Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej Seria: Monografie

Jarosław Stryczek

A 3730 J

021.6

Zazębienia cykloidalne w budowie pomp i silników zębatych

Wrocław 1991

61

PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Machine Construction
and ExploitationNo. 61of the Technical University of WrocławNo. 61

Monographs

No. 15

1991

Jarosław STRYCZEK

Cycloidal Gears in Design of Gear Pumps and Motors



P	race Naukov	ve Instyt	utu Konstruk	cji	04
i	Eksploatacji	Maszyn	Politechniki	Wrocławskiej	61

Seria: Monografie

15



Jarosław Stryczek

Zazębienia cykloidalne w budowie pomp i silników zębatych



Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1991

Recenzenci Andrzej OLĘDZKI Tadeusz TYRLIK Andrzej WILK

Redaktor naukowy Kazimierz PIECZONKA

Opracowanie redakcyjne Janina SURMACZYŃSKA



Korekta Małgorzata NAGAŃSKA-PILAK



30 8224L/A

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1991

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324-962x

Nakład 150+70 egz. Ark. wyd. 9,75 Ark. druk. 7¹/4. Papier offset. kl. III, 70 g, B1. Oddano do druku w lutym 1991 r. Druk ukończono w marcu 1991 r. Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 173/91.

Monografie

Nr 15

1991

Maszyny hydrauliczne, pompy i silniki zębate, zazębienia cykloidalne

Jarosław STRYCZEK*

ZAZĘBIENIA CYKLOIDALNE W BUDOWIE POMP I SILNIKÓW ZEBATYCH

Podano teoretyczne podstawy projektowania zazębień cykloidalnych przydatne w budowie pomp i silników zębatych. Zanalizowano krzywe cykloidalne, opracowano metody projektowania kół, wyprowadzono i zanalizowano równania opisujące ich zarysy, wyprowadzono i zanalizowano wzory określające wydajność i pulsację wydajności pomp albo chłonność i pulsację chłonności silników. Teoretyczne podstawy zweryfikowano przez zaprojektowanie, wykonanie i przebadanie trzech typów zazębień cykloidalnych, które zastosowano w bloku sterującym, silniku wolnoobrotowym i pompie gerotorowej.

SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

a,b	- współrzędne środka okręgu	
Ъ	- szerokość koła zębatego	
е	- mimośród	
g	- przesunięcie ekwidystanty	
h <mark>*</mark>	 współczynnik wysokości zęba w kole ewolwentowym 	
h*, h*	- współczynnik wysokości zęba w kole o uzębieniu cykloidalnym	
	zewnętrznym, wewnętrznym	
h1,h2	- wysokość zęba	
Ke,Kh	- krzywizna łuku epicykloidy, hipocykloidy	
m	- moduł koła zębatego, m = 20	

^{*)} Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

- moduł cykloidy М - momenty obrotowe na kole czynnym i biernym M1,M2 - prędkość obrotowa wału napędowego n - prędkość obrotowa jarzma n, - ciśnienie p - wydajność na jeden obrót wałka pompy - wydajność właściwa q - wydajność właściwa pompy o zazębieniu epicykloidalnym, hiq_e,q_h pocykloidalnym - wydajność właściwa pompy o orbitalnym ruchu kół qor - wydajność właściwa pompy o osiach stałych qst - objętość elementerna q,, , - objętość cieczy wyparta przez jedną parę zębów 9, - wydajność teoretyczna Q_t Qu - wydajność chwilowa Qu max, Qu min, Qu śr - maksymalna, minimalna i średnia wartość wydajności chwilowej - promień koła podziałowego r1,r2 - promień koła wierzchołkowego r_{a1},r_{a2} - promień koła zasadniczego r_{b1},r_{b2} - promień koła stóp rf1,rf2 - promień koła tocznego rw1,rw2 - promień krzywizny łuku epicykloidy, hipocykloidy R, Rh Re min1, Re min2 - minimalny promień krzywizny epicykloidy we wklęsłej części łuku, w wypukłej części łuku Rh min1, Rh min2 - minimalny promień krzywizny hipocykloidy w wypukłej części łuku, we wklęsłej części łuku t - czas - odległość punktu przyporu B od bieguna zazębienia C (rys.35) 11 u_{max},u_{min} - maksymalna, minimalna wartość odległości punktu przyporu B od bieguna zazębienia C - współczynnik przesunięcia ekwidystanty v - współrzędne zarysu uzębienia x,y - współczynniki korekcji w kołach ewolwentowych x,,x, x_e,y_e - współrzędne epicykloidy x_e,y_e - pochodne epicykloidy pierwszego rzędu - pochodne epicykloidy drugiego rzędu x, y, - współrzędne hipocykloidy x_h,y_h xeke, yeke - współrzędne ekwidystanty epicykloidy xekh, yekh - współrzędne ekwidystanty hipocykloidy - współrzędne rodziny epicykloid Xre, Yre - współrzędne rodziny hipocykloid xrh, yrh

z1, z2	-	liczba zębów
α, α,	-	kąt obrotu koła o uzębieniu zewnętrznym, wewnętrznym
γ່ 🗍	-	kąt obrotu mimośrodu e
δ	-	współczynnik nierównomiern ośc i wydajn ości
8_, 8 _h	-	współczynnik nierównomierności wydajności pompy o zazębieniu
~		epicykleijalnym, hipocykloidalnym
ŋ	-	kąt cykloidy, sprawność ogólna pompy
n _{en} , n _{eh}	-	kąt określający punkt przegięcia epicykloidy, hipocykloidy
η _{e min1} ,	l _e	min2 - kąt określający położenie minimalnych promieni krzy-
		wizn epicykloidy
η _{h min1} ,	h	min2 - kąt określający położenie minimalnych promieni krzy- wizn hipocykloidy
ຖູ	-	sprawność objęt ościowa
λ	-	współczynnik skrócenia cykloidy ($\lambda = OM/\rho$, rys. 14)
ω,,ω,	-	prędkości kątowe koła o uzębieniu zewnętrznym, wewnętrznym
ρ΄	-	promień koła obtaczanego
ξ	-	kąt środkowy łuku koła (rys. 18b,d).

1. ROZWÓJ KONSTRUKCJI POMP I SILNIKÓW ZEBATYCH

Pierwowzorem współczesnej zębatej maszyny wyporowej, mogącej pracować jako pompa lub silnik hydrauliczny, jest pompa zębata (rys. 1a)[47]



Rys. 1. Pierwowzory pomp zębatych wg[47]: a) pompa konstrukcji Keplera z roku 1604, b) pompa konstrukcji Pappenheima (ok. 1720 r.)
Fig. 1. Prototypes of gear pumps after [47]: a) pump designed by Kepler in 1604, b) pump designed by Pappenheim (about 1720).

wynaleziona przez J. Keplera w 1604 r. Zespół wirnikowy składa się z pary współpracujących kół zębatych o zazębieniu zewnętrznym i zarysie zęba określonym przez łuki okręgu. Obracające się w kadłubie koła przeno-



szą ciecz obwodowo we wrębach międzyzębnych z otworu ssawnego do tłocznego. Pompę tę zastosowano do tłoczenia wody w fontannach ogrodowych. Szerszego zastosowania nie znalazła ona również 120 lat później, po udoskonaleniu przez Pappenheima (rys. 1b)[47]. Nie było jeszcze prasy hydraulicznej pomysłu J. Bramaha, która powstała dopiero w 1796 r. i zapoczątkowała nową specjalność techniczną - napęd hydrauliczny.

Uzyskanie wyższych ciśnień w pompach zębatych nie było wówczas możliwe ze względów technologicznych. Zapewnienie szczelności obwodowej obracających się w kadłubie kół było bowiem przy ówczesnych możliwościach wykonawczych trudne do zrealizowania. Łatwiej było uszczelnić tłok w cylindrze za pomocą skórzanego pierścienia samouszczelniającego. Nic więc dziwnego, że pompy zębate jako generatory energii w hydraulicznych układach napędowych znalazły szersze zastosowanie dopiero w bieżącym stuleciu. Stało to się możliwe dzięki udoskonalonym metodom obróbki zarówno kół zębatych, jak i otworów, jakie zaczęto wprowadzać na przełomie 19 i 20 wieku.

Współczesny kształt konstrukcyjny uzyskały pompy zębate o zazębieniu zewnętrznym i ewolwentowym zarysie zębów dopiero w 1936 r., kiedy firma Roth-Lauck wprowadziła kompensację luzów osiowych. Na rysunku 2a przedstawiono przykładową konstrukcję nowoczesnej pompy tego typu. Jest to pompa typu PZ3 produkowana przez Kombinat PZL "Hydral" we Wrocławiu [50]. Jej konstrukcja jest trójpłytowa. Płyty: przednia 1, okularowa 2 i tylna 3 połączone śrubami 8 tworzą kadłub pompy. Wewnątrz płyty okularowej znajduje się para identycznych kół zebatych 4 i 5 o zazębieniu zewnętrznym i ewolwentowym zarysie zębów. Koło czynne 4 z wałkiem 7 i bierne 5 są ułożyskowane ślizgowo w łożyskach 6 z tulejami bimetalicznymi. Łożyska te są dociskane do powierzchni czołowych kół, wskutek tego gwarantują szczelność wewnętrzną pompy i dużą sprawność, nawet w czasie długotrwałej eksploatacji przy obciążeniach 25 MPa. Pompy tego typu ma-

Rys. 2. Konstrukcja pomp zębatych o zazębieniach ewolwentowych: a) pompa typu PZ3 (PZL "Hydral", Wrocław):1 - płyta przednie 2 płyta okularowa, 3 - płyta tylna, 4 - koło zębate czynne, 5-ko-ło zębate bierne, 6 - łożysko, 7 - wał napędowy, 8 - śruba, b) pompa firmy Eckerle (RFN): 1 - płyta przednia, 2-płyta środ-

b) pompa firmy Eckerle (RFN): 1 - płyta przednia, 2-płyta środ-kowa, 3 - płyta tylna, 4 - koło zębate czynne, 5 - koło zębate bierne, 6 - wał napędowy, 7 - łożysko, 8 - wkładka sierpowa, 9-trzpień, 10 - płytka, 11 - pierścień, 12 - wkładka, 13 - śruba, c) pompa firmy Vickers (RFN)
Fig. 2. Construction of involute gear pumps: a) PZ3 type pump (PZL "Hydral", Wrocław): 1 - front plate, 2 - plate,3-back pla-te, 4 - driver, 5 - driven wheel, 6 - bearing, 7 - drive shaft, 8 - screw, b) pump produced by Eckerle (West Germany):1 - front plate, 2 - central plate, 3 - back plate, 4 - driver, 5 - driven wheel, 6 - drive shaft, 7 - bearing, 8 - sickle element, 9 -mandrel, 10 - plate, 11 - ring, 12 - insert, 13 - screw,c) pump produced by Vickers (West Germany) produced by Vickers (West Germany)

ją prostą i zwartą konstrukcję, są tanie, a więc są najczęściej stosowane w hydraulicznych układach napędowych i sterujących maszyn i urządzeń wszelkiego typu. Większość wytwórców produkuje je w wielkich seriach (kilkaset tysięcy rocznie), a sam proces produkcyjny jest wysoce zautomatyzowany.

Pozycja jaką zajmują pompy zębate w porównaniu z innymi typami pomp wyporowych długo jeszcze, jak się wydaje, nie będzie zagrożona. Nie zostały bowiem wyczerpane wszystkie możliwości, jakie te konstrukcje stwarzają. Przede wszystkim chodzi o to, że mogą pracować z bardzo dużymi prędkościami obrotowymi, znacznie większymi od tych, jakie mają produkowane dziś silniki, a szczególnie silniki spalinowe. Im wyższe obroty, tym większa jest gęstość strumienia generowanej przez pompę energii ciśnienia, odniesionej do jednostki masy pompy. Zwiększenie prędkości obrotowej umożliwia również zwiększenie sprawności objętościowej pompy.

W ostatnich latach obserwuje się coraz większe zainteresowanie, znanymi już w okresie międzywojennym, pompami zębatymi o zazębieniu wewnętrznym. Współczesną pompę tego typu, produkowaną przez firmę Eckerle z RFN [50], przedstawiono na rysunku 2b. Jest to również konstrukcja trójpłytowa. W płycie środkowej 2 pracują koła o ewolwentowym zazębieniu wewnętrznym. Pompa jest zamknięta płytą przednią 1 i tylną 3. Uzębione zewnętrznie koło czynne 4, stanowiące całość z wałkiem napędowym 6,współpracuje z uzębionym wewnętrznie wieńcem 5. Koło czynne jest łożyskowane ślizgowo w łożyskach 7, natomiast wieniec uzębiony jest prowadzony przez elementy 8, 10 i 11. Taka konstrukcja umożliwia kompensację luzów osiowych i promieniowych. Kompensację luzów osiowych zapewniają, dociskane hydraulicznie do powierzchni czołowych obu elementów zespołu wirnikowego, płytki kompensacyje 10. Kompensację luzów promieniowych uzyskuje się za pomocą pierścienia 11, będącego pod działaniem ciśnienia tłoczenia i dociskanego do jego cylindrycznej powierzchni zewnętrznej.

Zainteresowanie projektantów oraz użytkowników maszyn i urządzeń z napędem hydraulicznym pompami o zazębieniu wewnętrznym tłumaczy się tym, że mają one liczne zalety w porównaniu z pompami o zazębieniu zewnętrznym, a mianowicie:

- mają większą zwartość konstrukcji, a przez to mniejszą masę własną na jednostkę generowanej energii ciśnienia,

- mogą mieć mniejszą liczbę zębów koła czynnego, a przez to zasadniczo zmniejszoną częstość generowanych drgań decydujących o uciążliwości hałasu,

- umożliwiają istotne zmniejszenie objętości przestrzeni zasklepionej, powstającej między współpracującymi zębami, a tym samym zmniejszenie amplitudy obciążeń zębów, - zapewniają zwiększenie kątów środkowych, odpowiadających obszarowi napełniania wrębów międzyzębnych w komorze ssawnej, a tym samym prędkości ich napełniania, a więc eliminują możliwość występowania kawitacji,

 umożliwiają zasadnicze zmniejszenie współczynnika nierównomierności wydajności ô.



Rys. 3. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności & od liczby zębów koła biernego z₂, dla różnych liczb zębów koła czynnego z₁ w pompach o zazębieniu ewolwentnym
Fig. 3. Dependence of delivery irregularity factor & upon number of teeth, of a driver z₁ and a driven wheel z₂ for pumps with involute gearing

Ostatnią z wymienionych zalet można najogólniej wyjaśnić wykresami przedstawionymi na rysunku 3 [27],[31]. Wynika z nich, że dla zazębień wewnętrznych (wykresy po lewej stronie rysunku) współczynnik nierównomierności wydajności δ przyjmuje wartości o rząd mniejsze niż dla zazębień zewnętrznych (wykresy po prawej stronie rysunku). Drugą prawidłowością, widoczną z rysunku, jest to, że wartość współczynnika δ maleje w miarę zmniejszania się różnicy liczb zębów z₂ - z₁, kół biernego i czynnego.

W budowie przekładni zębatych o ewolwentowych zazębieniach wewnętrznych różnica liczb zębów $z_2 - z_1$ może być zmniejszona do jedności [17]. Wymaga to zastosowania zębów niskich ($h_a^* < 1$) i dużych wartości współczynników korekcji zarysu x_1, x_2 . W budowie pomp i silników zębatych warunków tych spełnić nie można. Zmniejszenie współczynnika wysokości zęba h_a^* powoduje istotne zmniejszenie objętości komór międzyzębnych, a więc zasadnicze zmniejszenie wydajności właściwej. Zwiększe-



Rys. 4. Zespoły wirnikowe pomp zębatych o zazębieniach wewnętrznych nieewolwentowych o zazębieniu: a) Truningera produkcji firmy Bucher (RFN), b) trochoidalnym produkcji firmy Zollern (RFN), c) logaryt-micznym pompy typu Pigott, d) utworzonym przez łuki kołowe
Fig. 4. Rotor assemblies of non-involute inner gear pumps with:
a) Truninger gearing produced by Bucher (FRG), b) trochoidal gearing produced by Zollern (FRG), c) logarithmic gearing from Pigott-type pump, d) gearing formed by circular arcs

nie współczynników korekcji x₁ i x₂ prowadzi do zwiększenia przestrzeni zasklepionej, co wobec utrudnionego konstrukcyjnie jej odciążenia powoduje dalsze zmniejszenie wydajności oraz cyklicznie pojowiające się obciążenia dynamiczne kół. Oprócz tego nie rozwiązany jest problem dotyczący szczelnego oddzielenia przestrzeni ssawnej i tłocznej. Nie ma bowiem miejsca na niezbędną do tego wkładkę sierpową między współpracującymi kołami, zamykającą międzyzębne komory wyporowe. Z tego też powodu minimalna różnica liczb zębów dla pomp o ewolwentowym zazębieniu wewnętrznym nie schodzi praktycznie poniżej 7. Przykładową konstrukcję takiej pompy, produkowanej przez firmę Vickers z RFN, przedstawiono na rysunku 2c.

Dalsze zmniejszenie różnicy zębów z $_2$ – z $_1$ można uzyskać przez stosowanie zazębienia nieewolwentowego. Na rysunku 4a przedstawiono pompę,

produkowaną przez firmę Bucher (RFN), w której zęby mają zarys specjalny, nazywany przez wytwórcę zarysem Truningera. Koło o uzębieniu zewnętrznym ma zęby podobne do trapezu, natomiast koło o uzębieniu wewnętrznym ma zęby ukształtowane przez łuki o bardzo dużym promieniu krzywizny. Zarys ten umożliwia zmniejszenie różnicy liczb zębów do wartości $z_2 - z_1 = 4$, z zachowaniem zasady szczelnego oddzielenia przestrzeni ssawnej od tłocznej za pomocą wkładki sierpowej.

Różnicę liczb zębów $z_2 - z_1 = 2$ przyjęto w pompie zębatej, produkowanej przez firmę Zollern (RFN), pokazanej na rysunku 4b [3]. Pompę tę wytwórca nazywa trochocentryczną, a zarys zębów trochoidalnym. W rzeczywistości jest to zazębienie hipocykloidalne o łukach połówkowych [4], [29],[30].

Na rysunku 4c przedstawiono pompę typu Pigott, w której zęby mają zarys logarytmiczny [32]. Różnica liczb zębów została tu zminimalizowana i wynosi $z_2 - z_1 = 1$. Wartość tę można również osiągnąć po zastosowaniu zazębienia o zarysie utworzonym przez łuki kołowe pokazane na rysunku 4d [23]. Obie te konstrukcje nazywane są w literaturze anglosaskiej, a często także w polskiej, pompami gerotorowymi. Terminem tym zwykło się określać pompy o zazębieniu wewnętrznym o osiach stałych, dla których $z_2 - z_1 = 1$, a zarys zęba jest nieewolwentowy. Pierwsze tego typu konstrukcje, mogące pracować jako pompy i jako silniki, opatentowano w latach dwudziestych w USA.

Najszersze zastosowanie w konstrukcji pomp i silników gerotorowych znalazły zazębienia cykloidalne. Przez pojęcie to tradycyjnie rozumie się takie zazębienie, w którym głowę zęba opisuje wycinek łuku epicykloidy zwyczajnej, stopę zaś wycinek łuku hipocykloidy zwyczajnej. Dotyczy to zarówno kół o zazębieniu zewnętrznym, jak i wewnętrznym (rys.5a). Zazębienia tego typu są jednak dla pomp i silników hydraulicznych nieprzydatne [25], [26] . Na rysunku 5b przedstawiono koła, również w układzie zazębienia zewnętrznego i wewnętrznego, w których zarys zębów opisują pełne łuki krzywych cykloidalnych; głowę zęba opisuje łuk epicykloidy, stopę zaś łuk hipocykloidy. Para kół uzębionych zewnętrznie według rysunku 5b, jest wykorzystywana w budowie pomp niskociśnieniowych, stosowanych do transportu cieczy. Pompy te są znane w literaturze pod nazwą pomp kłykciowych. Kolejnym etapem w kształtowaniu zarysów uzębienia byto wykorzystywanie całych zamkniętych krzywych epi- i hipocykloidalnych lub ich ekwidystant (rys. 5c). Umożliwia to w przypadku kół o zazębieniu wewnętrznym uzyskanie minimalnej możliwej różnicy liczb zębów z, - $-z_1 = 1$.

Charakterystyczne przykłady zazębień cykloidalnych zastosowanych w budowie pomp i silników gerotorowych zestawiono według dostępnych katalogów i prospektów firmowych na rysunku 6. Na rysunku 6a pokazano



Rys. 5. Zazębienia cykloidalne uformowane przez: a) wycinki łuków cykloid, b) całe łuki cykloid, c) zamknięte krzywe cykloidalne Fig. 5. Cycloidal gearings formed by: a) cycloid arc sectors, b) entire cycloid arcs, c) closed cycloidal curves



Pol. Wrock Biblioteka

Rys. 6. Typowe zespołu kół o zazębieniach cykloidalnych stosowane w bu-dowie pomp i silników gerotorowych: a) pompy paliwowej silników Perkin-sa, produkowanej przez firmę Concentric Pumps Ltd Birmingham (Wielka Brytania), b,e,f,g) pomp smarowniczych produkowanych przez firmę Zahn-radfabrik (RFN), c) pompy gerotorowej produkcji firmy Heller (RFN), d) pompy gerotorowej produkcji firmy Double A (USA) Fig. 6. Tipical gearsets with cycloidal gearing used in gerotor pumps and motors: a) from fuel pump produced by Concentric Pumps Ltd.Birming-ham (Great Britain) and used in Perkins engines, b,e,f,g) from lu-bricating oil pumps produced by Zahnradfabrik (West Germany)c) from ge-

bricating oil pumps produced by Zahnradfabrik (West Germany)c) from ge-rctor pump produced by Heller (West Germany), d) from gerotor pump pro-duced by Double A (USA)











e)





Rys. 7. Rozwiązania konstrukcyjne zespołów kół cykloidalnych pracujących wg zasady ruchu orbitalnego: a) mikrosilnika typu OML produkcji firmy Danfoss (Dania), b) bloków sterujących typu Orbitrol produkcji firmy Danfoss (Dania), c,d,e,f) silników typu Orbit produkcji firmy Danfoss (Dania),g) silników planetarnych typu MZ produkcji firmy Rexroth (RFN)

Fig. 7. Design of cycloidal gearsets whose operation is based on orbital motion: a) from micromotor of OML-type produced by Danfoss (Danemark), b) from steering units of Orbitrol-types produced by Danfoss (Danemark), c,d,e,f) from motors of Orbit-type produced by Danfoss (Danemark), g) from planetary motors of MZ-type produced by Rexroth (FRG)

zespół kół o liczbach zębów $z_1/z_2 = 3/4$, który firma Concentric Pumps Ltd, Birmingham (Wielka Brytania) zastosowała w pompach paliwowych do silników Perkinsa. Z kolei na rysunku 6b przedstawiono zespół kół o liczbach zębów $z_1/z_2 = 4/5$ zastosowany przez firm Zahnradfabrik Friedrichshafen AG (RFN) w pompach smarowniczych. Oba przedstawione zespoły wirnikowe są przeznaczone do pracy przy niskim ciśnieniu tłoczenia (1,5 MPa), z prędkościami obrotowymi 1000-3000 obr./min i zapewniają natężenie przepływu od kilku do kilkunastu dm³/min. Zespół kół zębatych $z_1/z_2 = 6/7$, pokazany na rysunku 6c, zastosowała w swych pompach gerotorowych firma Heller (RFN). Pompy te pracują przy znacznie wyższych ciśnieniach tłoczenia, dochodzących do 16 MPa. Stopniując szerokości kół zębatych, uzyskuje się wydajności w zakresie 4-50 dm³/min, przy prędkości obrotowej wału n = 1500 obr./min. Zespół kół o liczbie zębów $z_1/z_2 = 8/9$, pokazany na rysunku 6d, zastosowano w pompach gerotorowych produkowanych przez firmę Double A (USA). Pompy te mogą pracować przy ciśnieniach tłoczenia dochodzących do 10-12 MPa, z prędkościami obrotowymi 900-2000 obr./ml i, zapewniając wydajność od kilkunastu do stu dm³/min. Na rysunkach 6e,f,g pokazano zespoły kół cykloidalnych o liczbach $z_1/z_2 = 10/11$; 12/13; 13/14. Zespoły te stosuje w swoich pompach, wspomniana już wyżej, firma ZF Friedrichshafen. Są to pompy niskociśnieniowe, pracujące przy ciśnieniach tłoczenia Go 1,5 MPa, z prędkościami obrotowymi rzędu 1000-3000 obr./min. Mają one wydajności nominalne od kilku do kilkudziesięciu dm³/min, w zależności od liczby zębów i szerokości kół.

Pod koniec lat pięćdziesiątych firma Char-Lynn (USA) opatentowała zespół dwoch kół o zazębieniu wewnętrznym i cykloidalnym zarysie zębów, współpracujących według zasady ruchu orbitalnego. Oznacza to, że koło o uzębieniu zewnętrznym, znajdujące się wewnątrz nieruchomego pierścienia uzębionego wewnętrznie, porusza się ruchem orbitalnym wokół własnej osi. Koła te są stosowane w budowie wolnoobrotowych silników zębatych typu Orbit (rys.7c,d,e,f), mikrosilników (rys.7a) oraz wzmacniaczy momentu i bloków sterujących typu Orbitrol (rys.7b). Produkcję licencyjną tych elementów na kraje Europy rozwinęła duńska firma Danfoss, od której licencję przejęła Fabryka Maszyn Rolniczych "Agromet-Pilmet" we Wrocławiu. Na rysunku 7g przedstawiono zasadę działania silnika orbitalnego typu MZ, produkowanego przez firmę Rexroth (RFN), określanego jako silnik planetarny [49].

Z dokonanego przejlądu konstrukcji wynika, że przyjęcie zazębień cykloidalnych umożliwiło powstanie nowego typu jednostek wyporowych, coraz szerzej stosowanych w budowie maszyn. Są stosowane w hydraulicznych układach napędowych jako generatory energii, a także jako pompy paliwowe i smarownicze. Wprowadzenie ruchu orbitalnego uzębionego zewnętrznie koła umożliwiło zastosowanie tych jednostek wyporowych jako silników wolnoobrotowych, sprzęganych bezpośrednio z odpowiednim mechanizmem maszyny roboczej. Jednostki te są również powszechnie wykorzystywane jako bloki sterujące oraz wzmacniacze momentu w mechanizmach kierowniczych samojezdnych maszyn roboczych, a także pojazdów.

2. CEL PRACY

Pompy zębate o zazębieniach ewolwentowych można uznać za konstrukcje niemal doskonałe. Stan piśmiennictwa z tego zakresu jest bardzo bogaty. Prawie wszystkie problemy dotyczące konstrukcji i technologii są szczegółowo opracowane. Stało się to możliwe również dzięki temu, że wykorzystano opracowania teoretyczne i doświadczenia technologiczne z zakresu budowy przekładni zębatych. Bogata jest również literatura na temat wpływu wszystkich wielkości charakteryzujących zazębienia ewolwentowe na parametry hydrauliczne pomp [6],[8],[9],[24],[45],[46],[50]. Dobrze już wiadomo, czego od elementów tego typu można oczekiwać oraz jakie są granice ich stosowalności ze względu na wydajność, obciążenia, sprawność i trwałość ruchową.

Literatura na temat zazębień cykloidalnych, mimo że są równie dawno znane jak zazębienia ewolwentowe, jest raczej skromna. Starsze podręczniki z zakresu przekładni zębatych podają co najwyżej podstawy geometrii i kinematyki zazębień, niewiele szerzej od tego, co można znaleźć w poradnikach matematycznych na temat krzywych opisujących zarys uzębienia. Nowsze źródła nie zawierają nawet tego. Poprzestają na wzmiankach, że zazębienia cykloidalne są możliwe, lecz rzadko stosowane [18]. W dostępnej literaturze spotyka się jedynie stwierdzenia o stosowaniu zazębień cykloidalnych w budowie przekładni obiegowych lub falowych [11], [12],[46].

Nieliczne tylko prace podejmują temat zazębień cykloidalnych w budowie pomp i silników hydraulicznych. Skupiają się zwykle na jednym konkretnym rozwiązaniu przyjętym do produkcji [4],[7],[19],[21],[22],[49]. Większość z nich ma charakter informacyjny lub reklamowy. Nie zawierają one żadnych informacji na temat zasad projektowania zazębień, szczegółów konstrukcyjnych kół i metod ich wytwarzania. Traktuje się je jako tajemnicę przemysłówą. Przykładem tego może być firma Danfoss, znany europejski producent wolnobieżnych silników hydraulicznych typu Orbit oraz bloków kierowniczych typu Orbitrol, w których są zazębienia cykloidalne. Firma ta sprzedała licencję na te wyroby zakładom "Agromet-Pilmet" we Wrocławiu, wyłączając jednak z licencji podstawowy zespół kół zębatych i zmuszając licencjobiorcę do ich zakupu u siebie.

¥ dostępnej literaturze naukowo-technicznej można znaleźć co najwyżej przybliżone wzory na obliczanie wydajności pomp o zazębieniach cykloidalnych [19], [20]. Są to jednak zależności nieprzydatne do analiz porównawczych i oceny wpływu rodzaju zarysu uzębienia i konstrukcji kóż cykloidalnych na parametry użytkowe, tj. wydajność pompy oraz jej nierównomierność.

W tej sytuacji jako cele pracy przyjęto:

1. Opracowanie teoretycznych podstaw projektowania zazębień cykloidalnych, a w szczególności:

- ustalenie ogólnych zasad projektowania cykloidalnych zarysów uzębienia

- opracowanie zasad konstruowania kół (równania zarysu zębów, analiza kształtu uzębienia i dobór jego parametrów dla różnych typów zazębień cykloidalnych oraz określenie wymiarów kół)
- wyprowadzenie jednolitych uniwersalnie obowiązujących zależności na wydajność i współczynnik jej nierównomierności dla pomp o zazębieniach cykloidalnych
- określenie wpływu zarysu i parametrów geometrycznych zazębienia na wydajność i nierównomierność wydajności pomp zębatych o cykloidalnym zazębieniu wewnętrznym
- dokonanie analizy porównawczej poszczególnych typów pomp i silników pod względem ich wydajności i współczynnika nierównomierności wydajności
- zestawienie wytycznych do projektowania kół o zazębieniach cykloidalnych dla pomp i silników hydraulicznych.

 Weryfikację zaproponowanych metod projektowania zazębień cykloidalnych przez:

- zaprojektowanie kół według wyprowadzonych zależności oraz ich wykonanie i zabudowa w silnikach wolnobieżnych typu Orbit, a także w blokach sterujących typu Orbitrol w miejsce kół dotychczas importowanych
- opracowanie metod wykonawstwa wielkoseryjnego za pomocą skonstruowanych do tego celu narzędzi oraz wytypowanego i odpowiednio zestawionego parku maszynowego
- zaprojektowanie i wykonanie pompy gerotorowej wykorzystującej skonstruowany zespół wirnikowy oraz weryfikację doświadczalną wyprowadzonych wzorów na wydajność pompy.

3. OGÓLNE ZASADY PROJEKTOWANIA ZAZEBIEŃ CYKLOIDALNYCH

3.1. Krzywe cykloidalne

Krzywe cykloidalne (rys.8) kreśli punkt M związany z kołem o promieniu ρ obtaczanym bez poślizgu po nieruchomym kole zasadniczym o promieniu r_b. Epicykloidy powstają przez obtaczanie koła o promieniu ρ po zewnętrznej, a hipocykloidy po wewnętrznej stronie okręgu koła zasadniczego. Jeśli koło toczy się po prostej, czyli inaczej po kole zasadniczym o promieniu r_b = ∞ , to związany z nim punkt M wykreśla ortocykloidę. Obtaczając z kolei prostą, czyli inaczej koło o promieniu $\rho = \infty$, po kole zasadniczym o promieniu $0 < r_b < \infty$, uzyskuje się ewolwentę. Wszystkie rodzaje krzywych cykloidalnych mogą być zwyczajne, skrócone lub wydłużone. Krzywe zwyczajne opisuje punkt M leżący na okręgu koła



Rys. 8. Zasady konstrukcji krzywych cykloidalnych Fig. 8. Principles for cycloidal curve design



Rys. 9. Tożsamość epicykloidy zwyczajnej i pericykloidy zwyczajnej Fig. 9. Equivalence of common epicycloid and common pericycloid [13]

obtaczanego. Punkt M leżący wewnątrz koła obtaczanego kreśli krzywe skrócone, natomiast krzywe wydłużone opisuje punkt M leżący zewnątrz koła.

Oprócz epi- i hipocykloid wyróżnia się czasem w literaturze [12] pericykloidy. Krzywe te powstają przy obtaczaniu koła o promieniu p po zewnętrznej stronie koła o promieniu r $_{\rm h} < \rho$. Pericykloidy są tożsame z epicykloidami. Udowodniono to w [13], a pokazano na rys.9, z którego wynika, że epicykloidę zwyczajną można otrzymać obtaczając koło o promieniu p₁ po kole o promieniu r_{b1}, a także (jako pericykloidę) obtaczając koło o promieniu ρ_2 po zewnętrznej stronie koła o promieniu r_{b2} = r_{b1}. Podobnie jest z epicykloidą skróconą, która jest tożsama z pericykloidą wydłużoną oraz z epicykloidą wydłużoną, którą z kolei można traktować jako pericykloidę skróconą. W literaturze można spotkać również termin krzywe trochoidalne, odnoszący się raczej do krzywych wydłużonych lub skróconych. W związku z tym na rysunku 8 obok poszczególnych krzywych podano oba terminy, którymi mogą być określane. Zróżnicowanie to sprawia, że ta sama krzywa występuje w literaturze przedmiotu pod różnymi nazwami. Tak np. w pracy [21] mówi się o peritrochoidach wydłużonych w stosunku do krzywych nazywanych w pracy [14] epicykloidami skróconymi, w pracy [2] zaś trochoidami. W ramach tej pracy zdecydowano się

przyjąć nazwę epi- i hipocykloida wraz z bliższymi określeniami: skrćcona, zwyczajna lub wydłużona. Nazwa przyjętej krzywej będzie także określać rodzaj zazębienia całego zespołu kół.

Krzywe cykloidalne, przyjmowane jako podstawa do kształtowania zarysu zębów kół cykloidalnych, muszą spełniać dwa warunki:

- muszą to być krzywe zamknięte o skończonej całkowitej liczbie łuków, ponieważ tylko wtedy kcła zębate będą mogły mieć całkowitą liczbę zębów

- krzywe te nie mogą mieć pętli w pobliżu punktów zwrotu, ponieważ prowadziłoby to do interferencji zarysów.

Warunki te spełniają epicykloidy skrócone i zwyczajne (pericykloidy wydłużone i zwyczajne) oraz hipocykloidy skrócone i zwyczajne. Hipocykloidy skrócone muszą ponadto spełniać dodatkowy warunek $\rho < r_{\rm b}/2$. Krzywe cykloidalne wykorzystywane do projektowania kół o uzębieniach cykloidalnych obramowano na rysunku 8 linią grubą.

3.2. Kształtowanie kół cykloidalnych

Zarys zęba może być wyprofilowany według krzywych cykloidalnych (metoda krzywej bezpośredniej) lub według ich ekwidystant (metoda ekwidystanty) [35],[38]. Systematykę kół epicykloidalnych kształtowanych według obu metod przedstawiono na rysunku 10, a kół hipocykloidalnych na rysunku 11. W metodzie pierwszej wykorzystuje się do wyprofilowania uzębienia kół zamknięte krzywe cykloidalne. Jest to jednak możliwe tylko w przypadku cykloid skróconych (poz. 1.1 i 2.1 na rys. 10 i 11), które umożliwiają płynne bez załamań i nieciągłości przechodzenie wypukłego łuku cykloidy w łuk wklęsły. Cykloidy zwyczajne charakteryzujące się ostrzami w punktach zwrotu są więc nieprzydatne. Metoda ekwidystanty jest możliwa w przypadku krzywych skróconych (poz. 1.2, 1.3, 2.2, 2.3 na rys.10 i 11) a także krzywych zwyczajnych (poz. 1.4, 2.4 na rys.10 i 11). W przypadku cykloid zwyczajnych zarys uzębienia koła tworzą ekwidystanty łączone łukami kół o środkach pokrywających się z punktami zwrotu podstawowej krzywej cykloidalnej. Ekwidystanty cykloid skróconych mogą leżeć zarówno zewnątrz (g > 0), jak i wewnątrz (g < 0) krzywych zasadniczych. Obie metody, jak widać z rysunków 10 i 11, umożliwiają projektowanie kół uzębionych zewnętrznie i wewnętrznie.

Odrębnym zagadnieniem jest kształtowanie zespołów kół o zazębieniach cykloidalnych wykorzystywanych jako zespoły wirnikowe maszyn hydraulicznych [36],[41],[42]. Można tu wyróżnić dwie metody: obwiedni zewnętrznej lub wewnętrznej. Dotyczy to zarówno kół o zarysie epicykloidalnym (rys.12), jak i hipocykloidalnym (rys.13). Zgodnie z metodą obwiedni zewnętrznej, najpierw projektuje się koło podstawowe o uzębie-



o, oo znaki identyfikacyjne kół rozpatrywać łącznie zrys 12.

Rys. 10. Metody kształtowania kół o uzębieniach epicykloidalnych Fig. 10. Methods of epicycloidal gear design

niu zewnętrznym (kolumna 1, rys. 12 i 13), a potem koło współpracujące o uzębieniu wewnętrznym, którego zarys jest obwiednią rodziny cykloid (kolumna 2, rys. 12 i 13). Wykorzystując metodę obwiedni wewnętrznej, postępuje się odwrotnie. Najpierw projektuje się koło podstawowe o uzębieniu wewnętrznym (kolumna 5, rys. 12 i 13), a później koło współpracujące o uzębieniu zewnętrznym, którego zarys jest obwiednią wewnętrzną rodziny cykloid (kolumna 6, rys. 12 i 13). Metoda obwiedni wewnętrznej jest stosowana rzadziej, chociaż w pewnych przypadkach może się okazać



+,++ znaki identyfikacyjne kót, rozpatrywać tącznie z rys 13.

Rys. 11. Metody kształtowania kół o uzębieniach hipocykloidalnych Fig. 11. Methods of hypocycloidal gear design

dogodniejsza, a zaprojektowany według niej zespół wirnikowy może mieć prostszy kształt i większą zwartość konstrukcyjną.

Przy projektowaniu zespołu kół należy kierować się zasadą największej prostoty kształtu. Upraszcza to jego obliczanie i wymiarowanie, a przez to umożliwia wykonawstwo dostępnymi narzędziami i obrabiarkami, a także zastosowanie gogodnych metod sprawdzania kształtu i wymiarów kół.

W obu wymienionych metodach projektowania zespołów kół współpracujące koła mają uzębienie utworzone według obwiedni rodziny kół podstawowych. Obwiednie te oznaczono na rysunkach 12 i 13 (kolumny 2 i 6) linią cienką. Ponieważ konstrukcja ta wymaga złożonych technologii, więc w celu jej uproszczenia dokonuje się modyfikacji uzębień polegającej na zastąpieniu obwiedni łukami kół. Zmodyfikowane w ten sposób uzębienia oznaczono na rysunkach 12 i 13 linią grubą.

We wszystkich dotychczas omówionych rozwiązaniach koła podstawowe miały uzębienie według krzywych cykloidalnych lub ich ekwidystant, a koła współpracujące według obwiedni ich rodziny. Rozwiązania te nazwano wiodącymi. Możliwe są również rozwiązania uzupełniające, w których modyfikacji zarysu podlegają koła podstawowe otrzymujące zarys wyprofilowany łukami kół. Koła współpracujące natomiast są uformowane według obwiedni. Dotyczy to zarówno obwiedni zewnętrznej, jak i wewnętrznej (kolumny 3 i 4 oraz 7 i 8 na rys.12 i 13). Odpowiednie ekwidystanty oznaczono na rysunkach także linią cienką, a zazębienia zmodyfikowane linią grubą.

4. PROJEKTOWANIE KÓŁ PODSTAWOWYCH

4.1. Równania zarysu uzębienia

Kształt cykloidy zasadniczej wyznacza kształt koła zębatego [27], [33],[35],[38]. Cykloidę charakteryzuje jej moduł

$$M = \frac{r_b}{\rho}$$
(1)

określający liczbę łuków, z których składa się cykloida. Liczba łu<mark>ków</mark> cykloidy jest równa liczbie zębów koła

$$M = z$$
 (2)

Uwzględniając ogólnie ważną dla kół zębatych zależność r = m·z/2 oraz przyjmując r = $r_{\rm b}$, otrzymuje się

$$m = \frac{2 M \rho}{z}$$
(3)

Z czego wynika, że m = 2**p**, czyli moduł zęba cykloidalnego koła zębatego jest równy średnicy koła obtaczanego.

Równania parametryczne epicykloidy zasadniczej według rysunku 14a mają postać

$$x_{e} = (r_{b} + \rho)\cos\eta - \lambda\rho\cos\left(\frac{r_{b} + \rho}{\rho}\right)\eta$$

$$y_{e} = (r_{b} + \rho)\sin\eta - \lambda\rho\sin\left(\frac{r_{b} + \rho}{\rho}\right)\eta$$
(4)



Rys. 14. Konstrukcja uzębień cykloidalnych: a) uzębienie epicykloidalne, b) uzębienie hipocykloidalne Fig. 14. Design of cycloidal gears: a) epicycloidal gear, b) hypocycloidal gear

gdzie: x_e, y_e - współrzędne cykloidy, r_b - promień koła zasadniczego, p - promień koła obtaczanego, η - kąt epicykloidy, λ = OM/p współczynnik skrócenia epicykloidy (rys.14), a po uwzględnieniu zależności (1) i (2)

$$x_{e} = \rho (z + 1) \cos \eta - \lambda \rho \cos(z + 1) \eta$$

$$y_{o} = \rho (z + 1) \sin \eta - \lambda \rho \sin(z + 1) \eta$$
(5)

Podstawiając w równaniach (4) promień koła obtaczanego ze znakiem minus ($\rho < 0$), otrzymuje się równania opisujące hipocykloidę zasadniczą według rysunku 14b

$$x_{h} = \rho(z - 1)\cos\eta + \lambda\rho\cos(z - 1)\eta$$

$$y_{h} = \rho(z - 1)\sin\eta - \lambda\rho\sin^{2}(z - 1)\eta$$
(6)

Równania (5) i (6) bezpośrednio wyznaczają zarys uzębienia kół cykloidalnych. Po wprowadzeniu $\lambda < 1$ uzyskuje się zarys według epicykloid lub nipocykloid skróconych.

Z zależności geometrycznych (rys.14a) wynika, że punkt (x_{eke}, y_{eke}) leżący na ekwidystancie epicykloidy jednocześnie leży na normalnej wystawionej w punkcie (x_e, y_e) i jest odległy od niego o odcinek g. Wykorzystując zatem znani z geometrii różniczkowej równanie normalnej w postaci parametrycznej oraz stosując twierdzenie Pitagorasa, otrzymuje się układ równań



Rys. 12. Metody kształtowania zespołów kół o zazębieniach epicykloidalnych Fig. 12. Methods of epicycloidal gearset design



Rys. 13. Metody kształtowania zespołów kół o zazębieniach hipocykloidalnych Fig. 13. Methods of hypocycloidal gearset design

$$(x_{eke} - x_e)x' + (y_{eke} - y_e)y' = 0$$

$$(x_{eke} - x_e)^2 + (y_{eke} - y_e)^2 = g^2$$
(7)

gdzie: x_, y_ - pochodne pierwszego rzędu względem kąta $\eta.$

Po rozwiązaniu tego układu uzyskuje się równania parametryczne ekwidystanty epicykloidy

$$x_{eke} = x_{e} \pm g \frac{y'_{e}}{\sqrt{(x'_{e})^{2} + (y'_{e})^{2}}}$$

$$y_{eke} = y_{e} \pm g \frac{x'_{e}}{\sqrt{(x'_{e})^{2} + (y'_{e})^{2}}}$$
(8)

Po podstawieniu zależności (5) i przekształceniach otrzymuje się równania parametryczne opisujące profil uzębienia koła według ekwidystanty epicykloidy

$$x_{eke} = \rho (z + 1) \cos \eta - \lambda \rho \cos(z + 1) \eta + g \frac{\cos \eta - \lambda \cos(z + 1) \eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^{2}}}$$

$$y_{eke} = \rho (z + 1) \sin \eta - \lambda \rho \sin(z + 1) \eta + g \frac{-\sin \eta + \lambda \sin(z + 1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^{2}}}$$
(9)

W podobny sposób, na podstawie rysunku 14b, wyprowadza się równania na ekwidystantę hipocykloidy zasadniczej, opisującej profil uzębienia koła o postaci

$$x_{ekh} = \rho(z - 1)\cos\eta + \lambda\rho\cos(z - 1)\eta + g \frac{\cos\eta - \lambda\cos(z - 1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^{2}}}$$

$$y_{ekh} = \rho(z - 1)\sin\eta - \lambda\rho\sin(z - 1)\eta + g \frac{-\sin\eta - \lambda\sin(z - 1)\eta}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^{2}}}$$
(10)

W równaniach (9)i (10) przesunięcie g ma wartość dodatnią (g > 0), gdy ekwidystanta leży po zewnętrznej stronie cykloidy zasadniczej i ujemną (g < 0), jeśli znajduje się po stronie wewnętrznej. Po przyjęciu g = = 0 uzyskuje się tożsamość równań (9) i (5) oraz (10) i (6).

Równania (9) i (10) wyznaczają zarys uzębienia kół podstawowych dla różnych wartości parametrów uzębienia, a więc dla liczby zębów z, promienia koła obtaczanego ρ , współczynnika skrócenia cykloidy λ oraz odległości przesunięcia ekwidystanty g.

W celu wyjaśnienia wpływu poszczególnych parametrów uzębienia na kształt cykloid i ich ekwidystant należy dokonać analizy układów równań



Rys. 15. Analiza kształtu cykloid zasadniczych: a-d) epicykloidy, e-h) hipocykloidy Fig. 15. Analysis of basic cycloid forms: z-d) epicycloids, e-h) hypocycloids (5) i (6) oraz (9) i (10). Szczególnie chodzi o to, aby ustalić w jakich granicach można parametry te zmieniać, jeśli mają być spełnione warunki podane w punkcie 3.1.

4.2. Analiza kształtu cykloid zasadniczych

Aby otrzymać cykloidę zasadniczą o liczbie łuków (zębów) z, należy, jak wynika z zależności (1) i (2), zachować stosunek promieni r_b i ρ równy $r_b/\rho = z$. Wynika stąd, że przy ustalonej liczbie zębów zmiana wartości jednego promienia powoduje zmianę wartości drugiego, co wiąże się ze zmianą wymiarów koła zębatego. Zilustrowano to na rysunkach 15a i 15b w przypadku epicykloid oraz rysunkach 15e i 15f dla hipocykloid. Przy konstruowaniu cykloidy zasadniczej zakłada się zwykle liczbę zębów z i wartości promienia ρ oraz oblicza r_b , choć możliwe jest również postępowanie odwrotne. Dla najczęściej stosowanych liczb zębów (z = 4--14) promień ρ przyjmuje się od kilku do kilkunastu milimetrów. Regułą jest, że wraz ze zwiększaniem liczby zębów zmniejsza się wartość ρ tak, aby niepotrzebnie nie zwiększać wymiarów koła zębatego.

Z zależności geometrycznych (rys.15c i 15g) wynika, że wysokość łuku cykloidy, równa wysokości zęba, wynosi

$$h = 2\lambda\rho \tag{11}$$

Wartość promienia ρ wynika ze wstępnie założonej liczby zębów z, a więc wysokość zęba zależy od wartości współczynnika λ . Pokazano to na rysunkach 15b,c,d w przypadku epicykloid i rysunkach 15f,g,h w przypadku hipocykloid.

Do konstruowania kół cykloidalnych wykorzystuje się krzywe normalne ($\lambda = 1$) lub skrócone ($\lambda < 1$). Warunek $\lambda \leq 1$ jest zbyt ogólny. Należy wobec tego ściśle określić granice tej zmienności. Łuk epicykloidy zasadniczej składa się z części wypukłej i wklęsłej, które przechodzą jedna w drugą w punkcie przegięcia (rys.16a). Współrzędne punktu przegięcia epicykloidy można wyznaczyć z warunku

 $\begin{vmatrix} \mathbf{x}_{e}^{*} & \mathbf{y}_{e}^{*} \\ \mathbf{x}_{e}^{*} & \mathbf{y}_{e}^{*} \end{vmatrix} = 0$ (12)

gdzie: x_e, y_e, x_e, y_e - pochodne epicykloidy pierwszego i drugiego rzędu.

Po podstawieniu równania (5) do warunku (12) i przekształceniach otrzymuje się zależność na kąt η_{ep} określający położenie punktu przegięcia



Rys. 16. Wyznaczenie kątów określających położenie punktu przegięcia: a) epicykloidy - kąty η_{ep} , $2\pi/z - \eta_{ep}$, b) hipocykloidy - kąty η_{hp} , $2\pi/z - \eta_{hp}$

Fig. 16. Determination of angles defining the point of inflexion of cycloidal arcs: a) epicycloidal arc - angles η_{ep} , $2\pi/z - \eta_{ep}$, b) hypocycloidal arc - angles η_{np} , $2\pi/z - \eta_{hp}$

$$\eta_{\rm ep} = \frac{\arccos \frac{\lambda^2(z+1)+1}{\lambda(z+2)}}{z}$$
(13)

Ze względu na symetrię i powtarzalność krzywej punkty przegięcia występują również dla kątów: η_{pp} + k $2\pi/z$ i $(2\pi/z - \eta_{pp})$ + k $2\pi/z$ (rys.16a), przy czym k = 1, 2, 3, ..., z. Wzór (13) jest zatem ważny, gdy

$$-1 \leq \frac{\lambda^2(z+1)+1}{\lambda(z+2)} \leq 1$$
 (14)

czyli

$$\frac{1}{z+1} \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{15}$$

lub

$$-1 \leq \lambda \leq -\frac{1}{z+1} \tag{16}$$

Warunek (16) nie może być spełniony, gdyż λ nie może przyjmować wartości ujemnych. Dobór współczynnika λ zgodnie z warunkiem (15) gwarantuje, że epicykloida zasadnicza składa się z części wypukłej i wklęsłej odpowiadających głowie i stopie zęba.



Rys. 17. Wykresy zależności kąta określającego położenie punktu przegięcia cykloidy od jej współczynnika skrócenia dla: a) epi-cykloidy - kąt n_{ep}, b) hipocykloidy - kąt n_{hp}
Fig. 17. Plots of angles defining the point of cycloid inflexion versus cycloid contraction coefficient: a) epicycloids - angle n_{ep}, b) hypocycloids - angle n_{hp}

Postępując podobnie w przypadku hipocykloid (rys. %6b), można wyz-naczyć zależność określającą kąt $\eta_{\rm hp}$, dla którego występuje punkt przegięcia łuku

$$\eta_{\rm hp} = \frac{\arccos \frac{\lambda^2(z-1)-1}{\lambda(z-2)}}{z}$$
(17)

o powtarzalności identycznej jak w przypadku epicykloidy. Wzór (17) jest ważny, gdy

$$\frac{1}{z-1} \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{18}$$

Interpretacja tego warunku jest podobna jak w przypadku epicykloid.

Na rysunku 17 przedstawiono przebieg zależności $\eta_{ep} = f(\lambda)$ oraz $\eta_{hp} = f(\lambda)$ dla wybranych liczb zębów (łuków) jako parametrów. W przypadku epicykloidy (rys.17a) wraz ze zwiększeniem się współczynnika λ w przedziale 1/(z+1) $\leq \lambda \leq 1$ wartość kąta η_{ep} początkowo zwiększa się od zera do maksimum, a później maleje również do zera dla $\lambda = 1$. Konfrontując to z rysunkami 15b,c,d, widzimy, że początkowo ze wzrostem λ , a więc ze wzrostem wysokości zęba, coraz większą część łuku epicykloidy stanowi wycinek wklęsły kształtujący stopę zęba w stosunku do wycinka wypukłego kształtującego głowę. Później następuje odwrotna tendencja, tak że dla $\lambda = 1$ występują już tylko łuki wypukłe, które można wykorzystywać przy konstruowaniu kół według ekwidystanty.

Inny przebieg ma zależność $\eta_{\rm hp} = f(\lambda)$ przedstawiona na rysunku 17b. Zwiększanie współczynnika λ w przedziale $1/(z-1) \leq \lambda \leq 1$ powoduje monotoniczne zmniejszenię wartości kąta $\eta_{\rm hp}$ do zera dla $\lambda = 1$. Porównując te przebiegi z rysunkami 15f,g,h zauważamy, że ze wzrostem λ , a więc ze wzrostem wysokości zęba, coraz większą część hipocykloidy stanowi łuk wklęśły. Dla $\lambda = 1$ występują już tylko same łuki wklęśłe będące podstawą do ewentualnego kształtowania zarysu uzębienia według ekwidystanty.

4.3. Analiza kształtu ekwidystant

Na rysunkach 18a,c pokazano ekwidystanty cykloid skróconych, a na rysunkach 18b,d cykloid zwyczajnych. Stosowanie cykloid skróconych, jak widać na rysunku, daje większe możliwości tworzenia ekwidystant do tych krzywych zarówno po stronie zewnętrznej (g > 0), jak i wewnętrznej (g < 0). Z rysunku widać także, że w przypadku ekwidystant cykloid skróconych mogą również występować pętle. W tej sytuacji należy ustalić jakie są i od czego zależą maksymalne wartości przesunięcia ekwidystanty g, aby zarys uzębienia był ciągły.

Analizując rysunek 19a zauważamy, że maksymalne przesunięcie ekwidystanty g na zewnątrz lub do wewnątrz epicykloidy zasadniczej jest równe minimalnemu promieniowi krzywizny R_{e min1} lub R_{e min2} w wypukłej lub wklęsłej części łuku epicykloidy. Wzór na krzywiznę epicykloidy K_e można zapisać w postaci

$$K_{e} = \frac{\begin{vmatrix} x_{e}^{*} & y_{e}^{*} \\ x_{e}^{*} & y_{e}^{*} \end{vmatrix}}{\left[(x_{2}^{*})^{2} + (y_{e}^{*})^{2} \right]^{3/2}}$$
(19)



Rys. 18. Analiza kształtu ekwidystant cykloid zasadniczych: a) epicykloi-da skrócona, b) epicykloida zwyczajna, c) hipocykloida skrócona, d) hipocykloida zwyczajna
Fig. 18. Shape of equidistant curves to basic cycloids: a) curtate epi-cycloid, b) common epicycloid, c) curtate hypocycloid, d) common hypocycloid



Rys. 19. Wyznaczanie kątów określających minimalne promienie krzywizny we wklęsłej i wypukłej części łuku:a) epicykloidy, kąty $\eta_{e,\min1}$, $\eta_{e,\min2}$ - promienie $R_{e,\min1}$, $R_{e,\min2}$; b) hipopocykloidy, kąty $\eta_{h,\min1}$, $\eta_{h,\min2}$ - promienie $R_{h,\min1}$, $R_{h,\min2}$

Fig. 19. Determination of angles defining minimum radii of curvature on concave and convex sectors of the cycloid arc: a) epicycloid arc, angles ne min1, ne min2 - radii R_e min1, R_e min2;b) hypocycloid arc, angles n_h min1, n_h min2 - radi R_h min1, R_h min2

Po podstawieniu równań (5) i przekształceniach otrzymuje się ostatecznie

$$K_{e} = \frac{1 - \lambda(z + 2)\cos z\eta + \lambda^{2}(z + 1)}{\rho(z + 1) \left[1 - 2\lambda\cos z\eta + \lambda^{2}\right]^{3/2}}$$
(20)

Promień krzywizny epicykloidy jest więc równy

$$R_{e} = \frac{1}{K_{e}} = \frac{p(z+1)[1-2\lambda\cos z\eta + \lambda^{2}]^{3/2}}{1-\lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^{2}(z+1)}$$
(21)

Minimalną wartość promienia krzywizny wyznacza się z warunku $R'_e = 0$. Po zróżniczkowaniu i przekształceniach otrzymuje się w końcu

$$\frac{3\lambda pz(z+1)\sin z\eta (1-2\lambda \cos z\eta + \lambda^2)^{1/2} [1 - \lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^2(z+1)]}{[1 - \lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^2 (z+1)]^2} - \frac{\lambda pz(z+1)(z+2)\sin z\eta [1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2]^{3/2}}{[1-\lambda(z+2)\cos z\eta + \lambda^2(z+1)]^2} = 0$$
(22)

Wyrażenie to będzie spełnione, gdy
$$\sin z \eta = 0 \tag{23}$$

lub

$$3(1-2\lambda \cos z\eta + \lambda^2)^{1/2} [1 - \lambda(z+2)\cos z\eta + (24) + \lambda^2(z+1)] - (z+2) [1 - 2\lambda \cos z\eta + \lambda^2]^{1/2} = 0$$

Po rozwiązaniu równań (23) i (24) otrzymuje się kąty, dla których występują minimalne promienie krzywizny R_{e min1} i R_{e min2}

$$\eta_{e \min 1} = 0$$
(25)
$$\eta_{e \min 2} = \frac{\arccos \frac{\lambda^2 (2 z + 1) - (z - 1)}{\lambda (z + 2)}}{z}$$
(26)

Ze względu na symetrię i powtarzalność krzywej otrzymuje się odpowiednio kąty

$$\eta_{e \min 1} + k \frac{2\pi}{z}$$

oraz

$$\eta_{e \min 2} + k \frac{2\pi}{z} \quad lub \left(\frac{2\pi}{z} - \eta_{e \min 2}\right) + k \frac{2\pi}{z}$$

gdzie k = 1, 2, 3, ..., z. Wzór (26) jest ważny, jeśli

$$-1 \leq \frac{\lambda^2 (2 z + 1) - (z - 1)}{\lambda (z + 2)} \leq 1$$
(27)

ċzyli

$$\frac{z-1}{2z+1} \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{28}$$

lub

$$-1 \le \lambda \le -\frac{z-1}{2z+1} \tag{29}$$

Warunek (29) nie może być spełniony, ponieważ λ nie może przyjmować wartości ujemnych. Dobór współczynnika λ zgodnie z warunkiem (28), zapewnia, że łuki epicykloidy mają dużą wysokość, a w rezultacie koła zębate mają dużą objętość przestrzeni międzyzębnych, odgrywających rolę komór wyporowych w maszynach hydraulicznych.

Z równań (25) i (26) wyznacza się wartości Kątów $\eta_{e \min 1}$ i $\eta_{e \min 2}$, a po podstawieniu ich do wzoru (21) otrzymuje się wartości $R_{e \min 1}$ i $R_{e \min 2}$ odpowiadające tym kątom.

Maksymalne przesunięcie g ekwidystanty zewnętrznej epicykloidy zasadniczej jest równe promieniowi R_{e mini} występującemu we wklęsłej



Rys. 20. Zależność wartości minimalnego promienia krzywizny epicyklojdy $R_e \min 1$ od współczynnika λ , dla kąta określającego minimalną wartość promienia krzywizny $\eta_e \min 1 = 0$

Fig. 20. Minimum radius of epicycloid curvature $R_{e \text{ min}1}$ versus contraction coefficient λ , for angle determining position of minimum radius of curvature $\eta_{e \text{ min}1} = 0$

34



Rys. 21. Wpływ współczynnika λ na wartość: a) kąta określającego minimalny promień krzywizny epicykloidy ηe min2, b) minimalnego promienia krzywizny epicykloidy Re min2

Fig. 21. Influence of contraction coefficient λ on: a) angle determining the position of minimum radius of epicycloid curvature $\eta_{e\min2}$, b) minimum radius of epicycloid curvature R_e min2

części łuku w punkcie określonym kątem ¶_{e min1}, natomiast maksymalne przesunięcie ekwidystanty wewnętrznej równa się promieniowi R_e min2 Wypukłej części łuku w punkcie opisanym kątem ¶_{e min2} (rys. 19a).

Wykorzystując rysunek 19b, podobnie jak dla epicykloid, wyprowadzano wzór na promień krzywizny hipocykloidy

$$R_{h} = \frac{p(z-1)[1-2\lambda\cos z\eta + \lambda^{2}]^{3/2}}{|1+\lambda(z-2)\cos z\eta - \lambda^{2}(z-1)|}$$
(30)



Rys. 22. Zależność wartości minimalnego promienia krzywizny hipocykloidy R_h mini od współczynnika λ , dla kąta określającego minimalny promień krzywizny η_h mini = 0

Fig. 22. Minimum radius of hypocycloid curvature $R_h \min_{l}$ versus contraction coefficient λ , for angle determining the position of minimum radius of curvature $\eta_h \min_{l} = 0$

Kąty, dla których promień ten przyjmuje minimalną wartość, określają wzory

$$h_{\rm min1} = 0$$
 (31)

$$\eta_{\rm h\ min2} = \frac{\arccos \ \frac{\lambda^2(2z - 1) - (z + 1)}{\lambda(z - 2)}}{z}$$
(32)

Kąty odpowiadające pozostałym punktom przegięcia hipocykloidy wynoszą

$$\eta_{h \min 1} + k \frac{2\pi}{z}$$

$$\eta_{h \min 2} + k \frac{2\pi}{z} \quad lub \quad \left(\frac{2\pi}{z} - \eta_{h \min 2}\right) + k \frac{2\pi}{z}$$

gdzie k = 1, 2, 3, ..., z Wzór (32) jest ważny, gdy

•

$$\frac{z+1}{2z-1} \leq \lambda \leq 1 \tag{33}$$

Interpretacja tego warunku jest podobna jak w przypadku epicykloid.Maksymalne przesunięcie g ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy jest równe promieniowi R_{h min2} wklęsłej części łuku w punkcie określonym kątem $\eta_{h min2}$, a ekwidystanty wewnętrznej promieniowi R_{h min1} wypukłej części łuku, dla kąta $\eta_{h min1}$ (rys.19b).

Na rysunku 20 przedstawiono wykresy zależności $R_{e \min} = f(\lambda)$, przyjmując ¶ e min1 = 0, Ø = 1 dla różnych liczb zębów z jako parametru. Na rysunku 21 przedstawiono ilustrację graficzną zależności $\eta_{e \min 2} = f(\lambda)$ (rys.21a) oraz $R_{e \min 2} = f(\lambda)$ (rys.21b), również dla ρ = 1 oraz z jako parametru. W obu przypadkach λ zmienia się w granicach wynikających z warunku (28). Z wykresów widać, że zwiększenie współczynnika λ powoduje zmniejszenie promieni R min1, R min2. Oznacza to, że dla większych wartości λ (wyższe zęby - mniejsze promienie krzywizn łuków opisujących ząb) należy przyjmować mniejsze odległo**śc**i ekwidystanty, aby uniknąć występowania pętli na zarysie uzębienia. Dla mniejszych wartości λ (niższe zęby – większe promienie łuków głowy i stopy zęba) można stosować bardziej odległe ekwidystanty. Widać również, że odległości ekwidystanty zewnętrznej ograniczone wartością R_{e min1} są znacznie mniejsze niż odległość ekwidystanty wewnętrznej ograniczona promieniem R_{e min2}. W praktyce projektowej prawie wyłącznie wykorzystuje się wewnętrzne ekwidystenty epicykloid.

Na rysunku 22 podano graficzną ilustrację zależności $R_{h \min 1} = f(\lambda)$ dla $\eta_{h \min 1} = 0$, a na rysunku 23 zależność $\eta_{h \min 2} = f(\lambda)$ (rys. 23a) oraz $R_{h \min 2} = f(\lambda)$ (rys.23b), przy czym przyjmowano $\rho = 1$ oraz z jako parametr. Również i tu w obu przypadkach λ zmieniano w grani-cach określonych warunkiem (33). Charakter zmienności $R_{h \min 2} = f(\lambda)$ jest podobny jak w przypadku epicykloid (rys.20,21). Odległości ekwidystant wewnętrznych ograniczone promieniem $R_{h \min 1}$ są tu jednak mniejsze niż w przypadku ekwidystant zewnętrznych ograniczonych promieniem $R_{h \min 1}$ są tu jednak mniejsze niż w przypadku z tym przy projektowaniu kół hipocykloidalnych wyko-rzystuje się niemal wyłącznie ekwidystanty zewnętrzne.



Rys. 23. Wpływ współczynnika λ na wartość: a) kąta określającego minimelny promień krzywizny hipocykloidy η_h min2,b) minimelnego promienia krzywizny hipocykloidy R_h min2
Fig. 23. Influence of contraction coefficient λ on:a) angle determining the position of minimum radius of curvature η_h min2, b) minimum radius of hypocycloid curvature R_h min2

Wykorzystanie ekwidystant cykloid zwyczajnych do kształtowania zarysu uzębienia jest możliwe, chociaż w węższym zakresie niż w przypadku ekwidystant cykloid skróconych. Widać to na rysunku 18. Ekwidystanta zewnętrzna epicykloidy zwyczajnej (rys.18b) jest do tego celu nieprzydatna, ponieważ sąsiednie łuki nakładają się na siebie i powstaje ostrze w ich punktach przecięcia. Istnieje możliwość ukształtowania zarysu uzębienia według ekwidystanty wewnętrznej epicykloidy zwyczajnej. Łuki ekwidystant są wówczas przesunięte względem krzywej zasadniczej o odcinek g i muszą być łączone łukiem koła o promieniu g zatoczonym z punktu zwrotu epicykloidy. Zarys uzębienia opisują więc równania ekwidystanty (9) oraz równania okręgu umiejscowionego w punkcie zwrotu o postaci

$$(x - r_b \cos \xi)^2 + (y - r_b \sin \xi)^2 = g^2$$
 (34)

gdzie: ξ - kąt środkowy łuku koła (rys.18b). Kąt η_{ep} , dla którego następuje przejście jednej krzywej w drugą, wyznacza się z zależności

$$\eta_{ep} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\mathcal{L}}{r_{b}}$$
 (35)

Ostatecznie układ równań opisujący zarys zęba według ekwidystanty wewnętrznej epicykloidy składa się ze wzorów (9) ważnych dla kątów

$$\eta \in \left| \frac{2 k \pi}{z} + \eta_{ep}, \frac{2(k+1)\pi}{z} - \eta_{ep} \right|$$

oraz wzoru (34) ważnego dla kątów

$$\eta \in \left| \frac{2 k \pi}{z} - \eta_{ep}, \frac{2(k+1) \pi}{z} + \eta_{ep} \right|$$

gdzie: k = 0, 1, 2, ..., z.

W punktach zbiegu obu krzywych nie ma wspólnej stycznej. Występuje tam wobec tego nieciągłość profilu - rodzaj uskoku. Jest on stosunkowo niewielki dla małych wartości przesunięć ekwidystanty g (g < ρ). W praktyce można zatem łuki ekwidystanty połączyć z łukiem koła odcinkiem prostej. Dla większych wartości g uskok ten przekształca się w pętlę, a obie krzywe (łuk ekwidystanty i koła) zachodzą na siebie, wykluczając mozilwość praktycznego zastosowania takiego zarysu.

Podobnie jest w przypadku ekwidystant hipocykloidy zwyczajnej (rys.18d). Ekwidystanty wewnętrzne do profilowania zarysu uzębienia są nieprzydatne. Można natomiast przyjmować ekwidystanty zewnętrzne, lecz tylko dla przesunięć g < p. Zarys uzębienia opisują wówczas równania (10) i (34), ważne dla takich samych wartości kątów jak dla uzębienia epicykloidalnego. Również i w tym przypadku warunek (35) zachowuje ważność.

Konfrontując warunek (15), gwarantujący występowanie punktu przegięcia łuku epicykloidy, z warunkiem (28) zapewniającym dużą jego wysokość, wyznaczono na rysunku 24a zbiór zalecanych wartości współczynnika λ dla najczęściej stosowanych liczb zębów z = 4-14. Współczynnik λ dobierany z wyznaczonego na wykresie obszaru zapewnia, że epicykloida zasadnicza ma punkt przegięcia dzielący ją na części wypukłą i wklęsłą,



Rys. 24. Obszar dopuszczalnych wartości wskółczynnika skrócenia cykloidy λ w zależności od liczby zębów z: a) dla zazębień cykloidalnych, b) dla zazębień hipocykloidalnych
Fig. 24. Determination of range of allowable values of cycloid contraction coefficient λ as a function of number of teeth z: a) for epicycloidal gears, b) for hypocycloidal gears

które odpowiadają głowie i stopie zęba. Jednocześnie taka wartość współczynnika λ zapewnia, że zęby mają dużą wysokość, a przez to występuje duża objętość przestrzeni międzyzębnych spełniających funkcję komór wyporowych w pompach i silnikach hydraulicznych.

Na rysunku 24b zestawiono zbiór zalecanych wartości współczynnika λ dla kół hipocykloidalnych wynikający z warunków (18) i (33).

4.4. Dobór parametrów uzębienia cykloidalnego

Na podstawie dotychczasowych rozważań można sformułować następujące zalecenia pomocne przy projektowaniu kół cykloidalnych, stosowanych w budowie hydraulicznych maszyn wyporowych, wykorzystywanych jako pompy lub silniki w hydrostatycznych układach napędowych i sterujących:

1. Liczba zębów koła, zwykle 4-14, winna spełniać równość z = = r_b/ρ , przy czym ρ wynosi zwykle od kilku do kilkunastu mm.

2. Wartość współczynnika skrócenia cykloid zasadniczych należy dobierać z przedziału (z-1)/(2z+1) $\leq \lambda \leq 1$ dla epicykloid (rys.24a) oraz (z+1)/(2z-1) $\leq \lambda \leq 1$ dla hipocykloid (rys.24b). Zarys zęba jest wówczas formowany według cykloid skróconych, zapewniających podział zębów na część wypukłą (głowa zęba) i wklęsłą (stopa zęba) oraz odpowiednią wysokość, istotną ze względu na objętość przestrzeni międzyzębnych. Dla $\lambda = 1$ zarys jest uformowany według cykloid zwyczajnych, które również mogą być stosowane, lecz w ograniczonym zakresie.

3. Kształtując zarys uzębienia kół podstawowych według ekwidystant epicykloid, przesunięcie g należy przyjmować:

- dla ekwidystant epicykloid skróconych; zewnętrznej g \leqslant $\rm R_{e}$ min1 oraz wewnętrznej g \leqslant $\rm R_{e}$ min2
- dla ekwidystant hipocykloid skróconych: zewnętrznej g < R_{h min2} oraz wewnętrznej g < R_{h min1}
- dla ekwidystant cykloid zwyczajnych g ≤ p.

Ze względu na niewielkie wartości promieni R_{e min1} i R_{h min1} należy przyjmować raczej ekwidystanty wewnętrzne epicykloid i zewnętrzne hipocykloid zasadniczych. Zalecenia te odnoszą się do kół uzębionych zewnętrznie oraz wewnętrznie. W obu przypadkach wykorzystuje się ten sam zarys cykloidalny. Zmienia się tylko stronę, po której kształtuje się profil uzębienia koła zębatego.

5. PROJEKTOWANIE KÓŁ WSPÓŁPRACUJĄCYCH

5.1. Równania zarysu uzębienia

W punkcie 3.2 stwierdzono, że bazą wyjściową do projektowania kół podstawowych o zarysie cykloidalnym mogą być cykloidy skrócone i ich ekwidystanty zewnętrzne lub wewnętrzne oraz ekwidystanty cykloid zwyczajnych [36],[41],[42]. Koła współpracujące można kształtować metodą obwiedni zewnętrznej lub wewnętrznej. Dotyczy to zazębień epi- i hipocykloidalnych.

Uzębienie koła podstawowego, do wyprofilowania którego przyjęto epicykloidę skróconą (poz.1.1, rys.12), opisują równania (5), w których przyjmuje się $\lambda < 1$. Uzębienie koła współpracującego (poz.2.1, rys. 12) otrzymuje się, jak to pokazano na rysunku 25, przez obtaczanie koła podstawowego o środku C₁ wokół środka koła współpracującego O₂. Ponieważ, zgodnie z zasadami kształtowania zespołów kół (punkt 3.2), koło współpracujące ma liczbę zębów z₂ = z₁ + 1, a jego zarys jest dopełnieniem zarysu koła podstawowego, więc ich wzajemna odległość osi O₁C₂, czyli inaczej mimośrodowość e, musi być równa połowie wysokości zęba koła podstawowego h₁, tzn.

$$0_1 0_2 = e = \frac{h_1}{2} = \frac{2 \lambda p}{2} = \lambda p$$

Promienie toczne koła podstawowego i współpracującego wynoszą odpowiednio

$$r_{w1} = z_1 e = z_1 \lambda \rho$$

$$r_{w2} = z_2 e = z_2 \lambda \rho = (z_1 + 1) \lambda \rho$$
(36)



Rys. 25. Konstrukcja zespołu kół epicykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej; koło podstawowe – epicykloida skrócona, koło współpracujące – obwiednia Fig. 25. Construction of epicycloidal gearsets by external envelope method; basic gear – curtate epicycloid, mating gear – envelope

Jeśli osie obydwu kół są nieruchome, to koła toczne (r_{w1}) , (r_{w2}) przetaczają się po sobie bez poślizgu z prędkościami kątowymi w_1 , w_2 . Po nadaniu całemu układowi prędkości $-w_2$, powoduje się unieruchomienie koła współpracującego i obtaczanie po nim, bez poślizgu, koła podstawowego. W wyniku tego otrzymuje się rodzinę jednakowych epicykloidalnych kół podstawowych. Prowadząc obwiednię zewnętrzną do tej rodziny, otrzymuje się profil koła współpracującego. Przy obtaczaniu koła o promieniu r_{w1} po kole o promieniu r_{w2} dokonuje się przesunięcia i obrotu układu x_1y_1 , związanego z kołem podstawowym uzębionym zewnętrznie, względem układu x_2y_2 związanego z kołem współpracującym. Równania wiążące oba te układy mają postać

$$x_2 = a + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \tag{37}$$

$$y_2 = b + x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi$$

gdzie współrzędne początku układu x_1y_1 w układzie x_2y_2 wynoszą odpowied-nio

$$a = e \cos \gamma$$
(38)
$$b = e \sin \gamma$$

przy czym **φ** < 0 (rys.25). Po podstawieniu równań (5) i (38) do równań (37) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2} &= \operatorname{ecos} \boldsymbol{\gamma} + \left[\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \operatorname{cos} \boldsymbol{\eta} - \lambda \boldsymbol{\rho} \operatorname{cos}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \boldsymbol{\eta} \right] \operatorname{cos} \boldsymbol{\varphi} - \\ &- \left[\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \operatorname{sin} \boldsymbol{\eta} - \lambda \boldsymbol{\rho} \operatorname{sin}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \boldsymbol{\eta} \right] \operatorname{sin} \boldsymbol{\varphi} \end{aligned} \tag{39} \\ \mathbf{y}_{2} &= \operatorname{esin} \boldsymbol{\gamma} + \left[\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \operatorname{cos} \boldsymbol{\eta} - \lambda \boldsymbol{\rho} \operatorname{cos}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \boldsymbol{\eta} \right] \operatorname{sin} \boldsymbol{\varphi} + \\ &+ \left[\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \operatorname{sin} \boldsymbol{\eta} - \lambda \boldsymbol{\rho} \operatorname{sin}(\boldsymbol{z}_{1}+1) \boldsymbol{\eta} \right] \operatorname{cos} \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

gdzie: η - kąt bieżący cykloidy określający zarys epicykloidalnego koła podstawowego, γ - kąt obrotu mimośrodowości kół o środkach 0₁ i 0₂, φ kąt obrotu koła o promieniu r_{w1} względem koła o promieniu r_{w2}. Kąty φ i γ powiązane są zależnością

$$\varphi = -\frac{\gamma}{z_1} \tag{40}$$

Po podstawieniu zależności (40) do równania (39) otrzymuje się, po przekształceniach, układ równań parametrycznych opisujących rodziny kół o zarysie epicykloidalnym w układzie współrzędnych x_2y_2

$$x_{re2} = \lambda \rho \cos \gamma + \rho (z_1 + 1) \cos \frac{z_1 \eta - \gamma}{z_1} - \lambda \rho \cos \frac{(z_1 + 1)z_1 \eta - \gamma}{z_1}$$
(41)
$$y_{re2} = \lambda \rho \sin \gamma + \rho (z_1 + 1) \sin \frac{z_1 \eta - \gamma}{z_1} - \lambda \rho \sin \frac{(z_1 + 1)z_1 \eta - \gamma}{z_1}$$

Równanie (41) należy uzupełnić warunkiem obwiedni, który wiąże ze sobą kąt obrotu γ koła podstawowego względem koła współpracującego z kątem epicykloidy η

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_{re}}{\partial \eta} & \frac{\partial y_{re}}{\partial \eta} \\ \\ \frac{\partial x_{re}}{\partial \gamma} & \frac{\partial y_{re}}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = 0$$
(42)

z którego otrzymuje się ostatecznie

$$\sin z_1 \eta - \lambda \sin \left(z_1 \eta + \frac{z_1 (\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} \right) + \sin \frac{z_1 (\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} = 0 \quad (43)$$

Układ równań opisujący zarys koła współpracującego jako obwiednię rodziny kół epicykloidalnych składa się z równań (41) i (43). Równania (41) służą do wyznaczania zarysu kolejnych kół epicykloidalnych stanowiących rodzinę. Równanie (43), jeśli uwzględni się położenie poszczególnych kół (kąt γ), służy do wyznaczania tego punktu zarysu koła (kąt η) który jest kolejnym punktem obwiedni opisującej zarys koła współpracującego. Układ równań (41) i (43) ma postać niejawną i daje się rozwiązać za pomocą elektronicznej techniki obliczeniowej.



Rys. 26. Konstrukcja zespołu kół epicykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej; koło podstawowe - ekwidystanta do epicykloidy skróconej, koło współpracujące - łuki kołowe, rolki
Fig. 26. Construction of epicycloidal gesrests by external envelope method; basic gear - equidistant curve to curtate epicycloid, mating gear - circles, rollers

44

Przyjmując ekwidystantę zewnętrzną epicykloidy skróconej jako uzębienie koła podstawowego (poz.1.2, rys.12), należy w równaniach (9) podstawić $\lambda < 1$ oraz dodatnią wartość przesunięcia zarysu (g > 0). Uzębienie koła współpracującego opisuje obwiednia zewnętrzna rodziny ekwidystant epicykloidy skróconej (poz.2.2, rys.12). Ze względów konstrukcyjnych i technologicznych zarys ten może być poddany modyfikacji, polegającej na zastąpieniu łuków obwiedni, stanowiących głowy zębów, łukami kołowymi o promieniu r = g.

W przypadku ekwidystanty wewnętrznej, przyjmowanej jako zarys uzębienia koła podstawowego (poz.1.3, rys.12), korzysta się także z równań (9), podstawiając $\lambda < 1$ oraz g < 0. Zarys uzębienia koła współpracującego jest również opisany obwiednią zewnętrzną rodziny ekwidystant epicykloidy skróconej (poz.2.3, rys.12). Także i w tym kole modyfikuje się uzębienie przez zastąpienie łuków obwiedni, stanowiących głowy zębów, łukami kołowymi o promieniu r = g. Jednocześnie zauważa się, że uzębienie koła współpracującego można otrzymać w sposób uproszczony, bez skomplikowanego wyznaczania obwiedni rodziny ekwidystant (rys.26). Ponieważ epicykloida skrócona jest krzywą zasadniczą w stosunku do ekwidystanty wewnętrznej stanowiącej uzębienie koła podstawowego, więc uwzględnia się, że taką samą krzywą zasadniczą jest obwiednia i z jej punktów zwrotu zakreśla się łuki kołowe stanowiące bezpośrednio uzębienie koła współpracującego.

Do konstrukcji kół o uzębieniu epicykloidalnym można również przyjmować epicykloidy zwyczajne (poz.1.4 i 2.4, rys.12). Układ ten szczegółowo przedstawiono na rysunku 27. Zarys uzębienia koła podstawowego opisują równania (5), w których należy podstawić $\lambda = 1$. Zarys koła współpracującego wyznacza się z równań (41) i (43), jako obwiednię rodziny epicykloid zwyczajnych przyjmując również $\lambda = 1$. Z równania (43), po przekształceniach, dochodzi się do zależności wiażącej katy η i γ

$$\eta = \left(\frac{z_1 + 1}{z_1}\right) \gamma \tag{44}$$

po podstawieniu której do równań (41) otrzymuje się

$$x_{re} = \rho (z_2 + 1) \cos \gamma - \rho \cos(z_2 + 1) \gamma$$

$$y_{re} = \rho (z_2 + 1) \sin \gamma - \rho \sin(z_2 + 1) \gamma$$
(45)

Równania (45) mają taką samą postać jak równanie (5), z tym tylko, że nastąpiła zamiana kąta η na kąt γ . Oznacza to, że obwiednia opisująca zarys koła współpracującego jest również epicykloidą zwyczajną. W rzeczywistości jednak współpraca kół o zarysach według epicykloid zwyczajnych, jak widać z rysunku 27, jest niemożliwa ze względu na występowanie ostrzy



Rys. 27. Konstrukcje zespolu kół epicykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej; koło podstawowe i współpracujące – ekwidystanty epicykloidy zwyczajnej Fig. 27. Construction of epicycloidal gearsets by external envelope method, basic and mating gears – equidistant curves to common epicycloid

w punktach zwrotu tych krzywych. W tej sytuacji zarys użębień kształtuje się według ekwidystant epicykloidy łączonych łukami kół o środku znajdującym się w punktach zwrotu; koło o uzębieniu zewnętrznym według ekwidystant wewnętrznych, a koło współpracujące o uzębieniu wewnętrznym według ekwidystant zewnętrznych. Do obliczania współrzędnych zarysu uzębienia obu kół służą równania ekwidystanty (9) oraz równanie okręgu (34).

Przyjmując epicykloidę skróconą jako krzywą zasadniczą (poz. 5.1, rys. 12), można z równań (5) wyznaczyć zarys uzębienia koła podstawowego, którym jest koło o uzębieniu wewnętrznym. Koło współpracujące ma uzębienie zewnętrzne o zarysie ukształtowanym obwiednią wewnętrzną rodziny kół podstawowych (poz. 6.1, rys. 12). Zarys tego uzębienia wyznacza się po-



Rys. 28. Konstrukcja zespołu kół epicykloidalnych metodą obwiedni wewnętrznej; koło podstawowe – epicykloida skrócona, koło współpracujące – obwiednia

Fig. 28. Construction of epicycloidal gearsets by the internal envelope method; basic gear - curtate epicycloid, mating gearenvelope

dobnie jak w metodzie obwiedni zewnętrznej, z tym że układ współrzędnych x_2y_2 jest związeny z kołem ruchomym o promieniu r_{w2} obtaczanym po nieruchomym kole o promieniu r_{w1} (rys. 28). Współrzędne środka 0₂ wynoszą odpowiednio

а	=	е	ços	(180	+γ	(46)
b	×	e	sin	(180	+ Y		(40)

Po uwzględnieniu, że

$$\varphi = \frac{\gamma}{z_2} \tag{47}$$

ostatecznie uzyskuje się układ równań parametrycznych rodziny kół epicykloidalnych o postaci

$$x_{re1} = -\lambda \rho \cos \gamma + \rho(z_2 + 1) \cos \frac{z_2 \eta + \gamma}{z_2} - \lambda \rho \cos \frac{(z_2 + 1)z_2 \eta + \gamma}{z_2}$$
(48)

$$y_{re1} = -\lambda \rho \sin \gamma + \rho (z_2 + 1) \sin \frac{z_2 \eta + \gamma}{z_2} - \lambda \rho \sin \frac{(z_2 + 1) z_2 \eta + \gamma}{z_2}$$

Z zależności (42) otrzymuje się związek między kątami n i y

$$\sin z_2 \eta - \lambda \sin \left(z_2 \eta + \frac{z_2 (\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} \right) + \sin \frac{z_2 (\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} = 0$$
(49)

Obwiednię wewnętrzną rodziny kół epicykloidalnych opisujących zarys koła współpracującego określają równania (48) (49), podobne do równań (41) (43) opisujących obwiednię zewnętrzną. Różnice znaków w obu układach wynikają z różnic wartości współrzędnych środka koła obtaczanego – równania (38) i (46) oraz współzależności kątów φ i γ – równania (40) (47).

Ekwidystantę zewnętrzną epicykloidy skróconej jako uzębienie koła podstawowego (poz.5.2, rys.12) opisują równania (9), w których $\lambda < 1$, a przesunięcie g > 0. Uzębienie koła współpracującego stanowi wówczas obwiednia wewnętrzna rodziny ekwidystant epicykloidy skróconej (poz.6.2, rys.12). Uzębienie to można modyfikować, zastępując łukami kołowymi wypukłe łuki obwiedni.

Przy kształtowaniu zarysu uzębienia koła podstawowego według ekwidystant wewnętrznych epicykloidy skróconej (poz.5.3, rys.12) korzysta się również z zależności (9), lecz przyjmuje się ujemną wartość przesunięcia ekwidystanty g. Zarys uzębienia koła współpracującego określa – - podobnie jak poprzednio – obwiednia wewnętrzna rodziny ekwidystant epicykloidy skróconej (poz.6.3, rys.12). Możliwa jest również, jak poprzednio, modyfikacja zarysu łukami kołowymi.

W przypadku kształtowania kół podstawowych według ekwidystanty epicykloidy zwyczajnej zarys koła współpracującego uzębionego zewnętrznie jest uformowany również według ekwidystanty epicykloidy zwyczajnej (poz. 5.4 i 6.4, rys.12). Metoda ta jest prostym odwróceniem uprzednio omówionej metody obwiedni zewnętrznej. Wykorzystuje się tu również równania ekwidystanty (9), dla λ = 1, oraz równanie (34).

Przy projektowaniu zazębień o zarysie hipocykloidalnym Wykorzystuje się również hipocykloidy skrócone, jej ekwidystanty zewnętrzne i wewnętrzne oraz ekwidystanty hipocykloid zwyczajnych. Zarys uzębienia koła podstawowego według hipocykloidy skróconej opisuje układ równań (6), w których $\lambda < 1$ (poz.1.1, rys.13). Zasadę konstrukcji koła współpracującego (poz.2.1, rys.13) szczegółowiej wyjaśnia rysunek 29. Zarys jego uzębienia jest obwiednią rodziny kół hipocykloidalnych, która jest opisana równaniami o postaci



Rys. 29. Konstrukcja zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej; koło podstawowe - hipocykloida skrócona, koło współpracujące - obwiednia

Fig. 29. Construction of hypocycloidal gearsets by the external envelope method; basic gear - curtate hypocycloid, mating gear - envelope

$$x_{rh2} = \lambda \rho \cos \gamma + \rho(z_1 - 1) \cos \frac{z_1 \eta - \gamma}{z_1} - \lambda \rho \cos \frac{(z_1 - 1)z_1 \eta + \gamma}{z_1}$$

$$y_{rh2} = \lambda \rho \sin \gamma + \rho (z_1 - 1) \sin \frac{z_1 \eta - \gamma}{z_1} - \lambda \rho \sin \frac{(z_1 - 1) z_1 \eta + \gamma}{z_1}$$

$$\sin z_1 \eta - \lambda \sin \left(z_1 \eta - \frac{z_1 (\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} \right) - \sin \frac{z_1 (\eta - \gamma) - \gamma}{z_1} = 0$$
(51)

Jeśli uzębienie koła podstawowego jest wykonane według ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy skróconej (poz.1.2, rys.13), to jego zarys określają równania (10), w których $\lambda < 1$ oraz g >0. Uzębieniem wewnętrznym koła współpracującego jest wówczas obwiednia zewnętrzna rodziny hipocykloid skróconych (poz.2.2, rys.13). Wypukłe łuki obwiedni można również zastąpić łukami kołowymi.

W przypadku ekwidystanty wewnętrznej hipocykloidy skróconej jako uzębienia koła podstawowego (poz.1.3, rys.13) jego zarys opisują także równania (10), z tym że $\lambda < 1$ i g < 0. Zarysem uzębienia koła współ-

(50)



Rys. 30. Konstrukcja zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwiedni zewnętrznej; koło podstawowe i współpracujące – ekwidystanta do hipocykloidy zwyczajnej Fig. 30. Construction of hypocycloidal gearsets by the external envelope method; basic and mating gears – equidistant curve to common hypocycloid

pracującego, podobnie jak poprzednio, jest obwiednia zewnętrzna rodziny ekwidystant hipocykloidy skróconej (poz.2.3, rys.13). Także tu można modyfikować zarys łukami kół.

Również w zazębieniach hipocykloidalnych koła mogą mieć zarys wykonany według hipocykloidy zwyczajnej (poz.1.4 i 2.4, rys.13 oraz rys. 30). Uzębienie koła podstawowego opisują wówczas równania hipocykloidy (6) przy λ = 1. Wychodząc z równań (50) i (51), można łatwo dowieść, że obwiednia rodziny hipocykloid zwyczajnych jest również hipocykloidą zwyczajną. Jej ekwidystanty, łączone łukami kołowymi zatoczonymi w punktach zwrotu hipocykloidy, tworzą zarys uzębienia kół. Ekwidystanta zewnętrzna hipocykloidy jest zarysem uzębionego zewnętrznie koła podstawowego, a ekwidystanta zewnętrzna obwiedni opisuje zarys uzębienia wewnętrznego koła współpracującego. Zarysy te określają równania ekwidystanty (10) i równanie koła (34) łącznie z warunkiem (35).



Rys. 31. Konstrukcja zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwiedni wewnętrznej; koło podstawowe - hipocykloida skrócona, koło współpracujące - obwiednia

Fig. 31. Construction of hypocycloidal gearsets by the internal envelope method; basic gear - curtate hypocycloid, mating gear - envelope

Projektując kola współpracujące według metody obwiedni wewnętrznej, przyjmuje się uzębienie wewnętrzne koła podstawowego o zarysach uzębienia według hipocykloid skróconych oraz ich ekwidystant lub według ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy zwyczajnej. Jeśli koło podstawowe zostało uformowane według hipocykloidy skróconej (poz.5.1, rys.13), to jego zarys opisują równania (6). Wykorzystując rysunek 31, przy uwzględnieniu związków (46) i (47), można, podobnie jak w metodzie obwiedni zewnętrznej, zestawić równania zarysu uzębienia koła współpracującego

$$x_{rh1} = -\lambda\rho\cos\gamma + \rho(z_2 - 1)\cos\frac{z_2\eta + \gamma}{z_2} + \lambda\rho\cos\frac{(z_2 - 1)z_2\eta - \gamma}{(z_2 - 1)z_2\eta - \gamma}$$

$$y_{rh1} = -\lambda\rho\sin\gamma + \rho(z_2 - 1)\sin\frac{z_2\eta + \gamma}{z_2} - \lambda\rho\sin\frac{(z_2 - 1)z_2\eta - \gamma}{z_2}$$
(52)

$$\sin z_2 \eta - \lambda \sin \left(z_2 \eta - \frac{z_2(\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} \right) - \sin \frac{z_2(\eta - \gamma) + \gamma}{z_2} = 0$$
(53)

Interpretacja tych równań jest podobna do interpretacji równań (48), (49).



Rys. 32. Konstrukcja zespołu kół hipocykloidalnych metodą obwiedni wewnętrznej; koło podstawowe – ekwidystanta hipocykloidy skróconej koło współpracujące – łuki kołowe, rolki Fig. 32. Construction of hypocycloidal gearsets by the internal envelope; basic gear – equidistant curve to curtate hypocycloid, mating gear – circles, rollers

Jeśli koło podstawowe ma zarys uzębienia według zewnętrznej ekwidystanty hipocykloidy (poz. 5.2, rys.13), to zarys ten opisują równania (10), w których $\lambda < 1$ oraz g > 0. Uzębienie koła współpracującego kształtuje obwiednia wewnętrzna rodziny ekwidystant hipocykloidy skróconej (poz.6.2, rys.13). Wypukłe łuki obwiedni można zastąpić łukami kołowymi o promieniu r = g. Zilustrowano to szczegółowo na rysunku 32.

Projektując koło podstawowe o zarysie według ekwidystanty wewnętrznej hipocykloidy skróconej (poz.5.3, rys.13), należy w równaniach (10) przyjąć $\lambda < 1$ oraz g < 0. Zarysem uzębienia koła współpracującego jest wówczas obwiednia wewnętrzna rodziny ekwidystant hipocykloidy (poz. 6.3, rys.13). Również i w tym przypadku można przyjmować łuki kołowe zamiast wypukłych łuków obwiedni.

W przypadku zarysu uzębienia koła podstawowego według ekwidystanty hipocykloidy zwyczajnej zarysem uzębienia koła współpracującego, zewnętrznie uzębionego, jest również ekwidystanta hipocykloidy zwyczajnej (poz.5.4 i 6.4, rys.13). Jest to proste odwrócenie konstrukcji według metody obwiedni zewnętrznej. Zarysy uzębień obu kół określają równania ekwidystanty (10), okręgu (34) z uwzględnieniem warunku (35) oraz $\lambda = 1$.

5.2. Analiza kształtu kół współpracujących

Kształt krzywej opisującej uzębienie koła podstawowego decyduje o kształcie koła współpracującego. Jego uzębienie jest bowiem uformowane obwiednią zewnętrzną lub wewnętrzną rodziny cykloid zasadniczych, Jest więc swego rodzaju lustrzanym odbiciem uzębienia koła podstawowego. Współrzędne zarysu uzębienia koła współpracującego wyznacza się z równań (41), (43), (48), (49), (50), (51) oraz (52), (53) i podstawie odpowiednie wartości parametrów z, ρ , λ przyjęte dla koła podstawowego. Zęby koła współpracującego są uformowane przez wypukłe i wklęsłe łuki cykloid przechodzące jeden w drugi w punktach przegięcia profilu. Punkty te dzielą ząb na głowę i stopę zęba. Wysokość zęba h = 2 $\rho\lambda$ jest równa wysokości zęba koła podstawowego i proporcjonalna do wartości ρ i λ .

Przyjmując ekwidystanty cykloidy jako zarysy uzębień koła podstawowego, z góry zakłada się modyfikację zarysu uzębienia koła współpracującego łukami kołowymi. Ponieważ dopuszczalne wartości odległości ekwidystanty zewnętrznej epicykloidy i wewnętrznej hipocykloidy są niewielkie (rys.12, 13, 18), więc zarysy uzębień otrzymane według tych ekwidystant niewiele różnią się od zarysów określonych łukami cykloid zasadniczych. Dlatego obwiednie rodziny takich ekwidystant także niewiele się różnią od obwiedni rodziny cykloid zasadniczych. Z kolei modyfikowanie takich uzębień i zastąpienie łuków obwiedni łukami kołowymi nieco upraszcza kształt, lecz uzębienia te nie mają większego znaczenia w budowie maszyn wyporowych. Łuki kół mają bowiem albo za małe promienie, trudne do wykonania i montażu oraz źle współpracujące z kołem podstawowym, albo zbyt duże, co jest również niekorzystne, ponieważ współpracują, z "ostro" uformowanymi zębami zarysu koła podstawowego.

Znacznie większe odległości przesunięć zarysu koła podstawowego można uzyskać, stosując ekwidystanty wewnętrzne (g < 0) epicykloid lub zewnętrzne (g > 0) hipocykloid skróconych. Uzębienia kół są foremne, linia zazębienia jest ciągła, a zęby mają dużą wysokość. Obwiednia rodziny ekwidystant tego rodzaju, opisująca zarys koła współpracującego, jest modyfikowana łukami kołowymi o promieniu równym odległości ekwidystant r = g. Ukształtowane w ten sposób zęby można łączyć łukami kołowymi zatoczonymi ze środka koła lub nawet odcinkami prostej. W ten sposób znacznie upraszcza się zarys, przy nie zmienionych warunkach współpracy z uzębieniem koła podstawowego.

Stosując w kołach podstawowych uzębienie uformowane według ekwidystant cykloid zwyczajnych, otrzymuje się ten sam typ uzębienia w kołach współpracujących. W związku z tym koła mają zęby o największej możliwej wysokości, równej h = 2p, a jednocześnie są one foremne i zarys uzębienia jest ciągły.

5.3. Zasady doboru zespetu kół

Z systematyki uzębień (rys.10, rys.11) oraz metod projektowania kół współpracujących (rys.12, rys.13) wynika, że jest kilkanaście sposobów kojarzenia zespołu kół cykloidalnych, zależnie od rodzaju krzywej przyjętej do profilowania zębów oraz założonej metody projektowania koła współpracującego z kołem podstawowym. Wszystkie spełniają podstawowy warunek, że $z_2 - z_1 = 1$, orzekający o jednoczesnej współpracy wszystkich zębów obu kół. Nie wszystkie jednak warianty kojarzenia zespołów kół są jednakowo przydatne w praktyce. O praktycznej przydatności zespołu kół cykloidalnych w budowie pomp i silników decyduje bowiem nie tylko zarys uzębienia i konstrukcja kół, lecz także technologiczność ich wykonawstwa. Najogólniej rzecz ujmując, w rachubę wchodzą tylko te warianty w których:

- zarys uzębienia jest łztwy do opisania i zwymiarowania, zapewnia duże pola powierzchni wrębów międzyzębnych, a więc duże wydajności lub chłonności właściwe dla założonych wymiarów gabarytowych,

 - zęby współpracujących kół mają zarys o możliwie dużych krzywiznach dających się zastąpić łukami kołowymi, a więc również rolkami umożliwiającymi polepszenie warunków współpracy kół,

- uzębienie dają się wykonać ogólnie stosowanymi w budowie maszyn metodami i umożliwiają sprawdzenie kształtu i wymiarów.

Analizując przedstawione na rysunkach 12 i 13 warianty zespołów kół według tych kryteriów, widzimy, że zespoły kół epicykloidalnych zaprojektowanych metodą obwiedni wewnętrznej i zespoły kół hipocykloidalnych zaprojektowanych metodą obwiedni zewnętrznej są w praktyce mniej przydatne. Kłopotliwe jest wyznaczenie zarysów i trudne wykonawstwo krzywoliniowego zarysu kół o uzębieniu wewnętrznym według cykloid lub ekwidystant. Korzystniejsze fozwiązania umożliwiają zespoły kół epicykloidalnych utworzonych metodą obwiedni zewnętrznej i kół hipocykloidalnych utworzonych metodą obwiedni wewnętrznej. Wyjątkiem jest zespół kół epi-

54

cykloidalnych o uzębieniach według ekwidystanty zewnętrznej epicykloidy oraz łuków kołowych (poz.1.2 i 2.2, rys.12), a także odpowiadający mu zespół kół hipocykloidalnych o uzębieniu według ekwidystanty wewnętrznej hipocykloidy i łuków kołowych (poz.5.3 i 6.3, rys.13).

Zespoły kół epicykloidalnych są korzystniejsze w porównaniu z kołami hipocykloidalnym. Trudniejszy bowiem do wykonania zarys uzębienia według epicykloidy lub jej ekwidystanty otrzymuje koło uzębione zewnętrznie, na którym łatwiej go naciąć. Koło o uzębieniu wewnętrznym może mieć zarys ukształtowany według łuków kołowych lub można do jego konstrukcji wykorzystać rolki, co znacznie ułatwia wykonawstwo i sprawdzanie kształtu i wymiarów. W przypadku zazębień hipocykloidalnych trudniejszy wykonawczo zarys utworzony według ekwidystant ma koło uzębione wewnętrznie, a łatwiejszy według łuków kołowych - koło o uzębieniu zewnętrznym. Pod względem konstrukcji (foremność zębów, współpraca kół, wymiary zespołu) nie ma większych różnic między uzębieniem epi- i hipccykloidalnym.

Podsumowując można stwierdzić, że przydatne w budowie pomp i silników zębatych są:

- zespoły kół epicykloidalnych zaprojektowanych metodą obwiedni zewnętrznej o uzębieniach według epicykloidy skróconej i obwiedni, ekwidystanty wewnętrznej epicykloidy skróconej i łuków kołowych oraz ekwidystant wewnętrznych epicykloid zwyczajnych

- zespoły kół hipocykloidalnych zaprojektowanych metodą obwiedni wewnętrznej o uzębieniach według hipocykloidy skróconej i obwiedni,ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy skróconej i łuków kołowych oraz ekwidystant zewnętrznych do hipocykloid zwyczajnych.

6. WYMIARY KOŁ ZEBATYCH

Do projektowania kół o zazębieniach epicykloidalnych częściej stosuje się metodę obwiedni zewnętrznej (punkt 5.3). Na rysunku 33 zestawiono wszystkie cztery zespoły kół (według rys. 12 - kolumny 1,2) projektowane tą metodą. Na rysunkach kół naniesiono wszystkie wymiary charakterystyczne, a w tabeli 1 zestawiono zależności, którymi są wyrażane [37], [41]. Zakłada się liczbę zębów z_1 koła podstawowego o uzębieniu zewnętrznym. Koło współpracujące ma liczbę zębów $z_2 = z_1 + 1$. Wprowadza się również współczynnik przesunięcia ekwidystanty v = g/p. Parametry λ i v przyjmuje się odpowiednio:





- dla zespołu kół formowanych według epicykloid i ich obwiedni (rys. 33a,e): $\lambda < 1, \, v = 0$
- dla zespołu kół formowanych według ekwidystant zewnętrznych i łuków kołowych (rys.33b,f): $\lambda<1,\;v>0$
- dla zespołu kół formowanych według ekwidystant wewnętrznych i łuków kołowych (rys.33c,g): $\lambda < 1$, v < 0
- dla zespołu kół formowanych według ekwidystant wewnętrznych epicykloid zwyczajnych (rys.33d,h): λ = 1, v < 0.

W prawej części tabeli 1 podano wzory na obliczanie wymiarów charakterystycznych kół projektowanych metodą obwiedni wewnętrznej(kolumny 5,6 rys.12). Kołem podstawowym jest w tym przypadku koło uzębione wewnętrznie o założonej liczbie zębów z_2 . Koło współpracujące ma liczbę zębów $z_1 = z_2 - 1$. Zasady dobierania parametrów λ i v są takie same jak dla kół projektowanych metodą obwiedni zewnętrznej.

Zespoły kół o zazębieniach hipocykloidalnych projektuje się zwykle metodą obwiedni wewnętrznej (punkt 5.3). Na rysunku 34 zestawiono zespoły kół według rysunku 13, kolumny 5 i 6 z naniesionymi oznaczeniami wymiarów charakterystycznych, a w tabeli 2 (część prawa) wzory, które je określają. W tym przypadku wielkością wyjściową do obliczeń jest liczba zębów koła podstawowego z_2 , o uzębieniu wewnętrznym. Koło współpracujące ma liczbę zębów $z_1 = z_2 - 1$. Parametry λ i v przyjmuje się następująco:

- dla zespołu kół kształtowanych według hipocykloid i ich obwiedni (rys. 34a,e): λ < 1, v = 0
- dla zespołu kół kształtowanych według ekwidystant zewnętrznych i łuków kołowych (rys.34b,f) $\lambda < 1, \, v \geq 0$
- dla zespołu kół kształtowanych według ekwidystant wewnętrznych i łuków kołowych (rys.34c,g) λ < 1, v < 0
- dla zespołu kół kształtowanych według ekwidystant hipocykloid zwyczajnych (rys.34d,h): $\lambda = 1, v > 0$.

W lewej części tabeli 2 zestawiono zależności opisujące wymiary kół hipocykloidalnych projektowanych metodą obwiedni zewnętrznej. Kołem podstawowym jest wówczas koło uzębione zewnętrznie o liczbie zębów z. Ko-

Rys. 33. Wymiary charakterystyczne kół o zazębieniach epicykloidalnych: a-d) - wymiary kół podstawowych o uzębieniu zewnętrznym, e-h) - wymiary kół współpracujących o uzębieniu wewnętrznym Fig. 33. Characteristic dimensions of epicycloidal gearsets: a-d) dimensions of basic gears with external gearing, e-h) dimensions of mating gears with internal gearing

Tabela 1

Wymiary charakterystyczne kół o zazębieniach epicykloidalnych

Bedrad	Metoda obw	viedni zewnętrznej	Metoda obwiedni wewnętrznej						
wymiaru	koło podstawowe	koło współpracujące	koło podstawowe	koło współpracując e					
Promień koła podziałowego zasadniczego	$r_1 = r_{b1} = \frac{z_1^m}{2} = z_1^n \rho$	$r_{2^{m}} r_{b2^{m}} \frac{z_{2^{m}}}{2} = (z_{1} + 1)\rho$	$r_2 = r_{b2} = \frac{z_2 m}{2} = z_2 \rho$	$r_1 = r_{b1} = \frac{z_1^m}{2} = (z_2 - 1)\rho$					
Promień koła tocznego	$r_{w1} = z_1 e = z_1 \lambda \rho$ $r_{w2} = z_2 e = (z_1 + 1) \lambda \rho$ $r_{w2} = z_2 e = z_2 \lambda \rho$ $r_{w1} = z_1 e = (z_2 - 1) \rho$ $e = \lambda \rho$								
Promień koła wierzchoł- kowego	$r_{a1} = z_1 \rho + \rho + \lambda \rho \pm g =$ $\frac{m}{2} (z_1 + 1 + \lambda \pm v)$	$r_{a2} = r_{f1} + e = z_1 \rho + + \rho - \lambda \rho^{\pm} g + \lambda \rho = = \frac{m}{2} (z_1 + 1 + 2\lambda^{\pm} v)$	$r_{g2} = z_2 \rho + \rho - \lambda \rho \pm g =$ $= \frac{m}{2} (z_2 + 1 - \lambda \pm v)$	$r_{g1} = r_{f2} - e = z_2 \rho +$ + $\rho + \lambda \rho \stackrel{+}{=} g - \lambda \rho =$ = $\frac{m}{2} (z_2 + 1 + v)$					
Promień koła stóp	$r_{f1} = z_1 p + p - \lambda p \pm g =$ = $\frac{m}{2} (z_1 + 1 - \lambda \pm v)$	$r_{f2} = r_{a2} + e =$ = $z_1 \rho + \rho + \lambda \rho \pm g + \lambda p =$ = $\frac{m}{2} (z_1 + 1 + 2\lambda \pm v)$	$r_{f2} = z_2 P + P + \lambda P \stackrel{t}{=} g$ $= \frac{m}{2}(z_2 + 1 + \lambda \stackrel{t}{=} v)$	$r_{f1} = r_{a2} - e =$ = $z_2 \rho + \rho - \lambda \rho^+ g - \lambda \rho$ = $\frac{m}{2}(z_2 + 1 - 2\lambda^+ v)$					
Wysokość zęba	$h_1 = h_2 = 2e = 2\lambda\rho$								
Współczynnik wysokości zęba	$h_1^* = h_2^* = \frac{h_1}{m} = \frac{h_2}{m} = \frac{2\lambda\rho}{2\rho} = \lambda$								

Koła współpracujące

Zre



Rys. 34. Wymiary charakterystyczne kół o zazębieniach hipocykloidalnych:
a-d) - wymiary kół podstawowych o uzębieniu wewnętrznym, e-h) - wymiary kół współpracujących o uzębieniu zewnętrznym
Fig. 34. Characteristic dimensions of hypocycloidal gearsets: a-d) dimensions of basic gears with internal gearing, e-h) dimensions of mating gears with external gearing

Tabela 2

Wymiary charakterystyczne kół o zazębieniach hipocykloidalnych

Rodzaj	Metoda obwie	edni zewnętrznej	Metoda	Metoda obwiedni wewnętrznej				
wymiaru	koło podstawowe	koło współpracujące	koło podstawowe	koło współpracujące				
Promień koła podziałowego zasadniczego	$r_1 = r_{b1} = \frac{z_1^m}{2} = z_1^n \rho$	$r_2 = r_{b2} = \frac{z_2^m}{2} = (z_1 + 1)\rho$	$r_2 = r_{b2} = \frac{z_2^m}{2} = z_2^p$	$r_1 = r_{b1} = \frac{z_1^m}{2} = (z_2 - 1)\rho$				
	m = 2 p							
Promień koła tocznego	$r_{w1} = z_1 e = z_1 \lambda \rho$	$r_{w2} = z_2 e = (z_1 + 1) \lambda \rho$	$r_{w2} = z_2^e = z_2^{\lambda \rho}$	$r_{w1} = z_1 e = (z_2 - 1) \lambda \rho$				
	$e = \lambda \rho$							
Promień koła wierzchoł- kowego	$r_{a1} = z_{1}\rho - \rho + \lambda \rho^{\pm} g = \frac{m}{2} (z_{1} - 1 + \lambda^{\pm} v)$	$r_{\partial 2} = r_{f1} + e = z_1 \rho - \rho - \lambda \rho + g + \lambda \rho = \frac{m}{2} (z_1 - 1 + v)$	$r_{a2} = z_2 \rho - \rho - \lambda \rho^{\pm} g =$ $= \frac{m}{2} (z_2 - 1 - \lambda^{\pm} v)$	$r_{a1} = r_{f2} - e =$ = $z_2 p - \rho + \lambda \rho^{\pm} g - \lambda \rho =$ = $\frac{m}{2}(z_2 - 1 \pm v)$				
Promień koła stóp	$r_{f1} = z_1 \rho - \rho - \lambda \rho^{\pm} g =$ $= \frac{m}{2} (z_1 - 1 - \lambda \pm v)$	$r_{f2} = r_{a1} + e =$ = $z_1 \rho - \rho + \lambda \rho^{\pm} g + \lambda \rho =$ = $\frac{m}{2}(z_1 - 1 + 2\lambda^{\pm} v)$	$r_{f2} = z_2 \rho - \rho + \lambda \rho \stackrel{t}{=} g =$ $= \frac{m}{2} (z_2 - 1 + \lambda \stackrel{t}{=} v)$	$r_{f1} = r_{a2} - e =$ = $z_2 \rho - \rho - \lambda \rho^{\pm} g - \lambda \rho =$ = $\frac{m}{2}(z_2 - 1 - 2\lambda \pm g)$				
Wysokość zęba	$h_1 = h_2 = 2e = 2 \lambda \rho$							
Współczynnik wysokości zęba	$h_1^* = h_2^* = \frac{h_1}{m} = \frac{h_2}{m} = \frac{2\lambda\rho}{2\rho} = \lambda$							

ło współpracujące ma liczbę zębów $z_2 = z_1 + 1$. Parametry λ i v leżą w tych samych obszarach jak w przypadku kół hipocykloidalnych projektowanych metodą obwiedni wewnętrznej.

Przykłady dobierania wartości współczynników **\lambda** i **v dla zazębień** cykloidalnych maszyn hydraulicznych podano w punktach 7.2-7.4 oraz 8.1.

7. WYDAJNOŚĆ I NIERÓWNOMIERNOŚĆ WYDAJNOŚCI POMP

7.1. Zależności podstawowe

Na rysunku 35 przedstawiono model pompy zębatej o cykloidalnym zazębieniu wewnętrznym. Osie kół współpracujących są ustalone. Koło o uzę-



Rys. 35. Zasada działania pompy o uzębieniu wewnętrznym cykloidalnym i osiach stałych Fig. 35. Principle of operation of a cycloidal inner gear pump with stationary axis

bieniu zewnętrznym jest kołem czynnym. Uzębiony wewnętrznie pierścień, umieszczony w łożysku ślizgowym, stanowi koło bierne. Przetłaczanie cieczy z przestrzeni ssawnej do tłocznej – oznaczonych poglądowo na rys.35 – - jest realizowane w komorach utworzonych przez zarysy uzębień kół. W strefie ssawnej komory są napełniane cieczą,wypieraną następnie do przewodu tłocznego w strefie tłocznej. Jeśli założy się pełną szczelność między zębami współpracujących kół oraz na ich powierzchniach czołowych, to oddzielenie przestrzeni ssawnej i tłocznej nastąpi wzdłuż linii A 0₁B 0₂A. Po założeniu, że pompa tłoczy ciecz nieściśliwą i bez strat tarcia oraz po przyjęciu za [6],[27],[43], że energia ciśnienia cieczy i energia mechaniczna ruchu obrotowego kół są równoważne otrzymuje się

$$dq_u p = M_1 d\alpha_1 + M_2 d\alpha_2$$
⁽⁵⁴⁾

gdzie: dq_u - elementarna objętość przetłoczona przy obrocie kół o kąty de₁ i de₂, p - różnica między ciśnieniem tłoczenia i ssania pompy, praktycznie równa ciśnieniu tłoczenia, M₁, M₂ momenty obrotowe na kołach czynnym i biernym.

Momenty M₁ i M₂ wynoszą odpowiednio

$$M_{1} = M_{11} - M_{12} = \frac{p}{2} \left(r_{A1}^{2} - r_{B1}^{2} \right)$$
$$M_{2} = M_{21} - M_{22} = \frac{p}{2} \left(r_{A2}^{2} - r_{B2}^{2} \right)$$

gdzie: b - szerokość kół, r_{A1} i r_{A2} - promienie styku zębów w punkcie A, r_{B1} i r_{B2} - promienie styku zębów w punkcie B.

Podczas obrotu kół punkty styku zębów A i B przemieszczają się po zarysach współpracujących zębów, dlatego zmieniają swoją wartość promienie r_{A1} i r_{A2} oraz r_{B1} i r_{B2} . Podczas obrotu koła czynnego o kąt $\alpha_{z1} = 2\pi/z_1$, dla którego następuje proces przetłaczania oleju ze strony ssawnej na tłoczną, punkt styku zębów A nieznacznie zmienia swe położenie na zarysie współpracujących zębów i cały czas pozostaje w otoczeniu wierzchołków kół czynnego i biernego. W związku z tym przyjmuje się $r_{A1} = r_{a1}$ i $r_{A2} = r_{a2}$. Promienie styku zębów r_{B1} i r_{B2} wyznacza się na podstawie zależności geometrycznych pokazanych na rysunku 35

$$\mathbf{r}_{B1}^{2} = (\mathbf{s} + \mathbf{r}_{w1})^{2} + \mathbf{k}^{2} = \mathbf{r}_{w1}^{2} + 2 \mathbf{s} \mathbf{r}_{w1} + \mathbf{u}^{2}$$

$$\mathbf{r}_{B2}^{2} = (\mathbf{s} + \mathbf{r}_{w2})^{2} + \mathbf{k}^{2} = \mathbf{r}_{w2}^{2} + 2 \mathbf{s} \mathbf{r}_{w2} + \mathbf{u}^{2}$$
(55)

Uwzględniając jednocześnie, że dla zazębienia wewnętrznego r $_{\rm B2}>r_{\rm A2},$ otrzymujemy wzory na momenty obrotowe M₄ i M₂ o postaci

$$M_{1} = \frac{p \cdot b}{2} \left[r_{a1}^{2} - \left(r_{w1}^{2} + 2 \cdot s \cdot r_{w1} + u^{2} \right) \right]$$

$$M_{2} = -\frac{p \cdot b}{2} \left[r_{a2}^{2} - \left(r_{w2}^{2} + 2 \cdot s \cdot r_{w2} + u^{2} \right) \right]$$
(56)

Kąty da, i da, określa się wyrażeniami

$$d\boldsymbol{\alpha}_{1} = \boldsymbol{\omega}_{1} dt$$

$$d\boldsymbol{\alpha}_{2} = \boldsymbol{\omega}_{2} dt = \boldsymbol{\omega}_{1} \frac{r_{w1}}{r_{w2}} dt$$
(57)

gdzie: w_1 , w_2 - prędkości kątowe kół, r_{w1} , r_{w2} - promienie kół tocznych. Po podstawieniu zależności (56) i (57) do równania (54) otrzymuje się ogólnie ważny wzór dla pomp o zazębieniach cykloidalnych wewnętrznych, służący do wyznaczania objętości elementarnej, przetłaczanej podczaś obrotu kół o kąty d α_1 i d α_2 lub też w czasie dt

$$dq_{u} = \frac{b\omega_{1}}{2} \left[r_{a1}^{2} - \frac{r_{w1}}{r_{w2}} r_{a2}^{2} - r_{w1} \left(r_{w1} - r_{w2} \right) - \left(1 - \frac{r_{w1}}{r_{w2}} \right) u^{2} \right] dt$$
(58)

Rozpatrując określony typ zazębienia należy we wzorze ogólnym (58) podstawić konkretne wartości promieni kół wierzchołkowych r_{a1} , r_{a2} i tocznych r_{w1} , r_{w2} oraz zależność na parametr u wyrażający chwilową odległość punktu styku zębów B od bieguna zazębienia C. Zależność tę można zapisać w postaci

$$Q_{u} = \frac{dq_{u}}{dt} = \frac{bw_{1}}{2} \left[r_{a1}^{2} - \frac{r_{w1}}{r_{w2}} r_{a2}^{2} - r_{w1} (r_{w1} - r_{w2}) - \left(1 - \frac{r_{w1}}{r_{w2}} \right) u^{2} \right]$$
(59)

wyrażającej wydajność pompy w danej chwili (wydajność chwilowa), czyli w trakcie przemieszczania się punktu przyporu B względem bieguna zazębienia C, tzn. w trakcie zmiany odległości u. Jak widać na rysunku 35, zmienia się ona od wartości początkowej u = $-u_{max}$, przyjmuje wartość u = u_{min} , aby osiągnąć u = $+u_{max}$. Zmiana znaku oznacza w tym przypadku, że punkt przyporu B przemieścił się z jednej strony osi symetrii na drugą, którą jest prosta łącząca środki 0_10_2 współpracujących kół. Przebieg zależności $Q_u = f(u)$ poglądowo przedstawiono na rysunku 36. Wartość Q_u max występuje dla u = u_{max} , a Q_u min dla u = $= \frac{t}{max}$. Po scałkowaniu zatem wyrażenia (59) w granicach $\frac{t}{u_{max}}$ otrzymuje się objętość cieczy q_z wypartą przez jedną parę zębów przy obrocie kół o kąt odpowiadający jednej podziałce (pole pod krzywą $Q_u = f(u)$ na rys.36), czyli

$$q_{z} = \int_{-u_{m \partial x}}^{+u_{m \partial x}} dq_{u}(u)$$
 (60)



Rys. 36. Przebieg wydajności pompy zębatej Q_u = f(n) Fig. 36. Gear pump delivery Q_u = f(n)

Po przemnożeniu tej zależności przez liczbę zębów koła czynnego otrzymuje się wydajność właściwą pompy, tzn. wydajność przypadającą na jeden obrót wałka

$$q = q_{z} z = z \int_{-u_{max}}^{+u_{max}} dq_{u}(u)$$
(61)

Wydajność teoretyczną (bez uwzględniania strat objętościowych) równą wydajności średniej otrzymuje się przez pomnożenie zależności (61) przez prędkość obrotową wałka napędowego n, a zatem

$$Q_{t} = Q_{u \text{ sr}} = q n = n z \int_{-u_{max}}^{+u_{max}} dq_{u}(u)$$
(62)

Wszystkie te wielkości oraz ich występowanie i wzajemne powiązania przedstawiono na rysunku 36.

Wydajność właściwa określona zależnością (61) jest dla każdego rodzaju zazębienia również funkcją iloczynu π b m². Po podzieleniu zatem wyrażenia (61) przez ten iloczyn otrzymuje się wydajność właściwą pompy w postaci bezwymiarowej, ułatwiającej analizy porównawcze różnego rodzaju zazębień



Rys. 37. Zasada działania pompy o zazębieniu wewnętrznym cykloidalnym i ruchu obiegowym: a) widok współpracujących kół,b) schemat kinematyczny pompy Fig. 37. Principle of operation of a cycloidal inner gear pump with planetary motion: a) view of mating gear wheels, b) kinematic diagram of a pump

$$\frac{q}{\pi b m^2} = \frac{z}{\pi b m^2} \int_{-u_{max}}^{u_{max}} dq_u(u)$$
(63)

Nazwano ją jednostkową wydajnością właściwą.

Na rysunku 36 widać, że wydajność chwilowa pomp zębatych jest funkcją odległości u punktu przyporu od bieguna zazębienia, a więc kąte obrotu współpracujących kół. Przebieg jej jest pulsujący. Ogólnie przyjętą w literaturze miarą pulsacji jest tzw. współczynnik nierównomierności wydajności, definiowany jako

$$\delta = \frac{Q_{u} \max - Q_{u} \min}{Q_{u} \sin}$$
(64)

Na rysunku 37a przedstawiono zasadę działania maszyny wyporowej o zazębieniu wewnętrznym i epicykloidalnym zarysie zębów. Koło o uzębieniu zewnętrznym, związane z przegubowym wałkiem, wykonuje ruch obrotowy względem własnej osi 0₁ i ruch obiegowy względem osi 0₂ uzębionego wewnętrznie koła współpracującego. Z punktu widzenia teorii mechanizmów układ ten jest prostą przekładnią obiegową. Jej schemat kinematyczny przedstawiono na rysunku 37b. Jarzmo J jest tu zbędne, ponieważ wszystkie zęby pozostają w stałym kontakcie między sobą. Na rysunku jarzmo zaznaczono linią kreskową, ponieważ ma charakter jedynie ideowy. Jest jednak potrzebne do wyznaczania przełożeń według ogólnie obowiązującej zależności

$$\frac{n_2 - n_J}{n_1 - n_J} = \frac{z_1}{z_2}$$
(65)

Ponieważ koło o uzębieniu wewnętrznym jest nieruchome $(n_2 = 0)$, więc

$$\frac{n_1}{n_J} = \frac{z_1 - z_2}{z_1}$$
(66)

Po uwzględnieniu, że $z_2 = z_1 + 1$ oraz po przyjęciu, że $n_1 = 1$ otrzymuje się liczbę obrotów, którą wykona jarzmo w czasie jednego obrotu wałka napędowego

 $n_{J} = -z_{1} \tag{67}$

Oznacza to, że jarzmo obraca się w kierunku przeciwnym do kierunku obrotów koła o uzębieniu zewnętrznym. Między zębami obu współpracujących kół tworzą się zamknięte komory wyporowe. Ich liczba jest równa liczbie zębów uzębionego wewnętrznie pierścienia. W czasie ruchu orbitalnego koła o uzębieniu zewnętrznym komory te zmieniają swoją objętość. W czasie gdy ich objętość się zwiększa, zostają napełniane, jeśli natomiast maleje, następuje faza tłoczenia. Objętość cieczy wypartej z jednej komory międzyzębnej, utworzoną przez jedną parę zębów, oblicza się ze wzoru (60). W czasie jednokrotnego obiegu koła o uzębieniu zewnętrznym, a więc na jeden obrót jarzma J, wszystkie komory, których liczba jest równa z₂, przeniosą ciecz z przestrzeni ssawnej do tłocznej. Objętość cieczy przetłoczonej na jeden obrót jarzma jest więc równa

$$q_{J} = z_{2} q_{z}$$
(68)

Wydajność właściwą q_{or} pompy wyporowej, w której koło czynne wykonuje również ruch orbitalny, uzyskuje się mnożąc wyrażenie (68) przez liczbę obrotów jarzma

$$q_{or} = q_J n_J = z_1 z_2 q_z$$
 (69)

Z porównania tej zależności z zależnością (61) widać, że wydajność właściwa pomp orbitalnych q_{or} jest z₂ razy większa od wydajności właściwej q_{et} pomp o osiach stałych

 $q_{or} = z_2 q_{st}$ (70)

Wynika stąd, że międzyzębne komory wyporowe musiałyby być z₂ razy szybciej napełniane i opóżniane. Wymaga to zastosowania specjalnej konstrukcji rozdzielacza obrotowego, pracującego jako komutator umożliwiający łączenie ich na przemian z przestrzenią ssawną i tłoczną. Opory przepływu w kanałach komutatora wykluczają ponadto całkowite napełnianie komór wyporowych, jeśli wałek napędowy pompy miałby być bezpośrednio sprzęgany z typowymi silnikami o normalnych prędkościach obrotowych. Trudności te wykluczają stosowanie takiej maszyny wyporowej w charakterze generatora energii ciśnienia. Zespół kół orbitalnych jest wykorzystywany, jak dotąd, tylko w blokach sterujących typu Orbitrol, gdzie spełnia funkcję pompy dozującej, do której ciecz jest dostarczana przez dodatkową pompę zasilającą.

Jędnostki wyporowe o zazębieniu wewnętrznym z kołami o osiach stałych i ruchomych mogą być stosowane bez zastrzeżeń jako silniki hydrauliczne. Konstrukcje o osiach stałych mogą być wykorzystywane jako silniki szybkoobrotowe, a pracujące według zasady ruchu orbitalnego jako silniki wolnoobrotowe, ponieważ mają, zgodnie z zależnością (70), z₂ razy większe chłonności właściwe.

Terminem chłonność właściwa określa się objętość cieczy, którą należy doprowadzić do silnika, aby jego wałek wykonał jeden obrót. Wzory na wydajność i chłonność właściwą, a także współczynnik nierównomierności wydajności lub chłonności maszyny wyporowej o takiej samej konstrukcji zazębienia są identyczne.

7.2. Wydajność chwilowa, średnia i jednostkowa właściwa

7.2.1. Pompy o zazębieniach epicykloidalnych

Na rysunku 38 przedstawiono trzy zespoły kół epicykloidalnych, przydatne w budowie pomp i silników zębatych. Są to zespoły zaprojekto-

67



Rys. 38. Wyznaczanie odległości punktu przyporu u od bieguna zazębienia C dla zespołów kół o zazębieniach epicykloidalnych utworzonych wg: a) epicykloidy skróconej i obwiedni, b) ekwidystanty wewnętrznej epicykloidy skróconej i łuków kołowych, c) ekwidystant epicykloidy zwyczajnej

Fig. 38. Determination of distance between contact point **u** and gearing pole C for gearsets with epicycloidal gearings formed on the basis of: a) curtate epicycloid and envelope, b) inner equidistant curve to curtate epicycloid and circular arcs, c) equidistant curves to common epicycloid

wane według metody obwiedni zewnętrznej, w której kołem podstawowym jest koło o uzębieniu zewnętrznym i o liczbie zębów z₁. Profil uzębienia jest ukształtowany według

epicykloidy skróconej i obwiedni (rys.38a)

 ekwidystanty wewnętrznej epicykloidy skróconej i łuków kołowych (rys.38b)

- ekwidystant epicykloidy zwyczajnej (rys.38c).
Współpracujące koła mają ustalone csie obrotu, można więc na podstawie rysunku 38 ustalić wzór ogólny na odległość u punktu przyporu B od bieguna zazębienia C o postaci

$$u = \sqrt{r_{w2}^2 + (r_{a2} + g)^2 - 2r_{w2}(r_{a2} + g)\cos \alpha_2} - g$$
(71)

Po podstawieniu wyrażeń na r_{w2} , r_{s2} z tablicy 1 oraz uwzględniając związek $\alpha_2 = z_1 \alpha_1/z_2$ otrzymuje się ostatecznie

$$u = \frac{m}{2} (z_1 + 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{z_1}{z_1 + 1}\right) \alpha_1} - g$$
(72)

Podstawiając tę zależność do ogólnie ważnego wzoru definicyjnego (59) oraz uwzględniając wzory na r_{a1} , r_{a2} , r_{w1} , r_{w2} zestawione w tabeli 1 otrzymuje się wydajność chwilową pompy o zazębieniu epicykloidalnym;

$$Q_{ue} = \frac{dq_{u}}{dt} = \frac{bm^{2}\omega_{1}}{8} \left\{ (z_{1} + 1 + \lambda - v)^{2} - \frac{z_{1}}{z_{1} + 1} (z_{1} + 1 - v)^{2} + z_{1}\lambda^{2} - \frac{1}{z_{1} + 1} \left[(z_{1} + 1)\sqrt{\lambda^{2} + 1 - 2\lambda\cos\left(\frac{z_{1}}{z_{1} + 1}\right)\alpha_{1} - g} \right]^{2} \right\}$$
(73)

Maksymalna wartość wydajności chwilowej wystąpi dla 🛚 💘 = O i wynosi

$$Q_{ue max} = \frac{b m^2 \omega_1}{8} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - v)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} [(z_1 + 1)] \sqrt{\lambda^2 + 1 - 2\lambda} - g \right\}$$
(74)

Minimalna wartość wydajności chwilowej wystąpi dla $\alpha_1 = \pm \alpha_{z1}/2 = \pm \pi/z_1$ i wynosi

$$Q_{\text{ue min}} = \frac{b \ m^2 \omega_1}{8} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - v)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{1}{z_1 + 1} [(z_1 + 1) \sqrt{\lambda^2 + 1} - 2\lambda \cos \frac{\pi}{z_1 + 1} - \frac{1}{2} \right\}$$
(75)

Objętość cieczy q_z wypartą przy obrocie koła czynnego o kąt α_{z1} można wyznaczyć z zależności (60) przez podstawienie w niej d q_{u} z zależności (73) oraz po uwzględnieniu dt = $d\alpha_1/\omega_1$. Całkowania należy dokonać w granicach od $-\alpha_{z1}/2$ do $+\alpha_{z1}/2$. Ostatecznie otrzymuje się

$$q_{ze} = \frac{\pi bm^2}{4z_1} \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - v)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + v)^2 + \frac{z_$$

$$-\frac{1}{z_1+1}\left\{ (z_1+1)^2 \left[1+\lambda^2 - \frac{2\lambda(z_1+1)\sin\frac{\pi}{z_1+1}}{\pi} \right] - (76) \right\}$$

$$-\frac{4\mathbf{v}(\mathbf{z}_{1}+1)^{2}}{\pi}\left[\sqrt{1+\lambda^{2}+2\lambda} \mathbf{E}(\mathbf{\phi},\mathbf{k}) - \frac{2\lambda\sin\frac{\pi}{\pi+1}}{\sqrt{1+\lambda^{2}-2\lambda\cos\frac{\pi}{\mathbf{z}_{1}+1}}}\right] + \mathbf{v}^{2}\right\}$$

We wzorze tym występuje całka eliptyczna drugiego rodzaju $E(\phi,k)$, dla której parametry ϕ i k [5] mają postać

$$\varphi = \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{(1 + \lambda^2 + 2\lambda)(1 - \cos \alpha_1)}{2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha_1)}}$$
(77)

$$k = \sqrt{\frac{4\lambda}{1 + \lambda^2 + 2\lambda}}$$
(78)

gdzie: $\alpha_1 = \alpha_{z1}/2 = \pi/(z_1 + 1)$. Wartość całki E(φ ,k) jest stabelaryzowana [1].

Zgodnie ze wzorem definicyjnym (61) wydajność właściwa pompy \mathbf{q}_{e} jest iloczynem objętości, \mathbf{q}_{ze} i liczby zębów z $_{1}$ koła czynnego, a więc

$$\mathbf{q}_{\mathbf{0}} = \frac{\pi b \mathbf{n}^{2}}{4} \left\{ (z_{1} + 1 + \lambda - \mathbf{v})^{2} - \frac{z_{1}}{z_{1} + 1} (z_{1} + 1 - \mathbf{v})^{2} + z_{1} \lambda^{2} - \frac{1}{z_{1} + 1} \left\{ (z_{1} + 1)^{2} \left[1 + \lambda^{2} - \frac{2\lambda(z_{1} + 1)\sin\frac{\pi}{z_{1} + 1}}{\pi} \right] - \frac{1}{\pi} \right\} \right\}$$
(79)
$$4\mathbf{v}(z_{1} + 1)^{2} \left[(z_{1} - z_{1})^{2} \left[(z_{1} - z_{1})^{2} - \frac{2\lambda(z_{1} + 1)\sin\frac{\pi}{z_{1} + 1}}{\pi} \right] - \frac{1}{\pi} \right] \left\{ (z_{1} - z_{1})^{2} \left[(z_{1} - z_{1})^{2} - \frac{2\lambda(z_{1} + 1)\sin\frac{\pi}{z_{1} + 1}}{\pi} \right] - \frac{1}{\pi} \right\} \right\}$$

$$\frac{4\mathbf{v}(\mathbf{z}_{1}+1)^{2}}{\pi} \left[\sqrt{1+\lambda^{2}+2\lambda} E(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{k}) - \frac{2\lambda \sin \frac{\pi}{\mathbf{z}_{1}+1}}{\sqrt{1+\lambda^{2}-2\lambda \cos \frac{\pi}{\mathbf{z}_{1}+1}}} \right] + \mathbf{v}^{2} \right\}$$

Mnożąc q_e przez prędkość obrotową wałka otrzymuje się, zgodnie z (62), wydajność teoretyczną pompy Q_{te} równą wydajnośvi średniej Q_{ue} śr

$$\begin{array}{c}
\mathbf{Q}_{\text{te}} = \mathbf{Q}_{\text{uear}} = \frac{1}{4} \pi b m^2 n \left\{ (z_1 + 1 + \lambda - v)^2 - \frac{z_1}{z_1 + 1} (z_1 + 1 - v)^2 + z_1 \lambda^2 - \frac{z_1 + 1}{z_1 + 1} \left\{ (z_1 + 1)^2 \left[1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_1 + 1)\sin\frac{\pi}{z_1 + 1}}{\pi} \right] - (80) \right\} \right\}$$

$$\frac{4\mathbf{v}(z_{1}+1)^{2}}{\pi} \left[\sqrt{1+\lambda^{2}+2\lambda} E(\varphi,\mathbf{k}) - \frac{2\lambda \sin \frac{\pi}{z_{1}+1}}{\sqrt{1+\lambda^{2}-2\lambda \cos \frac{\pi}{z_{1}+1}}} \right] + v^{2} \right\}$$

2

Jednostkową wydajność właściwą, zdefiniowaną przez zależność (63), otrzymuje się przez podzielenie zależności (79) przez czynnik **x**b m²

$$\frac{q_{e}}{\pi b m^{2}} = \frac{1}{4} \left\{ (z_{1} + 1 + \lambda - v)^{2} - \frac{z_{1}}{z_{1} + 1} (z_{1} + 1 - v)^{2} + z_{1}\lambda^{2} - \frac{1}{z_{1} + 1} \left\{ (z_{1} + 1)^{2} \left[1 + \lambda^{2} - \frac{2\lambda(z_{1} + 1)\sin\frac{\pi}{z_{1} + 1}}{\pi} \right] - \frac{4v(z_{1} + 1)^{2}}{\pi} \left[\sqrt{1 + \lambda^{2} + 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2\lambda \sin\frac{\pi}{z_{1} + 1}}{\sqrt{1 + \lambda^{2} - 2\lambda \cos\frac{\pi}{z_{1} + 1}}} \right] + v^{2} \right\} \right\}$$
(81)

Wyprowadzony wzór jest ogólnie ważny dla wszystkich trzech typowych zespołów kół epicykloidalnych przedstawionych na rysunku 38. W przypadku kół o uzębieniu uformowanym według epicykloidy skróconej i obwiedni (rys. 38a) należy przyjmować v = 0, a w przypadku uzębienia według ekwidystant epicykloid zwyczajnych (rys.38c) $\lambda = 1$.

Wzór (81) jest rozbudowany, a przez to niewygodny do stosowania w praktyce. Szczególnie kłopotliwe jest obliczanie ostatniego członu wzoru ograniczonego nawiasami klamrowymi, zawierającego całkę eliptyczną. Stwierdzono, że wpływ tego członu na całkowitą wartość wydajności właściwej $q_e/\pi bm^2$, wyznaczonej ze wzoru (81), jest stosunkowo niewielki i dla rozważanych w pracy wartości parametrów z, λ , v wynosi od kilku do kilkunastu procent [44]. Zatem do obliczeń praktycznych można stosować, nie popełniając dużego błędu, uproszczoną formę wzoru (81) o postaci

$$\frac{q_{e}}{\pi b m^{2}} = \frac{1}{4} \left[(z_{1} + 1 + \lambda - v)^{2} - \frac{z_{1}}{z_{1} + 1} (z_{1} + 1 - v)^{2} + z_{1} \lambda^{2} \right]$$

7.2.2. Pompy o zazębieniach hipocykloidalnych

Na rysunku 39 przedstawiono zespoły kół hipocykloidalnych konstruowane według metody obwiedni wewnętrznej. Kołem podstawowym jest tu koło uzębione wewnętrznie o założonej liczbie zębów z₂. Uzębienie kół współpracujących jest uformowane według

- hipocykloidy skróconej i obwiedni (rys.39a)
- ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy skróconej i łuków kołowych (rys.39b)
- ekwidystant hipocykloidy zwyczajnej (rys.39c).

Ogólny wzór na odległość u punktu przyporu B od bieguna zazębienia C ma postać



Rys. 39. Wyznaczanie odległości punktu przyporu u od bieguna zazębienia C dla zespołów kół o zazębieniach hipocykloidalnych utworzonych wg: a) hipocykloidy skróconej i obwiedni, b) ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy skróconej i łuków kołowych, c) ekwidystant hipocykloidy zwyczajnej Fig. 39. Determination of distance between contact point u and

Fig. 39. Determination of distance between contact point u and gearing pole C for gearsets with hypocycloidal gearings formed on the basis of: a) curtate hypocycloid and envelope,b) outer equidistant curve to curtate epicycloid and circular arcs, c) equidistant curves to common hypocycloid

$$u = \sqrt{r_{w1}^2 + (r_{a1} - g)^2 - 2r_{w1} (r_{a1} - g)\cos\alpha_1} + g$$
(82)

a po podstawieniu zależności r_{w1} , r_{a2} z tabeli 2

$$u = \frac{m}{2} (z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha} + g$$
(83)

Jest to wzór ogólnie ważny dla wszystkich zespołów (wg rys.39), które można scharakteryzować przez przyjęcie odpowiednich wartości λ i g. Postępując podobnie jak w przypadku zazębień epicykloidalnych otrzymuje się

- wydajność chwilową

$$Q_{uh} = \frac{dq_{u}}{dt} = \frac{bm^{2}\omega_{1}}{8} \left\{ (z_{2} - 1 + v)^{2} - \frac{(z_{2} - 1)}{z_{2}} (z_{2} - 1 + \lambda + v)^{2} + (z_{2} - 1)\lambda^{2} - \frac{1}{z_{2}} \left[(z_{2} - 1) \sqrt{1 + \lambda^{2} - 2\lambda \cos \alpha_{1}} + g \right]^{2} \right\}$$
(84)

- maksymalną wartość wydajności chwilowej

$$Q_{\text{uhmax}} = \frac{bm^2 \omega_1}{8} \left\{ (z_2 - 1 + v)^2 - \frac{(z_2 - 1)}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + v)^2 + (z_2 - 1)\lambda^2 - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1)\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda} + g \right]^2 \right\}$$
(85)

- minimalną wartość wydajności chwilowej

$$Q_{\text{uhmin}} = \frac{bm^2 \omega_1}{8} \left\{ (z_2 - 1 + v)^2 - \frac{(z_2 - 1)}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + v)^2 + (z_2 - 1) \lambda^2 - \frac{1}{z_2} \left[(z_2 - 1) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \frac{\pi}{z_2 - 1}} + g \right]^2 \right\}$$
(86)

- wydajność teoretyczną tożsamą z wydajnością średnią

$$\begin{aligned} & Q_{\text{th}} = Q_{\text{uhsr}} = \frac{1}{4} \pi \text{bm}^2 n \left\{ (z_2 - 1 + v)^2 - \frac{z_2 - 1}{z_2} (z_2 - 1 - \lambda + v)^2 + (z_2 - 1)\lambda^2 + \frac{1}{z_2} \left\{ (z_2 - 1)^2 \left[1 + \lambda^2 - \frac{2\lambda(z_2 - 1)\sin\frac{\pi}{z_2 - 1}}{\pi} \right] + \frac{4v(z_2 - 1)^2}{\pi} \left[\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda} \left[E(\varphi, k) - \frac{2\lambda\sin\frac{\pi}{z_2 - 1}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{\pi}{z_2 - 1}}} \right] + v^2 \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$(87)$$

- jednostkową wydajność właściwą

.

$$\frac{q_{h}}{\pi bm^{2}} = \frac{1}{4} \left\{ (z_{2}-1 + v)^{2} - \frac{(z_{2}-1)}{z_{2}} (z_{2}-1 - \lambda + v)^{2} + (z_{2}-1) \lambda^{2} + (z_{2}-1) \lambda^{2} + \frac{1}{z_{2}} \left\{ (z_{2}-1)^{2} \left[1 + \lambda^{2} - \frac{2\lambda(z_{2}-1) \sin\left(\frac{\pi}{z_{2}-1}\right)}{\pi} \right] + \frac{1}{\pi} \right\}$$

$$+ \frac{4\mathbf{v}(\mathbf{z}_{2}-1)^{2}}{\pi} \left[\sqrt{1+\lambda^{2}+2\lambda} E(\mathbf{p},\mathbf{k}) - \frac{2\lambda\sin\left(\frac{\pi}{\mathbf{z}_{2}-1}\right)}{\sqrt{1+\lambda^{2}-2\lambda\cos\left(\frac{\pi}{\mathbf{z}_{2}-1}\right)}} \right] + \mathbf{v}^{2} \right\} \left\}$$
(88)

Wzór (88) jest ważny dla wszystkich trzech zespołów przedstawionych na rysunku 39, z tym że w przypadku kół według rysunku 39a należy podstawić v = 0, a w przypadku kół według rysunku 39c $\lambda = 1$. Podobnie i w tym przypadku rozbudowany wzór (88) można uprościć, pomijając człon zawarty w nawiasach klamrowych i stosować go do obliczeń praktycznych w postaci

$$\frac{q_{h}}{xb m^{2}} = \frac{1}{4} \left[(z_{2} - 1 + v)^{2} - \frac{(z_{2} - 1)}{z_{2}} (z_{2} - 1 - \lambda + v)^{2} + (z_{2} - 1)\lambda^{2} \right]$$

7.2.3. Zależność wydajności od parametrów geometrycznych kół

Z analizy zależności (81), (88) wynika, że na jednostkową wydajność właściwą wpływają:

- liczba zębów z, lub z₂
- wartość współczynnika skrócenia cykloidy \lambda
- wartość współczynnika przesunięcia ekwidystanty v.

Na rysunku 40 przedstawiono wpływ tych parametrów na jednostkową wydajność właściwą dla pomp o zazębieniach epicykloidalnych, a na rysunku 41 dla pomp o zazębieniach hipocykloidalnych. Wykresy sporządzono dla zakresów zmienności parametrów ustalonych w punkcie 4.4. Na wykresach widać, że zwiększanie liczby zębów wpływa wprost proporcjonalnie na wydajność pomp. Zwiększenie współczynnika λ również zwiększa wydajność jednostkową, ponieważ zęby mają większą wysokość, przez co zwiększa się powierzchnia wrębów międzyzębnych. Wpływ przesunięcia ekwidystanty v zależy od rodzaju zazębienia. W przypadku pomp o zazębieniach epicykloidalnych (rys.40) zwiększanie v od 0 do 1 zmniejsza wydajność pompy. Zarys uzębienia znajduje się bowiem wewnątrz epicykloidy zasadniczej, przez co zmniejszają się wymiary kół, a więc pola powierzchni wrębów. W zazębieniach hipocykloidalnych (rys.41) zwiększenie współczynnika v powoduje zwiększenie wydajności. Zarysy kół są tworzone zewnątrz hipocykloidy zasadniczej, co zwiększa pole powierzchni wrębów.

7.3. Współczynnik nierównomierności wydajności

Współczynnik nierównomierności wydajności pomp o uzębieniu epicykloidalnym $\delta_{\rm g}$ wyznacza się przez podstawienie do wzoru definicyjnego (64) zależności (74), (75) i (80). Po przekształceniach uzyskuje się ostatecznie



Rys. 40. Przebieg jednostkowej wydajności właściwej qe/mbm² pomp o zazębieniach epicykloidalnych w zależności od liczby zębów koła podstawowego z₁, współczynnika skrócenia epicykloidy oraz współczynnika przesunięcia ekwidystanty v

Fig. 40. Elementary specific delivery qe/πb m² of epicycloidal gear pumps versus number z, of teeth of basic wheel, epicycloid contraction coefficient and coefficient of equidistant v displacement



Rys. 41. Przebieg jednostkowej wydajności właściwej qh/πb m² pomp o zazębieniach hipocykloidalnych w zależności od liczby zębów koła podstawowego z, współczynnika skrócenia hipocyklidy oraz współczynnika przesunięcia ekwidystanty v

Fig. 41. Elementary specific delivery $qh/\pi b$ m² of hypocycloidal gear pumps versus number z_2 of teeth of basic wheel, hypocycloid contraction coefficient and equidistant displacement coefficient v

$$\begin{split} \delta_{e} &= \frac{A}{B} \\ \text{gdzle:} \\ A &= \frac{1}{z_{1} + 1} \left\{ \left[(z_{1} + 1) \sqrt{\lambda^{2} + 1 - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_{1} + 1}\right)} - \mathbf{v} \right]^{2} - \\ &- \left[(z_{1} + 1) \sqrt{\lambda^{2} + 1 - 2\lambda} - \mathbf{v} \right]^{2} \\ B &= (z_{1} + 1 + \lambda - \mathbf{v})^{2} - \frac{z_{1}}{z_{1} + 1} (z_{1} + 1 - \mathbf{v})^{2} + z_{1} \lambda^{2} - \\ &- \frac{1}{z_{1} + 1} \left\{ (z_{1} + 1)^{2} \left[1 + \lambda^{2} - \frac{2\lambda(z_{1} + 1)\sin\left(\frac{\pi}{z_{1} + 1}\right)}{\pi} \right] - \\ &- \frac{4\mathbf{v}(z_{1} + 1)^{2}}{\pi} \left[\sqrt{1 + \lambda^{2} + 2\lambda} \mathbf{E}(\varphi, \mathbf{k}) - \frac{2\lambda\sin\left(\frac{\pi}{z_{1} + 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^{2} - 2\lambda\cos\left(\frac{\pi}{z_{1} + 1}\right)}} \right] + \mathbf{v}^{2} \right\} \end{split}$$

Po podstawieniu do wzoru (64) zależności (85), (86), (87) otrzymuje się zależność na współczynnik nierównomierności wydajności δ_h dla pomp o uzębieniu hipocykloidalnym

$$\begin{split} \delta_{h} &= \frac{C}{D} \\ \text{gdzie:} \\ C &= \frac{1}{z_{2}} \left\{ \left[(z_{2} - 1) \sqrt{1 + \lambda^{2} - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_{2} - 1}\right)} + v \right]^{2} - \\ &- \left[(z_{2} - 1) \sqrt{1 + \lambda^{2} - 2\lambda} + v \right]^{2} \\ \text{D} &= (z_{2} - 1 + v)^{2} - \frac{z_{2} - 1}{z_{2}} (z_{2} - 1 - \lambda + v)^{2} + (z_{2} - 1)\lambda_{*}^{2} - \\ &- \frac{1}{z_{2}} \left\{ (z_{2} - 1)^{2} \left[1 + \lambda^{2} - \frac{2\lambda(z_{2} - 1)\sin\left(\frac{\pi}{z_{2} - 1}\right)}{\pi} \right] + \\ &+ \frac{4v(z_{2} - 1)^{2}}{\pi} \left[\sqrt{1 + \lambda^{2} + 2\lambda} E(\varphi, k) - \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{z_{2} - 1}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^{2} - 2\lambda \cos\left(\frac{\pi}{z_{2} - 1}\right)}} \right] + v^{2} \right\} \end{split}$$



 $\delta_{\rm e}$ Rys. 42. Przebieg współczynnika nierównomierności wydajności pomp o zazębieniach epicykloidalnych w zależności od liczby zębów koła podstawowego z_1 , współczynnika skrócenia cykloidy λ o-raż współczynnika przesunięcia ekwidystanty v Fig. 42. Delivery irregularity factor $\delta_{\rm c}$ for epicycloidal gear pumps versus number z_1 of teeth of basic wheel, cycloid contrac-tion coefficient λ and equidistant displacement coefficient v

Wzory (89), (90) na współczynnik nierównomierności są podobnie jak w przypadku wydajności, ogólne i są ważne dla wszystkich zespołów kół epicykloidalnych według rysunku 38 oraz hipocykloidalnych według rysunku 39. W przedstawionej postaci są ważne dla uzębień uformowanych według ekwidystant i łuków kołowych (rys.38b i 39b). Jeśli zespoły mają uzębienie według cykloid skróconych i ich obwiedni (rys. 38a i 39a), we wzorach (89) i (90) należy przyjmować v = 0. W przypadku uzębienia według ekwidystant cykloid zwyczajnych (rys.38c, 39c) należy podstawić $\lambda = 1.$

Zmienność wartości współczynników $\delta_{e}^{}, \delta_{h}^{}$ według wzorów (89) i (90) zależy podobnie jak w przypadku wydajności właściwej, od liczby zębów z_1, z_2 oraz od założonych wartości współczynników λ i v. Wpływ



Rys. 43. Przebieg współczynnika nierównomierności wydajności δ, pomp o zazębieniach hipocykloidalnych w zależności od liczby zębów koła podstawowego z, współczynnika skrócenia cykloidy λ oraz współczynnika przesunięcia ekwidystanty v Fig. 43. Delivery irregularity factor δ, for hypocycloidal gear pumps versus number z, of teeth of basic wheel, hypocycloid contraction coefficient λ and equidistant displacement coefficient v

wartości tych parametrów na wartość współczynnika δ dla zazębień epii hipocykloidalnych ilustrują odpowiednio wykresy na rysunkach 42 i 43 Wykresy sporządzono dla tych samych zakresów zmienności parametrów zazębienia jak w analizie wydajności. Widać z nich, że zwiększenie liczb zębów zasadniczo zmniejsza współczynnik nierównomierności wydajności.

Wpływ wartości współczynników λ i v należy rozpatrywać łączni W zazębieniach epicykloidalnych (rys.42) zwiększenie wartości λ i v zmniejsza wartość współczynnika δ . Odwrotnie jest w uzębieniach hipo-



Rys. 44. Porównanie pomp o zazębieniach epi- i hipocykloidalnych pod względem jednostkowej wydajności właściwej q/πb m²
 Fig. 44. Comparison of elementary specific delivery q/πb m² for epi- and hypocycloidal gear pumps

cykloidalnych (rys. 43). W pierwszym przypadku zwiększenie współczynników λ i v sprawia, że współczynnik $\delta_{\rm e}$ (wzór 89) maleje, w drugim $\delta_{\rm h}$ (wzór 85) zwiększa się. W obu przypadkach dla przyjmowanej zwykle liczby zębów z ≥ 6 oraz typowych wartości parametrów λ i v, przyjmowanych według punktu 4.4, wartość współczynnika wynosi δ = 1-10%. Wśród pomp wyporowych tylko pompy śrubowe i łopatkowe mają porównywalnie małą wartość współczynnika nierównomierności wydajności.

7.4. Porównanie pomp i silników o zazębieniach cykloidalnych

Na rysunku 44 zestawiono przebiegi zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/\pi b m^2$ dla pomp z dwoma analizowanymi zazębieniami, tj. epi- i hipocykloidalnymi. Otrzymano je w ten sposób, że odpowiednie wykresy przestrzenne (rys.40 i 41) przecięto w płaszczyznach $\lambda = 0,7$ oraz 1 (typowe wartości współczynnika λ przyjęte według punktu 4.4), a następnie zestawiono między sobą uzyskane krzywe. Na rysunku widać, że nie ma większych różnic wartości wydajności właściwej dla obu



Rys. 45. Porównanie pomp o zazębieniach epi- i hipocykloidalnych pod względem współczynnika nierównomierności wydajności δ Fig. 45. Comparison of delivery irregularity factor δ for epiand hypocycloidal gear pumps

rodzajów zazębienia. Większe różnice występują, gdy liczba zębów jest mniejsza (z = 4-6) i gdy wartości współczynnika przesunięcia ekwidystanty są duże ($\forall > 2$). Wtedy w pompach o zazębieniach hipocykloidalnych osiąga się większe wydajności. Jeśli liczba zębów jest większa, wpływ ten maleje. Jeśli \forall = 1, wydajności uzyskiwane dla obu rodzajów zazębień są identyczne.

Na rysunku 45 przedstawiono przebiegi współczynnika nierównomierności wydajności δ dla analizowanych zazębień epi- i hipocykloidalnych, dla tych samych co w przypadku analizy wydajności typowych wartości współczynnika $\lambda = 0,7$; 1. Podobnie też otrzymano te wykresy. Wykorzystano w tym przypadku rysunki 42 i 43. Przyjmując dla obu typów zazębień te same wartości parametrów z, λ , v, otrzymuję się mniejszą pulsację wydajności dla zazębień epicykloidalnych. Jest to wyraźnie widoczne dla małych liczb zębów (z = 4-6). Ze zwiększeniem liczby zębów wpływ rodzaju zazębienia maleje. Tak więc w przypadku obu rodzajów zazębienia i liczb zębów (z = 10-12) otrzymuje się bardzo małe wartości pulsacji,





dochodzące do 1-2%. Są to wartości znacznie mniejsze od wartości otrzymywanych dla zazębień ewolwentowych (rys.3).

8. WERYFIKACJA FUNKCJONALNOŚCI ZAZĘBIEŃ CYKLOIDALNYCH

8.1. Zastosowania zazębień cykloidalnych w elementach napędu hydraulicznego

Fabryka Maszyn Rolniczych "Agromet-Pilmet" we Wrocławiu produkuje tzw. bloki sterujące typu Orbitrol oraz silniki wolnoobrotowe typu Orbit, na licencji duńskiej firmy Danfoss Nordborg, w których koła mają zazębienie cykloidelne. Bloki sterujące są stoscwane powszechnie w mechanizmach kierowniczych, a silniki do bezpośredniego napędu (bez przekładni redukcyjnych) mechanizmów roboczych samojezdnych maszyn budowlanych, rolniczych oraz urządzeń komunalnych. Zakres licencji nie obejmował niestety najważniejszego zespołu, jakim są koła zębate, w które zaopatrywano się u licencjodawcy. W celu wyeliminowania tych bardzo kosztownych zakupów podjęto próbę opracowania konstrukcji i opanowania seryjnej produkcji kół, w pełni zamiennych z dotychczas kupowanymi. Wszystkie nakłady inwestycyjne z tym związane mogą się zwrócić tylko w przypadku produkcji wielkoseryjnej. Jest to możliwe, jeśli znacznie rozszerzy się zakres zastosowania produkowanych kół. Możliwość taką stwarzają pompy zębate o zazębieniu wewnętrznym, konkurencyjne, pod każdym względem, ze stosowanymi powszechnie pompami o zazębieniu zewnętrznym. Jako generatory energii ciśnienia mogą być stosowane w ciągnikach rolniczych do zasilania mechanizmów roboczych doczepnych maszyn rolniczych, urządzeń komunalnych itp. Ze względu na znikomą nierównomierność wydajności, a przez to cichobieżność, pompy tego typu będą mogły być również stosowane w układach napędowych maszyn i urządzeń stacjonarnych, w tym także obrabiarek.

Na rysunku 46 przedstawiono konstrukcję bloku sterującego typu Orbitrol spełniającego funkcję wzmacniacza, instalowanego między pompą zasilającą a siłownikami skrętu kół, w hydraulicznych serwomechanizmach kierowniczych samojezdnych maszyn roboczych. Na przekroju A-A pokazano zespół współpracujących kół zębatych odgrywających rolę pompy dozującej. W stanach awaryjnych zespół kół 8 i 9 spełnia funkcję pompy zasilającej.

Na rysunku 47 przedstawiono konstrukcję silnika wolnoobrotowego typu Orbit wykorzystującego zespół kół cykloidalnych. Strumień zasilający silnik kanałem w korpusie 1 i tulei obrotowej 2 jest doprowadzony do komór międzyzębnych zespołu kół o uzębieniu zewnętrznym 5 i wewnętrznym 6. Energia ciśnienia cieczy jest zamieniona na energię mecha-



Rys. 47. Konstrukcja silnika wolnobieżnego Orbit: 1 - kadłub, 2 - tuleja obrotowa, 5 - wałek pośredni, 4 - komutator, 5 - koło o uzębieniu zewnętrznym, 6 - koło o uzębieniu wewnętrznym, 7 - rolka Fig. 47. Construction of Orbit low speed motor: 1 - casing, 2 - rotational sleeve, 3 - intermediate shaft, 4 - commutator, 5 - outer gear wheel, 6 - inner gear wheel, 7 - roll



Rys. 48. Rysunek konstrukcyjny koła o uzębieniu zewnętrznym bloku sterującego Orbitrol Fig. 48. Drawing of outer gear wheel from Orbitrol steering unit



Rys. 49. Rysunek konstrukcyjny koła o uzębieniu wewnętrznym bloku sterującego Orbitrol Fig. 49. Drawing of inner gear wheel from Orbitrol steering unit



_Rys. 50. Rysunek konstrukcyjny koła o uzębieniu zewnętrznym silnika Orbit Fig. 50. Drawing of outer gear wheel from Orbit motor

87





Rys.52.Pompa gerotorowa: 1,2,3 - płyty: przednia, środkowa, tylna, 4,5 - koła zębate czynne, bierne, 6 - wał, 7 - łożysko ślizgowe, 8 - śruba, 9 - podkładka, 10 nakrętka, 11 - kołek, 12,13 - pierścienie sprężyste, 14,15 - wpusty, 16,17 - pierścienie uszczelniające typu 0 i typu PUWO Fig.52. Gerotor pump: 1- front plate, 2 - central plate,3 - black plate, 4 - driver, 5 - driven gear wheel, 6 - shaft, 7 - slide bearing, 8 - screw, 9 - washer, 10 - nut, 11 - plin, 12,13 - spring rings, 14,15 - keys, 16 - O-ring, 17 - PUWO seqling ring



niczną ruchu orbitalnego koła 5 względem osi koła 6 i przekazywana wałkiem pośrednim 3 na wał wyjściowy silnika.

Z zasady pracy tego typu konstrukcji, omówionej w punkcie 7.1, wynika, że chłonność właściwa silnika o osiach ruchomych jest z₂ razy większa od chłonności silnika o osiach stałych. Otrzymuje się zatem konstrukcję o dużej chłonności właściwej, cechującej silniki wolnobieżne wysokomomentowe, nadającą się do bezpośredniego napędu mechanizmów roboczych. Zmieniając szerokość kół, przy nie zmienionych pozostałych ich wymiarach, można zmieniać w szerokich granicach chłonności właściwe silników, a przez to również wartości momentu dyspozycyjnego, na wałku wyjściowym. Podstawą tworzenia typoszeregu silników jest wobec tego szerokość kół.

W obu wytworach (rys.46, 47) uzębione zewnętrznie koła podstawowe mają zęby wyprofilowane według ekwidystant epicykloidy skróconej, a uzębione wewnętrznie koła współpracujące według łuków kołowych lub rolek. Wykorzystując przedstawione w rozdziałach 4-6 zasady projektowania, opracowano rysunki wykonawcze zespołu kół dla bloku sterującego (rys.48 i 49) oraz silnika wolnobieżnego (rys.50 i 51). Koła te są w pełni zamienne z dotychczas stosowanymi (pochodzenia licencyjnego) w jednostkach typu Orbitrol i Orbit.

Zespół kół według rysunków 48 i 49 przyjęto również jeko wirnik eksperymentalnej pompy zębatej o uzębieniu wewnętrznym o osiach stałych przedstawionej na rysunku 52. Pompę zaprojektowano w ukłedzie trójpłytowym. Współosiowość płyt przedniej 1, środkowej 2 i tylnej 3 zapewniają kołki 11. Wałek napędowy 6, uchwycony w łożyskach ślizgowych 7, napędza koło czynne 4 o uzębieniu zewnętrznym. Współpracujący z nim uzębiony wewnętrznie pierścień 5 obraca śię w wytoczeniu płyty środkowej wykonanej z brązu. Aby zapewnić dobrą współbracą powierzchni zewnętrznej wieńca z wytoczeniem płyty, przeszlifowano ją. Szerokości kół wykonano z tolerancją wynoszącą od -0,01 do -0,03 mm w stosunku do sterokości płyty środkowej jako wymiaru nominalnego. Uszystko to ruzem sprawia, że pompa może pracować z prędkościami obrotowymi równymi prędkościom silników wysokoprężnych, którymi może ona być bezpośrednio napydzana. Napełnianie komór międzyzębnych w czasie cyklu ssania oraz ich rozładowanie w okresie cyklu tłoczenia odbywa się za pośrednictwem nerek ssawnej i tłocznej połączonych z otworami ssawnymm i tłocznym znajdującymi się w płycie tylnej.

8.2. Technologia kół o uzębieniach cykloidalnych

W pracach [15], [34] - dokonano przeglądu metod wykonania kół zębatych o uzębieniach cykloidalnych.Koła te, podobnie jak koła o ewolwentowym zarysie zębów,wykonuje się,jak dotychczas,głównie metodami obróbki skrawaniem. W przypadku kół zębatych o cykloidalnym zarysie zębów sto-



Rys. 53. Przebieg obróbki frezem palcowym uzębień epicykloidalnych zewnętrznych i wewnętrznych na wiertarko-frezarce KF-80 prod. firmy Gildemeister (RFN)

Fig. 53. Machining of inner and outer epicycloidal gearings by means of shank cutter on KF-80 boring-milling machine produced by Gildemeister (West Germany)

Rys. 54. Para o zazębieniu wew**nętrz**nym epicykloidalnym wykonanych frezem palcowym na wiertarko-frezarce KF-80

Fig. 54. Epicycloidal inner gear assembly manufactured by means of slotting mill on KF-80 boring--milling machine



suje się również obrabiarki zadaniowe wyposażone w specjalistyczne narzędzia i przyrządy.

Przed przystąpieniem do opracowania i wdrożenia technologii produkcji wielkoseryjnej kół o uzębieniu cykloidalnym wykonano modelowy zespół kół zębatych według rysunków 48 i 49, zamiast importowanych,dla bloku sterującego typu RB 80 o szerokości 10,4 mm. Jest to druga pozycja szeregu zespołów zestawionych w tabeli na rysunku 48. Uzębienie kół wykonano frezem palcowym na sterowanej numerycznie wiertarko-frezarce typu KF-80, produkcji firmy Gildemeister z RFN, w Fabryce Automatów Tokarskich we Wrocławiu. Podstawą programu sterowania ruchem roboczym freza były obliczone według wyprowadzonych wzorów (9) współrzędne zarysu uzębienia zestawione tabelarycznie na rysunku 48. Najpierw dokonano wstępnego frezowania w celu usunięcia materiału we wrębach kół i pozostawiono naddatek na frezowanie wykańczające. Przebieg operacji ostatecznego frezowania uzębień obu kół przedstawiono schematycznie na rysunku 53. Do frezowanie koła o uzębieniu zewnętrznym zastosowano typowe



Rys. 55. Konstrukcja zespołu narzędzi: frez ślimakowy - nóż kształtowy Fig. 55. Construction of tool set: hobbing cutter - form tool

6_{FN}

1387 0,00

6ND 13,87 0,00

13,94 0,00

6_{NO}



	Pr	zeciąg	acz	nr 1		
Nr ostræ	' D	Odchy- {ka	٤	f		
1	45,95	015	1+30#	0	strza vające	N-Nig
72	54,90	'0-	2°30	0.0	iskroi	(Przek
73	54,90	5	30,	415	Me	dj 8 −£
		-0,01	3014		trza Daso	rekn
77	54,90	•	٤.	0,75	Sol	£

Przeclągacz nr 2							
Nr Ostrza	D	Odchy- łka	Ľ	f			
1 55	55,05 63,00	-0,015	2°30'±30"	0	Ostrza skrawające Przekrój C-C),		
56 60	63,00 63,00	- 0,01	f°30'±15"	0,15 0,75	Ostrza zapasowe Przekrój D-B)		

Rys. 56. Konstrukcja zespołu przeciągaczy Fig. 56. Construction of pull broach set

frezy walcowe trzpieniowe czteroostrzowe o średnicy 20 mm, a o średnicy 8 mm do frezowania koła uzębionego wewnętrznie. Rysunek 54 przedstawia zespół kół wykonanych tą uproszczoną metodą. Chropowatość powierzchni oraz błędy kształtu zarysu uzębień w tych kołach były większe od założonych i podanych na rysunkach wykonawczych. Jest to oczywiste, ponieważ założono wykonanie wyłącznie frezem, bez szlifowania jako obróbki wykańczającej. Wynikowy luz międzyzębny miał wartość czterokrotnie większą od założonej (0,2 mm zamiast 0,05 mm). Wykonany zespół wmontowano w bloku sterującym RB-80 i przeprowadzono próby funkcjonalne. Zespół pracował poprawnie i osiągnął założone ciśnienia robocze 14 MPa, lecz przy ok. 2,5-krotnie większych przeciekach wewnętrznych w stosunku do dopuszczalnych. Przyczyn należy się dopatrywać w zwiększonych luzach międzyzębnych.

Próby te, dające pod względem szczelności wewnętrznej wyniki gorsze od założonych, zweryfikowały jednak opracowane metody obliczeń i wymiarowania kół oraz ich przydatność praktyczną. Potwierdziły również przyjęte metody wykonania. W związku z tym przystąpiono do opracowania technologii wielkoseryjnej, rzędu 30 tys. zespołów rocznie. Przyjęto więc, że:

- obróbkę wstępną kół o epicykloidalnym uzębieniu wewnętrznym będzie się dokonywać metodą frezowania obwiedniowego,

- obróbka wstępna kół uzębionych wewnętrznie o zarysie według łuków kołowych będzie dokonywana metodą przeciągania,

- obróbkę wykańczającą uzębień obu kół uzyskiwać się będzie metodą szlifowania kształtowego, tarczami profilowymi.

Przyjęte metody obróbki zapewniają dużą wydajność produkcji (30--50 tys. zespołów kół rocznie), z zachowaniem dużej dokładności wymiarów i kształtu wykonywanych uzębień oraz odpowiedniej jakości powierzchni. W przypadku silników (rys. 47), w których uzębienie wieńca zastępuje się rolkami wykonanymi jako oddzielne części obróbka wykańczająca jest zbędna.

Na rysunku 55 przedstawiono konstrukcję freza ślimakowego do obróbki wstępnej kół uzębionych zewnętrznie [10],[39]. Do wyprofilowania zarysu krawędzi skrawającej freza posłużono się przybliżoną metodą wykreślną. Polega ona na tym, że koło o zarysie epicykloidalnym według rysunku 48 obtacza się po prostej tocznej i uzyskuje w ten sposób rodzinę zarysów epicykloidalnych. Obwiednia tej rodziny opisuje zarys krawędzi skrawającej freza w przekroju normalnym. Kształt zarysu tej krawędzi oraz tabelę współrzędnych podano na rysunku 55. Ostateczny kształt ostrzy freza nadaje się przez zataczanie powierzchni ich przyłożenia nożem kształtowym. Konstrukcja noża jest ściśle skorelowana z konstrukcją freza. Polega to na tym, że kształt krawędzi skrawającej noża jest



Rys. 57. Operacja nacinania zębów frezem ślimakowym w kole o zazębieniu zewnętrznym epicykloidalnym na frezarce typu ZFWZ produkcji zakładu VEB Karl-Marx Stadt (NRD)

Fig. 57. Machining of outer epicycloidal teeth by means of hobbing cutter on ZFWZ milling machine produced by VEB Karl-Marx Stadt (West Germany)



Rys. 58. Operacja nacinania zębów przeciągaczem w kole o uzębieniu wewnętrznym utworzonym wg łuków kołowych na przeciągarce pionowej BVP-25-1600-400 produkcji firmy Varinelli (Włochy)
Fig. 58. Machining of inner base-on-circular-arcs gearing by means of pull broach on BVP-25-1600-400 broaching machine produced by

Varinelli (Italy)





Rys. 59. Operacja szlifowania zębów ściernicami kształtowymi w kole o uzębieniu zewnętrznym epicykloidalnym na szlifierce typu VAG-432 CNC produkcji firmy Kapp (RFN)Fig. 59. Profile grinding of outer epicycloidal gearing by means of profile grinding wheels on VAG-432CNS grinding machine produced by Kapp (West Germany) dopełnieniem kształtu krawędzi skrawającej freza w przekroju normalnym, przetransformowanym na oś wzdłużną freza. Współzależność tych kształtów krawędzi, rysunek noża oraz tabelę współrzędnych podano również na rysunku 55. Zaprojektowany frez wykonano w Fabryce Maszyn Rolniczych "Agromet-Pilmet" we Wrocławiu.

Na rysunku 56 przedstawiono konstrukcję zespołu dwóch przeciągaczy do obróbki wstępnej kół o uzębieniu wewnętrznym o zarysie według łuków kołowych z rysunku 49 [40]. Zastosowano zespół dwóch przeciągaczy, ponieważ dla dużej głębokości przeciągania (~8 mm) i niezbyt duzych grubości warstw skrawanych (~0,05) pojedyncze narzędzie byłoby zbyt długie (1800-2000 mm), a tym samym bardzo kłopotliwe w wykonaniu i eksploatacji. Przy projektowaniu zespołu przeciągaczy przyjęto, że skrawanie odbywa się w głąb materiału wierzchołkową krawędzią skrawającą zęba, a jego powierzchnie boczne (w formie łuków kołowych) przemieszczając się w wykonanym profilu, dokonują jego kalibrowania. Ponieważ głębokość przeciągenia jest duża (~8 mm), przyjęto symetryczny rozdział naddatku na obróbkę obu przeciągaczy. Na kolejnych ostrzach przeciągacza zmniejsza się długość czynnego odcinka krawędzi skrawającej zęba; można więc zwiększyć grubość warstwy skrawanej. Jest to szczególnie istotne w przypadku przeciągacza nr 1, w którym zmniejszenie czynnego odcinka krawędzi skrawającej zęba jest około dwukrotne. W przeciągaczu nr 2 długość jest prawie nie zmieniona, a w związku z tym przyjmuje się stalą wartość grubości warstwy skrawanej. Ostrza obu przeciągaczy charakteryzują się tym, że mają dużą wysokość, głębokie rowki wiórowe, w których mogą się mieścić wióry. Ze względu na dużą wysokość zębów należało je wzmocnić u podstawy. Kształt zęba i ostrzy oraz ich wymiary zestawiono tabelarycznie na rysunku 56.

Frezowanie wstępne kół o uzębieniu zewnętrznym wyjaśnia fotografia (rys. 57). Uprzednio przygotowane pierścienie w postaci pakietu osadza się na pionowym trzpieniu frezarki typu ZFWZ (produkcji zakładów VEB Karl-Marx-Stadt z NRD). Frez ślimakowy, osadzony na ukośnie usytuowanym suporcie narzędziowym, obraca się wokół własnej osi oraz przemieszcza w pionie, nacinając uzębienie na całym pakiecie.

Na rysunku 58 przedstawiono wstępną obróbkę kół o uzębieniu wewnętrznym na przeciągarce pionowej typu BVP-25-1600-400 (produkcji firmy Varinelli z Włoch). Podobnie jak przy frezowaniu operacji przeciągania dokonuje się na pakiecie pierścieni.

Zarysy uzębień obu kół wykonuje się z naddatkiem ok. 0,2 mm na stronę, pozostawionym na obróbkę wykańczającą, po nawęglaniu i hartowaniu w celu uzyskania powierzchni o twardości 60 HRC. Do obróbki wykańczającej obu rodzajów kół zakupiono szlifierki zadaniowe firmy Kapp (RFN). Zastosowano metodę szlifowania kształtowego ściernicami borazo-





Rys. 60. Operacja szlifowania zębów ściernicami kształtowymi, w kole o uzębieniu wewnętrznym utworzonym wg łuków kołowych, na szlifierce typu VIG-381 CNC produkcji firmy Kapp (RFN) Fig. 60. Profile grinding of inner based-on-circular-arcs gearing by means of profile grinding wheels on VIG-381CNC grinding machine produ-

ced by Kapp (West Germany)

nowymi. Podstawą opracowania procesu-i określenia kształtu ściernic były rysunki wykonawcze kół (rys.48 i 49). Na rysunku 59a przedstawiono szlifowanie kół uzębionych zewnętrznie na szlifierce typu.VAG-432CNC (prod. firmy Kapp). Pakiet kół jest osadzony na trzpieniu uchwyconym z jednej strony w głowicy, a z drugiej jest on podparty kłem. Na wrzecionie szlifierki jest osadzony zespół dwóch ściernic kształtowych o średnicy 180 mm (rys.59b). Pierwsza z nich szlifuje wstępnie, druga wykańczająco.

Na rysunku 60a przedstawiono szlifowanie kół uzębionych wewnętrznie na szlifierce typu VIG-381CNC (prod. firmy Kapp). Pakiet obrabianych kół osadza się na poziomym trzpieniu w osi głowicy. Trzpień ten jest wycofywany po zaciśnięciu pakietu za pomocą płyty dociskowej. Zarówno szlifowanie wstępne, jak i wykańczające odbywa się za pomocą tej samej śćiernicy kształtowej, o średnicy 50 mm, pokazanej na rysunku 60b. W czasie szlifowania wykańczającego ściernica przemieszcza się w głąb materiału o wartość 0,05 mm. Do szlifowania uzębień obu kół zastosowano ściernice borazonowe. Zachowują one dużą stabilność kształtu i wymia-



Rys. 61. Zespoły kół epicykloidalnych konstrukcji własnej: a) zespół kół zastosowany w blokach sterujących Orbitrol, b) zespół kół zastosowany w pompie gerotorowej, c) zespół kół zastosowany w silnikach Orbit

Fig. 61. Epicycloidal gearsets designed by the author: a) gearset used in Orbitrol steering units,b) gearset used in gerotor pump, c) gearset used in Orbit motors





Rys. 62. Pomiary kół zębatych epicykloidalnych za pomocą maszyny pomiarowej PMM 654 firmy Leitz (RFN)

Fig. 62. Measurements of epicycloidal gear wheels by means of PMM 654 measuring machine produced by Leitz (West Germany)



rów i nie wymagają profilowania powierzchni roboczej w trakcie obróbki. Po wykonaniu szlifowania (ok. 1500-2000 szt. kół) narzędzia te wymienia się na nowe.

Koła według rysunku 50 są wykonywane w taki sam sposób i na tych samych obrabiarkach. Gniazda rolek w kołach według rysunku 51 wykonuje się na gotowo metodą przeciągania. W gniazdach montuje się rolki wykonywane jako odrębne elementy, z zachowaniem ich dużej dokładności wymiarów i kształtu, przez szlifowanie powierzchni walcowej i płaszczyzn czołowych. Na rysunku 61 przedstawiono gotowe zespoły kół wykonywane opisanymi wyżej skrótowo metodami. Na rysunku 61a przedstawiono zespół kół według rysunków 48 i 49, na rysunku 61b zespół kół zastosowanych w modelu pompy według rysunku 52, a na rysunku 61c zespół kół według rysunku 50 i 51.

8.3. Sprawdzanie kształtu i wymiarów uzębień

Pomiarów sprawdzających uzębienia kół dokonano w laboratorium zakładowym FMR "Agromet-Pilmet", wykorzystując maszynę typu PMM 654, firmy Leitz (RFN). Jak widać z rysunku 62, sprawdzane koła mocuje się na uchwycie magnetycznym, posadowionym na granitowym stole pomiarowym. Uzębienia sprawdza się czujnikiem stykowym osadzonym w ruchomej głowicy. Z maszyną współpracuje odpowiednio zaprogramowany komputer, do którego wprowadza się program określający sposób przeprowadzania pomiarów, nominalne wartości mierzonych wielkości, wraz z odchyłkami, a także procedurę opracowania wyników pomiarów. Maszyna umożliwia pomiar z dokładnością 1 µm.

Przykładowe wyniki pomiarów zarysu uzębienia zewnętrznego kół według rysunków 61a,b przedstawiono na rysunku 63. Rzeczywisty zarys uzębienia, określony łamaną linią kreskową, zestawiono z zarysem teoretycznym według rysunku 48 (linia ciągła) na tle pola tolerancji (linie kreskowe) określonego odchyłką ±0,01 mm.

Sprawdzenie uzębienia koła według rysunku 49 polegało na wyznaczeniu wartości rzeczywistych jego średnic charakterystycznych. Dotyczy to średnicy koła wierzchołkowego (d_{a2}) , średnicy koła stóp (d_{f2}) , średnicy koła zasadniczego (d_{b2}) oraz średnicy koła, którego łuk opisuje zarys zęba (2g), a także podziałki kątowej zębów. Przykładowe wyniki pomiarów koła zestawiono w tabeli 3 i porównano je z wymiarami nominalnymi podanymi na rysunku wykonawczym (rys.49). Ponadto podano w niej wyniki pomiarów przez 2 i 3 zęby oraz wymiar odległości między wierzchołkiem zęba a dnem przeciwległego wrębu. Wymiary te nie mają narzuconych odchyłek. Informują o jakości wykonawstwa i dodatkowo weryfikują metody i dokładności wykonania. Z wyżej przytoczonych pomiarów wynika, że wykonane

100



Rys.63.Wyniki pomiarów koła o uzębieniu epicykloidalnym zewnętrznym stosowanego w blokach sterujących Orbitroi Fig.63.Results of measurements of outer epicycloidal gear wheel used in Orbitrol steering units

Rodzaj wymiaru	Symbol	Wymiar nomi- nalny	Odchyłka nomi – nalna	Wymiar rze czy- wisty	Odchyłka rzeczy- wista
Średnica keła wierzchołkowego	d _{a2}	45,773	<u>+</u> 0,03	45,8108	0,0378
Średnica koła stóp	df2	62 , 500	<u>+</u> 0,2	62 , 6727	0,1727
Średnica koła zasadniczego	d _{b2}	68,000	+0, 05	68,0437	0,0437
Średnica rolki	.2g	22,225	+0,02	22,2278	0,0028
P odziałka kątowa	· - -	51°25°43‴	-	51°25°46‴	<u>+</u> 5″
Pomiar przez 2 zęby	* . *	30,940		30,9633	0,0233
Pomiar przez 3 zęby	-	42,407	-	42 , 4418	0,0348
Pomiar między zębem a przeciw- ległym wrębem	-	54,137	-	54,2597	0,1227

Wyciąg z protokołu pomiarów wieńca uzębionego (rys.49)

założonymi metodami zespoły kół są zgodne z dokumentacją konstrukcyjną i gwarantują pełną zamienność części.

8.4. Badania bloków sterujących i silników wolnobieżnych

Zespół kół według rysunku 61a, o konstrukcji według rysunku 48 i 49, zmontowano w jednostce sterującej typu RB-80, przedstawionej na rysunku 46. Zespół odgrywa rolę wirnika pompy dozującej, zasilającej siłowniki mechanizmu skrętu kół. Ponieważ koło o uzębieniu zewnętrznym wykomuje również ruch orbitalny wokół osi uzębionego wewnętrznie wieńca, wydajność właściwą pompy wyznacza się według wzoru (70). Po podstawieniu do wzoru (79) wartości parametrów $z_1 = 6$, $\lambda = 0,777$, v = 2,888 oraz wymiarów kół według rysunku 48 i 49 otrzymuje się jednostkową wydajność właściwą pompy $q_{st}/\pi b m^2 = 3,6539$. Po przyjęciu szerokości kół b = 10,392 mm oraz modułu $m = 2\rho = 9,71$ mm otrzymuje się $q_{st} = 11,24$ cm³. Dla $z_2 = 7$ otrzymuje się wydajność właściwą pompy zgodnie ze wzorem (70), równą $q_{or} = z_2 q_{st} = 7.11,24 = 78,7$ cm³.

Badanie weryfikacyjne funkcjonalności kół według opracowanej metody projektowej i wykonanych według przyjętej technologii przeprowadzono ne stenowisku odbiorczym w FMR "Agromet-Pilmet". Badania te obejmowały typowe próby funkcjonalności oraz sprawdzenie założonych programem prób i badań parametrów pracy. W pierwszej kolejności zbadano opory ruchu wałka wyjściowego bloku sterującego sprzęgniętego z kołem kierowniczym. Moment oporów ruchu był mniejszy od wartości dopuszczalnej, równej 20 N·m. Układ pracował prawidłowo bez zacięć. Zwolnienie koła kierowniczego natychmiast przerywało proces sterowania i powodowało powrót kierownicy w po ożenie neutralne.

W czasie sprawdzania wydajności pompy dozującej dla oleju Hydrol 30, w temperaturze 30 $^{\circ}$ C, po stronie zasilania utrzymywano, zgodnie z programem, ciśnienie 0,1-0,2 MPa. Zmierzona w tych warunkach wydajność właściwa wynosiła q = 76 cm³, a więc tylko ok. 3,5% mniej od wyznaczonej teoretycznie z zależności (70). Zgodnie z warunkami technicznymi, nominalna wartość wydajności właściwej jednostek RB-80 wynosi 80 cm³, a dopuszczalne jej odchyłki +5% i -15%. W badaniach potwierdzono również to, że jednostka sterująca pracuje bez zakłóceń pod trwałym obciążeniem nominalnym 14 MPa.

Badania funkcjonalne silników wolnobieżnych z zespołem kół pokazanych na rysunku 61c, o konstrukcji według rysunków 50 i 51, przeprowadzono wykorzystując silnik typu RB-80 przedstawiony na rysunku 47. Wirnik silnika, podobnie jak w bloku sterującym, pracuje według zasady ruchu orbitalnego. Teoretyczną chłonność właściwą oblicza się podobnie z zależności (70). Po przyjęciu, że $z_1 = 6 \lambda = 0,6124$ oraz v = 1,750oraz wymiarów kół według rysunków 50 i 51 otrzymuje się ze wzoru (79) $q/\pi bm^2 = 3,172$. Po uwzględnieniu w tej równości b = 14 mm oraz m = 2ρ = = 4,568, a także $z_2 = 7$ oblicza się teoretyczną wartość chłonności właściwej silnika, równą $q_{or} = 82,5$ cm³.

Zgodnie z warunkami technicznymi prób i badań na stanowisku odbiorczym, silnik zasilano strumieniem oleju o natężeniu Q = $30 \text{ dm}^3/\text{min}$. Zaworem dławiącym wymuszano obciążenie p = 7 MPa. Prędkość obrotowa wałka wyjściowego wynosiła 360 obr./min. Chłonność właściwa silnika wyznaczona na tej podstawie wynosi q_{or} = Q/n = $83,5 \text{ cm}^3$. Jest to wartość nieznacznie większa od obliczonej chłonności teoretycznej. Ponieważ przy tych stosunkowo niskich ciśnieniach sprawności objętościowe są bliskie 1, więc wyznaczoną eksperymentalnie chłonność właściwą można przyjąć jako zgodną z chłonnością wyznaczoną na podstawie wymiarów. Różnica ~ 1% dowodzi przydatności praktycznej wyprowadzonych wzorów.

8.5. Weryfikacja funkcjonalna modelu pompy

Zespół kół według rysunku 61b, o uzębieniu identycznym z kołami według rysunku 61a zastosowano jako wirnik w modelu pompy gerotorowej. Model pompy według rysunku 52 wykonano w Zakładzie Prototypów Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej [44]. Model pompy przedstawiono na rysunku 64. Wydajność właściwa pompy, określona



Rys. 64. Pompa gerotorowa konstrukcji własnej: a) widok ogólny,
b) widok wnętrza pompy z zespołem kół epicykloidalnych
Fig. 64. Gerotor pump designed by the author: a) general view,
b) epicycloidal gearset inside pump



Rys. 65. Charakterystyki przepływowe Q = f(p) pompy gerotorowej Fig. 65. Flow characteristics Q = f(p) of gerotor pump


Rys. 66. Sprawność objętościowa $\eta_v = f(p)$ i całkowita $\eta = f(p)$ pompy gerotorowej Fig. 66. Volumetric $\eta_v = f(p)$ and total $\eta = f(p)$ efficiencies of gerotor pumps

wymiarami wirnika, którym jest zespół stosowany w bloku sterującym, wynosi q = 11,24 cm³. Po zmontowaniu pompy i sprawdzeniu działania przystąpiono do jej docierania na typowym stanowisku badawczym w laboratorium Instytutu. Przygotowanie pompy do badań polegało na stopniowym zwiększaniu prędkości obrotowej wałka napędowego bezpośrednio sprzęgniętego z wałem silnika od wartości n = 250 obr./min do wartości n = 1500 obr./min co 250 obr./min. Przy każdej prędkości pompa pracowała przez ok. 2 min. Łączny czas pracy wstępnej wynosił 12 min. W czasie tej próby pompa pracowała poprawnie. Temperatura kadłuba w końcu tej fazy przygotowania była zbliżona do temperatury oleju.

W czasie pomiarów, niezbędnych do wyznaczenia charakterystyki przepływowej, Q = f(p) utrzymywano stałą prędkość obrotową wałka pompy równą 1500 obr./min. Olej hydrauliczny 50 miał stałą temperaturę 40[±]1 ^oC. Ciśnienie w przewodzie ssawnym utrzymywano stałe równe, 0,05 MPa. Ciśnienie tłoczenia zmieniano od 0 do 16 MPa. Wielkości mierzone, tj. wydajność Q oraz moment rzeczywisty na wałku silnika M, zestawiono w tabeli 4. Na podstawie tych danych wykreślono charakterystyki: przepływową Q = f(p) (rys.65), sprawności objętościowej $\eta_v = f(p)$ i sprawności całkowitej $\eta = f(p)$ (rys.66).

Na wykresie Q = f(p) (rys.65) oznaczono wartość wydajności teoretycznej obliczonej na podstawie wydajności właściwej według wzoru (70) równej q = 11,24 cm³, pomnożonej przez prędkość obrotową wałka, czyli Q_t = q n = 11,24•1500 = 16,86 dm³/min. Wydajność ta odnosi się do pompy idealnej, pozbawionej jakichkolwiek strat przy założeniu zupełnego na-

Tabela 4

Lp.	n	P _s	P _t	M	Q	η _v	ŋ	^T oleju
	(obr./min)	(MPa)	(PMa)	(N•m)	(dm ³ /min)	(%)	(%)	(C ⁰)
1			0	6	15		a.	
2			2,0	10	14,5	97	31	
3		ĺ	4,0	14	14,5	97	44	5
4		[6,0	17	14,5	97	54	
5			8,0	22	14	93	54	
6	1500	0,05	10,0	26	14	93	57	40
7		1	12,0	29	13	87	57	
8			14,0	31	13	87	62	
9			16,0	34	12	80	60	
10			18,0	37	10,5	70	55	
11			20,0	40	8	53	40	
12			22,0	40	0	0	0	
13			0	6	20			
14			2,0	10	19,5	97	31	
15			4,0	13	19,5	97	47	
16			6,0	17	19,5	97	54	
17			8,0	21	19,5	97	59	
18 ~	2000	0,05	10,0	25	19	95	60	
19			12,0	28.	18,5	92	62	40
20			14,0	31	17,5	87	62	
21			16,0	34	16,5	82	61	
22			18,0	37	14	70	55	
23			20,0	40	12	60	48	
24			22,0	43	0	0	0	

Wyniki pomiarow pompy gerotorowej

pełniania międzyzębnych komór wyporowych w fazie ssania. Stanowi ona punkt odniesienia do wydajności teoretycznej wyznaczonej eksperymentalnie dla pompy nieobciążonej (p = 0), która wynosiła 15 dm³/min. Różnica obu tych wartości wynosi $\Delta Q = 1,86$ dm³/min, co stanowi ok. 11% obliczeniowej wydajności teoretycznej. Uzasadnieniem jej występowania jest różnica między wymiarami rzeczywistymi z rysunkowymi oraz niezupełne wypełnianie międzyzębnych komór wyporowych w fazie ssania.

Na rysunku 65 naniesiono również charakterystyki przepływowe badanego modelu pompy dla prędkości obrotowej wałka n = 2000 obr./min także przy temperaturze oleju równej 40 $^{\circ}$ C oraz przy obciążeniach do 22 MPa. Chodziło bowiem o sprawdzenie działania modelu przy większych prędkościach obrotowych, a także ustalenie punktu utyku, a więc ciśnienia,przy którym cała wydajność pompy idzie na pokrycie strat nieszczelności wewnętrznych. Jak widać na wykresie, ciśnienia te wynosiły 22 MPa dla obu prędkości obrotowych. Zespół kół pracował w kadłubie pompy z luzem międzyzębnym promieniowym równym 0,02 mm oraz luzem osiowym równym 0,025 mm. Jak wynika z rysunku 66, sprawność objętościowa pompy przy ciśnieniu 16 MPa osiąga wartość ok. 0,8 dla obu prędkości obrotowych. Poniżej oczekiwań kształtuje się przebieg sprawności całkowitej $\eta = f(p)$, która osiąga wartości ok. 0,6. Przebieg ten świadczy o występowaniu dużych strat mechaniczno-hydraulicznych w badanym modelu.

Po przeprowadzeniu badań stanowiskowych, które trwały ok. 6 godzin, pompę zdemontowano i dokonano przeglądu współpracujących części. Na podstawie oględzin stwierdżono ślady współpracy zębów, szczególnie na ich powierzchniach czołowych, współpracujących z płytami zewnętrznymi. Na powierzchniach obu płyt, wykonanych ze stopu aluminiowego AK52, współpracujących z zespołem wirnikowym ślady współpracy są wyraźniejsze. Występują one również na powierzchni płyty środkowej, będącej łożyskiem dla koła uzębionego. We wszystkich przypadkach są to ślady powstałe raczej na skutek wzajemnego dotarcia się współpracujących powierzchni.Nie jest jednak wykluczone, że ich przyczyną może być zbyt duża założona odchyłka nieosiowości elementów zespołu wirnikowego w stosunku do pokryw, powodująca ukosowanie kół. Rezultaty badań stanowiskowych zaprojektowanego modelu pompy pozwalają stwierdzić że:

- koncepcja konstrukcji pompy o zazębieniu wewnętrznym wykorzystująca produkowane wielkoseryjnie koła cykloidalne może być zrealizowana technicznie i może stanowić podstawę do zaprojektowania oryginalnego typoszeregu oraz podjęcia produkcji wielkoseryjnej pomp ogólnego zastosowania w układach napędowych maszyn o prędkościach obrotowych ponad 2000 obr./min i ciśnieniach roboczych w ruchu ciągłym co najmniej 16 MPa.

 poprawę sprawności mechanicznej można osiągnąć przez odpowiedni dobór materiałów na elementy współpracujące oraz dokładność wykonania i montażu zespołu wirnikowego.

- poprawa sprawności hydraulicznej wymaga podjęcia prac związanych z analizą oporów przepływu i optymalizację kształtu kanałów ssawnego i tłocznego.

- istnieje również możliwość poprawy sprawności objętościowej pompy przez wprowadzenie wymuszonej hydraulicznie kompensacji luzów osiowych, co umożliwia zachowanie stałej jej wartości w czasie długotrwałej eksploatacji pompy.

9. PODSUMOWANIE

Tendencje rozwojowe w budowie pomp i silników zębatych, obserwowane w ostatnich dziesięcioleciach, dowodzą coraz częstszego odchodzenia od tradycyjnie stosowanych zazębień ewolwentowych. Na rynku światowym pojawiają się coraz to nowe konstrukcje pomp i silników o zazębieniu wewnętrznym i o cykloidalnym zarysie zębów. Literatura z tego zakresu nie jest obszerna. W tej sytuacji celem pracy jest opracowanie teoretycznych podstaw projektowania zazębień cykloidalnych, przydatnych w budowie pomp i silników zębatych, oraz ich weryfikacja konstrukcyjna i technologiczna jako wirników maszyn wyporowych w systemie produkcji wielkoseryjnej.

Teoretyczne podstawy projektowania zazębień cykloidalnych obejmują:

- analizę krzywych cykloidalnych, z której wynika, że do profilowania uzębień kół mogą być stosowane epi- i hipocykloidy zwyczajne lub skrócone oraz ich ekwidystanty,

- ustalenie, że projektowanie zespołów wirnikowych może się odbywać metodą obwiedni zewnętrznej, jeśli kołem podstawowym jest koło uzębione zewnętrznie lub metodą obwiedni wewnętrznej, gdy koło podstawowe ma uzębienie wewnętrzne,

- wyprowadzenie równań (9) i (10) opisujących zarys uzębienia kół podstawowych według epi- i hipocykloid zwyczajnych lub skróconych oraz ich ekwidystant, a także ustalenie warunków jakie te krzywe muszą spelniać,

- wyprowadzenie równań zarysów kół współpracujących (41) i (43), (45); (48) i (49); (50) i (51); (52) i (53), których uzębienie jest swego rodzaju odbiciem lustrzanym koła podstawowego,

ustalenie, że ze względów konstrukcyjnych i technologicznych
praktyczną przydatność mają zespoły kół epicykloidalnych zaprojektowane
metodą obwiedni zewnętrznej o uzębieniach według epicykloidy skróconej
i obwiedni, ekwidystanty wewnętrznej epicykloidy skróconej i łuków kołowych oraz ekwidystant wewnętrznych epicykloid zwyczajnych (rys. 25, 26,
27) lub zespoły kół hipocykloidalnych zaprojektowane metodą obwiedni
wewnętrznej o uzębieniach według hipocykloidy skróconej i obwiedni,
ekwidystanty zewnętrznej hipocykloidy skróconej i łuków kołowych oraz
ekwidystant zewnętrznych hipocykloid zwyczajnych (rys. 30, 31, 32),
opracowanie wzorów do obliczania wymiarów charakterystycznych

cykloidalnych kół zębatych (rys.33 i 34; tab.1 i 2).

Na podstawie równań definicyjnych (63) i (64) wyprowadzono wzory na jednostkową wydajność właściwą pomp o zazębieniu wewnętrznym i o zarysie epicykloidalnym (81) oraz hipocykloidalnym (88), a także wzory na współczynnik jej nierównomierności (89) i (90). Ilustrację graficzną wyprowadzonych wzorów podano na rysunkach 40 i 41 oraz 42 i 43. Wykresy dowodzą, że w pompach o wewnętrznych zazębieniach cykloidalnych współczynnik nierównomierności wydajności wynosi 1-2% i jest o rząd mniejszy niż w porównywalnych pompach o uzębieniu ewolwentowym.

Weryfikacji opracowanych zasad konstruowania kół oraz projektowania zespołów wirnikowych dokonano przez:

- opracowanie rysunków wykonawczych kół epicykloidalnych dla bloków sterujących typu Orbitrol (rys.48, 49) i dla silnika wolnoobrotowego typu Orbit (rys.50 i 51),

- opracowanie konstrukcji narzędzi do obróbki kół uzębionych zewnętrznie (frez ślimakowy, rys.55) oraz kół uzębionych wewnętrznie (zespół przeciągaczy, rys.56), a także profilu ściernic do szlifowania tych zarysów,

- wykonawstwo kół i sprawdzenie ich zamienności zarówno wymiarowej, jak i funkcjonalnej w produkowanych elementach, tj. w bloku sterującym i w silniku wolnobieżnym.

Badania stanowiskowe bloków sterujących Orbitrol i silników typu Orbit z układem wirnika konstrukcji własnej potwierdziły pełną zamienność wymiarową i funkcjonalną. Oba wytwory pracują poprawnie i osiągają wszystkie wymagane parametry ruchowe. Teoretyczna wydajność właściwa pompy dozującej bloku sterującego Orbitrol RB-80, obliczona na podstawie wzorów (70), (79), różni się od wartości wyznaczonej na stanowisku o ok. 3,5%. Chłonność właściwa silnika Orbit SR-80 obliczona na podstawie wzorów (70), (79) różni się od wartości zmierzonej ok. 1%. Wyniki te potwierdzają praktyczną przydatność wyprowadzonych wzorów na wydajność (chłonność) zespołów wirnikowych zestawionych z kół o zazębieniu wewnętrznym i cykloidalnym zarysie zęba.

Zespół kół zaprojektowany dla bloku sterującego typu RB-80 zastosowano w modelu pompy gerotorowej według rysunku 52. Badania modelu dowiodły, że pompa tej konstrukcji może pracować z prędkościami obrotowymi wałka równymi prędkościom silników wysokoprężnych. Ciśnienie robocze pracy ciągłej jakie pompa może uzyskać jest równe co najmniej 16 MPa. Wydajność teoretyczna modelu przy założonej prędkości obrotowej wałka, równej 1500 obr./min, różniła się o ok. 11% od wydajności rzeczywistej wyznaczonej w badaniach stanowiskowych. Skonstruowany model fizyczny pompy gerotorowej może być podstawą do zaprojektowania prototypu oraz oryginalnego typoszeregu pomp gerotorowych, którymi zainteresowany jest krajowy przemysł ciągnikowy. Ze względu na cichobieżność pompy te mogą być stosowane w budowie maszyn i urządzeń technologicznych.

LITERATURA

- [1] ANTONIEWICZ J., Tablice funkcji dla inżynierów, Warszawa, PWN, 1969.
- [2] COLBOURNE I.R., The geometry of Trochoid Envelopes and Their Application in Rotary Pumps, Mechanism and Machine Theory, 1974, Vol 9.
- [3] EISENMANN S.A., Neue Brochoideninnenzahnradpumpe mit geringer Pulsation und extrem ruhigem Lauf, Ölhydraulik und Pneumatik,4/1973.
- [4] GÖSELE R., Volumenstromschwankungen zykloidisch und äquidistant zykloidisch verzahnter Pumpen, Industrie Anzeiger 68/1979.
- [5] GRADSZTEJN L.S., RYŻYK I.M., Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów, Warszawa, PWN, 1964.
- [6] GUTBROD W., Förderstrom von Aussen- und Innenzahnradpumpen und seine Ungleichförmigkeit,Ölhydraulik und Pneumatik, 2/1975.
- [7] HAMANN Z., Pompy gerotorowe, Narada naukowo-techniczna n.t. Pompy, silniki i przekładnie w hydrostatycznych układach napędowych, Wrocław, 1965.
- [8] JUDIN F.M., Pompy zębate, Warszawa, PWT, 1958.
- [9] KOLLEK W., STRYCZEK J., Optimierung der Parameter von Zahnradpumpen mit Evolwenten-Aussenverzahnung, Ölhydraulik und Pneumatik, 4/1978.
- [10] KUNSTETTER S., Narzędzia skrawające do metali, Warszawa, WNT, 1973.
- [11] LASOCKI L., DUDEK A., Silnie redukujące przekładnie mechaniczne, Przegląd Mechaniczny, 6/1989.
- [12] LEHMANN M., Sonderformen der Zykloidenverzahnung, Konstruktion, 11/1979.
- [13] LITVIN F.L., Teorija zubčatych zaceplenij, Moskva, Nauka, 1968.
- [14] LOBASTOV V.K., K teorii vnecentroidnogo epicikloidalnogo zaceplenija planetarnych mechanizmov, Teorija mechanizmov i mašin, Izdatelstvo pri Charkovskom Gosudarstvennom Universitete, 25/1978.
- [15] MEYER H.P., SAUREN I., Abrichten von Diamant und CBN-Werkzeugen in die Serienfertigung, Zeitschrift für Industrielle Fertigung, 72/1982.
- [16] MEYER P., On Sliding Curves of Trochoids, Journal of Mathematik, 1967, Vol 3.
- [17] MULLER L., Przekładnie zębate, Warszawa, WNT, 1979.
- [18] OCHEDUSZKO K., Koła zębate, Warszawa, WNT, 1969.
- [19] OHRBERG C.V., Comparaisions entre le moteur gerotòr et le moteur orbit, EFL HPA 7/1967.

110

- [20] PANZER P., BEITLER G., Arbeitsbuch der Ölhydraulik, Krausskopf--Verlag, Wiesbaden 1969.
- [21] PHAM DUC NHUAN, O doborze parametrów konstrukcyjnych i modelowaniu pewnych maszyn hydraulicznych o zazębieniach cykloidalnym, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1978.
- [22] SCHÖLLER K., Die Ring-Rotor-Pumpe ein geräuscharmer Hydrogenerator, Ölhydraulik und Pneumatik, 5/1974.
- [23] STEPANEK Z., Ozubeni hydrogeneratoru gerotorovego typu, Hydraulika 4/1977.
- [24] STRYCZEK J., Pompy zębate o zazębieniu ewolwentowym, Przegląd Mechaniczny, 7/1978.
- [25] STRYCZEK J., Pompy zębate o zazębieniu cykloidalnym, I Konferencja: Pneumatyczne i hydrauliczne elementy automatyki przemysłowej, Politechnika Warszawska, 1978.
- [26] STRYCZEK J., Pompy zębate o zazębieniu cykloidalnym, Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, 1/1980.
- [27] STRYCZEK J., Wydajność pomp zębatych i współczynnik jej nierównomierności, Praca doktorska, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [28] STRYCZEK J., Pompy zębate o zazębieniu hipocykloidalnym, II Konferencja: Pneumatyczne i hydrauliczne elementy automatyki przemysłowej, Politechnika Warszawska, 1981.
- [29] STRYCZEK J., Die Zahnradpumpen mit hypozykloidischen Verzahnungen, 5 Fachtagung Hydraulik und Pneumatik, Dresden 1983.
- [30] STRYCZEK J., Zazębienia hipocykloidalne, Przegląd Mechaniczny, 19/1982.
- [31] STRYCZEK J., Pompy zębate o zazębieniach hipocykloidalnych, Przegląd Mechaniczny, 9/1983.
- [32] STRYCZEK J., Pompy i silniki zębate. Przegląd i systematyka konstrukcji, Część I i II, Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, 4/1985, 5-6/1985.
- [33] STRYCZEK J., Zazębienie epicykloidalne silników hydraulicznych Orbit, Przegląd Mechaniczny, 5/1985.
- [34] STRYCZEK J., Konstrukcja i wykonanie kół zębatych o zarysie cykloidalnym, Mechanik, 10-11/1986.
- [35] STRYCZEK J., Geometria uzębień cykloidalnych pomp i silników zębatych, Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, 1/1988.
- [36] STRYCZEK J., Projektowanie zazębień hydraulicznych, Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, 2/1988.
- [37] STRYCZEK J., Wymiarowanie cykloidalnych kół zębatych, Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, 3/1988.

- [38] STRYCZEK J., Cycloidal Gears in Design of Gear Pumps and Motors, Archiwum budowy maszyn, 1-2/1990.
- [39] STRYCZEK J., Frez ślimakowy do obróbki kół zębatych epicykloidalnych, Biuletyn Informacyjny Ośrodka Badawczo-Rozwojowego Kombinatu VIS w Warszawie, 1/1989.
- [40] STRYCZEK J., Przeciągacze do obróbki epicykloidalnych uzębień wewnętrznych, Biuletyn Informacyjny Ośrodka Badawczo-Rozwojowego Kombinatu VIS w Warszawie, 1/1989.
- [41] STRYCZEK J., Principles of the design of cycloidal gears in hydraulic machinery. Archiwum budowy maszyn, 3/1990.
- [42] STRYCZEK J., Projektieren der Zykloidenverzahnungen der hydraulischen Verdrängermaschinen, Mechanism and Machine Theory Journal 6/1990.
- [43] STRYCZEK J., Wydajność i pulsacja wydajności pomp o zazębieniach cykloidalnych, Przegląd Mechaniczny (w druku).
- [44] STRYCZEK J., Projekt, wykonanie i badania pompy gerotorowej, Raport Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej nr 001/90.
- [45] STRYCZEK S., Napęd hydrostatyczny. Elementy i układy, Warszawa, WNT, 1984.
- [46] ŠANNIKOV V., Planetarnye reduktory s vnecentroidnym cevočnym zacepleniem, Masgiz 1948.
- [47] WEINGARTEN F., Die Entwicklung der hydrostatischen Energieübertragung im 19 und 20 Jahrhundert, Ölhydraulik und Pneumatik, 12/1982.
- [48] WILLEKENS F.A.M., Instantes Fördervolumen, geometrisches Hubvolumen und Ungleichförmigkeitsgrad von Zahnradpumpen, Industrie--Anzeiger, 26/1971.
- [49] WÜSTHOF P., SCHNEIDER I., Grundlagen der Planetmotoren-Vorstellung eines neuen Planetmotors, Ölhydraulik und Pneumatik, 2/1981.
- [50] Katalog firmy Danfoss, Nordborg (Dania), Katalog firmy Eckerle, Malsch (RFN), Katalog firmy Hauni-Blom (RFN), Katalog firmy Heller, Nürtingen (RFN), Katalog firmy Nichols, Waltham (USA), Katalog firmy Mägerle (Szwajcaria), Katalog Kombinatu PZL Hydral, (Wrocław), Katalog firmy SSP-Pumps, Fastbourne (Wielka Brytania), Katalog firmy Vickers, Wien (Austria), Katalog firmy Zahnradfabrik, Friedrichshsfen (RFN).

Praca wpłynęła 10 maja 1990 r. Po poprawieniu 5 września 1990 r.

112

CYCLOIDAL GEARS IN DESIGN OF GEAR PUMPS AND MOTORS

The study deals with theoretical principles of the design of cycloidal gears for gear pumps and motors employed in hydraulic power and control systems. Cycloidal curves, on which cycloidal gears are based. have been analysed and the design principles for single gear wheels and sets of gear wheels have been discussed. To describe the geometry of cycloidal gears a coherent group of teeth parameters (z - number of teeth, m - module pitch, λ - tooth height coefficient, v - addendum modification coefficient), analogically to involute gears case, has been accepted. Basing on these parameters, the formulas describing gear profiles have been derived and analysed. Principles for the cycloidal gears parameters selection and relationships describing characteristic dimensions of cycloidal gear wheels have been given. The principle of mechanical and hydraulic energy equivalence has been employed to derive formulas for delivery (motor displacement) and its pulsation in inner cycloidal gear pumps (motors) of both fixed and movable axes. The influence of teeth parameters on delivery and its pulsation has been discussed. Epicycloidal and hypocycloidal gear pumps have been compared and it has been proved that most beneficial from the technical point of view are: epicycloidal gears based on inner equidistant curve to curtate epicycloid and circular arcs as well as hypocycloidal gears based on outer equidistant curve to curtate hypocycloid and circular arcs.

The theoretical principles have been verified by the design and manufacture of three sets of epicycloidal gear wheels. The gears have been manufactured by means of tools (hobbing cutter, set of pull broaches, grinding wheels of special profiles) designed by the author. Actual dimensions of the wheels manufactured turned out to be equal to the assumed theoretical ones. The cycloidal gear wheels' have been employed in a steering block, a low-speed motor and a gerotor pump. Actual delivery (motor displacement) measured on a test stand is very close to theoretically calculated values.

Verified by Marzena Łuczkiewicz

ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕСА ДЛЯ ПОСТРОЙКИ ШЕСТЕРНЫХ НАСОСОВ И ГИДРОМОТОРОВ

Монография содержит разработку теоретических проблем проектирования циклоидальных зацеплений используемых в постройке шестерных насосов и гидромоторов.

Рассмотрено семейство циклоидальных кривых и связанное с ними семейство циклоидальных зацеплений. Установлено принципы формирования отдельных колес, а также системдвух колес с циклоидальным зацеплением. Для описания геометрии циклоидальных колес принята система конструкционных параметров (z – число зубцов, m – модуль, λ – коэффициент высоты зубца, v – коэффициент перемещения эквидистанты) похосовя на эвольвентное зацепление.

Используя эти параметры определено формулы для описания профилей колес, а также сделано анализ их формы. Определено принципы выбора параметров циклоидального зацепления, а также формулы для расчета характеристических размеров циклоидальных колес.

Используя принцип равенства механической и гидравлической энергии определено формулы для расчета производительности насосов или рабочего объема гидромоторов с внутренним циклоидальным зацеплением и невращающимися осями или планетарным движением колес. Определено также формулы для расчета пульсации производительности насосов. Анализировано влияние параметров зацепления на производительность и ее пульсацию. Сравнено насосы с эпициклоидальными и гипоциклоидальными зацеплениями. Установлено, что с технической точки зрения самая удобная система колес с зацеплением построенным по внутренней эквидистанте к сокращенной эпициклоиде и круговых дуг, а также система колес с гипоциклоидальным зацеплением построенным по внешней эквидистанте к сокращенной гипоциклоиде и круговых дуг.

Теоретичнские основы были проверены проектированием и производством трех систем колес с циклоидальным зацеплением Эти зацепления произведено используя инструменты собственной конструкции (червячная фреза, система протяжек, система шлифовальных кругов с профилем специальной конструкции). Размеры таким образом произведенных колес были согласны с теоретическими. Произведенные циклоидальные колеса были использованы в управляющем блоке, в высокомоментном гидромоторе и героторном насосе.

Действительная производительность насоса или рабочий объем гидромотора полученные во время исследования на контрольном стенде являются очень приближенными к стоимостям вытекающим из теоретических формул.

Проверила Малгожата Наганска-Пиляк

SPIS TRESCI

Oznaczenia	3				
1. Rozwój konstrukcji pomp i silników zębatych	5				
2. Cel pracy	15				
3. Ogólne zasady projektowania zazębień cykloidalnych	17				
3.1. Krzywe cykloidalne	17				
3.2. Kształtowanie kół cykloidalnych	20				
4. Projektowanie kół podstawowych	23				
4.1. Równania zarysu uzębienia	23				
4.2. Analiza kształtu cykloid zasadniczych	27				
4.3. Analiza kształtu ekwidystant	30				
4.4. Dobór parametrów uzębienia cykloidalnego	40				
5. Projektowanie kół współpracujących	41				
5.1. Równania zarysu uzębienia	41				
5.2. Analiza kształtu kół współpracujących	53				
5.3. Zasady doboru zespołu kół	54				
6. Wymiary kół zębatych	55				
7. Wydajność i jej nierównomierność	61				
7.1. Zależności podstawowe	61				
7.2. Wydajność chwilowa, średnia i jednostkowa właściwa	67				
7.2.1. Pompy o zazębieniach epicykloidalnych	67				
7.2.2. Pompy o zazębieniach hipocykloidalnych	71				
7.2.3. Zależność wydajności od parametrów geometrycznych					
kół	74				
7.3. Współczynnik nierównomierności wydajności	74				
7.4. Porównanie pomp i silników o zazębieniach cykloidalnych	80				
8. Weryfikacja funkcjonalności zazębień cykloidalnych	83				
8.1. Zastosowanie zazębień cykloidalnych w elementach napędu					
hydraulicznego	83				
8.2. Technologia kół o zazębieniach cykloidalnych	90				
8.3. Sprawdzenie wymiarów i kształtu uzębień 1	00				
8.4. Badania bloków sterujących i silników wolnobieżnych 1	02				
8.5. Weryfikacja funkcjonalna modelu pompy 1	03				
9. Podsumowanie 1	08				
Literatura					

CONTENTS

No	tation	3
1.	Construction development of gear pumps and motors	5
2.	Purpose of the study	15
3.	General principles of designing cycloidal gears	17
	3.1. Cycloidal curves	17
	3.2. Forming of cycloidal gear wheels	20
4.	Design of basic gear wheels	23
	4.1. Equations of gear profile	23
	4.2. Analysis of basic cycloid forms	27
	4.3. Analysis of equidistant curve forms	30
	4.4. Selection of cycloidal gear parameters	40
5.	Design of mating wheels	41
	5.1. Equations of gear profile	41
	5.2. Shape analysis of mating	53
	5.3. Principles for the selection of a set of gear wheels	54
6.	Dimensions of gear wheels	55
7.	Delivery and its irregularity	61
	7.1. Basic relations	61
	7.2. Instantaneous, mean and elementary specific delivery	67
	7.2.1. Pumps with epicycloidal gears	67
	7.2.2. Pumps with hypocycloidal gears	71
	7.2.3. Delivery dependence on geometrical parameters of	
	wheels	74
	7.3. Coefficient of delivery irregularity	74
	7.4. Comparison of cycloidal gear pumps and motors	80
8.	Verification of operation cycloidal gears of	83
	8.1. Application of cycloidal gears in hydraulic power compo-	
	nents	83
	8.2. Manufacture of cycloidal gear wheels	90.
×	8.3. Verification of parameters and shape of teeth	100
	8.4. Tests of steering units and rotary motors	102
	8.5. Verification of model pump operation	103
9.	Recapitulation	108
	References	110

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU KONSTRUKCJI I EKSPLOATACJI MASZYN (wydane w latach 1987—1991)

- Nr 50, Konferencje nr 13, Rozwój podstaw budowy, eksploatacji i badań maszyn roboczych ciężkich — w tym budowlanych, Cz. I, II, Wrocław 1987
- Nr 51, Konferencje nr 14, International seminar on engineering applications of the surface and cloud vortiety methods, Part II, Wrocław 1987
- Nr 52, Konferencje nr 15, System śródlądowego transportu wodnego w Polsce, Wrocław 1987
- Nr 53, Monografie nr 12, D. Dudek, Modele statystyczne obciążeń eksploatacyjnych w procesie urabiania wielonaczyniowymi koparkami kołowymi, Wrocław 1987
- Nr 54, Studia i Materiały nr 24, Zagadnienia tarcia i smarowania oraz komputeryzacja projektowania zespolów maszynowych, Wrocław 1989
- Nr 55, Konferencje nr 16, Zastosowanie mikrokomputerów w analizie wytrzymałościowej i projektowaniu konstrukcji, Tom 1, Wrocław 1988
- Nr 56, Konferencje nr 17, Zastosowanie mikrokomputerów w analizie wytrzymałościowej i projektowaniu konstrukcji, Tom 2, Wrocław 1989
- Nr 57, Studia i Materiały nr 25, Badania i metody obliczeń kolejowego hamulca szynowego, Wrocław 1990
- Nr 58, Monografie nr 13, R. Będziński, Budowa modeli fizycznych elementów kręgosłupa lędźwiowego, Wrocław 1989
- Nr 60, Monografie nr 14, Piotr A. Wrzecioniarz, Interakcja stateczności lokalnej i globalnej w konstrukcjach trójwarstwowych, Wrocław 1990



Subscription should be sent (at any time of the year) to: "Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa Bank account number: PBK XIII Oddz. W-wa 370044-1195-139-11 Zamówienia na prenumeratę można składać: OR PAN, PKiN, 00-901 Warszawa Nr konta bankowego: PBK IX Oddz. W-wa, 370031-4792

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej są do nabycia w: Księgarni Wr 49 Wybrzeże Wyspiańskiego 27 oraz Księgarni Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław (budynek D-1 PWr.)

ISSN 0324-962x