Na prawach rękopisu

bez ograniczeń

INSTYTUT MATEMATYKI

POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport Serii PREPRINTY Nr 13

PÓŁGRUPY MIAR PROBABILISTYCZNYCH NA PRZESTRZENIACH LINIOWYCH

praca doktorska

Tomasz Żak

Promotor - doc. dr hab. Tomasz Byczkowski

Wrocław 1983

Serdecznie dziękuję
doc. dr. hab. T. Byczkowskiemu
za pomoc i opiekę w trakcie
pisania tej pracy.

SPIS TREŚCI

WSTEP

W pracy tej badamy rozkład półgrupy miar na dwie części: półgrupę poissonowską i półgrupę miar bez dzielników Poissona. Jest to analogon rozkładu miary nieskończenie podzielnej danego przez wzór Lévy'ego. - Chinczyna.

W latach siedemdziesiątych bardzo intensywnie badano miary nieskończenie podzielne na ośrodkowych przestrzeniach Banacha. W badaniach tych wykorzystywano głównie technikę funkcjonałów charakterystycznych. W szczególności Dettweiler [12] i (niezależnie) Araujo [4] udowodnili wzór Lévy'ego - Chinczyna w ośrodkowych przestrzeniach Banacha.

Ponieważ każdą miarę nieskończenie podzielną na przestrzeni Banacha można wpisać w ciągłą półgrupę miar, to do ich badania można stosować technikę półgrupową. Metoda ta nie była jednak rozwijana tak intensywnie jak pierwsza. W roku 1964 Courrége [11] opisał generatory półgrup miar na R^n, a dopiero ostatnio Samur [22] uogólnił ten wynik na ośrodkową przestrzeń Hilberta. W niniejszej pracy opiszemy generatory półgrup miar na przestrzeniach Banacha cotypu 2.

Praca składa się z trzech rozdziałów. W rozdziale pierwszym rozważamy półgrupy miar na abelowych grupach polskich. W szczególności dowodzimy istnienia rozkładu symetrycznej półgrupy miar na splot dwóch półgrup: poissonowskiej i nie zawierającej dzielników poissonowskich. Rozdział drugi poświęcony jest badaniu asymptotycznych własności półgrup miar na przestrzeniach liniowych z mierzalną seminormą. W §5 pokazujemy, że dla półgrup q-ciągłych $\limsup_{t \to 0+} \frac{1}{t} \mu_t\{x: q(x) > s\} < +\infty$, a w §6 poprawiamy to oszacowanie w przypadku półgrup gaussowskich. Wyniki powyższe pozwalają udowodnić istnienie momentów rzędu r miar p-stabilnych (gdy $r < p$) w przypadku seminorm mierzalnych, co jest uogólnieniem wyników de Acosty [1]. Rozdział drugi stanowi część pracy [10].

W rozdziale trzecim podano opis generatora ciągłej półgrupy miar probabilistycznych na przestrzeni cotypu 2. Metody używane w tym rozdziale wzorowane są na dowodzie wzoru Lévy'ego - Chinczyna w przestrzeniach Banacha, podanym w pracy [3]. Używając metod półgrupowych pokazano, że przestrzeń C_2 funkcji dwukrotnie różniczkowalnych zawiera się w dziedzinie generatora każdej półgrupy miar na przestrzeni Banacha cotypu 2 i podano opis generatora na tej klasie funkcji. Wyniki tego rozdziału były anonsowane w [27].

ROZDZIAŁ I

POŁGRUPY MIAR NA ABELOWYCH GRUPACH POLSKICH

§1. Podstawowe definicje, oznaczenia i fakty dotyczące półgrup miar.

W rozdziale tym G oznaczać będzie zawsze abelową grupę polską, e jej jedność. Będziemy rozważać borelowskie miary probabilistyczne , bez dzielników idempotentnych , określone na G; ich zbiór z topologią słabej zbieżności oznaczać będziemy przez $P(G)$. W $P(G)$ określony jest splot miar: $\mu * \nu(A) = \int \mu(Ax^{-1})\,\nu(dx)$. Jest to operacja przemienna i ciągła w słabej topologii [20].

Miarę $\mu \in P(G)$ nazywamy nieskończenie podzielną jeśli dla każdego $n \in N$ istnieje miara $\nu_n \in P(G)$ taka, że $\nu_n^{*n} = \mu$.

Niech f będzie homomorfizmem półgrupy addytywnej $(R_+, +)$ w $(P(G), *)$. Połóżmy $\mu_t = f(t)$ dla każdego $t > 0$. Wówczas $(\mu_t)_{t>0}$ nazywamy półgrupą splotową miar probabilistycznych. Będziemy rozważali także półgrupy miar indeksowane liczbami wymiernymi $(\mu_r)_{r \in Q_+}$; definiujemy je jako obrazy Q_+ w homomorfizmie f.

Ponieważ rozpatrujemy wyłącznie miary bez dzielników idempotentnych, to wszystkie rozważane półgrupy będą miały następującą własność [25] :

$$\forall\ t>0 \quad (\mu_t * \nu = \mu_t \Rightarrow \nu = \delta_e) .$$

Mówimy, że półgrupa $(\mu_t)_{t>0}$ (odpowiednio $(\mu_r)_{r\in Q_+}$) jest ciągła, gdy $\lim\limits_{t\to 0+} \mu_t = \delta_e$ ($\lim\limits_{\substack{r\to 0+\\ r\in Q}} \mu_r = \delta_e$) .

W przypadku $G = R^n$ każdą miarę nieskończenie podzielną można jednoznacznie wpisać w ciągłą półgrupę miar. W roku 1964 Böge [6] opisał klasę grup (tzw. grupy mocno pierwiastkowo zwarte - "strongly root compact"), na których każda miara nieskończenie podzielna wpisywalna jest w ciągłą półgrupę miar. Metoda, której użył Böge opiera się na wykorzystaniu algebraiczno - topologicznych własności tych grup i nie korzysta z pojęcia funkcji charakterystycznej. Wynika stąd, że przy badaniu miar nieskończenie podzielnych na dość szerokiej klasie grup (zawierającej, jak pokazał Siebert [23], wszystkie przestrzenie liniowe lokalnie wypukłe) można stosować technikę półgrupową jako alternatywne - w stosunku do funkcji charakterystycznych - narzędzie do badania takich miar.

$C_u(G)$ oznaczać będzie przestrzeń funkcji rzeczywistych określonych na G, jednostajnie ciągłych i ograniczonych, z normą supremum.

Jeżeli $\mu \in P(G)$ to definiujemy operator probabilistyczny $T_\mu : C_u(G) \to C_u(G)$ wzorem $T_\mu f(x) = \int f(x+y)\, d\mu(y)$.
Operatory probabilistyczne mają następujące, łatwe do sprawdzenia, własności :

1) $T_\mu = T_\nu$ implikuje równość miar $\mu = \nu$
2) $T_{\mu * \nu} = T_\mu T_\nu$
3) ciąg miar $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny słabo do miary μ wtedy i tylko wtedy gdy $T_{\mu_n} \to T_\mu$ w mocnej operatorowej topologii, to znaczy $T_{\mu_n} f \to T_\mu f$ dla każdego $f \in C_u(G)$.

Dla danej półgrupy ciągłej miar $(\mu_t)_{t>0}$ definiujemy półgrupę operatorów $(T_{\mu_t})_{t>0}$, oznaczaną w skrócie $(T_t)_{t>0}$;

z ciągłości półgrupy miar wynika ciągłość odpowiadającej jej półgrupy operatorów : $\lim_{t\to 0+} T_t = I$ w mocnej operatorowej topologii.

Definiujemy operator $A f = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left(T_t f - f\right)$ dla tych $f \in C_u(G)$, dla których granica (w normie supremum) istnieje. Twierdzenie Hille'a - Yosidy [14] mówi, że granica powyższa istnieje dla funkcji f należących do gęstej podprzestrzeni liniowej $C_u(G)$; podprzestrzeń tę oznaczamy $D(A)$. Operator A nazywamy generatorem lub operatorem infinitezymalnym półgrupy $(\mu_t)_{t>0}$; $D(A)$ jest jego dziedziną. Wiadomo, że jeżeli generator A jest operatorem ograniczonym, to dziedziną jego jest cała przestrzeń $C_u(G)$.

Modyfikując dowody lematów zawartych w książce Fellera ([14] rozdz. IX §3) można udowodnić następujące dwa lematy.

Lemat 1.1. Jeżeli $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem ograniczonych i komutujących ze sobą generatorów półgrup miar $(\mu_t^{(n)})_{t>0}$ $n=1,2,\ldots$ i ciąg $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w mocnej operatorowej topologii do generatora A pewnej półgrupy miar $(\mu_t)_{t>0}$ na $D(A)$, to dla każdego $t>0$ ciąg miar $(\mu_t^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do miary μ_t .

Lemat 1.2. Niech $(T_t)_{t>0}$ będzie ciągłą półgrupą operatorów o generatorze A. Jeśli dla pewnej funkcji $f \in C_u(G)$ i pewnego ciągu $t_n \to 0+$ ciąg $\left(\frac{1}{t_n}\left(T_{t_n} f - f\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny to $f \in D(A)$.

Zdefiniujemy teraz translacyjną zwartość rodziny miar.
Definicja. Niech $(\nu_\alpha)_{\alpha\in I}$ będzie rodziną miar z $P(G)$. Jeżeli istnieje zbiór $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ elementów grupy G taki, że rodzina miar $(\nu_\alpha * \delta_{x_\alpha})_{\alpha\in I}$ jest warunkowo zwarta, to $(\nu_\alpha)_{\alpha\in I}$ nazywamy ro-

dziną translacyjnie warunkowo zwartą ("conditionally shift compact") [20] .

Wykorzystywać będziemy następujący fakt.

Lemat 1.3. [20] Niech $\{\mu_n\}, \{\nu_n\}, \{\lambda_n\}$ będą trzema takimi ciągami miar na abelowej grupie polskiej G , że $\mu_n * \nu_n = \lambda_n$, n = 1, 2,... . Jeżeli ciąg $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ jest warunkowo zwarty, to ciagi $\{\mu_n\}$ i $\{\nu_n\}$ są translacyjnie warunkowo zwarte. Jeżeli zaś ciągi $\{\mu_n\}$ i $\{\lambda_n\}$ są warunkowo zwarte to ciąg $\{\nu_n\}$ też jest warunkowo zwarty.

Definicja. Jeżeli M jest skończoną, dodatnią miarą borelowską na G , $M\{e\} = 0$, to miarą Poissona o wykładniku M nazywamy miarę

$$\exp(M) = e^{-M(G)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{*k}}{k!} \quad , \text{ gdzie } M^{*0} = \delta_e \ .$$

Niech teraz F będzie niekoniecznie skończoną miarą borelowską na G , $F\{e\} = 0$. Jeżeli istnieje ciąg miar skończonych M_n takich, że $F = \sup\limits_n M_n$ i ciąg $(\exp(M_n))_{n=1}^{\infty}$ jest translacyjnie warunkowo zwarty, to każdy punkt skupienia ciągu $(\exp(M_n)*\delta_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ nazywamy uogólnioną miarą Poissona i oznaczamy exp (F). Każde dwa punkty skupienia μ_1 i μ_2 ciągu $(\exp(M_n)*\delta_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ różnią się o pewne przesunięcie, to znaczy istnieje $x \in G$ takie, że $\mu_1 = \mu_2 * \delta_x$ [26].

Będziemy korzystać z następujących własności miar Poissona : jeżeli M i N są dwiema skończonymi miarami borelowskimi bez atomów w e, to $\exp(M)*\exp(N) = \exp(M+N)$. W szczególności $(\exp(tM))_{t>0}$ jest ciągłą półgrupą miar. Łatwo sprawdzić, że operator ograniczony $c\,(T_{c^{-1}M} - I)$ (gdzie $c = M(G)$) jest generatorem półgrupy $(\exp(tM))_{t>0}$, jego dziedziną jest $C_u(G)$.

Z powyższego łatwo wynika, że suma dwóch ograniczonych i komutujących ze sobą generatorów półgrup miar jest generatorem półgrupy miar (splotu półgrup wyjściowych). Prawdziwy jest fakt ogólniejszy ([13] ch. VIII Thm 19) : suma generatora i generatora ograniczonego jest generatorem.

Wykorzystamy też następujący lemat, jego dowód można znaleźć w książce Parthasarathy'ego [20] .

Lemat 1.4. Jeżeli $\left(\exp(M_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem translacyjnie warunkowo zwartym, gdzie $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem miar skończonych, to dla każdego otoczenia jedności U rodzina miar $\left(M_n | U^c\right)_{n=1}^{\infty}$ jest warunkowo zwarta.

§2. Rozkład półgrupy miar.

Udowodnimy teraz twierdzenie o rozkładzie półgrupy miar, jest to pewien analogon wzoru Lévy'ego - Chinczyna. W pracy [26] Tortrat pokazał, iż nieskończenie podzielna miara μ bez dzielników idempotentnych na abelowej grupie polskiej G ma rozkład postaci $\mu = \rho * \exp(M)$, gdzie $\exp(M)$ jest pewną uogólnioną miarą Poissona, a ρ jest miarą nie mającą właściwych dzielników Poissona. Modyfikując metodę Tortrata pokażemy analogiczny rozkład półgrupy symetrycznej na splot półgrupy uogólnionych miar Poissona i półgrupy miar bez dzielników poissonowskich.

Twierdzenie 2.1. Niech $(\mu_t)_{t>0}$ będzie ciągłą półgrupą miar bez dzielników idempotentnych na abelowej grupie polskiej G i niech U będzie dowolnym otoczeniem jedności grupy G. Istnieją wówczas dwie półgrupy ciągłe $(\rho_t^U)_{t>0}$ i $(\exp(t\Omega_U))_{t>0}$ takie, że

$$\forall\, t>0 \qquad \mu_t = \rho_t^U * \exp(t\Omega_U)\,.$$

Miara Ω_U jest miarą skończoną, jej nośnik zawarty jest w zbiorze U^c. Miary ρ_t^U, $t>0$, mają następującą własność : jeżeli $\exp(M)$ jest dzielnikiem miary ρ_t^U, to $\operatorname{supp} M \subset U$.

Jeżeli dodatkowo półgrupa $(\mu_t)_{t>0}$ jest symetryczna, to istnieje rozkład

$$\mu_t = \rho_t * \exp(t\Omega)\,,$$

gdzie $(\exp(t\Omega))_{t>0}$ jest półgrupą uogólnionych miar Poissona, a $(\rho_t)_{t>0}$ jest półgrupą miar nie zawierających właściwych dzielników Poissona.

Dowód. Niech $(\mu_t)_{t>0}$ będzie ciągłą półgrupą miar na G. Dla każdego $t>0$ miara $\frac{1}{t}\mu_t$ jest miarą skończoną, zatem dla dowolnego $s>0$ i każdego otoczenia jedności U zachodzi równość :

$$(*) \quad \exp\left[s\left(\tfrac{1}{t}\mu_t|U^c\right)\right] * \exp\left[s\left(\tfrac{1}{t}\mu_t|U\right)\right] = \exp\left[s\left(\tfrac{1}{t}\mu_t\right)\right].$$

Oznaczmy odpowiednio przez $A_{1,t}$, $A_{2,t}$ oraz A_t generatory powyższych półgrup. Są to operatory ograniczone, dziedziną każdego z nich jest $C_u(G)$. Dla $f\in C_u(G)$ $A_t f(x) = \frac{1}{t}(T_t f - f)$, gdzie T_t jest operatorem probabilistycznym wyznaczonym przez miarę μ_t, to znaczy dla $f\in C_u(G)$ $T_t f(x) = \int f(x+y)\,d\mu_t(y)$. Granica $\lim\limits_{t\to 0+} A_t f(x)$ istnieje dla $f\in D(A)$, gdzie A oznacza generator półgrupy $(\mu_t)_{t>0}$ i na mocy twierdzenia Hille'a - Yosidy $D(A)$ jest gęstą podprzestrzenią $C_u(G)$. Na mocy Lematu 1.1 implikuje to zbieżność półgrup $\left\{\exp\left[s\left(\frac{1}{t}\mu_t\right)\right]_{s>0}\right\}_{t>0}$, gdy $t\to 0+$. W szczególności, dla $s=1$ rodzina miar $\left(\exp\left(\frac{1}{t}\mu_t\right)\right)_{t>0}$ jest zbieżna do miary μ_1.

Stąd i z Lematu 1.3 wnioskujemy, że rodziny miar $\left(\exp\left(\frac{1}{t}\mu_t|U\right)\right)_{t>0}$ oraz $\left(\exp\left(\frac{1}{t}\mu_t|U^c\right)\right)_{t>0}$ są translacyjnie warunkowo zwarte. Zatem, na mocy Lematu 1.4 rodzina miar $\left(\frac{1}{t}\mu_t|U^c\right)_{t>0}$ jest rodziną warunkowo zwartą.

Spośród wszystkich punktów skupienia tej rodziny wybierzmy miarę Ω_U o wahaniu maksymalnym. Oczywiście $\operatorname{supp}\Omega_U\subset U^c$. Niech $t_n\to 0+$ będzie takim ciągiem, że ciąg miar $\left(\frac{1}{t_n}\mu_{t_n}|U^c\right)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do miary Ω_U. Miara Ω_U jest miarą skończoną, więc generator półgrupy $(\exp(s\Omega_U))_{s>0}$ jest operatorem ograniczonym. Oznaczmy go przez A_1. Co więcej, słaba zbieżność ciągu miar $\left(\frac{1}{t_n}\mu_{t_n}|U^c\right)_{n=1}^{\infty}$ do miary Ω_U powoduje, iż generatory A_{1,t_n} ciągu półgrup $\left(\exp s\left(\frac{1}{t_n}\mu_{t_n}|U^c\right)\right)_{s>0}$ $n = 1, 2, \ldots$ są zbieżne dla każdej funkcji $f\in C_u(G)$ do generatora A_1.

Przez A_{2,t_n} oznaczmy generator półgrupy $\left(\exp\left[s\left(\frac{1}{t_n}\mu_{t_n}|U\right)\right]\right)_{s>0}$.

Uzyskujemy w ten sposób rozkład generatora A_{t_n}:

$$\forall\ n\in N\quad A_{t_n} = A_{1,t_n} + A_{2,t_n}.$$

Ponieważ dla $f\in D(A)$ $\lim\limits_n A_{t_n}f = Af$ oraz $\lim\limits_n A_{1,t_n}f = A_1f$, to również dla $f\in D(A)$ istnieje granica $\lim\limits_n A_{2,t_n}f$.

Z faktu, iż zbieżność generatorów na zbiorze gęstym w $C_u(G)$ implikuje słabą zbieżność półgrup ([14] rozdz.XIII §10 Lemat 2) wynika, że odpowiednie ciągi półgrup są zbieżne. Z równości $(*)$ wynika, że dla każdego $s>0$ ciąg $\left(\exp\left[s\left(\frac{1}{t_n}\mu_{t_n}\big| U\right)\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ jest warunkowo zwarty, zatem półgrupy graniczne są ciągłymi półgrupami miar. Zdefiniujmy dla każdego $s>0$:

$$\exp(s\Omega_u) = \lim_n \exp\left[s\left(\frac{1}{t_n}\mu_{t_n}\big| U^c\right)\right] \quad \text{oraz} \quad \rho_s^U = \lim_n \exp\left[s\left(\frac{1}{t_n}\mu_{t_n}\big| U\right)\right]$$

Z ciągłości splotu wynika, że

$$\forall\ s>0 \qquad \mu_s = \rho_s^U * \exp(s\Omega_U) .$$

Z maksymalności wahania miary Ω_U wynika, że jeśli $\exp(M)$ jest dzielnikiem pewnej miary ρ_s^U, $s>0$, to $\operatorname{supp} M \subset U$.

Niech teraz $(\mu_t)_{t>0}$ będzie półgrupą miar symetrycznych. Wybierzmy pewien ciąg otoczeń jedności $U_k \searrow \{e\}$. Powtarzając poprzednie rozumowanie dla zbiorów U_1, $U_1 \setminus U_2$, $U_2 \setminus U_3$, ... otrzymujemy :

a) ciąg miar skończonych Ω_k takich, że $\operatorname{supp}\Omega_1 \subset U_1^c$ oraz $\operatorname{supp}\Omega_k \subset U_{k-1} \setminus U_k$ $k = 2, 3, \ldots$

b) ciąg półgrup ciągłych $\left(\rho_t^{(k)}\right)_{t>0}$ $k = 1, 2, \ldots$

o następującej własności

$$(**)\ \forall\ k\in N\ \forall\ t>0 \qquad \mu_t = \rho_t^{(k)} * \exp[t(\Omega_1+\ldots+\Omega_k)] .$$

Z Lematu 1.3 wnioskujemy, że ciągi miar $\left(\rho_{t/2}^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ i $\left(\exp\left[\frac{t}{2}(\Omega_1+\ldots+\Omega_k)\right]\right)_{k=1}^{\infty}$ są translacyjnie warunkowo zwarte. Z symetrii miar μ_t, $t>0$, wynika symetria wszystkich miar Ω_k i półgrup $\left(\rho_t^{(k)}\right)_{t>0}$ $k=1,2,\ldots$, a zatem ciągi miar $\left(\rho_t^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$

i $\left(\exp\left[t(\Omega_1+\ldots+\Omega_k)\right]\right)_{k=1}^{\infty}$ są warunkowo zwarte dla każdego $t>0$. Niech D oznacza zbiór dodatnich liczb dwójkowo - wymiernych. Wybierzmy metodą przekątniową taki podciąg (k'), aby ciągi miar $\left(\rho_t^{(k')}\right)_{k'}$ i $\left(\exp\left[t(\Omega_1+\ldots+\Omega_{k'})\right]\right)_{k'}$ były zbieżne dla każdego $t\in D$.

Przechodząc do granicy otrzymujemy dwie półgrupy miar indeksowane liczbami dwójkowo - wymiernymi :

$$\forall\ t\in D \quad \rho_t = \lim_{k'} \rho_t^{(k')} \quad \text{i} \quad \exp(t\Omega) = \lim_{k'} \exp\left[t(\Omega_1+\ldots+\Omega_{k'})\right]$$

Pokażemy teraz, że półgrupa miar symetrycznych bez dzielników idempotentnych jest ciągła.

Niech $(\nu_r)_{r\in D}$ będzie taką półgrupą. Weźmy dowolny ciąg $r_n\to 0$, $r_n\in D$. Rozpatrzmy ciągi miar $\{\nu_{r_n}\}$ i $\{\nu_{1-r_n}\}$.

Ponieważ $\nu_{r_n}*\nu_{1-r_n}=\nu_1$, to z symetrii tych miar i Lematu 1.3 wynika, że można wybrać podciąg $s_n\to 0$ taki, iż $\lim_n \nu_{s_n}=\varepsilon$, $\lim_n \nu_{1-s_n}=\gamma$ oraz $\varepsilon*\gamma=\nu_1$.

Niech (u_n) będzie podciągiem ciągu (s_n) o własności: $s_n>2u_n$. Wówczas $\nu_{u_n}*\nu_{s_n-u_n}=\nu_{s_n}$ i jeśli miara ε_0 jest punktem skupienia ciągu $\{\nu_{s_n-u_n}\}$, to $\varepsilon*\varepsilon_0=\varepsilon$, a zatem $\varepsilon_0=\delta_e$. Podobnie $\nu_{s_n-u_n}=\nu_{u_n}*\nu_{s_n-2u_n}$, a zatem $\delta_e=\varepsilon*\delta_e$, czyli $\varepsilon=\delta_e$.

Półgrupy miar $(\rho_t)_{t\in D}$ i $(\exp(t\Omega))_{t\in D}$ są warunkowo zwarte i ciągłe w zerze, rozszerzają się więc jednoznacznie [24] do półgrup ciągłych $(\rho_t)_{t>0}$ i $(\exp(t\Omega))_{t>0}$.

Ponieważ wzór $(**)$ zachodzi dla dowolnych $k\in N$ i $t>0$, to

$$\forall\ t>0 \quad \mu_t = \rho_t*\exp(t\Omega).$$

Pokażemy jeszcze, że półgrupa $(\rho_t)_{t>0}$ nie ma dzielników Poissona.

Z równości $\rho_t^{(k)} = \rho_t^{(n)} * \exp\left[t(\Omega_{k+1}+\ldots+\Omega_n)\right]$ (dla $n>k$) wynika, że miara ρ_t jest dzielnikiem każdej miary $\rho_t^{(k)}$ $k=1,2,\ldots$ Gdyby więc miara $\exp(tM)$, $M \neq \delta_e$ była dzielnikiem miary ρ_t, to obcięcie miary tM do pewnego zbioru $(U_k - U_{k-1})$ byłoby niezerowe. Miara $\exp(t\Omega_k) * \exp(tM|U_k - U_{k-1})$ byłaby dzielnikiem miary $\rho_t^{(k-1)}$, co przeczyłoby maksymalności miary Ω_k.

Uwaga 2.1. Gdy $(\rho_t)_{t>0}$ jest ciągłą półgrupą miar i ρ_1 nie ma właściwych dzielników Poissona, to dla dowolnego otoczenia jedności U

$$\frac{1}{t}\rho_t(U^c) \longrightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad t\to 0+ .$$

Dowód. W dowodzie Twierdzenia 2.1 pokazaliśmy, że ciąg $\left(\exp\left(\frac{1}{t_n}\rho_{t_n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny słabo do miary ρ_1 gdy $t\to 0+$, a ponieważ ρ_1 nie ma właściwych dzielników Poissona, to dla dowolnego otoczenia jedności U $\frac{1}{t}\rho_t(U^c)\to 0$ gdy $t\to 0+$.

ROZDZIAŁ II

WŁASNOSCI PÓŁGRUP MIAR NA MIERZALNYCH PRZESTRZENIACH LINIOWYCH

§3. Podstawowe definicje i oznaczenia używane w rozdziale II.

Zajmiemy się teraz badaniem asymptotycznych własności półgrup miar na przestrzeniach liniowych z mierzalną seminormą.

W rozdziale tym (E,B) oznaczać będzie przestrzeń wektorową mierzalną to znaczy taką przestrzeń nad ciałem R, że dodawanie wektorów i mnożenie wektora przez liczbę rzeczywistą są działaniami mierzalnymi ze względu na σ-ciało B.

Seminormą będziemy nazywali każdą funkcję $q : E \longrightarrow R^+$ taką, że $q(0) = (0)$ i spełniającą dwa warunki :

1) $\forall\ x,y \in E \qquad q(x+y) \leq q(x) + q(y)$

2) $\forall\ x \in E \quad \forall\ \alpha,\beta \in R \qquad |\alpha| \leq |\beta| \implies q(\alpha x) \leq q(\beta x)$.

Mówimy, że seminorma $q : E \longrightarrow R^+$ jest mierzalna, gdy odwzorowanie $q : (E,B) \rightarrow (R^+, B_{R^+})$ jest mierzalne, gdzie B_{R^+} oznacza σ-ciało zbiorów borelowskich w R^+.

Niech q będzie seminormą mierzalną na E. Półgrupę miar $(\mu_t)_{t>0}$ nazywać będziemy q-ciągłą jeśli

$$\forall\ s>0 \quad \lim_{t\to 0+} \mu_t\{x:\ q(x)>s\} = 0 .$$

§4. Podstawowe nierówności.

Sformułujemy teraz kilka podstawowych lematów.

Lemat 4.1. (Nierówność Lévy'ego)

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi, symetrycznymi zmiennymi losowymi o wartościach w przestrzeni E. Jeśli q jest seminormą mierzalną, to

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P\left\{ \max_{j \leq n} q\left(\sum_{i=1}^{j} X_i\right) > \varepsilon \right\} \leq 2P\left\{ q\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) > \frac{\varepsilon}{2} \right\} .$$

Dowód jest łatwą modyfikacją klasycznego przypadku, gdy q jest normą i można znaleźć go w książce Kahane'a [19] w rozdziale 2.

Będziemy używali też następujących dwóch nierówności, wykorzystywanych przez de Acostę w pracach [1] i [2] .

Lemat 4.2. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w E. Jeśli q jest seminormą mierzalną, to

$$\forall s > 0 \quad \forall 0 < \varepsilon < 1$$

a) $$P\{q(X+Y) > s\} \geq P\{q(X) > (1+\varepsilon)s\} \cdot P\{q(Y) \leq \varepsilon \cdot s\} + P\{q(Y) > (1+\varepsilon)s\} \cdot P\{q(X) \leq \varepsilon \cdot s\}$$

b) $$P\{q(X+Y) > s\} \leq P\{q(X) > (1-\varepsilon)s\} + P\{q(Y) > (1-\varepsilon)s\} + P\{q(X) > \varepsilon \cdot s\} \cdot P\{q(Y) > \varepsilon \cdot s\} .$$

Łatwe dowody powyższych nierówności można znaleźć w książce Fellera [14] str. 255 .

Korzystając z Lematu 4.2 dowodzimy następującego faktu.

Lemat 4.3. Niech q będzie seminormą mierzalną a $(\mu_t)_{t>0}$ q-ciągłą półgrupą miar. Wówczas

$$\forall\ u>0 \quad \lim_{t\to 0+} \mu_{t+u}\{x: q(x)>s\} = \mu_u\{x: q(x)>s\}$$

dla każdego $s>0$, w którym $\mu_u\{x: q(x)>s\}$ jest ciągła. Innymi słowy : $\mu_{t+u}\circ q^{-1}$ jest słabo zbieżne do $\mu_t\circ q^{-1}$ gdy $t\to 0+$.

Dowód. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach μ_t i μ_u, odpowiednio. Z części a) Lematu 4.2 wynika, że dla wszystkich $s>0$ i $\varepsilon\in(0,1)$

$$\mu_{t+u}\{x: q(x)>s\} \geqslant \mu_t\{x: q(x) > (1+\varepsilon)s\}\cdot\mu_u\{x: q(x)\leqslant \varepsilon\cdot s\} +$$

$$\mu_u\{x: q(x) > (1+\varepsilon)s\}\cdot\mu_t\{x: q(x)\leqslant \varepsilon\cdot s\}.$$

Gdy $t\to 0+$, to

$$\liminf_{t\to 0+} \mu_{t+u}\{x: q(x)>s\} \geqslant \mu_u\{x: q(x)>(1+\varepsilon)s\}.$$

Podobnie, wykorzystując Lemat 4.2 b) i q-ciągłość półgrupy dostajemy

$$\limsup_{t\to 0+} \mu_{t+u}\{x: q(x)>s\} \leqslant \mu_u\{x: q(x)>(1-\varepsilon)s\},$$

co kończy dowód.

Miarę μ na przestrzeni liniowej E nazywamy miarą stabilną o wykładniku p, $0<p\leqslant 2$, gdy dla dowolnych niezależnych elementów losowych X i Y o wartościach w przestrzeni E i o rozkładzie μ i dla dowolnych $\alpha,\beta>0$ element losowy $\alpha X+\beta Y$ ma taki sam rozkład jak $\gamma X + z$, gdzie $\gamma(\alpha,\beta) = (\alpha^p+\beta^p)^{1/p}$, a z jest pewnym elementem przestrzeni E. Miarę μ nazywamy miarą ściśle stabilną, gdy dla dowolnych $\alpha,\beta>0$ można wybrać $z=0$. Gdy μ jest miarą stabilną o indeksie p , wtedy symetryzacja miary μ $(=\mu * \bar{\mu})$ jest miarą symetryczną i ściśle stabilną o tym samym indeksie p.

Jeśli μ jest miarą stabilną o indeksie p, a μ_t jest rozkładem wektora losowego $t^{1/p}X$ (gdzie X ma rozkład równy μ), to $(\mu_t)_{t>0}$ jest ciągłą półgrupą miar taką, że $\mu_1 = \mu$. Co więcej, łatwo widać, że ta półgrupa jest q-ciągła wtedy i tylko wtedy gdy odwzorowanie $\alpha \longrightarrow q(\alpha x)$ jest ciągłe w zerze dla μ_1-p.w. $x \in E$. Z drugiej strony, gdy (E,B) jest przestrzenią liniowo - topologiczną z σ-ciałem borelowskim B , a q jest seminormą ciągłą to każda półgrupa ciągła jest q-ciągła.

Po tych uwagach możemy przejść do badania asymptotyki półgrup.

§5. Oszacowanie z góry dla półgrup miar.

Pokażemy teraz, że dla każdej q-ciągłej półgrupy $(\mu_t)_{t>0}$

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{1}{t}\mu_t\{x:\ q(x)>s\} < +\infty .$$

Twierdzenie 5.1. Niech q będzie seminormą mierzalną a $(\mu_t)_{t>0}$ q-ciągłą półgrupą miar probabilistycznych. Wtedy

$$\forall\ s>0 \qquad \limsup_{t\to 0+} \frac{1}{t}\mu_t\{x:\ q(x)>s\} < +\infty .$$

Dowód. Załóżmy, że μ_t, $t>0$ są symetryczne. Ustalmy $s>0$. Załóżmy dodatkowo, że $\mu_1\{x:\ q(x)>\frac{s}{4}\} < \frac{1}{2}$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $\frac{s}{4}$ jest punktem ciągłości $F_1(\cdot) = \mu_1\{x:\ q(x)>\cdot\}$. Niech $t_n \to 0+$.

Połóżmy $k_n = \left[\frac{1}{t_n}\right] + 1$ i niech $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_{k_n}^{(n)}$ będą symetrycznymi, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, takim, że $\sum_{i=1}^{k_n} X_i^{(n)}$ ma rozkład równy $\mu_{k_n t_n}$. Używając standardowej nierówności

$$\max_{i\leq n} q(X_i^{(n)}) \leq 2 \max_{i\leq n} q\left(\sum_{j=1}^{i} X_j^{(n)}\right)$$

i Lematu 4.1 otrzymujemy następującą nierówność :

$$P\{\max q(X_i^{(n)})>s\} \leq 2P\left\{q\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_n} X_i^{(n)}\right) > \frac{s}{4}\right\} \leq 2P\left\{q\left(\sum_{i=1}^{k_n} X_i^{(n)}\right) > \frac{s}{4}\right\}.$$

Stąd dostajemy nierówność

$$P\{\max q(X_i^{(n)}) \leq s\} \geq 1 - 2P\left\{q\left(\sum_{i=1}^{k_n} X_i^{(n)}\right) > \frac{s}{4}\right\},$$

czyli

$$\left[\mu_{t_n}\{x: q(x) \leq s\}\right]^{k_n} \geq 1 - 2\mu_{k_n t_n}\left\{x: q(x) > \frac{s}{4}\right\}.$$

Ostatecznie

$$k_n \cdot \mu_{t_n}\{x: q(x) > s\} \leq \frac{1 - \alpha_n^{1/k_n}}{1/k_n},$$

gdzie $\alpha_n = 1 - 2\mu_{k_n t_n}\left\{x: q(x) > \frac{s}{4}\right\}$.

Ponieważ $k_n \cdot t_n \longrightarrow 1+$ zastosowanie Lematu 4.3 kończy dowód.

Pokażemy teraz, jak uwolnić się od założenia, iż $\mu_1\{x: q(x) > \frac{s}{4}\} < \frac{1}{2}$

Oczywiście dla każdego $s > 0$ istnieje $t_0 > 0$ takie, że $\mu_{t_0}\{x: q(x) > \frac{s}{4}\} < \frac{1}{2}$, bo $(\mu_t)_{t>0}$ jest q-ciągła .

Połóżmy $\nu_t = \nu_{t\cdot t_0}$. Wówczas $(\nu_t)_{t>0}$ jest symetryczną, q-ciągłą półgrupą miar o własności $\nu_1\{x: q(x) > \frac{s}{4}\} < \frac{1}{2}$.

Zatem teza twierdzenia jest prawdziwa dla półgrupy $(\nu_t)_{t>0}$.

Dla dowolnej półgrupy udowodnimy twierdzenie wykorzystując standardową metodę symetryzacji :

półgrupa $(\lambda_t)_{t>0} = (\mu_t * \bar{\mu}_t)_{t>0}$ jest symetryczna i q-ciągła

(bo $(\mu_t)_{t>0}$ jest półgrupą q-ciągłą). Co więcej, dla każdego $s>0$ mamy nierówność :

$$\mu_t\{x:\ q(x)>s\}\cdot\mu_t\{x:\ q(x)\leq \tfrac{s}{2}\}\leq \mu_t*\bar{\mu}_t\{x:\ q(x)>\tfrac{s}{2}\}=$$

$$=\lambda_t\{x:\ q(x)>\tfrac{s}{2}\}.$$

Otrzymujemy zatem nierówność :

$$\mu_t\{x:\ q(x)>s\}\leq\lambda_t\{x:\ q(x)>\tfrac{s}{2}\}\cdot\left[\mu_t\{x:\ q(x)\leq\tfrac{s}{2}\}\right]^{-1}.$$

Gdy $t\to 0+$ to $\mu_t\{x:\ q(x)\leq\frac{s}{2}\}\longrightarrow 1$, zatem z prawdziwości tezy twierdzenia dla półgrupy symetrycznej $(\lambda_t)_{t>0}$ wynika jego prawdziwość dla półgrupy $(\mu_t)_{t>0}$.

§6. Oszacowanie z góry dla półgrup gaussowskich.

Dla miar gaussowskich można uzyskać dokładniejsze oszacowania.

Miara μ na przestrzeni E nazywa się miarą gaussowską (w sensie Fernique'a [15]), jeśli jest miarą stabilną o indeksie 2 i jeżeli dla dowolnych dwóch niezależnych elementów losowych X_1, X_2 o rozkładach równych μ, wektory losowe X_1+X_2 oraz X_1-X_2 są niezależne.

Jeżeli (E,B) jest przestrzenią wektorową taką, że B jest generowane przez przestrzeń wektorową $\mathcal{F}$ form liniowych na E, wtedy definicja ta jest równoważna klasycznej :
miara μ jest gaussowska wtedy i tylko wtedy gdy $f(\cdot)$ jest (rzeczywistą) gaussowską zmienną losową dla każdego $f\in\mathcal{F}$.

Twierdzenie 6.1. Niech μ będzie miarą gaussowską na E. Załóżmy, że q jest mierzalną seminormą i $\alpha\longrightarrow q(\alpha x)$ jest przekształceniem ciągłym w zerze μ-prawie napewno. Wówczas dla każdego $s > 0$ i każdego $k \in N$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^k} \mu\{x: q(t^{1/2}x) > s\} = 0 .$$

Dowód. Użyjemy techniki Fernique'a [15]. Udowodnimy twierdzenie tylko dla przypadku, gdy μ jest symetryczna i ściśle stabilna; dla μ dowolnych stosujemy symetryzację. Oznaczmy $R_s(t) = \mu\{x: q(t^{1/2}x) > s\}$. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie μ. Korzystając z definicji miary gaussowskiej możemy napisać :

$$R_s(t)(1 - R_{s/2}(t)) = P\{q(t^{1/2}X) > s\} \cdot P\{q(t^{1/2}Y) \leqslant \frac{s}{2}\} =$$

$$= P\{q(t^{1/2}X) > s\ ,\ q(t^{1/2}Y) \leqslant \frac{s}{2}\} =$$

$$= P\{q((t/2)^{1/2}(X+Y)) > s\ ,\ q((t/2)^{1/2}(X-Y)) \leqslant \frac{s}{2}\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{q((t/2)^{1/2}(X+Y)) - q((t/2)^{1/2}(X-Y)) > \frac{s}{2}\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{q((2t)^{1/2}X) > \frac{s}{2}\ ,\ q((2t)^{1/2}Y) > \frac{s}{2}\} =$$

$$= \left[P\{q((2t)^{1/2}X) > \frac{s}{2}\}\right]^2 = \left[R_{s/2}(2t)\right]^2 .$$

Stąd

$$R_s(t)(1 - R_{s/2}(t)) \leqslant \left[R_{s/2}(2t)\right]^2 ,$$

czyli

$$R_s(t) \leqslant \left[R_{s/2}(2t)\right]^2 + R_s(t) \cdot R_{s/2}(t) .$$

Zatem z Twierdzenia 5.1 otrzymujemy, że

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{1}{t^2} \mu\{x: q(t^{1/2}x) > s\} < +\infty,$$

a dalej indukcyjnie

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^k} \mu\{x: q(t^{1/2}x) > s\} = 0$$

dla każdego $k \in N$, co kończy dowód.

Wniosek 6.1. Niech μ będzie miarą gaussowską na ośrodkowej, metrycznej przestrzeni liniowej. Wówczas dla dowolnego otoczenia zera U mamy

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\mu\{t^{-1/2}U^c\} = 0 .$$

Dowód. Niech $\|\cdot\|$ będzie seminormą (to znaczy metryką niezmienniczą na przesunięcia) generującą topologię przestrzeni. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $\|\cdot\|$ jest niemalejąca [21]. Jeżeli U jest otwartym otoczeniem zera, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $U^c \subset \{x: \|x\| > \varepsilon\}$. Teza wniosku wynika z Twierdzenia 6.1 i ciągłości mnożenia przez skalary.

Uwaga 6.1. Z powyższego wniosku wynika, że dla każdej miary μ symetrycznej gaussowskiej na ośrodkowej przestrzeni metrycznej liniowej E istnieje proces Wiënera (tj. proces $W(t)$, $t\geq 0$ jednorodny, o przyrostach niezależnych, trajektoriach ciągłych z prawdopodobieństwem 1 i taki, że $W(0) = 0$) o wartościach w E i taki, że $W(1)$ ma rozkład równy μ (patrz [7]). Istnienie procesu W implikuje prawdziwość tak zwanej Zasady Niezmienniczości (Invariance Principle):
jeśli $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach w E i o tym samym rozkładzie i takich, że $(X_1+\ldots+X_n)/\sqrt{n}$ jest zbieżny według rozkładu do $W(1)$, to proces stochastyczny $\zeta_n(t) = (X_1+\ldots+X_{[nt]})/\sqrt{n}$ jest słabo zbieżny do $W(t)$ w przestrzeni $D_E[0,1]$ (porównaj [7], Thm.1).
Powyższa wersja Zasady Niezmienniczości została zastosowana do dowodów pewnych funkcjonalnych twierdzeń granicznych [8], [18].

Uwaga 6.2. Możemy rozważać również miary gaussowskie w sensie Bernsteina. Mówimy, że μ jest gaussowska w sensie Bernsteina (B-gaussowska) jeżeli dla każdych dwóch niezależnych zmiennych losowych X i Y o rozkładach równych μ, $X + Y$ i $X - Y$ są niezależne. Łatwo pokazać, że Twierdzenie 6.1 zachodzi też dla miar B-gaussowskich. Zmodyfikowana wersja tego twierdzenia zachodzi też dla miar B-gaussowskich na grupach abelowych.

Twierdzenie 6.2. Niech q będzie seminormą mierzalną a μ miarą stabilną o indeksie p. Wtedy

$$\limsup_{t\to+\infty} t^p \mu\{x: q(x) > t\} < +\infty,$$

co implikuje

$$\forall\, r < p \qquad \int q^r(x)\, d\mu(x) < +\infty.$$

Dowód. Tak jak poprzednio udowodnimy twierdzenie tylko dla przypadku gdy μ jest symetryczna i ściśle stabilna. W tym przypadku $X_1 + X_2$ ma rozkład taki jak γX_1, gdzie $\gamma = 2^{1/p}$. Jeśli s jest tak duże, aby spełniony był warunek $\mu\{x: q(x) > \frac{s}{4}\} < \frac{1}{2}$ to z Twierdzenia 5.1 wynika, że

$$\limsup_n 2^n \mu\{x: q(x/\gamma^n) > s\} < +\infty .$$

Dla każdego $n \in N$ istnieją: k_n całkowite i δ_n, $0 \leq \delta_n < \frac{1}{n}$ takie, że $\frac{1}{p} = \frac{k_n}{n} - \delta_n$. Wówczas $\frac{1}{\gamma^n} = [2^{k_n/n}\ 2^{-\delta_n}]^{-n} = 2^{-k_n}\, 2^{\delta_n \cdot n}$. Z subaddytywności q wynika oszacowanie:

$$2^{k_n} q(x/\gamma^n) \geq q(2^{k_n}\cdot \gamma^{-n} x) = q(2^{\delta_n \cdot n} x) \geq q(x),$$

więc

$$q(x/\gamma^n) \geq 2^{-k_n} q(x) = \gamma^{-n}\, 2^{-\delta_n \cdot n} \cdot q(x) \geq \gamma^{-n} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot q(x) .$$

Z powyższej nierówności na mocy Twierdzenia 5.1 otrzymujemy oszacowanie

$$2^n \mu\{x: q(x)>\gamma^n \cdot 2\cdot s\} \leqslant 2^n \cdot \mu\{x: q(x/\gamma^n) > s\} < C < +\infty.$$

Stosujemy interpolację. Jeśli $\gamma^n \cdot 2\cdot s < t \leqslant \gamma^{n+1}\cdot 2\cdot s$ to

$$t^p \mu\{x: q(x)>t\} \leqslant 2^{p+1}\cdot s^p \cdot 2^n \mu\{x: q(x)>\gamma^n\cdot 2\cdot s\} < 2^{p+1}\cdot s^p\cdot C \quad ,$$

co kończy dowód twierdzenia.

§7. Istnienie momentów eksponencjalnych miar nieskończenie podzielnych bez dzielników poissonowskich.

Będziemy teraz zajmować się miarami nieskończenie podzielnymi nie mającymi dzielników poissonowskich. Jeżeli $(\rho_t)_{t>0}$ jest półgrupą takich miar na ośrodkowej przestrzeni E z seminormą mierzalną q, to na mocy Uwagi 2.1 dla każdego $\varepsilon>0$ $\frac{1}{t}\rho_t\{x: q(x)>\varepsilon\}\to 0$ gdy $t\to 0+$. Własność ta implikuje istnienie momentów eksponencjalnych miary ρ_1.

Modyfikując nieznacznie dowód Hoffmanna-Jørgensena z pracy [17] można udowodnić następującą nierówność.

Lemat 7.1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi, symetrycznymi zmiennymi losowymi o wartościach w przestrzeni E. Jeśli q jest seminormą mierzalną, to dla dowolnych $t,s>0$

$$P\{q(\sum_{i=1}^n X_i) > 2t+s\} \leqslant P\{\max_{i\leqslant n} q(X_i) > s\} + \left[2P\{q(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i) > \tfrac{t}{2}\}\right]^2.$$

Korzystając z powyższego lematu udowodnimy następujące oszacowanie.

Twierdzenie 7.1. Niech q będzie seminormą mierzalną na E, a $(\rho_t)_{t>0}$ ciągłą półgrupą miar o własności

$$(*) \quad \forall\, s>0 \quad \frac{1}{t}\rho_t\{x: q(x)>s\}\to 0 \quad \text{gdy } t\to 0+ .$$

Istnieją stałe α, $c>0$ takie, że dla każdego $t>0$

$$\rho_1\{x:\ q(x)>t\} \leqslant ce^{-\alpha\sqrt{t}} .$$

Dowód. Załóżmy, że ρ_t, $t>0$, są symetryczne. Niech $X_1,\dots,X_n$ będą symetrycznymi, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie równym $\rho_{1/n}$. Z Lematu 7.1 wynika następująca nierówność :

$$\forall\, t,s>0 \quad \rho_1\{x:\ q(x)>2t+s\} \leqslant 1-\left[\rho_{1/n}\{x:\ q(x)\leqslant s\}\right]^n +$$
$$+\left[2\rho_1\{x:\ q(x/2)>t/2\}\right]^2 .$$

Z warunku $(*)$: $n\cdot\left[1-\rho_{1/n}\{x:\ q(x)\leqslant s\}\right]=\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dla każdego $s>0$, a zatem

$$\left[\rho_{1/n}\{x:\ q(x)\leqslant s\}\right]^n = \left[1-\frac{\alpha_n}{n}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 ,$$

dla każdego $s>0$.

Otrzymujemy więc nierówność :

$$\rho_1\{x:\ q(x)\geqslant 2t\} \leqslant \left[2\cdot\rho_1\{x:\ q(x/2)>t/2\}\right]^2 .$$

Ponieważ q jest monotoniczna to możemy napisać nierówność :

$$\rho_1\{x:\ q(x)>4t\} \leqslant \left[2\cdot\rho_1\{x:\ q(x)>t\}\right]^2 .$$

Iterując powyższą nierówność n razy dostajemy nierówność :

$$\rho_1\{x:\ q(x)>4^n t\} \leqslant \left[4\,\rho_1\{x:\ q(x)>t\}\right]^{2^n} .$$

Zastosujemy metodę aproksymacji. Weźmy t_0 tak duże, aby $4\rho_1\{x:\ q(x)>t_0\}=\gamma<1$. Niech teraz $4^n t_0\leqslant s<4^{n+1}t_0$. Wtedy

$$\rho_1\{x:\ q(x)>4^{n+1}t_0\}\leqslant\rho_1\{x:\ q(x)>s\}\leqslant\rho_1\{x:\ q(x)>4^n t_0\} ,$$

czyli $\rho_1\{x:\ q(x)>s\} \leqslant \gamma^{2^n} \leqslant \gamma^{\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{t_0}}}$.

Dobierając teraz odpowiednie stałe α, $c>0$ otrzymujemy nierówność :

$$\forall\, s>0 \qquad \rho_1\{x:\ q(x)>s\} \leqslant ce^{-\alpha\sqrt{s}} .$$

Dla dowolnych półgrup stosujemy metodę symetryzacji.

Wniosek 7.1. Przy założeniach powyższego twierdzenia istnieje stała $\alpha_0 > 0$ taka, że

$$\forall \alpha < \alpha_0 \; \forall c > 0 \qquad \int c \cdot \exp\left(\alpha \sqrt{q(x)}\right) d\,\rho_1(x) < +\infty.$$

Wniosek 7.2. Niech μ będzie miarą gaussowską na E. Załóżmy, że q jest seminormą mierzalną i $\alpha \longrightarrow q(\alpha x)$ jest przekształceniem ciągłym w zerze μ-prawie napewno. Wówczas

$$\exists \alpha_0 > 0, \; c > 0 \qquad \mu\{x: q(x) > t\} \leq c e^{-\alpha_0 \sqrt{t}} .$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 6.1

$$\forall s > 0 \qquad \frac{1}{t} \mu_t\{x: q(x) > s\} \longrightarrow 0, \text{ gdy } t \longrightarrow 0+,$$

zatem teza wniosku wynika bezpośrednio z Twierdzenia 7.1.

Uwaga 7.1. Oszacowanie powyższe można jeszcze poprawić. W pracy [9] pokazano, że jeśli μ jest miarą gaussowską na E, a q seminormą mierzalną, to dla każdego ε, $0 < \varepsilon < 2$, istnieje $C_\varepsilon > 0$ takie, że

$$\forall t > 0 \qquad \mu\{x: q(x) > t\} \leq C_\varepsilon \cdot \exp(-t^{2-\varepsilon}).$$

Dowód tego faktu polega na zaadaptowaniu oszacowań uzyskanych przez de Acostę [1] do metody Fernique'a [15].

Dla pełności przytoczymy na zakończenie tego rozdziału wynik uzyskany w pracy [10].

Twierdzenie 7.2. Niech q będzie seminormą mierzalną a $(\mu_t)_{t>0}$ q-ciągłą półgrupą miar probabilistycznych na E. Wówczas istnieje nierosnąca funkcja $\Theta(s)$ określona na $(0, \infty)$

taka, że dla każdego $s > 0$ bedącego punktem ciągłości funkcji Θ

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \mu_t\{x : q(x) > s\} = \Theta(s) .$$

Jeśli μ_t, $t > 0$, są gaussowskie, to $\Theta \equiv 0$; jeśli istnieje funkcjonał liniowy f taki, że $f(\cdot)$ nie jest zmienną losową gaussowską (względem miary μ_1) i dla pewnego $\alpha \in (0,1]$ $q \geqslant |f|^\alpha$ to $\Theta \not\equiv 0$.

ROZDZIAŁ III

GENERATORY PÓŁGRUP MIAR NA PRZESTRZENIACH COTYPU 2

§8. Definicje i oznaczenia używane w rozdziale III.

W rozdziale tym X oznaczać będzie zawsze ośrodkową, rzeczywistą przestrzeń Banacha.

Niech $f \in C_u(X)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w sensie Frécheta. Wówczas dla każdego $x \in X$ pierwsza pochodna $f'(x)(\cdot)$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na X, a druga pochodna $f''(x)(\cdot,\cdot)$ jest ciągłym, symetrycznym funkcjonałem dwuliniowym. $\|f''(x)\| = \sup\limits_{\|u\|\leq 1\ \|v\|\leq 1} |f''(x)(u,v)|$.

Definicja. Przez $C_2(X)$ oznaczać będziemy zbiór tych funkcji $f \in C_u(X)$ dwukrotnie różniczkowalnych w sensie Frécheta, dla których $\|f'\| = \sup\limits_{x\in X} \|f'(x)\| < +\infty$ oraz $\|f''\| = \sup\limits_{x\in X} \|f''(x)\| < \infty$ i takich, że f'' jest jednostajnie ciągłe.

W $C_2(X)$ określamy normę: $\|f\|_2 = \|f\|_\infty + \|f'\| + \|f''\|$.

W przypadku, gdy X jest przestrzenią Banacha wymiaru skończonego, to $C_2(X)$ jest podprzestrzenią liniową gęstą w $C_u(X)$. Gdy $\dim X = \infty$, to już w przypadku przestrzeni Hilberta $C_2(X)$ nie jest podprzestrzenią gęstą w $C_u(X)$ [22], tym nie mniej zbiór tych funkcji wyznacza miary na każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha X .

Aby to udowodnić wystarczy rozpatrzeć zbiór funkcji $f \in C_2(X)$

postaci $f = g\circ x^*$, gdzie $g\in C_2(R)$ a $x^*\in X^*$. Jeżeli dla każdej takiej funkcji f mamy równość $\int f\,d\mu = \int f\,d\nu$, to miary na prostej $(x^*\circ\mu)$ i $(x^*\circ\nu)$ są równe, co (z ośrodkowości przestrzeni X) implikuje równość miar μ i ν.

§9. Generatory półgrup gaussowskich na przestrzeniach Banacha.

Rozpoczniemy od definicji operatora lokalnego.

Definicja. Operator A o dziedzinie $D(A)\subset C_u(X)$ działający w $C_u(X)$ jest operatorem lokalnym gdy dla każdego $f\in D(A)$, $f = 0$ w pewnym otoczeniu punktu x pociąga $Af(x) = 0$.

Opiszemy teraz generatory półgrup miar gaussowskich.

Twierdzenie 9.1. Niech $(\mu_t)_{t>0}$ będzie półgrupą symetrycznych miar gaussowskich na ośrodkowej przestrzeni Banacha X, a operator A jej generatorem. Wówczas :

1) $C_2(X)\subset D(A)$

2) dla każdego $f\in C_2(X)$

$$A\,f(x) = \int \frac{1}{2}\, f''(x)(y,y)\,d\mu_1(y)\,,$$ zatem A jest lokalny.

I odwrotnie, gdy $(\mu_t)_{t>0}$ jest ciągłą półgrupą miar na X taką, że dziedzina jej generatora zawiera $C_2(X)$ i dla funkcji z $C_2(X)$ operator ten jest lokalny, to $(\mu_t)_{t>0}$ jest półgrupą miar gaussowskich.

Dowód. Z definicji miary gaussowskiej $\mu_t = \mathcal{L}(t^{1/2}\,Y)$, gdzie Y jest wektorem losowym o rozkładzie μ_1.
Miary μ_t, $t>0$, mają wszystkie momenty, a zatem z ich symetrii wynika, że $\int f'(x)(y)\,d\mu_t(y) \equiv 0$.

Ze wzoru Taylora dla $f \in C_2(X)$:

$$\frac{1}{t}\left[T_t f - f\right] = \int \left[f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\right] d\left(\frac{1}{t}\mu_t\right)(y) =$$

$$= \frac{1}{t}\int \left[f(x+\sqrt{t}y) - f(x) - f'(x)(y)\cdot\sqrt{t}\right] d\mu_1(y) = \frac{1}{2}\int f''(x+\sqrt{t}\cdot\theta_y y)(y,y)\, d\mu_1(y)$$

Z definicji $C_2(X)$ przekształcenie $x \to f''(x)$ jest jednostajnie ciągłe :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\ \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f''(x_1) - f''(x_2)\| < \varepsilon .$$

Oszacujmy różnicę

$$\left| \frac{1}{2}\int_X f''(x+\sqrt{t}\theta_y y)(y,y)\, d\mu_1(y) - \frac{1}{2}\int_X f''(x)(y,y)\, d\mu_1(y)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\int_{\{y:\|\sqrt{t}y\|\leqslant\delta\}} f''(x+\sqrt{t}\theta_y y)(y,y) - f''(x)(y,y)\, d\mu_1(y)\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{2}\int_{\{y:\|\sqrt{t}y\|>\delta\}} f''(x+\sqrt{t}\theta_y y)(y,y) - f''(x)(y,y)\, d\mu_1(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\cdot\varepsilon\int_{\{y:\|\sqrt{t}y\|\leqslant\delta\}} \|y\|^2\, d\mu_1(y) + \int_{\{y:\|\sqrt{t}y\|>\delta\}} \|f''\|\cdot\|y\|^2\, d\mu_1(y)$$

Gdy $t \to 0+$, to $\int_{\{y:\|\sqrt{t}y\|>\delta\}} \|y\|^2\, d\mu_1(y) \longrightarrow 0$, więc powyższa różnica dąży do zera jednostajnie po $x \in X$.

Udowodniliśmy więc, że dla każdego $f \in C_2(X)$

$$Af(x) = \int_X \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d\mu_1(y) .$$

Przypuśćmy teraz, że $(\mu_t)_{t>0}$ jest ciągłą półgrupą miar na X, jej generator A zawiera $C_2(X)$ w swej dziedzinie i jest na $C_2(X)$ operatorem lokalnym. Rozpatrzmy zbiór funkcji $f = g\circ x^*$, gdzie $g \in C_2(R)$ a $x^* \in X^*$. Oczywiście

$g\circ x^* \in C_2(X)$ i generator półgrupy $(\mu_t)_{t>0}$ jest na tym zbiorze operatorem lokalnym. Oznacza to, że generator półgrupy $(x^* \circ \mu_t)_{t>0}$ miar na R jest lokalny, a zatem dla dowolnego $x^* \in X^*$ półgrupa $(x^* \circ \mu_t)_{t>0}$ jest półgrupą miar gaussowskich na prostej [11] . W myśl jednej z równoważnych definicji miary gaussowskiej oznacza to , że miary μ_t , $t > 0$, są gaussowskie.

§10. Reprezentacja generatora półgrupy miar na przestrzeni cotypu 2.

Zajmiemy się teraz zagadnieniem opisu generatorów półgrup miar na przestrzeniach Banacha. Rozwiązaniem analogicznego problemu dla funkcji charakterystycznych jest wzór Lévy'ego - Chinczyna [12], [3] . Okazało się, że jeśli zamiast miar i ich funkcjonałów rozważać półgrupy ciągłe miar i ich generatory, to metody dowodu wzoru Lévy'ego - Chinczyna z pracy [3] można zaadaptować do dowodu analogicznej charakteryzacji dla generatorów. Ponieważ jednak całkowalność funkcji $\min(1, \|x\|^2)$ względem miar Lévy'ego zależy od geometrii przestrzeni Banacha, udało się w ten sposób opisać generatory półgrup tylko na przestrzeniach cotypu 2.

Lematy 10.2 , 10.3 , 10.7 są wzorowane na odpowiednich lematach w [3]. W pracy [3] udowodniono ich ogólniejsze wersje (dla ośrodkowych przestrzeni Banacha) , dla pełności jednak podajemy ich dowody w przestrzeniach cotypu 2 , uzyskane techniką półgrupową. W niektórych przypadkach zastosowanie techniki półgrupowej pozwala znacznie uprościć dowody (np. Lemat 10.7).

Definicja. Przestrzeń Banacha X nazywa się przestrzenią cotypu 2, gdy

$$\exists c>0\ \forall n\in N\ \forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$$
$$E\,\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i r_i\Big\|^2 \geqslant c\cdot\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 ,$$

gdzie $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ oznacza ciąg Rademachera.

Niech $\exp(\Omega)$ będzie uogólnioną miarą Poissona. Zgodnie z terminologią wprowadzoną w pracy [3] miarę Ω będziemy nazywać miarą Lévy'ego.

Miary Lévy'ego na przestrzeni cotypu 2 mają następującą, podstawową w rozważaniach tego rozdziału, własność.

Lemat 10.1. ([5], [16]). Niech X będzie przestrzenią Banacha cotypu 2. Jeżeli $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem skończonych miar Lévy'ego na X takim, że ciąg $(\exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest translacyjnie warunkowo zwarty, to

$$\sup_n \int \min(1\ ,\ \|x\|^2)\,d\Omega_n(x) < +\infty .$$

Przypomnijmy, że jeżeli $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem miar skończonych, $\Omega_n\{0\}=0$, i takim, że $(\exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem translacyjnie warunkowo zwartym, to każdy punkt skupienia tego przesuniętego odpowiednio ciągu nazywamy uogólnioną miarą Poissona. Okazuje się , że na przestrzeniach Banacha można podać konkretny przykład takiego ciągu przesunięć.

Przyjmiemy następujące oznaczenie : dla liczby $\tau>0$ $B_\tau=\{x:\ \|x\|<\tau\}$. Dla miary skończonej Ω niech $x_\tau=\int_{B_\tau} x\,d\Omega(x)$. Gdy Ω jest miarą skończoną a $\tau>0$, zdefiniujmy miarę :

$$c_\tau \exp(\Omega) = \exp(\Omega) * \delta_{-x_\tau}$$

Lemat 10.2. ([3] Corollary 1.5.)
Niech X będzie cotypu 2. Niech $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem miar skończonych. Jeżeli ciąg miar $(c_\tau \exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest translacyjnie warunkowo zwarty to jest warunkowo zwarty. Innymi słowy : jako ciąg przesunięć można wybrać ciąg $x_{\tau,n} = \int_{B_\tau} x \, d\,\Omega_n(x)$.

Dowód. Rozpatrzmy ciąg półgrup $(\exp(t\,\Omega_n) * \delta_{-tx_{\tau,n}})_{t>0}$ $n=1,2,\ldots$. Jak łatwo widać generatorami tych półgrup są odpowiednio operatory A_n , dziedziny których zawierają $C_2(X)$ i dla $f \in C_2(X)$

$$A_n f(x) = \int \left[f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) \cdot \mathbb{1}_{B_\tau}(y) \right] d\,\Omega_n(y) \ .$$

Ponieważ ciąg miar $(c_\tau \exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest translacyjnie warunkowo zwarty, to na mocy Lematu 1.4 dla każdego otoczenia zera U ciąg miar $(\Omega_n | U^c)_{n=1}^{\infty}$ jest warunkowo zwarty.
Dla ustalonego ciągu kul B_{η_i} , $\eta_i \downarrow 0$, $\eta_1 = \tau$, wybierzmy metodą przekątniową taki podciąg $(n')\subset(n)$, aby dla każdego $i \in N$ ciąg miar $(\Omega_{n'} | B_{\eta_i}^c)_{n'}$ był słabo zbieżny.
Pokażemy, że ciąg (A_n) jest ciągiem Cauchy'ego jednostajnie po $x \in X$ i po wszystkich kulach $\{ f \in C_2(X) : \ \|f\|_2 \leq K \}$, $K \in R^+$.
Niech $\varepsilon > 0$ i $\|f\|_2 \leq K$. Weźmy $k, l \in (n')$. Na mocy wzoru Taylora:

$$\begin{aligned}
|(A_k f - A_l f)(x)| \leq & \left| \int_{B_{\eta_i}} \tfrac{1}{2} f''(x+\theta y)(y,y)\, d\,\Omega_k(y) - \int_{B_{\eta_i}} \tfrac{1}{2} f''(x+\theta y)(y,y)\, d\,\Omega_l(y) \right| + \\
& + \left| \int_{B_\tau - B_{\eta_i}} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d\,\Omega_k(y) - \int_{B_\tau - B_{\eta_i}} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d\,\Omega_l(y) \right| + \\
& + \left| \int_{B_\tau^c} f(x+y) - f(x)\, d\,\Omega_k(y) - \int_{B_\tau^c} f(x+y) - f(x)\, d\,\Omega_l(y) \right| .
\end{aligned}$$

Z Lematu 10.1 wynika, że $\lim_{\eta_i \downarrow 0} \sup_n \int_{B_{\eta_i}} \|y\|^2 \, d\,\Omega_n(y) = 0$.
Weźmy η_i tak małe, aby $\int_{B_{\eta_i}} \|y\|^2 \, d\,\Omega_k(y) + \int_{B_{\eta_i}} \|y\|^2 \, d\,\Omega_l(y) \leq \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_2}$.

Ponieważ słaba zbieżność miar $(\Omega_{n'}|B^c_{\eta i})_{n'}$ jest równoważna mocnej zbieżności operatorów przez nie wyznaczonych, wnioskujemy, że dla dostatecznie dużych k,l suma dwóch pozostałych składników jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$ jednostajnie po $x \in X$.
Na mocy elementarnej nierówności ([14] IX §3 Lemat 1) mamy dla $f \in C_2(X)$ oraz $k,l \in (n')$ dostatecznie dużych :

$$\left| \int f \, dc_\tau \exp(\Omega_k) - \int f \, dc_\tau \exp(\Omega_l) \right| \leqslant \varepsilon$$

jednostajnie po $x \in X$ i kulach $\{f : \|f\|_2 \leqslant K\}$.
Ponieważ dla każdego funkcjonału $x^* \in X^*$ funkcje $\cos x^*(x)$ i $\sin x^*(x)$ należą do $C_2(X)$, to ciąg

$$\left(\int [\cos x^*(x) + i \sin x^*(x)] \, d\, c_\tau \exp \Omega_{n'}(x) \right)_{n'}$$

jest zbieżny jednostajnie po wszystkich kulach $\{x^* : \|x^*\| \leqslant K\}$.
Ciąg $(c_\tau \exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest z założenia translacyjnie warunkowo zwarty, dobierzmy zatem ciąg przesunięć $\{\delta_{x_n}\}$ i podciąg zbieżny $(c_\tau \exp(\Omega_k) * \delta_{x_k})_k$, gdzie $(k) \subset (n')$.
Ze słabej zbieżności tego ciągu wynika, że $\left(\int e^{ix^*(x+x_k)} dc_\tau \exp(\Omega_k)(x) \right)_k$ jest ciągiem zbieżnym jednostajnie na kulach $\{x^* : \|x^*\| < K\}$ ([20] str. 171)
Ze zwartości ciągu miar $\left(c_\tau \exp(\Omega_n) * \overline{c_\tau \exp(\Omega_n)} \right)_n$ wnioskujemy, że na pewnej kuli $\{x^* : \|x^*\| < a\}$

$$\inf_k \left| \int [\cos x^*(x) + i \sin x^*(x)] \, d \left[c_\tau \exp(\Omega_k) * \overline{c_\tau \exp(\Omega_k)} \right](x) \right| \geqslant \varepsilon,$$

co implikuje jednostajną zbieżność ciągu $(\exp(i \cdot x^*(x_k)))_k$ na tej kuli, a więc zbieżność (x_k) w normie. To kończy dowód lematu.

Okazuje się, że gdy ciąg $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ jest dodatkowo ciągiem rosnącym, to ciąg $(c_\tau \exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem słabo zbieżnym.

Lemat 10.3. ([3] Thm. 1.6.)
Niech X będzie cotypu 2, a $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem miar skończonych na X, $\Omega_n \nearrow \Omega$ oraz $\Omega_n\{0\} = 0$.
Jeżeli ciąg miar $(c_\tau \exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest translacyjnie warunkowo zwarty to jest on zbieżny.

Dowód. Na mocy Lematu 10.2 ciąg $(c_\tau \exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest warunkowo zwarty. Załóżmy, że miary λ_1 i λ_2 są dwoma punktami skupienia tego ciągu. Ponieważ (przy oznaczeniach poprzedniego lematu) $(A_n f(x))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego jednostajnie po $x \in X$ i po kulach $\{f \in C_2(X) : \|f\|_2 < K\}$, to ciąg $\left(\int f \, d\, c_\tau \exp(\Omega_n)\right)_{n=1}^{\infty}$, dla $f \in C_2(X)$ jest też zbieżny jednostajnie po $x \in X$ i kulach $\{f \in C_2(X) : \|f\|_2 < K\}$, co implikuje równość miar $\lambda_1 = \lambda_2$.

Powyższy lemat pozwala zdefiniować miary Poissona o wykładnikach, których wahanie nie jest skończone.

Definicja. Przy założeniach Lematu 10.3 definiujemy

$$c_\tau \exp(\Omega) = \lim_n c_\tau \exp(\Omega_n).$$

Uwaga 10.1. Jeżeli $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ jest innym ciągiem miar spełniającym założenia Lematu 10.3 i $M_n \nearrow \Omega$, to rozumując tak jak w dowodzie Lematu 10.2 otrzymujemy równość granic :

$$\forall f \in C_2(X) \quad \lim_n \int [f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) \cdot \mathbb{1}_{B_\tau}(y)] \, d\,\Omega_n(y) =$$

$$= \lim_n \int [f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) \cdot \mathbb{1}_{B_\tau}(y)] \, d\,M_n(y),$$

a zatem definicja powyższa nie zależy od wyboru ciągu.

Następny lemat pozwala wyrazić całki z funkcji dwuliniowych względem miary $\exp(M)$ poprzez odpowiednie całki względem miary M.

Lemat 10.4. Niech M będzie symetryczną miarą skończoną o nośniku zawartym w kuli $B_1 = \{x: \|x\| < 1\}$ i taką, że $M\{0\} = 0$. Wówczas dla każdego ciągłego i symetrycznego funkcjonału dwuliniowego $K(\cdot,\cdot)$:

a) $\int K(x,x)\, d\exp(M)(x) = \int K(x,x)\, d(M)x$

b) $\int K^2(x,x)\, d\exp(M)(x) \leqslant \|K\|^2 \left[\int \|x\|^4\, dM(x) + 3\left(\int \|x\|^2\, dM(x)\right)^2\right]$

Uwaga 10.2. Oczywiście możemy rozważać miary M skupione na dowolnym B_τ, $\tau > 0$.

Uwaga 10.3. Jeżeli miara M skupiona jest na B_δ i $\delta < \tau$, to korzystając z własności $K(x,x) = K(-x,-x)$ otrzymujemy :

a) $\int K(x,x)\, d\, c_\tau\exp(M)(x) = \frac{1}{2}\int K(x,x)\, d\exp(M + \overline{M})(x) =$

$= \frac{1}{2}\int K(x,x)\, d(M + \overline{M})(x) = \int K(x,x)\, d\, M(x)$.

b) Ponieważ $\int K^2(x,x)\, d[c_\tau\exp(M) * c_\tau\exp(\overline{M})](x) =$

$= 2\int K^2(x,x)\, d\, c_\tau\exp(M)(x) + 4\int K^2(x,y)\, d\, c_\tau\exp(M)(x)\, d\, c_\tau\exp(\overline{M})(y) +$

$+ 2\int K(x,x)\, d\, c_\tau\exp(M)(x) \cdot \int K(y,y)\, d\, c_\tau\exp(M)(y)$, to

$\int K^2(x,x)\, d\, c_\tau\exp(M)(x) = \frac{1}{2}\int K^2(x,x)\, d\exp(M + \overline{M})(x) +$

$- 2\int K^2(x,y)\, d\, c_\tau\exp(M)(x)\, d\, c_\tau\exp(\overline{M})(y) - \left[\int K(x,x)\, d\, c_\tau\exp(M)(x)\right]^2$

Na mocy części b) Lematu 10.4 otrzymujemy oszacowanie :

$$\int K^2(x,x)\, d\, c_\tau\exp(M)(x) \leqslant \frac{1}{2}\int K^2(x,x)\, d\exp(M + \overline{M})(x) \leqslant$$

$$\leqslant \|K\|^2 \left[\int \|x\|^4\, d(M)(x) + 6\left(\int \|x\|^2\, d(M)(x)\right)^2\right] .$$

Dowód lematu. Niech $t = M(X)$ i niech F będzie taką miarą, że $M = tF$. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie F. Wówczas

$$\int K(x,x)\,d\,F^{*n}(x) = E\,K(X_1+\ldots+X_n,\ X_1+\ldots+X_n) =$$

$$= n\cdot E\,K(X_1,X_1) = n\int K(x,x)\,d\,F(x)\ ,\ \text{bo dla}\quad i\neq j\quad E\,K(X_i,X_j)=0.$$

Stąd wynika równość

$$\int K(x,x)\,d\,\exp(M)(x) = e^{-t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cdot n\cdot\int K(x,x)\,d\,F(x)}{n!} =$$

$$= \int K(x,x)\,d\,M(x)$$ co kończy dowód części a).

Dowodzimy części b). Niech $X_1,\ldots,X_n$ i F będą takie jak wyżej. Wtedy

$$\int K^2(x,x)\,d\,F^{*n}(x) = E\,K^2(X_1+\ldots+X_n,\ X_1+\ldots+X_n) =$$

$$= E\Big[K(X_1,X_1)+\ldots+K(X_n,X_n) + \sum_{i\neq j}K(X_i,X_j)\Big]^2 =$$

$$= E\Big[K^2(X_1,X_1)+\ldots+K^2(X_n,X_n) + \sum_{i\neq j}K^2(X_i,X_j) +$$

$$+ 2\sum_{i\neq j}K(X_i,X_i)\cdot K(X_j,X_j) + \sum_{l=1}^{n}K(X_l,X_l)\cdot\sum_{i\neq j}K(X_i,X_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i\neq j\\(i,j)\neq(l,n)}}\sum_{l\neq n}K(X_i,X_j)\cdot K(X_l,X_n)\Big] =$$

$$= n\cdot E\left[K^2(X_1,X_1)\right] + n(n-1)\,E\left[K^2(X_1,X_2)\right] + 2n(n-1)\,E\left[K(X_1,X_1)\,K(X_2,X_2)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \|K\|^2\Big[n\int\|x\|^4\,dF(x) + 3n(n-1)\int\|x\|^2\,\|y\|^2\,dF(x)\,dF(y)\Big] =$$

$$= \|K\|^2\Big[n\int\|x\|^4\,dF(x) + 3n(n-1)\Big(\int\|x\|^2\,dF(x)\Big)^2\Big].$$

Stąd otrzymujemy oszacowanie :

$$\int K^2(x,x)\,d\,\exp(M)(x) \leqslant e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|K\|^2\cdot t^k\cdot k\int\|x\|^4\,dF(x)}{k!} +$$

$$+ 3\cdot\|K\|^2\cdot e^{-t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\cdot k(k-1)\Big(\int\|x\|^2\,dF(x)\Big)^2}{k!} =$$

$$= \|K\|^2\Big[\int\|x\|^4\,dM(x) + 3\Big(\int\|x\|^2\,dM(x)\Big)^2\Big].$$

Uwaga 10.4. Z dowodu części a) Lematu 10.4 wynika, że dla dowolnej miary skończonej M i dla każdego funkcjonału $x^* \in X^*$ $\int x^*(x)\, d \exp(M)(x) = \int x^*(x)\, d M(x)$.

Wyodrębnimy teraz jako lemat pewne rozumowanie oparte na poprzednich lematach i nierówności Schwarza ; będziemy je wykorzystywali w dalszym ciągu pracy.

Lemat 10.5. Niech X będzie przestrzenią cotypu 2, a $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągiem miar skończonych na X, o nośnikach zawartych w pewnym B_δ, $\Omega_n\{0\} = 0$ dla $n \in N$.
Jeżeli $(c_\tau \exp(\Omega_n))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem miar zbieżnym do miary $c_\tau \exp(\Omega)$, to dla każdego ciągłego i symetrycznego funkcjonału dwuliniowego $K(\cdot,\cdot)$

$$\lim_n \int_{B_\delta} K(x,x)\, d\Omega_n(x) = \int_X K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega)(x) .$$

Dowód. Na mocy Lematu 10.4 dla każdego $n \in N$

$$\int_{B_\delta} K(x,x)\, d\Omega_n(x) = \int_X K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) =$$
$$= \int_{B_r} K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) + \int_{B_r^c} K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) .$$

Korzystając z nierówności Schwarza i jeszcze raz z Lematu 10.4 oszacujemy drugi składnik powyższej sumy.

$$\int_X 1\!\!1_{B_r^c}(x) K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) \leq \sqrt{c_\tau \exp(\Omega_n)(B_r^c)} \cdot \sqrt{\int_X K^2(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x)} \leq$$

$$\leq \sqrt{c_\tau \exp(\Omega_n)(B_r^c)} \cdot \|K\| \cdot \sqrt{\int_{B_\delta} \|x\|^4\, d\Omega_n(x) + 6 \left(\int_{B_\delta} \|x\|^2\, d\Omega_n(x)\right)^2} .$$

Z założenia przestrzeń jest cotypu 2, a zatem na mocy Lematu 10.1

$$\sup_n \delta^2 \cdot \sqrt{\int_{B_\delta} \left\|\frac{x}{\delta}\right\|^4 d\Omega_n(x) + 6 \left(\int_{B_\delta} \left\|\frac{x}{\delta}\right\|^2 d\Omega_n(x)\right)^2} < +\infty .$$

Biorąc r dostatecznie duże i takie, że $B_r=\{x: \|x\|<r\}$ jest zbiorem ciągłości miary $c_\tau \exp(\Omega)$, ze zbieżności ciągu $\left(c_\tau \exp(\Omega_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ otrzymujemy nierówność :

$$\sup_n \left| \int_{B_r^c} K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) \right| < \varepsilon$$

Stąd zaś

$$\lim_n \int_{B_\delta} K(x,x)\, d\,\Omega_n(x) = \int_X K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega)(x)$$

Korzystając z rozumowania opisanego w Lemacie 10.5 można udowodnić analogon Lematu 10.4 dla miar Ω nieskończonych.

Lemat 10.6. Niech Ω będzie miarą Lévy'ego (niekoniecznie skończoną) w przestrzeni Banacha cotypu 2. Załóżmy, że supp $\Omega \subset B_\eta$. Wówczas dla dowolnego funkcjonału liniowego ciągłego $x^* \in X^*$ i dla każdego symetrycznego, ciągłego funkcjonału dwuliniowego $K(\cdot,\cdot)$ oraz dla $\tau > \eta$ zachodzą równości :

a) $\displaystyle\int_X x^*(x)\, dc_\tau \exp(\Omega)(x) = 0$

b) $\displaystyle\int_X K(x,x)\, dc_\tau \exp(\Omega)(x) = \int_{B_\eta} K(x,x)\, d\Omega(x)$.

Dowód. Dowodzimy tylko części a) , dowód b) przebiega analogicznie. Niech $\Omega_n \nearrow \Omega$, Ω_n skończone, skupione na B_η i ciąg $\left(c_\tau \exp(\Omega_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do miary $c_\tau \exp(\Omega)$. Na mocy Uwagi 10.5 zachodzi równość :

$$\int_X x^*(x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) = \int_X x^*(x)\, d\exp(\Omega_n)(x) + \int_X x^*(x)\, d\left(\delta_{-\int_{B_\tau} x\, d\Omega_n(x)}\right) =$$
$$= \int_{B_\eta} x^*(x)\, d\,\Omega_n(x) - x^*\left(\int_{B_\eta} x\, d\,\Omega_n(x)\right) = 0 \quad \text{dla } n=1,2,\ldots.$$

Gdy $n \to \infty$ to stosujemy rozumowanie opisane w Lemacie 10.5 :

$$0 = \int_X x^*(x)\, dc_\tau \exp\Omega_n(x) = \int_{B_r} x^*(x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) + \int_{B_r^c} x^*(x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) .$$

Szacujemy drugi składnik :

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists r>0 \ \exists N_0 \ \forall n>N_0 \quad \left| \int_{B_r^c} x^*(x)\, dc_\tau \exp(\Omega_n)(x) \right| < \varepsilon \ ,$$

a zatem $\int_X x^*(x)\, dc_\tau \exp(\Omega)(x) = 0$.

Udowodnimy teraz lemat , który będzie jednym z kroków dowodu głównego twierdzenia.

Lemat 10.7. ([3] Corollary 1.11.)
Niech $(\mu_t)_{t>0}$ będzie ciągłą półgrupą miar na przestrzeni Banacha cotypu 2. Wówczas dla dowolnego $\tau>0$ ciąg wektorów $\left(\int_{B_\tau} x \, d(n\mu_{1/n})(x) \right)_{n=1}^{\infty}$ jest warunkowo zwarty.

Dowód. Ustalmy $\tau>0$. W dowodzie Twierdzenia 2.1 pokazaliśmy, że ciąg miar $\left(\exp(n\mu_{1/n})\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do miary μ_1. Na mocy Lematu 10.2 ciąg miar

$$c_\tau \exp(n\mu_{1/n}) = \exp(n\mu_{1/n}) * \delta_{-\int_{B_\tau} x \, d(n\mu_{1/n})(x)} \quad n=1,2,..$$

jest warunkowo zwarty, a zatem z równości

$$c_\tau \exp(n\mu_{1/n}) * \delta_{\int_{B_\tau} x \, d(n\mu_{1/n})(x)} = \exp(n\mu_{1/n})$$

wynika warunkowa zwartość ciągu $\left(\int_{B_\tau} x \, d(n\mu_{1/n})(x) \right)_{n=1}^{\infty}$ (Lemat 1.3).

Możemy teraz sformułować i udowodnić główny wynik tego rozdziału - twierdzenie o reprezentacji generatora ciągłej półgrupy miar na przestrzeni Banacha cotypu 2.

Twierdzenie 10.1. Niech $(\mu_t)_{t>0}$ będzie ciągłą półgrupą miar probabilistycznych na ośrodkowej przestrzeni Banacha cotypu 2. Niech A oznacza jej generator. Wówczas :

1) $C_2(X) \subset D(A)$

2) Istnieją

a) miara Lévy'ego Ω na X taka, że $\Omega\{0\} = 0$ i dla dowolnego otoczenia zera U takiego, że $\Omega(\partial U) = 0$

$$(\Omega | U^c) = \lim_n (n\mu_{1/n} | U^c)$$

oraz $\int \min(1, \|x\|^2)\, d\Omega(x) < +\infty$

b) miara γ na X, $\gamma = \lim_{\eta_i} \lim_n c_\tau \exp(n\mu_{1/n} | B_{\eta_i})$ dla pewnego ciągu $\eta_i \searrow 0$ i taka, że dla każdego symetrycznego i ciągłego funkcjonału dwuliniowego $K(x,y)$ istnieje całka $\int K(x,x)\, d\gamma(x)$,

c) dla każdego $\tau > 0$ istnieje granica w normie

$$z_\tau = \lim_n \int_{B_\tau} x \cdot d(n\mu_{1/n})(x) ,$$

takie, że dla dowolnej $f \in C_2(X)$ i ustalonego $\tau > 0$

$$Af(x) = f'(x)(z_\tau) + \frac{1}{2}\int_X f''(x)(y,y)\, d\gamma(y) + \int_X f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\mathbb{1}_{B_\tau}(y)\, d\Omega(y).$$

Dla ustalonego $\tau > 0$ półgrupa $(\mu_t)_{t>0}$ wyznacza miarę Ω, wektor z_τ i operator $\frac{1}{2}\int_X f''(x)(y,y)\, d\gamma(y)$ jednoznacznie.

Dowód. Jak pokazaliśmy w dowodzie Twierdzenia 2.1 dla każdego $s > 0$ ciąg $(\exp(s \cdot n\mu_{1/n}))_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do miary μ_s. Na mocy Lematu 1.4 rodzina miar $(n\mu_{1/n} | U^c)_{n=1}^{\infty}$ jest więc warunkowo zwarta dla dowolnego otoczenia zera U. Ustalmy $\tau > 0$ i wybierzmy ciąg $\eta_i \searrow 0$, $\eta_1 = \tau$.
Istnieją wówczas : σ-skończona miara Ω na $B(X)$, $\Omega\{0\} = 0$, i podciąg $(n') \subset (n)$ taki, że dla każdego B_{η_i} ciąg miar $(n'\mu_{1/n'} | B^c_{\eta_i})_{n'}$ jest słabo zbieżny do miary $(\Omega | B^c_{\eta_i})$.
Niech $f \in C_2(X)$. Napiszmy równość :

$$(*) \int_X f(x+y) - f(x)\, d(n\mu_{1/n})(y) = \int_{B_\tau} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d(n\mu_{1/n})(y) +$$
$$+ \int_{B_\tau} f'(x)(y)\, d(n\mu_{1/n})(y) + \int_{B^c_\tau} f(x+y) - f(x)\, d(n\mu_{1/n})(y).$$

Pokażemy, że dla pewnego podciągu $(n')\subset(n)$ istnieją granice wszystkich trzech składników prawej strony równości $(*)$, jednostajnie po $x\in X$. Na mocy Lematu 1.2 oznacza to, że $C_2(X)\subset D(A)$.

1) Szacujemy składnik trzeci.

Słaba zbieżność miar jest równoważna mocnej zbieżności na $C_u(X)$ odpowiadających im operatorów, istnieje więc granica

$$\lim_{n'} \int_{B_\tau^c} f(x+y)-f(x)\, d(n'\mu_{1/n'})(y) = \int_{B_\tau^c} f(x+y)-f(x)\, d\,\Omega(y),$$

jednostajnie po $x\in X$.

2) Składnik drugi.

Z Lematu 10.7 wnioskujemy, że dla pewnego podciągu $(n'_k)\subset(n')$ istnieje granica $z_\tau = \lim_{n'_k} \int_{B_\tau} x\, d(n'_k\mu_{1/n'_k})(x)$, a zatem

$$\lim_{n'_k} \int_{B_\tau} f'(x)(y)\, d(n'_k\mu_{1/n'_k})(y) = f'(x)(z_\tau)$$ jednostajnie po $x\in X$.

3) Składnik pierwszy.

W celu uproszczenia oznaczeń wybrany uprzednio podciąg (n'_k) oznaczać będziemy przez (n).

Na mocy rozumowania opisanego w dowodzie Twierdzenia 2.1 dokonujemy rozkładu generatora A_n półgrupy $\left(\exp(s\, n\mu_{1/n})\right)_{s>0}$ na sumę $A^{(1)}_{n,i} + A^{(2)}_{n,i}$ generatorów półgrup $\left(\exp(s\, n\mu_{1/n}|B_{\eta_i})\right)_{s>0}$ oraz $\left(\exp(s\, n\mu_{1/n}|B^c_{\eta_i})\right)_{s>0}$.

Ponieważ istnieje granica $\lim_n (n\mu_{1/n}|B^c_{\eta_i}) = (\Omega|B^c_{\eta_i})$ i miara $(\Omega|B^c_{\eta_i})$ jest skończona, to operator $A^{(2)}_i = \lim_n A^{(2)}_{n,i}$ jest operatorem ograniczonym. Dla $f\in D(A)$ istnieje więc granica $\lim_n A^{(1)}_{n,i} = A^{(1)}_i$. Zbieżność generatorów implikuje zbieżność odpowiednich półgrup, więc z równości :

$$c_\tau \exp(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}) * c_\tau \exp(n\mu_{1/n}|B^c_{\eta_i}) = c_\tau \exp(n\mu_{1/n}),$$

na mocy Lematu 10.7 , wynika istnienie granic

$\lim_n c_\tau \exp(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}) = \gamma_{\eta_i}$ oraz $\lim_n c_\tau \exp(n\mu_{1/n}|B^c_{\eta_i}) = c_\tau \exp(\Omega|B^c_{\eta_i})$.

Dla $i = 1,2,\ldots$ zachodzi więc równość

$$\gamma_{\eta_i} * c_\tau \exp(\Omega|B^c_{\eta_i}) = \mu_1 * \delta_{z_\tau} .$$

Z powyższej równości, na mocy Lematów 1.3 i 10.3 , wynika istnienie granicy $\lim_i c_\tau \exp(\Omega|B^c_{\eta_i}) = c_\tau \exp(\Omega)$ oraz podciągu $(i') \subset (i)$ takiego, że $\lim_{i'} \gamma_{\eta_{i'}} = \gamma$. Z ciągłości splotu $\gamma * c_\tau \exp(\Omega) = \mu_1 * \delta_{z_\tau}$.

Dla $j > i$ rozpatrzmy równość :

$$\gamma_{\eta_j} * c_\tau \exp(\Omega|B^c_{\eta_j} \cap B_{\eta_i}) * c_\tau \exp(\Omega|B^c_{\eta_i}) = \gamma_{\eta_i} * c_\tau \exp(\Omega|B^c_{\eta_i}) .$$

Obie jej strony wyznaczają pewien rozkład generatora A ; lewa strona odpowiada rozkładowi $A = A^{(2)}_j + B_{j,i} + A^{(1)}_i$, natomiast prawa - rozkładowi $A = A^{(2)}_i + A^{(1)}_i$.

Ponieważ generator $A^{(1)}_i$ jest operatorem ograniczonym, to możemy go odjąć, co prowadzi do równania $A^{(2)}_j + B_{j,i} = A^{(2)}_i$.

Wynika stąd równość miar

$$\forall\, j > i \qquad \gamma_{\eta_j} * c_\tau \exp(\Omega|B^c_{\eta_j} \cap B_{\eta_i}) = \gamma_{\eta_i} .$$

Przechodząc z $j \in (i')$ do granicy otrzymujemy równość

$$(\mathrm{I}) \qquad \gamma * c_\tau \exp(\Omega|B_{\eta_i}) = \gamma_{\eta_i} .$$

Ponieważ $f \in C_2(X)$, to możemy napisać równość :

$$\int_{B_\tau} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d(n\mu_{1/n})(y) =$$

$$= \int_{B_{\eta_i}} \left[f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) - \frac{1}{2} f''(x)(y,y) \right] d(n\mu_{1/n})(y) +$$

$$+ \int_{B_{\eta_i}} \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d(n\mu_{1/n})(y) + \int_{B_\tau - B_{\eta_i}} \left[f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) \right] d(n\mu_{1/n})(y) .$$

Znów oszacujemy kolejno trzy powyższe składniki.

1) Ze wzoru Taylora dla $f \in C_2(X)$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall \|y\| < r \qquad \left| f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) - \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y) \right| \leqslant \varepsilon \|y\|^2 ,$$

niezależnie od $x \in X$. Zatem

$$\lim_{\eta_i} \lim_{n} \left| \int_{B_{\eta_i}} \left[f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) - \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y) \right] d(n\mu_{1/n})(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \sup_n \int_{B_\tau} \|y\|^2 \, d(n\mu_{1/n})(y)$$ i , na mocy Lematu 10.1,

$$\lim_{\eta_i} \lim_{n} \int_{B_{\eta_i}} \left[f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) - \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y) \right] d(n\mu_{1/n})(y) = 0 ,$$

jednostajnie po $x \in X$.

2) Z Lematu 10.1 wynika, że $\sup_n \int_{B_\tau} \left| \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y) \right| d(n\mu_{1/n})(y) < +\infty$.

Korzystamy z Lematu 10.4 i stosujemy rozumowanie opisane w Lemacie 10.5.

$$\lim_n \int_{B_{\eta_i}} \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d(n\mu_{1/n})(y) = \lim_n \int_X \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y)\, dc_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)(y) =$$

$$= \lim_n \left[\int_{B_r} \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y)\, dc_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)(y) + \int_{B_r^c} \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y)\, dc_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)(y) \right] =$$

$$= \int_X \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d\gamma_{\eta_i}(y)$$, co wynika ze zbieżności ciągu

$\left(c_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)\right)_n$ do miary γ_{η_i} i z oszacowania :

$$\left| \int_{B_r^c} \tfrac{1}{2} f''(x)(y,y)\, dc_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{c_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)(B_r^c)} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{4} \int_X \left[f''(x)(y,y)\right]^2 dc_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)(y)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{c_\tau \exp\left(n\mu_{1/n}|B_{\eta_i}\right)(B_r^c)} \cdot \tfrac{1}{2} \|f''\| \sqrt{\int_{B_\tau} \|y\|^4 \, d(n\mu_{1/n})(y) + 6\left(\int_{B_\tau} \|y\|^2 \, d(n\mu_{1/n})(y)\right)^2}$$

Pierwszy z powyższych czynników dąży do zera gdy r dąży do nieskończoności, a drugi jest ograniczony, bo przestrzeń jest cotypu 2.

Z równości (I) i z Lematu 10.6 a) wynika, że

$$\lim_{\eta_{i'}} \int_X \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d\gamma_{\eta_{i'}}(y) =$$

$$\lim_{\eta_{i'}} \left[\int_X \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d\gamma(y) + \int_X \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, dc_{\tau} \exp(\Omega | B_{\eta_{i'}})(y) \right].$$

Na mocy Lematu 10.6 b) i Lematu 10.1

$$\lim_{\eta_{i'}} \left| \int_X \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, dc_{\tau} \exp(\Omega | B_{\eta_{i'}})(y) \right| \leqslant \lim_{\eta_{i'}} \int_{B_{\eta_{i'}}} \frac{1}{2} \|f''\| \cdot \|y\|^2\, d\Omega(y) = 0$$

(bo miara $\|y\|^2 \Omega(dy)$ jest miarą skończoną), jednostajnie po $x \in X$. Mamy zatem równość :

$$\lim_{\eta_{i'}} \lim_{n} \int_{B_{\eta_{i'}}} \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d(n\mu_{1/n})(y) = \int_X \frac{1}{2} f''(x)(y,y)\, d\gamma(y).$$

3) Ponieważ $\sup_n \int_{B_\tau} |f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)|\, d(n\mu_{1/n})(y) \leqslant$

$\leqslant K \cdot \sup_n \int_{B_\tau} \|y\|^2\, d(n\mu_{1/n})(y) < +\infty$, a zatem istnieje całka

$\int_{B_\tau} [f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)]\, d\Omega(y)$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$.

$$\left| \int_{B_\tau} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d\Omega(y) - \int_{B_\tau - B_{\eta_i}} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d(n\mu_{1/n})(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{B_\tau - B_{\eta_i}} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d\Omega(y) - \int_{B_\tau - B_{\eta_i}} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d(n\mu_{1/n})(y) \right| +$$

$$+ \quad K \int_{B_{\eta_i}} \|y\|^2\, d\Omega(y) .$$

Gdy η_i jest dostatecznie małe, to $K \cdot \int_{B_{\eta_i}} \|y\|^2\, d\Omega(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Słaba zbieżność ciągu $(n\mu_{1/n} | B^c_{\eta_i})$ do miary $(\Omega | B^c_{\eta_i})$ implikuje mocną zbieżność odpowiadających tym miarom operatorów, zatem dla dostatecznie dużych n pierwszy składnik powyższej sumy też jest mniejszy od $\frac{\varepsilon}{2}$, jednostajnie po $x \in X$.

Ostatecznie

$$\lim_{\eta_i} \lim_{n} \int_{B_\tau} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d(n\mu_{1/n})(y) =$$

$$= \int_{B_\tau} f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)\, d\Omega(y) \text{ , jednostajnie po } x \in X .$$

Otrzymaliśmy reprezentację : dla $f \in C_2(X)$

$$Af(x) = f'(x)(z_\tau) + \frac{1}{2}\int_X f''(x)(y,y)\,d\gamma(y) + \int_X \left[f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)1\!\!1_{B_\tau}(y)\right] d\Omega(y),$$

gdzie z_τ, Ω i γ mają własności opisane w tezie twierdzenia.

Operator $\frac{1}{2}\int_X f''(x)(y,y)\,d\gamma(y)$ jest operatorem lokalnym, a zatem z Twierdzenia 9.1 wynika, że jest on generatorem „części gaussowskiej" półgrupy $(\mu_t)_{t>0}$. Co więcej, półgrupa ta jest symetryczna. Aby to pokazać, rozważmy funkcje $f \in C_2(X)$ postaci $f = g \circ x^*$, gdzie $g \in C_2(R)$, a $x^* \in X^*$. Dla takich funkcji $\frac{1}{2} f''(x)(y,y) = \frac{1}{2} g''(x^*(x)) \cdot [x^*(y)]^2$, a zatem dla każdego $x^* \in X^*$ część gaussowska półgrupy miar na prostej $(x^* \circ \mu_t)_{t>0}$ jest półgrupą symetrycznych miar gaussowskich [14]. Z faktu tego wynika, że $\frac{1}{2}\int_X f''(x)(y,y)\,d\gamma(y)$ jest generatorem półgrupy symetrycznych miar gaussowskich i jest wyznaczony przez półgrupę $(\mu_t)_{t>0}$ w sposób jednoznaczny. W ten sam sposób pokazujemy, że półgrupa $(\mu_t)_{t>0}$ wyznacza wektor z_τ, dla ustalonego $\tau > 0$, w sposób jednoznaczny.

Rozważmy przekształcenie liniowe $\pi : X \to R^n$. Ponieważ dla każdego takiego π półgrupa $(\pi \circ \mu_t)_{t>0}$ miar na R^n wyznacza swoją miarę Lévy'ego jednoznacznie [11], to miara Ω też wyznaczona jest jednoznacznie.

Z jednoznaczności reprezentacji wynika, że istnieją granice :

1) $z_\tau = \lim\limits_n \int_{B_\tau} x \, d(n\mu_{1/n})(x)$

2) $(\Omega | U^c) = \lim\limits_n (n\mu_{1/n} | U^c)$ dla tych U, dla których $\Omega(\partial U) = 0$

3) $\gamma = \lim\limits_{\eta_i} \lim\limits_n c_\tau \exp(n\mu_{1/n} | B_{\eta_i})$

gdzie (n) jest ciągiem wszystkich liczb naturalnych, a $\eta_i \searrow 0$ jest ciągiem takim, że $\Omega(\partial B_{\eta_i}) = 0$.

PRACE CYTOWANE

[1] de Acosta, A. (1975) Stable measures and seminorms. Ann. Probability 3 865-875

[2] de Acosta, A. (1977) Asymptotic behavior of stable measures. Ann. Probability 5 495-499

[3] de Acosta. A., Araujo, A. and Giné, E. (1978) On Poisson measures, Gaussian measures and the Central Limit Theorem in Banach spaces. Prob. on Banach sp. J. Kuelbs, Ed. Adv. in Prob., Vol.4 M. Dekker, N.Y.

[4] Araujo, A. (1978) On the Central Limit Theorem in Banach spaces. Journal of Mult. Analysis Vol. 8, No.4 598-613

[5] Araujo, A, and Giné, E. Type, cotype and Lévy measures in Banach spaces Ann. Probability 6 No. 4 637-643 (1978)

[6] Böge, W. (1964) Zur Charakterisirung sukzessiv unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf lokalkompakten Gruppen. Z. Wahr. verw. Gebiete 2 380-394.

[7] Byczkowski, T. (1976) The invariance principle for group-valued random variables Studia Math. 56 187-198.

[8] Byczkowski, T. i Inglot, T. (1981) The invariance principle for vector-valued random variables with applications to functional random limit theorems. Lecture Notes in Stat. 8 30-41

[9] Byczkowski, T. i Żak, T. (1980) On the integrability of Gaussian random vectors. Probab. Theory on Vector Spaces, Błażejewko, Lecture Notes in Math. 828 21-29

[10] Byczkowski, T. and Żak, T. (1981) Asymptotic properties of semigroups of measures on vector spaces. Ann.Probability 9 211-220

[11] Courregé, Ph. Generateúr infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur R^n et formule de Lèvy-Khinchine. Bull.Sc. Math. 88 $2^{\acute{e}me}$ serie 3-30 (1964)

[12] Dettweiler, E. (1976) Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeitsmasse auf Badrikianschen Räumen Z.Wahr. verw. Gebiete 34 285-311

[13] Dunford, N. and Schwartz, J. Linear Operators, PartI Interscience Publishers, N.Y.,London,(1958)

[14] Feller, W. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, Tom II, PWN Warszawa (1978).

[15] Fernique, X. (1971) Integrabilite des vecteurs Gaussiens. C.R.Acad.Sci.Paris Ser.A 270 1698-1699

[16] Hamedani, G. and Mandrekar, V. (1980) Lévy-Khinchine representation and Banach spaces of type and cotype. Studia Math. 66 299-306

[17] Hoffman-Jorgensen, J. (1974) Sums of independent Banach space valued random variables. Studia Math. 52 159-186

[18] Inglot, T. (1980) Convergence of two-sample empirical processes. Probab. Theory on Vector Spaces, Błażejewko, Lecture Notes in Math. 828

[19] Kahane, J.P. (1968) Some Random Series of Functions. D.C.Heath and Comp. Lexington, Massachusetts

[20] Parthasarathy, K.R. Probability Measures on Metric Spaces. Academic Press N.Y. 1967

[21] Rolewicz, S. Metric Linear Spaes. Monografie Matematyczne 56, Warszawa, 1972.

[22] Samur, J. On semigroups of convolution operators in Hilbert space (preprint) (1980)

[23] Siebert, E. (1974) Einbettung unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsmasse auf topologischen Gruppen . Z. Wahr. verw. Gebiete 28 227-247

[24] Siebert, E. (1976) Convergence and convolutions of probability measures on a topological group. Ann.Probability 4 433-443

[25] Tortrat, A. (1965) Lois de probabilité sur un espace topologique complèment régulier et produits infinis à termes indépendants dans un groupe topologique. Ann.Inst.Henri Poincare, Section B, 1 217-237

[26] Tortrat, A. (1967) Structure des lois indefiniment divisible dans un espace vectoriel topologique (separe) X. Lecture Notes in Math. 31 299-328

[27] Żak, T. A representation of infinitesimal operators of semigroups of measures on Banach spaces of cotype 2 (1982) (preprint)