koncepcji składania czynników ryzyka.
- Możliwość uwzględniania wpływu wielu opcji realnych na wartość projektu inwestycyjnego – przygotowanie więcej niż jednego scenariusza reakcji firmy na parametry otoczenia umożliwia uruchamianie różnych, a nie tylko jednej, opcji realnej.
- Możliwość bardziej szczegółowej analizy zależności wartości opcji od parametrów wejściowych. Dotychczasowa analiza opcji rzeczywistych opierała się na analizie łącznego wpływu opcji na wartość projektu. W proponowanej metodzie można uwzględnić nieliniowość wpływu realizacji opcji na wartość projektu. Na przykład rozszerzenie projektu może mieć różną, nieliniową skalę wpływu na przychody i koszty (przychody mogą rosnać szybciej niż koszty lub odwrotnie), co spowoduje

nieliniowy wzrost wartości projektu. W związku z tym opcja rzeczywista będzie miała inną wartość niż wynika to ze sztywnych założeń wzrostu wartości projektu z opcją o stały współczynnik występujący w klasycznej analizie opcji realnych.

• Możliwość analizy większej liczby parametrów statystycznych opisujących rozkład wartości projektu z opcją realną – może być analizowana nie tylko wartość projektu, ale tak jak dzieje się to w przypadku tradycyjnych analiz symulacyjnych Monte Carlo, można analizować pozostałe parametry rozkładu wartości projektu.

Zaproponowana metoda powoduje jednak pewne trudności w jej praktycznym zastosowaniu, które wynikają z:

- potrzeby zastosowania bardziej wyrafinowanych metod symulacji, które pozwalałyby na analizę i wycenę opcji amerykańskich lub bermudzkich, a nie tylko europejskich;

- potrzeby określenia związku pomiędzy realizacją opcji a kształtowaniem się parametrów wejściowych; wykonanie opcji zmienia najczęściej realizowaną wielkość sprzedaży; model symulacyjny używany w drugim kroku proponowanej metody powinien uwzględnić wpływ tych zmian na wielkość i, być może, rozkłady statystyczne parametrów, takich jak ceny produktów i koszty produkcji używane z kolei w samej symulacji jako zmienne wejściowe; konieczność uwzględnienia takich wzajemnych relacji może powodować wiele kłopotów praktycznych w stosowaniu tej metody;

- potrzeby szczegółowej analizy związków pomiędzy parametrami wejściowymi, takimi jak wielkość produkcji lub sprzedaży, ceny produktów, koszty produkcji; w podejściu Copelanda i Antikarova związki te są opisane przez proste współczynniki korelacji i, w aspekcie czasu, autokorelacji; być może jednak związki te należałoby określić dokładniej i opisać za pomocą modeli ekonometrycznych;

- potrzeby określenia optymalnej wartości parametru decyzyjnego, po przekroczeniu której opcja zostaje wykonana.

6. Podsumowanie

W artykule zaprezentowano koncepcję dwukrotnej symulacji wartości projektu techniką Monte Carlo w celu poznania różnicy pomiędzy wartością brutto projektu inwestycyjnego z opcją i bez opcji rzeczywistej (określenia wartości opcji rzeczywistej). Przedstawione w artykule trudności i postulaty wobec zaprezentowanej koncepcji metody nie pomniejszają korzyści, jakie może przynieść jej stosowanie w praktyce. Podstawowe korzyści to umożliwienie w jednym spójnym badaniu określenia wpływu wielu czynników ryzyka na wartość opcji oraz rozwiązanie problemu złożenia wielu opcji. Koncepcja ta wymaga jednak dalszych badań i analiz pozwalających rozstrzygać zidentyfikowane problemy metodologiczne. Osobnym zagadnieniem, podobnym do problemów napotykanym w tradycyjnej analizie Monte Carlo i wycenie metodą DCF, pozostaje kwestia ustalenia wartości i

rozkładów parametrów wejściowych do proponowanej analizy symulacyjnej. W tym aspekcie należy posłużyć się tradycyjnymi rozwiązaniami.

Literatura

- Boyle P., *Options: A Monte Carlo Approach*, „Journal of Financial Economics” 1977, nr 4.
- Black F., Scholes M.S., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy” 1973, nr 81.
- Charnes J.M., *Using Simulation for Option Pricing. Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*, red. J.A. Joines, R.R. Barton, K. Kang, and P.A. Fishwick, Orlando, USA 2000 (<http://www.cc.ku.edu/~charnes/>, <http://www.wintersim.org/>, 11.04.2005).
- Copeland T., Antikarov V., *Real Options: A Practitioner's Guide*, Texere, 2001.
- Cox J., Ross S., Rubinstein M., *Option Pricing: A Simplified Approach*, „Journal of Financial Economics” 1979, nr 3, vol. 7.
- Trigeorgis L., *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, The MIT Press 1996.
- Wiśniewski T., *Podstawowe trudności zastosowania metod wyceny opcji finansowych w wycenie opcji rzeczywistych*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*. T. 2, red. W. Ronka-Chmielowiec, K. Jajuga, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1037, Wrocław 2004.
- Wiśniewski T., *Inwestycje kapitałowe w niepewnym otoczeniu*, „Przegląd Organizacji” 2003, nr 11.

CONCEPT OF MONTE CARLO SIMULATION IN REAL OPTIONS VALUATION

Summary

The paper presents the concept of real option valuation based on Monte Carlo simulation of two scenarios: one without option and one with option execution. The difference in expected values of these scenarios amounts to the value of real option. Advantages and drawbacks of real options valuation concept based on Monte Carlo simulation are analysed.