

Na prawach rękopisu

INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI  
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ  
Raport nr I28/PRE-044/80

Filtry dolnoprzepustowe o wypukłej  
charakterystyce tłumieniowej w pas-  
mie przepustowym

Czesław Michalik

Słowa kluczowe:

filtr dolnoprzepustowy,  
aproksymacja

Wrocław 1980

mgr inż. Czesław Michalik  
Instytut Telekomunikacji i Akustyki  
Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław, ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Raport wpłynął do redakcji 3.04.1980 r.

Wyrażam swoją wdzięczność  
Profesorowi Marienowi Piekarskiemu  
za trud prowadzenia tej pracy,  
konstruktywne uwagi i  
troskliwą opiekę.

SPIS RZECZY

1. Wstęp .....	7
1.1. Uwagi historyczne .....	7
1.2. Idealny filtr dolnoprzepustowy .....	9
1.3. Cel pracy .....	15
1.4. Przegląd treści pracy .....	19
2. Procedura projektowania filtra .....	21
2.1. Wstęp .....	21
2.2. Definicje .....	21
2.3. Związki dotyczące czwórnika bezstratnego SLS ..	25
2.4. Procedura syntezy filtra .....	26
3. Aproksymacja idealnej charakterystyki amplitudowej filtru dolnoprzepustowego .....	30
3.1. Wstęp .....	30
3.2. Kryterium Taylora .....	34
3.3. Kryterium Gaussa (kryterium średniokwadratowe) .	42
3.4. Kryterium Czebyszewa .....	53
3.5. Kryterium Papoulisa .....	66
3.6. Wnioski .....	72
4. Filtry wypukłe i-tego rzędu .....	75
4.1. Sformułowanie problemów .....	75
4.2. Ogólna postać poszukiwanych wielomianów .....	76
4.3. Jednoznaczność rozwiązania .....	86
5. Filtry wypukłe i-tego rzędu o maksymalnym nachyleniu charakterystyki tłumieniowej przy wybranej często- tliwości pasma zaporowego (problem A) .....	88

5.1. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem A1 - filtry $W_{A1}^i$ ) .....	88
5.2. Wnioski .....	92
5.3. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem A2 - filtry $W_{A2}^O$ ) .....	102
5.4. Wnioski .....	107
6. Filtry wypukłe i-tego rzędu o ekstremalnej wartości tłumienia przy wybranej częstotliwości (problem B) ..	116
6.1. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (filtry $W_B^i$ ) .....	116
6.2. Wnioski .....	118
7. Filtry wypukłe i-tego rzędu o ekstremalnych właści- wościach energetycznych (problem C) .....	125
7.1. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem C1 - filtry $W_{C1}^i$ ) .....	125
7.2. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem C2 - filtry $W_{C2}^O$ ) .....	126
7.3. Wnioski .....	129
8. Ekstremalizacja form kwadratowych jako narzędzie do rozwiązania pewnej klasy problemów aproksymacji .....	135
9. Podsumowanie .....	141
10. Literatura .....	143
Dodatek .....	150

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SKRÓTÓW I OZNACZEŃ

- A - tłumienie (w decybelach),
- $e(s)$  - wielomian licznika  $H(s)$ ,
- $f(s)$  - wielomian licznika  $\varphi(s)$ ,
- $H(s)$  - transmitancja,
- IAR - idealna charakterystyka amplitudowa  
filtru dolnoprzepustowego,
- PP - pasmo przepustowe,
- PZ - pasmo zaporowe,
- SP - strefa przejściowa,
- $T_g$  - grupowe opóźnienie,
- $s$  - częstotliwość zespolona,
- $\omega$  - częstotliwość znormalizowana,
- $\varphi(s)$  - funkcja charakterystyczna,
- $K(s)$  - transmitancja,
- $p(s)$  - wielomian licznika  $K(s)$ ,
- $g(t)$  - odpowiedź jednostkowa filtru,
- $\operatorname{sn}(x)$  - sinus eliptyczny,
- K - zupełna całka eliptyczna przy module  $k$ .

## 1. WSTĘP

### 1.1. Uwagi historyczne

Filtrem elektrycznym nazywa się układ, który najogólniej mówiąc zmienia kształt widma amplitudowego i fazowego sygnału. Jest to najczęściej układ selektywny, który przenosi z możliwie małym tłumieniem określone fragmenty widma a tłumi inne.

Teoria filtrów ma swój początek w 1915 roku, wówczas to, niezależnie od siebie, Campbell z USA i Wagner z Niemiec wysunęli koncepcję pasywnych elektrycznych filtrów falowych. Teoria ta rozwinęła się zasadniczo w dwóch niezależnych kierunkach, klasycznej teorii filtrów (classical filter theory) i współczesnej teorii filtrów (modern filter theory).

Klasyczna teoria filtrów została zapoczątkowana w 1920 roku przez Campbella, Zobela i innych. Koncentrowała się ona na projektowaniu pasywnych filtrów skupionych z użyciem metod opartych na pojęciu parametrów falowych (image-parameters). W metodach tych wykorzystuje się właściwości impedancji oraz tamowności charakterystycznych pewnych podstawowych układów (elementarnych sekcji, ogniw). Układ będący kaskadowym połączeniem elementarnych sekcji ma wypadkową tamowność charakterystyczną równą sumie tamowności charakterystycznych składowych ogniw, przy założeniu, że ogniwa te są dopasowane do siebie w miejscach połączenia. Dzięki temu można w stosunkowo prosty sposób otrzymać układy filtrów, które w przybliżeniu spełniają stawiane im wymagania. Aby uzyskać żadaną charakterystykę tłumieniową wymagane jest obciążenie filtru jego impedancją falową (zależną od  $\omega$ ). Jest to zasadnicza wada tego typu filtrów, gdyż w większości praktycznych przypadków obciążeniami

filtrów są rezystancje. Chcąc otrzymać określone charakterystyki tłumieniowe filtru falowego obciążonego rezystancją konieczne jest stosowanie różnego typu układów korekcyjnych i dopasowujących. Zwiększa to liczbę elementów i koszt wykonania filtru. Ponadto w pewnych krytycznych przypadkach w ogóle nie jest możliwe otrzymanie fizycznej struktury filtru falowego.

Współczesna teoria filtrów została zapoczątkowana w 1930 roku przez Cauera, Darlingtona oraz Piloty'ego i jest skuteczniejsza niż klasyczna teoria filtrów. Metody projektowe oferowane przez tę teorię, opierają się na pojęciu parametrów roboczych, takich jak wzmocnienie bądź tłumienie skuteczne. Zasadniczo w teorii tej można wyróżnić dwa etapy:

1. aproksymacja, tj. otrzymanie wyrażenia matematycznego częstotliwościowej zależności wzmocnienia bądź tłumienia w postaci funkcji, która spełnia tzw. warunki fizycznej realizowalności,
2. realizacja, tj. przedstawienie tego wyrażenia w postaci idealizowanego układu elektrycznego.

W teorii tej problemy aproksymacji i realizacji mogą być rozwiązywane oddzielnie w optymalny i dokładny sposób.

Proces rozwoju współczesnej teorii filtrów przebiegał początkowo wolno, gdyż głównym jej ograniczeniem jest złożoność obliczeń. Został on jednak później znacznie przyspieszony w związku z rozwojem elektronicznej techniki obliczeniowej (ETO).

Filtry elektryczne można sklasyfikować na różne sposoby. Na przykład, w zależności od struktury sygnałów przenoszonych: na filtry analogowe (sygnały ciągłe w czasie) oraz na filtry cyfrowe (sygnały skwantowane w czasie), w zależności od zakresu częstotliwości: na filtry o parametrach skupionych oraz o parametrach roz-



łożonych, w zależności od użytych elementów: na filtry pasywne i aktywne itd.

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych najbardziej rozwinięto projektowanie (syntezę) układów SLSS (skupionych, liniowych, skończonych i stacjonarnych), opisanych w dziedzinie częstotliwości, a zwłaszcza projektowanie układów SLSSPO (SLSS pasywnych i odwracalnych).

Niniejsza praca dotyczy zagadnień aproksymacji charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej idealnego filtra dolnoprzepustowego SLSS z jednym wejściem i jednym wyjściem.

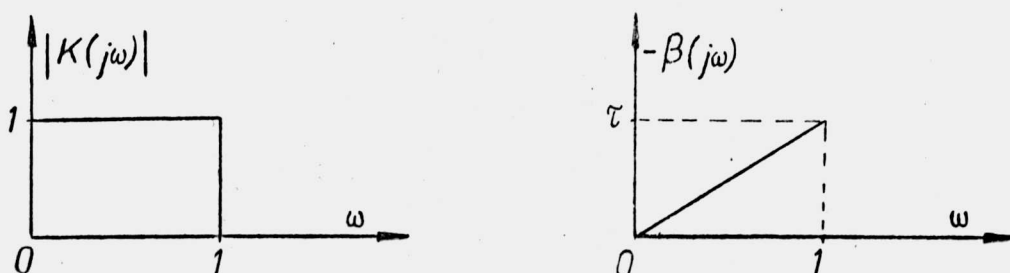
### 1.2. Idealny filtr dolnoprzepustowy

Układem wyjściowym przy projektowaniu filtrów jest idealny filtr dolnoprzepustowy o znormalizowanej funkcji transmitancji postaci:

$$K(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad \text{dla } 0 \leq \omega \leq 1,$$

$$K(j\omega) = 0 \quad \text{dla } \omega > 1.$$

Oznacza to, że w zakresie częstotliwości od zera do częstotliwości granicznej  $\omega = 1$  moduł funkcji transmitancji jest stały i równa się jedności, a charakterystyka fazowa jest liniowa. Poza przedziałem pasma przepustowego moduł funkcji transmitancji równa się zero (rys. 1.1).



Rys. 1.1 Charakterystyka amplitudowa i fazowa filtra idealnego.

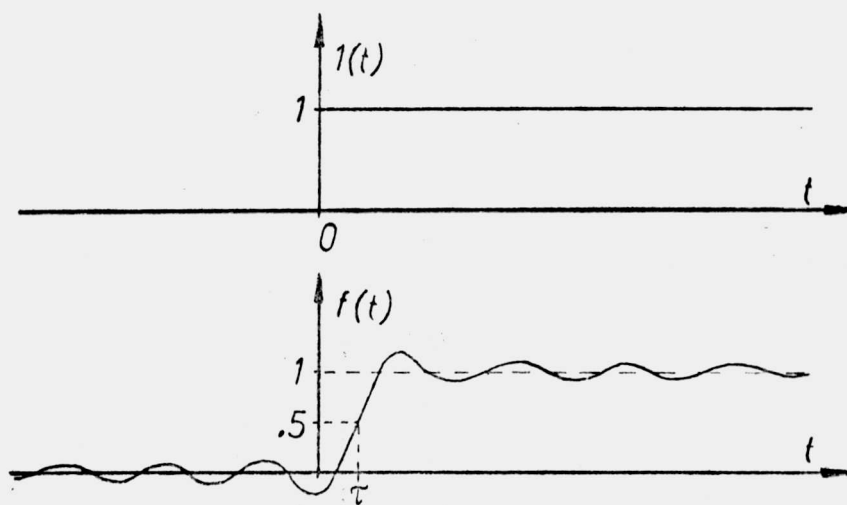
Jeśli na wejście filtra o takich charakterystykach poda się pobudzenie będące skokiem jednostkowym  $1(t)$ , zdefiniowanym jako

$$1(t) = \begin{cases} 1 & ; t > 0, \\ 0 & ; t < 0, \end{cases}$$

to reakcja filtra będzie miała postać

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \omega(t-\tau)}{\omega} d\omega.$$

Wykresy funkcji pobudzenia i reakcji pokazano na rys. 1.2.



Rys. 1.2 Wykresy funkcji pobudzenia i reakcji idealnego filtra dolnoprzepustowego.

Z wykresów tych wynika, że reakcja powstaje wcześniej niż przyłożone pobudzenie. Stąd wniosek, że jednoczesne zagwarantowanie w jednym obwodzie idealnej charakterystyki amplitudowej i fazowej jest niemożliwe. Na to, aby reakcja powstawała po wymuszeniu, filtr z idealną charakterystyką amplitudową powinien mieć

nieskończenie wielkie opóźnienie  $\tau$ , gdyż przy skończonym opóźnieniu, co odpowiada liniowej charakterystyce częstotliwościowej fazy, występuje opisany paradoks. Badając głębiej ten problem powstaje pytanie: czy jest możliwa realizacja idealnej charakterystyki amplitudowej, jeśli dopuści się nieliniowość charakterystyki fazy?

Odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie Paley'a-Wienera [47], w którym sformułowano kryteria fizycznej realizowalności układu z zadaniem modułem funkcji transmitancji  $K(j\omega)$ . Dla fizycznej realizowalności powinien być spełniony warunek

$$\int_0^{\infty} \frac{|\ln |K(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty.$$

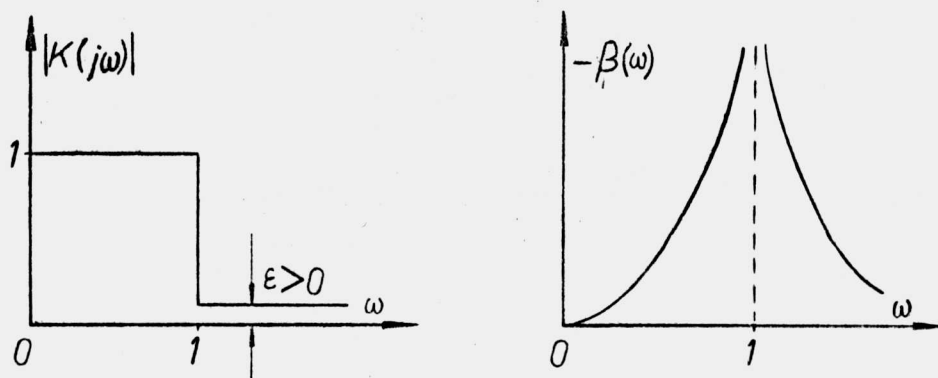
Jeśli powyższa całka jest skończona, to istnieje taka charakterystyka fazowa, przy której odpowiedź układu dla  $t < 0$  na pobudzenie impulsowe jest równa zero.

Zastosowanie kryterium Paley'a-Wienera do idealnej charakterystyki amplitudowej filtra dolnoprzepustowego (IAR<sup>1)</sup>) pokazuje, że w paśmie zaporowym wyrażenie podcałkowe jest nieskończenie wielkie, a zatem nie spełnione są warunki fizycznej realizowalności. Wystarczy jednak założyć, że charakterystyka amplitudowa ma przebieg taki jak pokazano na rys. 1.3, tzn. w paśmie przepustowym zachowuje się jak IAR, natomiast w paśmie zaporowym przyjmuje dowolnie

---

<sup>1)</sup> W dalszej części pracy skrót IAR należy czytać jako idealna charakterystyka amplitudowa filtra dolnoprzepustowego (z ang. Ideal Amplitude Response of low-pass filter).

małą wartość, nie równą zeru, to wówczas spełnia ona warunki fizycznej realizowalności.



Rys. 1.3 Charakterystyka amplitudowa z niezerową wartością tłumienia w paśmie zaporowym i odpowiadająca jej charakterystyka fazowa.

Jeśli zadana funkcja  $K(j\omega)$  jest fizycznie realizowalna, to ważne jest znalezienie odpowiadającej jej charakterystyki fazowej. Problem ten nie ma jednoznacznego rozwiązania, ponieważ taką samą charakterystykę amplitudową mogą mieć różne funkcje transmitancji. Wynika to z faktu, że funkcja transmitancji może mieć zera zarówno w lewej jak i w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ .

Jeśli ograniczyć się do funkcji minimalno-fazowych, tj. takich funkcji  $K(s)$ , których wszystkie zera i bieguny znajdują się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej  $s$ , to wówczas zadanej fizycznie realizowalnej charakterystyce amplitudowej odpowiada dokładnie jedna charakterystyka fazowa. Charakterystyka amplitudowa  $|K(j\omega)|$  funkcji minimalno-fazowej jest powiązana z charakterystyką fazową  $\beta(\omega)$  za pomocą tzw. przekształcenia Hilberta

$$\beta(\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |K(j\omega)|}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega,$$

$$\ln|K(j\omega)| = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega B(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega.$$

Z zależności tych wynika, że do znalezienia wartości jednej z charakterystyk przy danej częstotliwości, konieczna jest znajomość drugiej w całym zakresie częstotliwości. Przekształcenie Hilberta ma znaczenie przede wszystkim teoretyczne, gdyż przy jego stosowaniu natrafia się na bardzo duże trudności rachunkowe. W praktyce postępuje się inaczej; będzie to wyjaśnione dokładniej w dalszej części pracy.

Powyższe rozważania można podsumować następującymi wnioskami:

- idealna charakterystyka amplitudowa (rys. 1.1) jest fizycznie nierealizowalna i w związku z tym należy ją aproksymować charakterystyką realizowalną,
- dla funkcji minimalno-fazowych jednoczesna aproksymacja idealnej charakterystyki amplitudowej i fazowej jest niemożliwa. Jeśli aproksymuje się charakterystykę amplitudową, to nie ma się wpływu na charakterystykę fazową i na odwrót.

Jednoczesna aproksymacja charakterystyki amplitudowej i fazowej jest możliwa, do pewnego stopnia, tylko dla funkcji nieminimalno-fazowych. Można to wykazać w następujący sposób. Niech  $K(s)$  będzie funkcją transmitancji układu nieminimalno-fazowego; wówczas można ją przedstawić jako

$$K(s) = \frac{f_1(s)}{v_1(s)} v_2(-s),$$

gdzie  $v_1(s)$ ,  $f_1(s)$  - wielomiany, których wszystkie zera leżą w lewej półpłaszczyźnie  $s$ ,

$v_2(-s)$  - wielomian, którego wszystkie zera leżą w prawej półpłaszczyźnie  $s$ .

Mnożąc licznik i mianownik  $K(s)$  przez wielomian  $v_2(s)$ , którego wszystkie zera leżą w lewej półpłaszczyźnie  $s$  i są „zwierciadlanym odbiciem” względem osi  $j\omega$  zer  $v_2(-s)$ , otrzymuje się wyrażenie

$$K(s) = \frac{f_1(s)v_2(s)v_2(-s)}{v_1(s)v_2(s)} = K_1(s)K_2(s),$$

gdzie  $K_1(s)$  - funkcja minimalno-fazowa,

$$K_2(s) = \frac{v_2(-s)}{v_2(s)}.$$

Funkcja postaci  $K_2(s)$  nazywana jest funkcją transmitancji układu wszechprzepustowego lub korektora fazowego. Można zauważyć, że  $K_2(s)$  ma następujące właściwości

$$\left| K_2(s) \right|_{s=j\omega} = 1,$$

$$\beta_2(\omega) = \arg K_2(j\omega) = -2\arg v_2(j\omega) = -2\arctg R(\omega),$$

przy czym  $R(\omega)$  jest funkcją reaktancyjną. Zgodnie z tym amplitudowo-częstotliwościowa charakterystyka układu wszechprzepustowego jest wielkością stałą, a fazowo-częstotliwościowa - malejącą funkcją częstotliwości.

Z powyższych rozważań wynika, że tłumienie i faza tłumienia układu nieminimalno-fazowego z funkcją transmitancji  $K(s)$  określone są zależnościami

$$A \text{ [dB]} = 20 \lg \left| \frac{1}{K(j\omega)} \right| = -20 \lg |K_1(j\omega)|,$$

$$\beta \text{ [rad]} = \arg \frac{1}{K(j\omega)} = \arg \frac{1}{K_1(j\omega)} + 2 \arctg R(\omega).$$

Najmniejsza wartość fazy odpowiada zatem funkcji  $K_1(s)$ , a więc funkcji minimalno-fazowej. Ostatecznie więc, przy projektowaniu układów nieminimalno-fazowych można oddzielnie aproksymować charakterystykę amplitudową i fazową.

Z praktycznego punktu widzenia najważniejszy jest przypadek aproksymacji charakterystyki amplitudowej i jej realizacja w układzie minimalno-fazowym. Funkcje minimalno-fazowe są preferowane z tego powodu, że stopień układu realizującego te funkcje, a stąd liczba elementów, jest mały, ponadto można je realizować w strukturach drabinkowych, natomiast funkcje nieminimalno-fazowe wymagają do realizacji układów mostkowych z dużą liczbą elementów.

### 1.3. Cel pracy

Najbardziej znanymi i szeroko stosowanymi filtrami wielomianowymi są filtry Butterwortha i Czebyszewa. Charakterystyka tłumieniowa filtra Butterwortha ma, jak wiadomo, niezbyt dobre właściwości selektywne. Dla uzyskania dużych tłumień w paśmie zaporowym jest wymagany wysoki stopień  $n$  tych filtrów, co wiąże się z koniecznością użycia dużej liczby elementów. Znacznie lepsze właściwości selektywne ma filtr Czebyszewa, szczególnie gdy są stawiane dość ostre wymagania na charakterystykę tłumieniową<sup>1)</sup>. Jednak w wielu zastosowaniach, kiedy są brane również pod uwagę charakterystyki fazowe czy czasowe filtra, filtr Butterwortha

staje się bardziej konkurencyjnym filtrem w stosunku do filtra Czebyszewa.

W latach 1958/59 Papoulis [48, 49] oraz Fukada [19] chcąc polepszyć właściwości selektywne filtra Butterwortha nie pogarszając przy tym zbyt innych jego parametrów, wprowadzili wielomianowe filtry o monotonicznej charakterystyce tłumieniowej w paśmie przepustowym i maksymalnym nachyleniu charakterystyki tłumieniowej przy częstotliwości granicznej filtra ( $\omega = 1$ ). Dalsze rozwinięcie prac Papoulisa i Fukady nastąpiło w 1969 roku, kiedy to Halpern [25] wprowadził wielomiany monotoniczne. Halpern podał również inne rozwiązanie, a mianowicie zamiast maksymalizacji nachylenia charakterystyki tłumieniowej przy  $\omega = 1$ , maksymalizował on asymptotyczne tłumienie, tj. tłumienie dla wielkich częstotliwości. Wielomiany monotoniczne pozwoliły rozwiązać jeszcze inny problem aproksymacji, mianowicie Rakovich [58] w 1973 roku wprowadził filtry (zwane filtrami L.S.M.) o monotonicznej charakterystyce tłumieniowej w paśmie przepustowym i minimalnych stratach energii sygnału przenoszonego w tymże paśmie.

Ostatnio wprowadzono [43, 44] filtry o wypukłej charakterys-

---

<sup>1)</sup> Dla ilustracji można podać następujący przykład [45].

Należy zaprojektować filtr dolnoprzepustowy, który w paśmie przepustowym będzie miał mniejsze (równe) tłumienie niż 1 dB, a w paśmie zaporowym większe (równe) tłumienie niż 30 dB. Stosunek częstotliwości granicznej w paśmie zaporowym do częstotliwości granicznej w paśmie przepustowym wynosi 1.01. Filtr ma być zrealizowany w klasycznej strukturze drabinkowej LC.

Rozwiązanie brzmi:

$n = 415$ dla filtra Butterwortha	(415 elementów),
$n = 36$ dla filtra Czebyszewa	(36 elementów).



tyce tłumieniowej w paśmie przepustowym i o maksymalnym nachyleniu tej charakterystyki przy wybranej częstotliwości ( $\omega_0 \geq 1$ ) pasma zaporowego. Filtry te w wielu przypadkach mają konkurencyjne parametry w stosunku do filtrów monotonicznych. Przedstawione powyżej filtry są filtrami optymalnymi<sup>2)</sup>, gdyż ich charakterystyki spełniają najlepiej pewne kryteria.

Głównym celem niniejszej pracy jest rozwiązanie trzech podstawowych problemów aproksymacji, które prowadzą do uzyskania nowych klas wielomianowych filtrów o  $i$ -tego rzędu wypukłej charakterystyce tłumieniowej w paśmie przepustowym, gwarantując jednocześnie:

- a) maksymalne nachylenie charakterystyki tłumieniowej przy wybranej częstotliwości pasma zaporowego (problem A - rozdział 5) lub
- b) maksymalne tłumienie przy wybranej częstotliwości pasma za-

---

<sup>2)</sup> W niniejszej pracy jest prezentowane deterministyczne podejście do zagadnienia optymalnej filtracji. W pracach Kołmogorowa [36] i Wienera [88] również sformułowano zagadnienie optymalnej filtracji, które polega na najlepszym - w sensie minimalizacji błędu średniokwadratowego - wydobywaniu (oceny) nieznanego sygnału losowego z addytywnej mieszaniny tego sygnału i zakłóceń przypadkowych. Charakterystykę liniowego filtru optymalnego, realizującego to zadanie znajduje się jako rozwiązanie równania Wienera-Hopfa w badaniu którego znakomite wyniki osiągnął radziecki matematyk Krejn. W tym podejściu probabilistycznym, nie rozważanym w niniejszej pracy, na uwagę zasługuje algorytm filtracji niestacjonarnych procesów Markowa, zaproponowany niezależnie przez Stratonowicza [73] i Kalmana [35]. W literaturze algorytm ten często nazywany jest po prostu optymalnym filtrem Kalmana.

- porowego lub minimalne tłumienie przy wybranej częstotliwości pasma przepustowego (problem B - rozdział 6) lub
- c) minimalne straty energii sygnału przenoszonego w paśmie przepustowym lub maksymalne tłumienie energii sygnału niepożądanego w paśmie zaporowym (problem C - rozdział 7).

Duża różnorodność pojawiających się ostatnio prac, w których autorzy stawiają sobie za cel poszukiwanie optymalnych filtrów, sprawia, że istnieje potrzeba jednolitej metody ich projektowania; metody w miarę prostej, która szczególnie nadawałaby się do implementacji na maszynę cyfrową. Próbę zaspokojenia tych potrzeb postawiono sobie za drugi cel niniejszej rozprawy. Osiągnięcie tego celu stało się możliwe dzięki zaproponowaniu jednolitej metodyki matematycznej do osiągnięcia głównego celu rozprawy. Metodyka ta okazała się również pomocna w systematyce większości opublikowanych prac z dziedziny aproksymacji IAR.

Dzięki wprowadzonej klasie filtrów stało się możliwe porównywanie właściwości znanych i nowo wprowadzonych filtrów, jak również głębsze zrozumienie związku między pewnymi typami filtrów. Ponadto, wydaje się, że zaproponowana metodyka może być bardzo owocna i przynieść nowe rezultaty w problemie aproksymacji IAR, szczególnie przy stosowaniu kryterium średniokwadratowego.

Niniejsza rozprawa dotyczy filtru dolnoprzepustowego. Przez zastosowanie transformacji częstotliwości [87] uzyskane wyniki można rozszerzyć na każdy inny typ filtru elektrycznego o symetrycznych (geometrycznie) charakterystykach.

#### 1.4 Przegląd treści pracy

W pracy omówiono metody i kryteria aproksymacji charakterystyki amplitudowej filtra dolnoprzepustowego. Przedstawiono wyniki prac własnych autora w tej dziedzinie (rozdział 4, 5, 6, 7, 8 i dodatek do pracy).

Praca zawiera dziewięć rozdziałów i dodatek. Każdy rozdział zawiera podrozdziały numerowane drugą cyfrą następującą po numerze rozdziału. Potrzebne w analizie zależności mają numerację oddzielną dla każdego rozdziału (druga cyfra). Analogicznie ponumerowane są tabele i rysunki.

Pierwszym rozdziałem jest wstęp, omawiający ogólne problemy związane z aproksymacją IAR. W rozdziale drugim podano podstawowe definicje i zależności dotyczące bezstratnego czwórnika SLS oraz podano ogólną procedurę syntezy filtra. Następny rozdział poświęcony jest przede wszystkim problemom występującym przy aproksymacji IAR oraz przeglądowi różnych kryteriów aproksymacji.

W rozdziale czwartym sformułowano główne problemy rozwiązane w niniejszej pracy, które prowadzą do klasy filtrów wypukłych i-tego rzędu. Podano tam również pewien warunek konieczny dla kwadratu modułu funkcji filtracji tych filtrów oraz dowód jednoznaczności rozwiązania. W następnym rozdziale podano metodę wyznaczania funkcji filtracji opisującej filtry wypukłe i-tego rzędu o maksymalnym nachyleniu charakterystyki tłumieniowej przy wybranej częstotliwości pasma zaporowego. Omówiono również właściwości tych filtrów.

W rozdziale szóstym podano metodę wyznaczania funkcji filtracji opisującej filtry wypukłe i-tego rzędu o ekstremalnej wartości tłumienia przy wybranej częstotliwości. Przedyskutowano też

właściwości tych filtrów.

Rozdział siódmy jest poświęcony omówieniu metody wyznaczania funkcji filtracji opisującej filtry wypukłe  $i$ -tego rzędu o ekstremalnych właściwościach energetycznych. Wykazano, że filtry te, w zależności od dwóch parametrów, przechodzą w inne filtry wypukłe  $i$ -tego rzędu. W rozdziale ósmym omówiono możliwości zaproponowanej w pracy metody ekstremalizacji formy kwadratowej.

W rozdziale dziewiątym, będącym podsumowaniem uzyskanych wyników, przedstawiono wnioski i perspektywy dalszych badań.

W dodatku do pracy zamieszczono tabulogram programu numerycznego na maszynę cyfrową, napisanego w języku Fortran 1900 oraz podano przykłady obliczeń.

Najważniejsze dla pracy są rozdziały: 4, 5, 6, 7, 8.

W rozdziałach tych zamieszczono oryginalne wyniki uzyskane przez autora. Umieszczenie dość obszernego rozdziału trzeciego podyktowane zostało chęcią uporządkowania wyników przyczynkowych uzyskanych w literaturze w ciągu ostatnich dwudziestu lat w dziedzinie aproksymacji IAR. W literaturze światowej brak jest tego typu opracowania porządkującego co stwarza duże trudności w korzystaniu z literatury i wyrobieniu sobie jasnego poglądu na rozwiązane i nierozwiązane problemy w tej dziedzinie.

Wydaje się, że klasyfikacja wyników przedstawiona przez autora w rozdziale trzecim pod kątem widzenia kryteriów aproksymacji wprowadza pewną przejrzystość, dzięki której czytelnik może łatwo wyrobić sobie pogląd na aktualny stan dziedziny aproksymacji IAR, jak również ocenić wartość i znaczenie poszczególnych rozwiązań przyczynkowych w praktyce projektowania filtrów.

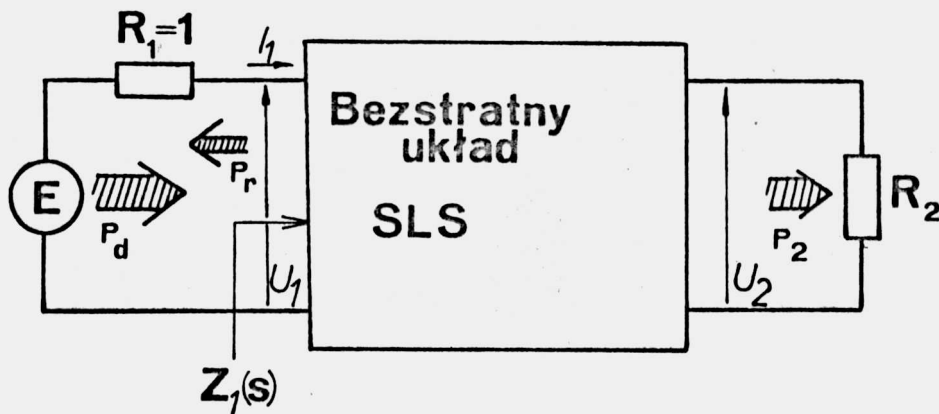
## 2. PROCEDURA PROJEKTOWANIA FILTRU

### 2.1. Wstęp

W rozdziale tym zostaną podane podstawowe definicje i symbole używane i wykorzystywane w syntezie filtru. Następnie, adaptując odpowiednio sposób podejścia do problemu projektowania filtru proponowanego przez Piloty'ego, zostaną podane główne etapy konstrukcji filtru.

### 2.2. Definicje

Typowy układ pracy filtru przedstawiono na rys. 2.1.



Rys. 2.1 Współpraca filtru ze źródłem i obciążeniem

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi jak na rysunku definiuje się następujące wielkości:

1. Moc dysponowana źródła

$$P_d = \frac{|E|^2}{4R_1}$$

## 2. Moc wydzielana na rezystancji obciążenia

$$P_2 = \frac{|U_2|^2}{R_2} .$$

## 3. Impedancja wejściowa

$$Z_1(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} .$$

## 4. Współczynnik odbicia

$$\rho_1(s) = \frac{R_1 - Z_1(s)}{R_1 + Z_1(s)} ,$$

$$|\rho_1(j\omega)|^2 = 1 - \frac{P_2}{P_d} = \frac{P_r}{P_d} ; P_r - \text{moc odbita},$$

$$\rho_1(s) = \frac{f(s)}{e(s)} .$$

## 5. Funkcje transmitancji

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{P_2}{P_d} \leq 1 . - \text{skuteczne wzmocnienie mocy}, \quad (2.1)$$

$$K(s) = 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \frac{U_2}{E} = \frac{p(s)}{e(s)},$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_d}{P_2} \geq 1 - \text{skuteczne tłumienie mocy},$$

$$H(s) = 1/K(s) = \frac{e(s)}{p(s)} .$$

Skuteczne tłumienie mocy w decybelach (charakterystyka tłumieniowa)

$$A [\text{dB}] = 20 \log |H(j\omega)| .$$

## 6. Funkcja charakterystyczna (funkcja filtracji)

$$|\varphi(j\omega)|^2 = \frac{P_d - P_2}{P_2} = \frac{P_r}{P_2}; \quad P_r - \text{moc odbita}, \quad (2.2)$$

$$\varphi(s) = \zeta_1(s) H(s) = \frac{f(s)}{p(s)}.$$

## 7. Charakterystyka fazowa

$$\beta = \arctg \left[ \frac{H_o(s)/j}{H_e(s)} \right] \Bigg|_{s=j\omega} = \frac{1}{j} \operatorname{arth} \left[ \frac{H_o(j\omega)}{H_e(j\omega)} \right].$$

Indeksy e i o oznaczają odpowiednio część parzystą i nieparzystą  $H(s)$ , tzn.

$$H_e(s) = \frac{H(s) + H(-s)}{2},$$

$$H_o(s) = \frac{H(s) - H(-s)}{2}.$$

## 8. Grupowe opóźnienie

$$T_g = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega}.$$

Dla układów bezstratnych SLS  $T_g$  można obliczyć z zależności

$$T_g(\omega) = \operatorname{Re} \left[ \frac{H'(j\omega)}{H(j\omega)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{e'(j\omega)}{e(j\omega)} \right],$$

gdzie  $\operatorname{Re}$  oznacza część rzeczywistą.

Grupowe opóźnienie  $T_g$  charakteryzuje nachylenie charakterystyki fazy w danym punkcie i dla sygnałów modulowanych opisuje opóźnienie, którego doznaje sygnał modulujący, stanowiący ob-

wiednię sygnału modulowanego.

### 9. Charakterystyka impulsowa i przejściowa

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [U_2(s)] \Big|_{E(s)=1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \mathcal{L}^{-1} [K(s)]$$
 - charakterystyka impulsowa (odpowiedź układu na pobudzenie delta Diraca  $\delta(t)$ ),

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} [U_2(s)] \Big|_{E(s)=\frac{1}{s}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K(s)}{s} \right]$$
 - charakterystyka przejściowa (odpowiedź filtru na pobudzenie skokiem  $1(t)$ ),

$\mathcal{L}^{-1}$  - odwrotne przekształcenie Laplace'a.

Dla układów bezstratnych SLS  $h(t)$  i  $g(t)$  można obliczyć z zależności:

$$h(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \left( \frac{p(0)}{e(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{s_i e'(s_i)} e^{s_i t} \right),$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sum_{i=1}^n \frac{p(s_i)}{e'(s_i)} e^{s_i t}.$$

We wzorach tych  $s_i$  są pierwiastkami równania  $n$ -tego stopnia  $e(s) = 0$ .

### 10. Częstotliwości krytyczne

Częstotliwości własne układu są to zera  $H(s)$ , a zatem zera  $e(s)$ . Stopień układu  $n$  jest to stopień wielomianu  $e(s)$ , tj. liczba częstotliwości własnych układu. Zera współczynnika odbicia są to zera  $\varrho_1(s)$ . Zatem zera w skończoności współczynnika odbicia  $\varrho_1$  są zerami  $f(s)$ . Zera te nazywane są



często częstotliwościami zerowego tłumienia. Bieguny tłumienia, zwane także zerami transmitancji, są to bieguny  $H$  lub  $\varphi$ . Te, które leżą w skończoności, są pierwiastkami równania  $p(s) = 0$ .

### 2.3 Związki dotyczące czwórnika bezstratnego SLS

Z założenia bezstratności filtru wynika, że

$$P_d = P_2 + P_r$$

lub

$$\frac{P_d}{P_2} = 1 + \frac{P_r}{P_2}.$$

Podstawiając do powyższej zależności (2.1) i (2.2), otrzymuje się równanie zwane równaniem Feldtkeller'a

$$|H(j\omega)|^2 = 1 + |\varphi(j\omega)|^2 \quad (2.3)$$

lub

$$H(s)H(-s) = 1 + \varphi(s)\varphi(-s). \quad (2.4)$$

Wyrażając wzór (2.4) za pomocą funkcji  $e$ ,  $f$  i  $p$ , otrzymuje się zależność

$$e(s)e(-s) = p(s)p(-s) + f(s)f(-s). \quad (2.5)$$

Problem aproksymacji rozwiązuje się zwykle przez znalezienie dwu z trzech wielomianów  $e$ ,  $f$  i  $p$ , przy czym trzeci znajdu-

je się z zależności (2.5). Syntezę filtra dokonuje się za pomocą trzech wielomianów  $e$ ,  $f$  i  $p$ . Z tego względu ważna jest znajomość warunków, które muszą spełniać te wielomiany, aby odpowiedni czwórnik był realizowalny. Jak wiadomo [76], warunki te są następujące:

1. wielomiany  $e(s)$ ,  $f(s)$  i  $p(s)$  muszą być wielomianami o rzeczywistych współczynnikach,
2. wielomian  $e(s)$  musi być wielomianem Hurwitza, tzn. jego zera muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie zmiennej  $s$ ,
3.  $p(s)$  musi być wielomianem parzystym lub nieparzystym, którego stopień jest mniejszy lub równy stopniowi  $e(s)$ ,
4.  $|K(j\omega)| \leq 1$ ;  $|\rho_1| \leq 1$  dla  $s = j\omega$ .

Dla układów minimalno-fazowych występuje dodatkowe ograniczenie

5. zera wielomianu  $p(s)$  nie mogą leżeć w prawej półpłaszczyźnie.

#### 2.4 Procedura syntezy filtra

Typowa procedura projektowania filtra współpracującego ze źródłem o skończonej rezystancji wewnętrznej i obciążeniem rezystancyjnym składa się z trzech zasadniczych kroków:

1. Konstrukcja funkcji transmitancji.

W kroku tym podstawową rolę odgrywa aproksymacja. Żądania, które musi spełnić filtr mogą być sformułowane odnośnie charakterystyki tłumieniowej, fazowej, grupowego opóźnienia czy też charakterystyk czasowych. Przy żądaniach dotyczących tłumienia preferuje się poszukiwanie funkcji filtracji  $\varphi$ ,

w pozostałych przypadkach poszukiwanie funkcji H lub K.

Z problemami występującymi przy aproksymacji w dziedzinie czasu można zapoznać się w pracy [74] - z problemami aproksymacji fazy czy grupowego opóźnienia w [5, 87].

W wielu zastosowaniach interesująca jest przede wszystkim charakterystyka tłumieniowa filtru. W innych przypadkach natomiast zadaje się także wymaganą charakterystykę fazową lub grupowego opóźnienia, lecz w praktyce koryguje się ją przy użyciu korektorów fazowych dopiero po osiągnięciu wymaganej charakterystyki tłumieniowej filtru. Z tego względu rozwiązanie problemu aproksymacji dla pewnych prostych, wyidealizowanych charakterystyk tłumienia ma istotne znaczenie.

## 2. Obliczenie pożądaných immitancji.

Znając  $\varphi(s)$  można za pomocą równania Feldtkeller'a (2.4) wyznaczyć (zazwyczaj metodami numerycznymi)  $H(s)$  i vice versa. Zawsze więc są znane wielomiany  $e(s)$ ,  $f(s)$  i  $p(s)$ . Metody realizacji filtru wymagają znajomości następujących immitancji [68]:

	$p(s)$ - even	$p(s)$ - odd
$\frac{z_{11}}{R_1}$	$\frac{e_e - f_e}{e_o + f_o}$	$\frac{e_o - f_o}{e_e + f_e}$
$\frac{z_{22}}{R_2}$	$\frac{e_e + f_e}{e_o + f_o}$	$\frac{e_o + f_o}{e_e + f_e}$
$y_{11}R_1$	$\frac{e_o - f_o}{e_e + f_e}$	$\frac{e_e - f_e}{e_o + f_o}$
$y_{22}R_2$	$\frac{e_o - f_o}{e_e - f_e}$	$\frac{e_e - f_e}{e_o - f_o}$

W powyższych zależnościach  $z_{11}$ ,  $z_{22}$  i  $y_{11}$ ,  $y_{22}$

są odpowiednimi elementami macierzy czwórnikowej  $Z(s)$  i  $Y(s)$ , natomiast indeksy e (even) i o (odd) oznaczają odpowiednio część parzystą i nieparzystą wielomianu.

Niektóre metody, zwłaszcza metody nadające się do syntezy układów mikroelektronicznych [53], wymagają znajomości macierzy czwórnikowych  $Z(s)$  lub  $Y(s)$  czy też  $A(s)$ . Łatwo je wyznaczyć [29] na podstawie znajomości powyższych immitancji i wielomianu  $p(s)$  (zera transmitancji).

### 3. Obliczanie elementów

Wyznaczanie elementów układu polega na korzystaniu z odpowiednich algorytmów przy danym typie struktury i określonych rodzajach elementów podstawowych. Klasyczne metody wyznaczania wartości elementów w konfiguracjach drabinkowych sprowadzają się zazwyczaj do kolejnego wydzielenia zer transmitancji z jednej z immitancji. Szczegółowiej jest to opisane w pracach [68, 24, 40], a ważniejsze rezultaty są stabilizowane [14, 26, 87]. W metodach klasycznych jako zbiór elementów podstawowych przyjmuje się induktry, pojemności i transformatory. Układy mikroelektroniczne nie mogą zawierać induktorów, toteż szczególnie dla tych układów opracowano nowe metody i algorytmy, które są bardziej ekonomiczne i prowadzą do struktur lepiej spełniających wymagania technologii mikroelektronicznych [53]. Oczywiście także w tym przypadku można zastosować klasyczne algorytmy obliczeniowe pod warunkiem, że induktry i transformatory, występujące w otrzymanym układzie, zastąpi się odpowiednimi układami symulującymi, realizowalnymi w technologiach mikroelektronicznych. Często taka metoda daje bardzo dobre wyniki, zwłaszcza jeśli do symulacji zastosuje się żyratory i

kondensatory. Prowadzi to jednak zwykle do dużej liczby ży-  
ratorów.

Na zakończenie warto wspomnieć, że przedstawiony proces  
syntezy tylko w nielicznych przypadkach może być znacznie  
uproszczony, np. przy projektowaniu filtrów Butterwortha i  
Czebyszewa całą procedurę syntezy można zredukować do ostatniego  
kroku, tj. obliczenie elementów, gdyż dla tych filtrów są wypro-  
wadzone końcowe wzory na wartości elementów struktury drabinko-  
wej LC [40, 87].

### 3. APROKSYMACJA IDEALNEJ CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWEJ FILTRU DOLNOPRZEPUSTOWEGO

#### 3.1. Wstęp

Jak już wspomniano, idealna charakterystyka amplitudowa nie jest fizycznie realizowalna, toteż jest rzeczą konieczną przybliżanie jej za pomocą funkcji  $K(s)$  spełniającej przytoczone w poprzednim rozdziale warunki fizycznej realizowalności.

Bezpośrednie poszukiwanie realizowalnej funkcji  $K(s)$  jest zagadnieniem skomplikowanym, gdyż wymaga ono nad wyraz złożonych i czasem nie wykonalnych w praktyce operacji nad funkcjami zmiennej zespolonej  $s$ . Powodem tych trudności jest fakt, że warunki fizycznej realizowalności, sformułowane dla  $K(s)$ , są trudne do przedstawienia analitycznego. Warunki fizycznej realizowalności są najmniej ostre dla kwadratu modułu funkcji transmitancji  $|K(j\omega)|^2$ . Ponadto, korzystanie na etapie aproksymacji z kwadratu modułu funkcji transmitancji pozwala mieć do czynienia z dobrze znanymi funkcjami rzeczywistymi rzeczywistego argumentu.

Nie trudno zauważyć, że funkcja  $|K(j\omega)|^2$  jest realizowalna w układzie bezstratnym SLS, jeśli spełnia następujące warunki:

1. jest parzystą wymierną funkcją  $\omega$  o rzeczywistych współczynnikach, (3.1)

2.  $0 \leq |K(j\omega)|^2 \leq 1$  dla wszystkich  $\omega$ . (3.2)

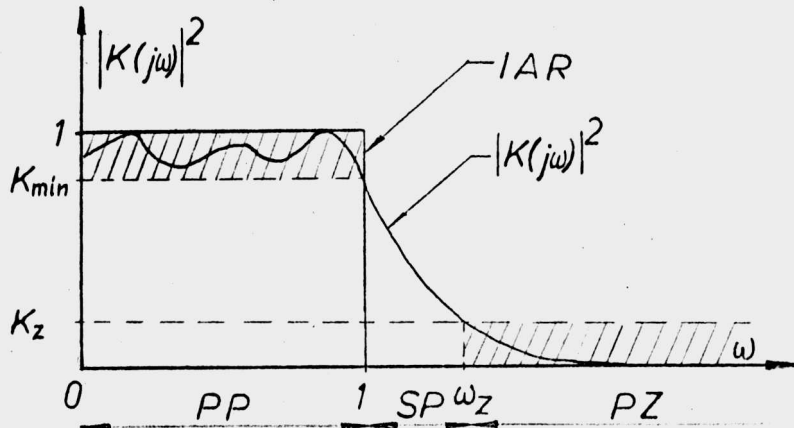
W praktyce więc konstruuje się najpierw kwadrat modułu funkcji transmitancji, a następnie znajduje się  $K(s) = \frac{p(s)}{e(s)}$  poprzez faktoryzację wyrażenia

$$\left| K(j\omega) \right|_{\omega=s/j}^2 = K(s)K(-s) \Big|_{s=j\omega},$$

przy czym wielomiany  $e(s)$  i  $p(s)$  muszą spełniać warunki podane

w punkcie 2.3.

Ostatecznie więc, problem aproksymacji w teorii filtrów polega na aproksymacji IAR realizowalną charakterystyką  $|K(j\omega)|^2$  (rys. 3.1).



Rys. 3.1 Charakterystyka amplitudowa filtra dolnoprzepustowego

Zakreskowana powierzchnia reprezentuje zadany obszar, wewnątrz którego musi się znajdować  $|K(j\omega)|^2$ . Ze względu na skończone nachylenie charakterystyki  $|K(j\omega)|^2$ , pomiędzy pasmem przepustowym (PP) w przedziale częstotliwości  $0 + 1$  i pasmem zaporowym (PZ) dla  $\omega \geq \omega_z$ , występuje strefa przejściowa (SP), określona przez pasmo  $1 + \omega_z$ .

Zależność (3.2) wskazuje, że  $|K(j\omega)|^2$  jest funkcją ograniczoną, toteż nie może ona posiadać biegunów na osi  $j\omega$ , a jej zera (o ile występują) powinny leżeć poza PP, gdyż  $K_{\min} \neq 0$  (rys. 3.1).

Przekształcając równanie Feldtkeller'a (2.3), otrzymuje się zależność

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |\varphi(j\omega)|^2} = \frac{1}{1 + \psi(\omega^2)}, \quad (3.3)$$

gdzie  $|\varphi(j\omega)|^2 = \psi(\omega^2)$  jest, jak wiadomo, funkcją filtracji (funkcją charakterystyczną). Wykorzystując związek (3.3) dochodzi się do wniosku, że funkcja  $\psi(\omega^2)$  dla układów bezstratnych SLS musi być

parzystą wymierną funkcją  $\omega$  i musi spełniać warunek  $\psi(\omega^2) \geq 0$  dla dowolnych  $\omega$ . Analogicznie można przenieść na  $\psi(\omega^2)$  wymagania stawiane dla  $|K(j\omega)|^2$  odnośnie aproksymacji IAR. Zatem funkcja  $\psi(\omega^2)$  powinna w jakiś sposób aproksymować w PP funkcję tożsamościowo równą zero, natomiast powyżej częstotliwości granicznej  $\omega = 1$  powinna ona rosnać najszybciej jak to jest tylko możliwe.

Jak wynika z rys. 3.1 dla realizowalnej fizycznie charakterystyki  $|K(j\omega)|^2$  musi być określona wartość  $K_{\min}$ , tj. wartość  $|K(j\omega)|^2$  dla  $\omega = 1$ . Zwykle w procesie aproksymacji przyjmuje się  $K_{\min} = 1/2$  lub co jest równoważne

$$\psi(\omega^2) \Big|_{\omega=1} = 1; \quad (3.4)$$

odpowiada to warunkowi, że przy częstotliwości granicznej filtra  $\omega = 1$  połowa mocy dysponowanej źródła jest wydzielona w rezystancji  $R_2$ .

W praktyce, aby uzyskać przy ograniczeniu (3.4) większą elastyczność w projektowaniu, wprowadza się do wyrażenia (3.3) dodatkowy liczbowy współczynnik  $\varepsilon^2$ , wówczas

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \psi(\omega^2)}. \quad (3.5)$$

Parametr  $\varepsilon^2$  charakteryzuje więc tolerancję charakterystyki  $|K(j\omega)|^2$  w PP. Zwykle  $\varepsilon^2 < 1$ .

Reasumując, najbardziej przydatną funkcją w procesie aproksymacji IAR jest kwadrat modułu funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$ . Funkcja  $\psi(\omega^2)$  może być wielomianem lub funkcją wymierną. W przypadku aproksymacji wielomianowej,  $\psi(\omega^2)$  monotonicznie rośnie w PZ; odpowiada



to położeniu wszystkich zer transmitancji w nieskończoności.

Natomiast w przypadku aproksymacji funkcją wymierną,  $\psi(-s^2)$  ma pewną liczbę biegunów należących do ograniczonego obszaru płaszczyzny zmiennej zespolonej  $s$ . Z punktu widzenia właściwości selektywnych filtru najlepiej jest, jeśli te bieguny są położone na osi  $j\omega$ . W tym przypadku  $\psi(\omega^2)$  nie jest funkcją monotonicznie rosnącą w PZ, tylko ma bieguny przy skończonych wartościach w PZ. Wówczas mówi się, że zera transmitancji leżą w skończoności.

Istnieją różne metody aproksymacji, a także różnorodne kryteria oceny przybliżania lub „odchyłki” funkcji aproksymującej od zadanej. W dalszych punktach niniejszego rozdziału zostaną podane ważniejsze metody aproksymacji IAR, istotne kryteria oraz znaczące rozwiązania.

Na zakończenie warto zaznaczyć, że teoria aproksymacji, jako samodzielna dyscyplina, powstała w końcu XIX wieku. Głównym jej twórcą był rosyjski matematyk Czebyszew. Dalszy rozwój tej teorii przyniósł wiele ogólnych rezultatów, które mają znaczenie przede wszystkim teoretyczne, dając szerszy pogląd na zagadnienie aproksymacji. Podstawowe wiadomości ogólnej teorii aproksymacji można znaleźć, np. w pracach [2, 21]. Wiadomości te nie są jednak bezpośrednio wykorzystywane w zagadnieniach praktycznych aproksymacji IAR, toteż ze zrozumiałych powodów zostaną one w dalszej części pracy pominięte.

### 3.2. Kryterium Taylora

Funkcję błędu  $h(\omega^2)$  określa się jako różnicę funkcji aproksymowanej  $g(\omega^2)$  i funkcji aproksymującej  $f(\omega^2)$ , tzn.

$$h(\omega^2) = g(\omega^2) - f(\omega^2). \quad (3.6)$$

Rozwijając funkcję błędu w szereg Taylora w otoczeniu  $\omega = \omega_0$  ( $0 \leq \omega_0 < 1$ ), otrzymuje się wyrażenie

$$h(\omega^2) = h(\omega^2) \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{dh(\omega^2)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2!} \frac{d^2h(\omega^2)}{d\omega^4} \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \dots \quad (3.7)$$

#### Definicja

Mówimy, że funkcja  $g(\omega^2)$  jest aproksymowana w sensie Taylora funkcją  $f(\omega^2)$  rzędu  $k$ , jeśli pierwsze współczynniki do  $k$ -tego włącznie w rozwinięciu funkcji błędu  $h(\omega^2)$  (3.7) są równe zero. Gdy  $k$  przyjmuje największą z możliwych wartości, tzn.  $k=n-1$ , to mówi się wówczas, że jest to aproksymacja maksymalnie płaska.

Nie trudno zauważyć, że przy tak określonej aproksymacji funkcja błędu  $h(\omega^2)$  równa się zero tylko dla  $\omega = \omega_0$  i błąd wzrasta w miarę oddalania się od punktu  $\omega_0$ .

Zawsze przy stosowaniu tego kryterium żąda się, aby funkcja  $f(\omega^2)$  spełniała warunek normalizacyjny

$$f(1) = 1. \quad (3.8)$$

Po znalezieniu funkcji  $f(\omega^2)$ , przyjmuje się, że  $\psi(\omega^2) = f(\omega^2)$ .

Najbardziej znany rezultat otrzymuje się, jeśli zastosować powyższe kryterium do funkcji  $f(\omega^2)$  postaci

$$f(\omega^2) = a_0 + a_2\omega^2 + \dots + a_{2n}\omega^{2n}, \quad (3.9)$$

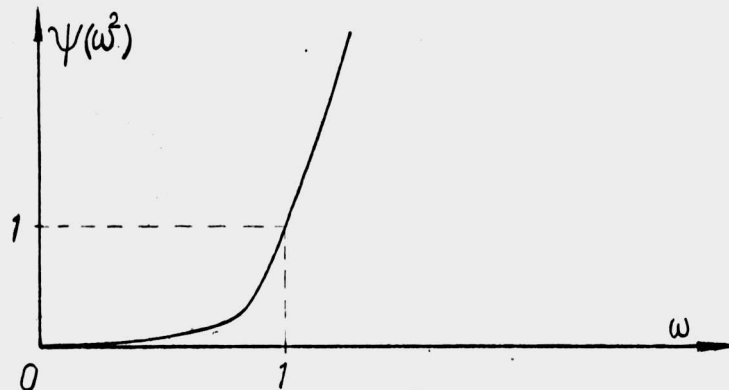
przy warunkach :

$$- g(\omega^2) \equiv 0,$$

$$- \omega_0 = 0,$$

$$- k = n - 1.$$

Uwzględniając warunek (3.8), otrzymuje się  $\psi(\omega^2) = \omega^{2n}$ . Filtry opisane taką funkcją filtracji nazywane są filtrami Butterwortha (B) [10] lub filtrami o charakterystyce tłumieniowej maksymalnie płaskiej w punkcie  $\omega=0$ . Rys. 3.2 przedstawia przykładowy przebieg  $\psi(\omega^2) = \omega^{2n}$ .



Rys. 3.2 Wykres funkcji filtracji opisującej filtr Butterwortha.

Filtry typu B mają niezbyt dobre właściwości tłumieniowe w PZ. W celu polepszenia tych właściwości Aronhime i Budak [4] wprowadzili filtry MFMBO (Maximally Flat Magnitude Beyond the Origin). Zastosowali oni kryterium Taylora do funkcji (3.9) przy warunkach

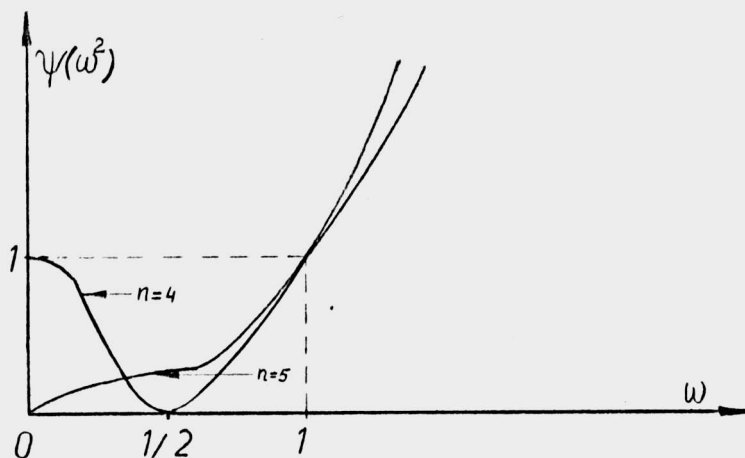
$$- g(\omega^2) \equiv A^2,$$

$$- \omega_0 = b,$$

$$- k = n - 1,$$

otrzymując przy uwzględnieniu (3.8) następujące rozwiązanie

$$\psi(\omega^2) = \frac{A^2(1 - b^2)^n + (1 - A^2)(\omega^2 - b^2)^n}{(1 - b^2)^n}. \quad (3.10)$$

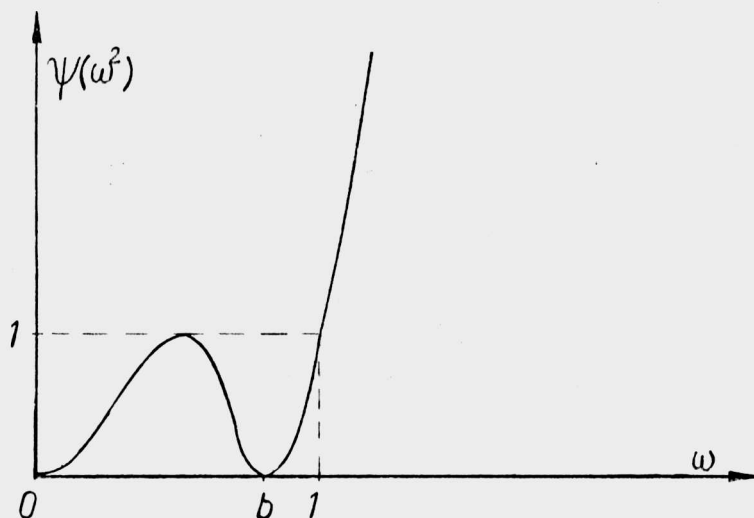


Rys. 3.3 Wykres funkcji filtracji opisującej filtr MFMBO.

Parametry  $A^2$  i  $b$  muszą być tak dobrane, aby funkcja  $\psi(\omega^2)$  (3.10) była nieujemna dla dowolnej wartości  $\omega$ . Dzięki tym parametrom można dalej optymalizować (w myśl innych kryteriów) funkcję  $\psi(\omega^2)$ . Na rys. 3.3 przedstawiono przykładowo przebieg funkcji  $\psi(\omega^2)$  opisującej filtr MFMB dla dobranych tak parametrów  $A^2$  i  $b$ , aby uzyskać największe nachylenie  $\psi(\omega^2)$  w punkcie  $\omega = 1$ . Dokładniej właściwości tych filtrów są opisane w pracy [75].

Dalsze polepszenie właściwości selektywnych filtru można uzyskać aproksymując IAR charakterystyką prawie maksymalnie płaską ( $k < n - 1$ ) w punkcie  $\omega_0 = b$  ( $0 < b < 1$ ). Uruski [83] wykazał, że rezygnując z maksymalnej płaskości przy  $\omega = b$  na rzecz pewnej płaskości przy  $\omega = 0$ , otrzymuje się charakterystykę tłumieniową o większej stromości przy częstotliwości granicznej  $\omega = 1$  oraz większym tłumieniu asymptotycznym w porównaniu ze stromością i tłumieniem filtru MFMBO. Przykładowy przebieg funkcji  $\psi(\omega^2)$  opisują-

cej, zmodyfikowany przez Uruskiego filtr MFMBQ, przedstawiono na rys. 3.4.



Rys. 3.4 Wykres funkcji filtracji opisującej filtr przedstawiony w pracy [83].

Wszystkie powyższe filtry są filtrami wielomianowymi. Kryterium Taylora z powodzeniem można zastosować do funkcji wymiernej postaci

$$f(\omega^2) = \frac{a_0 + a_2\omega^2 + \dots + a_{2n}\omega^{2n}}{1 + b_2\omega^2 + \dots + b_{2l}\omega^{2l}} \quad (1 \leq n); \quad (3.11)$$

wówczas przy warunkach

- $g(\omega^2) \equiv 0$ ,
- $\omega_0 = 0$ ,
- $k = n - 1$ ,

otrzymuje się [87]

$$\psi(\omega^2) = \frac{a_{2n}\omega^{2n}}{1 + b_2\omega^2 + \dots + b_{2l}\omega^{2l}}, \quad (3.12)$$

przy czym spełnienie warunku (3.8) wymaga, aby zachodziła zależność

$$1 + b_2 + \dots + b_{2l} = a_{2n}.$$

Filtr z powyższą funkcją filtracji nazywany jest w literaturze filtrem maksymalnie płaskim (MF<sup>1)</sup>). Dla charakterystyki MF opisanej wzorem (3.12) istnieje pewna dowolność, jeśli chodzi o położenie zer transmitancji (bieguny  $\psi(\omega^2)$ ) w PZ. Można zbudować filtry MF z pojedynczą parą zer transmitancji ( $l = 2$ ) przy  $s = \mp j\omega_0$  [8], z m-krotną ( $l = 2m$ ) parą przy  $s = \mp j\omega_0$  [67] lub z m rozsuniętymi parami zer tak rozłożonymi, aby otrzymać charakterystykę tłumieniową równomiernie falistą w PZ [12]. Harris [27] pokazał, że charakterystyka tłumieniowa MF z biegunami tłumienia na osi  $j\omega$  i zadany minimalnym tłumieniem w PZ rośnie najszybciej w SP ze wszystkich charakterystyk MF wtedy, gdy  $n$  ( $n$ -parzyste) lub  $n-1$  ( $n$ -nieparzyste) biegunów tłumienia jest tak rozłożonych, że w wyniku otrzymuje się charakterystykę równomiernie falistą w PZ. Filtr o takiej charakterystyce nazywany jest często odwróconym filtrem Czebyszewa (IC<sup>2</sup>).

Kwadrat modułu funkcji filtracji filtru IC można w prosty sposób otrzymać wykorzystując wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju  $T_n(x)$ , wówczas

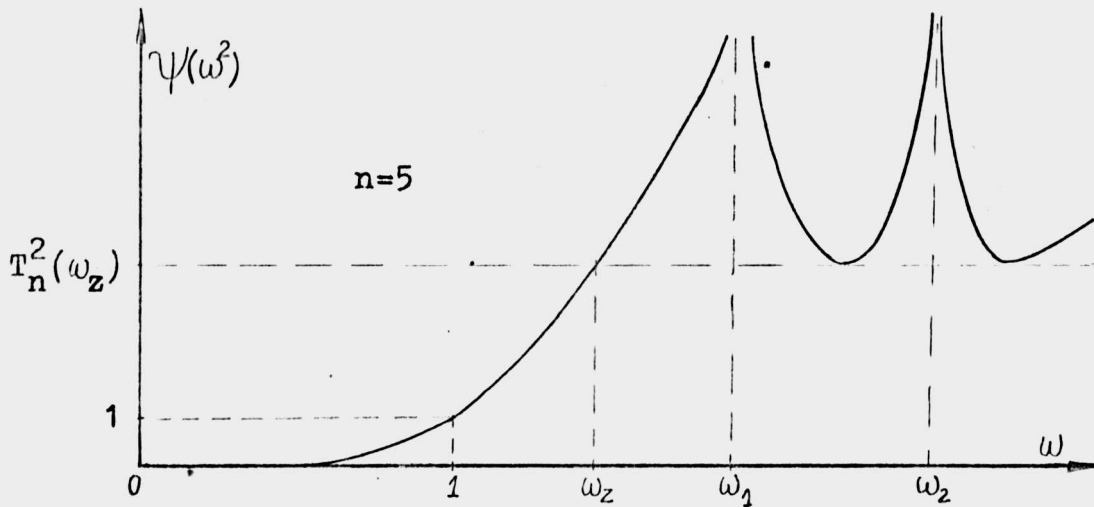
$$\psi(\omega^2) = \left[ \frac{T_n(\omega_z)}{T_n(\omega_z/\omega)} \right]^2, \quad (3.13)$$

---

1) MF - Maximally Flat

2) IC - Inverse Chebyshev

gdzie  $\omega_z$  jest częstotliwością graniczną PZ. Przykładowy przebieg  $\psi(\omega^2)$  opisanej wzorem (3.13) przedstawiono na rys. 3.5.

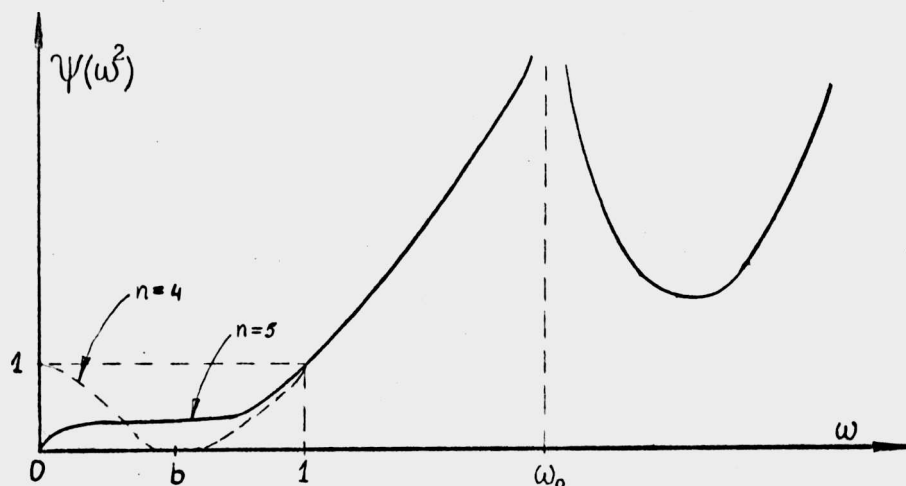


Rys. 3.5 Wykres funkcji  $\psi(\omega^2)$  filtrów IC.

Położenie biegunów funkcji MF (3.12) można ustalić w myśl innego kryterium niż równomierne zafalowania w PZ, a mianowicie można żądać, aby filtr MF przynosił minimalną energię w PZ. Filtry o takich właściwościach nazywane są filtrami MFME [41] (Maximally Flat Minimum Energy) i mogą znaleźć zastosowanie w tych przypadkach, gdy interesują nas właściwości energetyczne filtru, np. na wejściu filtru mamy sygnał o ograniczonym widmie energetycznym i żądamy, aby stosunek energii szumów do energii sygnału był możliwie mały.

Podobnie jak to było dla aproksymacji wielomianowej dalsze polepszenie selektywności filtru, rozumianej jako zwiększenie stromości SP, można uzyskać stosując kryterium Taylora do funkcji wymiernej (3.11) przy warunku  $\omega_0 = b$  ( $0 < b < 1$ ). Jeśli stopień  $k$  w definicji (3.7) równa się  $n-1$ , to wówczas filtry takie nazywane są filtrami MFMBOTZ (Maximally Flat Magnitude Beyond the Origin and Transmission Zeros). W pracach [3] ( $n$ -parzyste), [84] ( $n$ -niepa-

rzyste) zbadano właściwości filtrujące filtrów MFMBOTZ z jednokrotną parą zer transmitancji przy  $s = \mp j\omega_0$ . Pokazano, że istnieje optymalna wartość parametru  $b = b_0$ , przy której stromość charakterystyki tłumieniowej jest największa. Przy odpowiednim położeniu jednokrotnej pary zer transmitancji stromość ta jest większa od stromości charakterystyki MF z wielokrotną parą zer transmitancji. Ponadto tłumienie minimalne i asymptotyczne w PZ filtrów scharakteryzowanych parametrem  $b = b_0$  jest większe od tłumienia filtrów MF. Przykładowy przebieg funkcji  $\psi(\omega^2)$  dla filtrów MFMBOTZ z pojedynczą parą zer transmitancji przedstawiono na rys. 3.6.

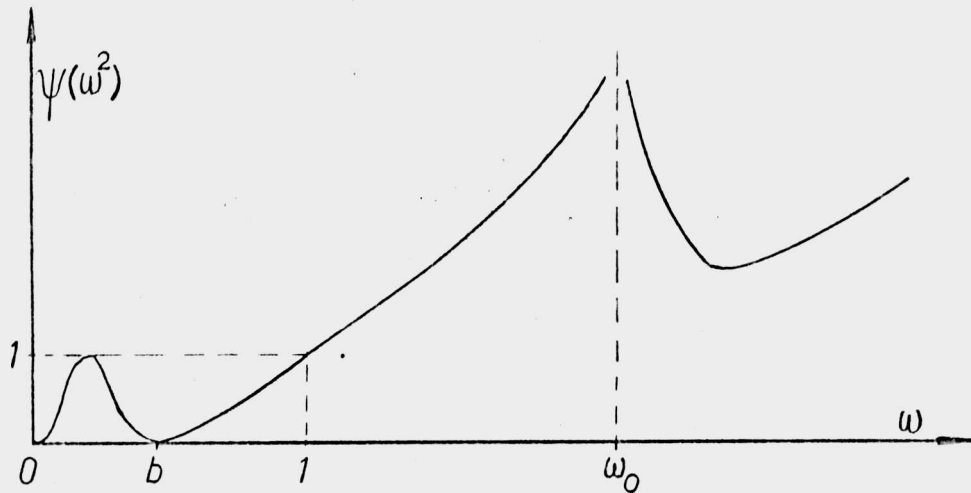


Rys. 3.6 Wykres funkcji  $\psi(\omega^2)$  filtrów MFMBOTZ z pojedynczą parą zer transmitancji przy  $s = \mp j\omega_0$ .

Charakterystykę filtra MFMBOTZ z jednokrotną parą zer transmitancji przy  $s = \mp j\omega_0$  ulepszył Uruski [85]. Pokazał on, że rezygnując z maksymalnej płaskości przy  $\omega = b$  na rzecz pewnej płaskości przy  $\omega = 0$ , otrzymuje się charakterystykę tłumieniową, której stromość jest większa od stromości charakterystyki MFMBOTZ z jednokrotną parą biegunów w PZ. Ponadto filtry otrzymane przez Uruskiego mają większe minimalne i asymptotyczne tłumienie od filtrów z jednokrotną parą biegunów w PZ. Przykładowy przebieg tak zmodyfi-



kowanej funkcji  $\psi(\omega^2)$  przedstawiono na rys. 3.7.



Rys. 3.7 Wykres funkcji filtracji opisującej filtr przedstawiony w pracy [85].

Dalsze polepszenie właściwości tłumieniowych filtrów MFMBOTZ można uzyskać zwiększając liczbę par zer transmitancji leżących na osi  $j\omega$ . Problem ten rozwiązali Rabrenovic i Jovanovic [66]. Pokazali oni sposób konstrukcji funkcji  $\psi(\omega^2)$  filtrów MFMBOTZ z dowolną  $m$  ( $m < n/2$ ) liczbą par zer transmitancji położonych na osi  $j\omega$ .

Na podstawie ostatnio pojawiających się prac [33, 57, 78, 80] można przewidzieć dalszy kierunek rozwoju aproksymacji IAR w ramach omawianego kryterium. Kierunek ten polega, ogólnie biorąc, na rezygnacji z maksymalnej płaskości ( $k=n-1$ ) charakterystyki w zadanym punkcie  $\omega_0$  pasma przepustowego na rzecz pewnej liczby stopni swobody w postaci wolnych współczynników. Funkcje takie, nazywane funkcjami płaskimi, można dalej optymalizować w myśl innych kryteriów czy dodatkowych warunków.

### 3.3. Kryterium całkowe Gaussa (kryterium średniokwadratowe).

Jak już wspomniano w poprzednim punkcie, kryterium Taylora zapewnia, że funkcja aproksymująca  $f(\omega^2)$  przybliży funkcję  $g(\omega^2)$  dokładnie tylko w jednym punkcie, co w przypadku filtrów o szerokim paśmie nie jest rozwiązaniem najbardziej korzystnym. Lepszym rozwiązaniem jest zastosowanie kryterium całkowego Gaussa.

#### Definicja

Uważa się, że funkcja aproksymująca  $f(x)$  przybliży „możliwie dobrze” funkcję aproksymowaną  $g(x)$  w przedziale  $[a, b]$ , jeśli całka kwadratu błędu, tzn. wyrażenie

$$E = \int_a^b p(x) [g(x) - f(x)]^2 dx \quad (3.14)$$

przyjmuje wartość minimalną dzięki odpowiedniemu doborowi parametrów funkcji  $f(x)$ .

Funkcja  $p(x)$  nazywana jest funkcją wagi. Funkcja wagi musi być dodatnią funkcją w przedziale  $[a, b]$  i ponadto taką, aby istniała całka (3.14). Przez umiejętne stosowanie funkcji wagi można wpływać w pożądanym kierunku na właściwości najlepszego przybliżenia, inaczej mówiąc, funkcja  $p(x)$  pozwala lepiej aproksymować | jedne fragmenty przedziału  $[a, b]$  od drugich. Kryterium to ma wyraźny sens fizyczny, mianowicie jeśli funkcją aproksymowaną jest IAR, to stosując powyższe kryterium minimalizuje się przenoszoną lub odbitą (w zależności od postawionego zadania) energię sygnału zawartą w pewnym zakresie częstotliwości  $[a, b]$ . Stąd wynika szczególna przydatność funkcji wagi, bo np. jeśli znany jest rozkład częstotliwościowy energii sygnału, to przez

zastosowanie odpowiedniej funkcji  $p(x)$  można jeszcze bardziej zminimalizować straty energii sygnału.

Wygodnie jest stosować kryterium Gaussa do funkcji filtracji, chociaż ztraca się wtedy nieco sens fizyczny aproksymacji<sup>1)</sup>.

Wzór (3.14) można zapisać jako

$$E = \int_a^b p(x) f^2(x) dx = \int_a^b p(x) F(x^2) dx, \quad (3.15)$$

ponieważ niezależnie od przedziału  $[a, b]$  w aproksymacji IAR z użyciem funkcji filtracji, funkcją aproksymowaną  $g(x)$  jest zawsze funkcja tożsamościowo równa zeru.

Przed przystąpieniem do minimalizacji całki (3.15) należy nałożyć jakieś warunki dodatkowe na funkcję  $f(x)$ , aby nie otrzymać trywialnego rozwiązania  $f(x) \equiv 0$ . Jest zrozumiałe, że ostateczne rozwiązanie musi zależeć od tych warunków dodatkowych, toteż należy je zawsze ściśle sprecyzować. Po procesie minimalizacji całki (3.15) przyjmuje się, że kwadrat modułu funkcji filtracji  $\psi(\omega^2) = F(\omega^2)$ .

Jak wiadomo, aproksymację IAR można przeprowadzać w klasie wielomianów lub funkcji wymiernych.

---

<sup>1)</sup> Na przykład całka

$$\int_0^1 (1 - |K(j\omega)|^2) d\omega = \int_0^1 \frac{\psi(\omega^2)}{1 + \psi(\omega^2)} d\omega \quad (A)$$

jest miarą strat energii sygnału przechodzącego przez filtr w zakresie PP. Zwykle  $\psi(\omega^2) \ll 1$ , toteż powyższa całka w istocie sprowadza się do całki

$$\int_0^1 \psi(\omega^2) d\omega \quad (B)$$

Zatem minimalizacja całki (B) jest tylko w przybliżeniu równoważna minimalizacji całki (A).

W klasie wielomianów najbardziej podstawowym problemem aproksymacji w ramach kryterium Gaussa jest następujący problem (P) : znaleźć wśród wszystkich wielomianów postaci

$$f(\omega) = a_n \omega^n + a_{n-2} \omega^{n-2} + \dots + \begin{cases} a_0 & \text{gdy } n \text{ parzyste,} \\ a_1 \omega & \text{gdy } n \text{ nieparzyste,} \end{cases} \quad (3.16)$$

taki wielomian, dla którego całka (3.15) jest minimalna w przedziale  $[0, 1]$ <sup>1)</sup> przy warunkach

$$\begin{aligned} - p(\omega) &\equiv 1, \\ - f^2(\omega) &\Big|_{\omega=1} = 1. \end{aligned}$$

Dokładny opis rozwiązania tak postawionego problemu można znaleźć w pracach [28, 52, 59]. Otrzymana z rozwiązania tego problemu funkcja  $\psi(\omega^2)$  ma postać

$$\psi(\omega^2) = \left[ \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{dP_{n+1}(\omega)}{d\omega} \right]^2, \quad (3.17)$$

gdzie  $P_{n+1}(x)$  jest wielomianem Legendre'a stopnia  $n+1$  postaci

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}. \quad (3.18)$$

Filtry opisane funkcją (3.17) nazywane są filtrami typu MAL (Modified Associated Legendre polynomials) i zostały wprowadzone

---

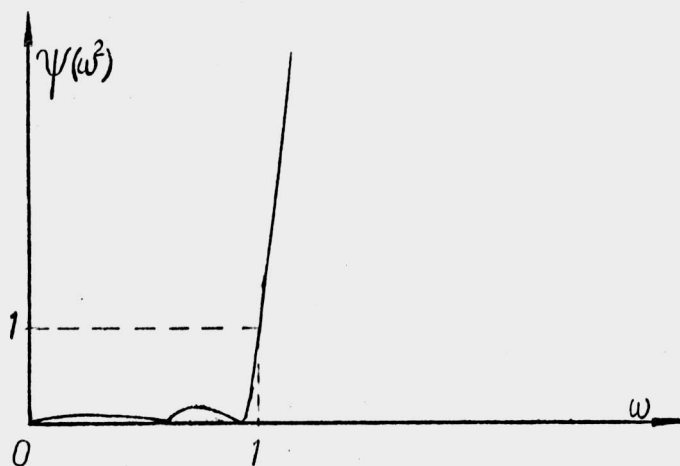
<sup>1)</sup> Przedział  $[0, 1]$  można zamienić na przedział  $[-1, 1]$  z tego względu, że funkcją podcałkową w wyrażeniu (3.15) jest funkcja parzysta.

już w 1962 roku przez Ku i Drubina [38]. Nie sformułowali oni jednak tak problemu, jak to przedstawiono powyżej, tylko badali charakterystyki filtru, gdy za  $\psi(\omega^2)$  podstawili się m-tą pochodną wielomianu Legendre'a, tj. przyjmie się, że

$$\psi(\omega^2) = \left[ C \frac{d^m P_n(\omega)}{d\omega^m} \right]^2 = C^2 \left[ P_n^{(m)}(\omega) \right]^2,$$

gdzie stała  $C$  jest tak dobrana, aby spełnić warunek normalizacyjny (3.4).

Wielomiany  $P_n^{(m)}(x)$  nazywane są stowarzyszonymi wielomianami Legendre'a (associated Legendre polynomials). Przykładowy przebieg  $\psi(\omega^2)$  filtrów MAL przedstawiono na rys. 3.8.



Rys. 3.8 Wykres funkcji  $\psi(\omega^2)$  filtrów MAL.

Rakovich [59] uogólnił powyższy problem  $P$  na przypadek, gdy zamiast funkcji wagi  $p(\omega) \equiv 1$  występuje funkcja  $p(\omega) = (1-\omega^2)^\alpha$  ( $\alpha > -1$ ). Przyjęcie takiej funkcji wagi zostało spowodowane względami rachunkowymi, gdyż wówczas stosunkowo łatwo można podać rozwiązanie takiego problemu za pomocą ortogonalnych wielomianów Gegenbauera. Ogólne rozwiązanie tego problemu jest następujące:

$$\psi(\omega^2) = \left[ \frac{n! \Gamma(2\lambda+2)}{\Gamma(n+2\lambda+2)} C_n^{\lambda+1}(\omega) \right]^2, \quad \lambda = \alpha + 1/2 > -1/2, \quad (3.19)$$

gdzie  $C_n^\lambda(x)$  jest wielomianem Gegenbauera zdefiniowanym jako

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{n! \Gamma(2\lambda)} {}_2F_1(-n; n+2; \lambda+1/2; \frac{1-x}{2}),$$

przy czym  ${}_2F_1(a; b; c; z)$  jest funkcją hipergeometryczną

$${}_2F_1(a; b; c; z) = \sum_{r=0}^n \frac{(a)_r (b)_r}{r! (c)_r} z^r,$$

$$(z)_r = z(z+1)(z+2) \dots (z+r-1), \quad (z \neq 0).$$

Na podstawie ogólnego rozwiązania (3.19) Rakovich pokazał, że dla pewnych wartości  $\alpha$  można otrzymać kwadraty modułu funkcji filtracji, dobrze znanych z innej optymalizacji filtrów i tak gdy:

-  $\alpha = 0$  otrzymał funkcję opisującą filtry MAL (3.18),

-  $\alpha = -1/2$  - funkcję opisującą filtry Czebyszewa drugiego rodzaju, tj.

$$\psi(\omega^2) = \left[ \frac{2^n}{n+1} U_n(\omega) \right]^2, \quad \text{gdzie } U_n(x) \text{ jest wielo-}$$

mianem Czebyszewa drugiego rodzaju, zdefiniowanym jako

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n-m)!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}$$

lub w równoważnej postaci

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{2^n \sqrt{1-x^2}}$$

Wielomian  $U_n(x)$  spełnia, jak wiadomo, tzw. twierdzenie

nie Korkina-Zołotariowa [21], które mówi, że całka

$$\int_{-1}^1 |p_n(x)| dx, \quad (3.20)$$

gdzie  $p_n(x)$  jest wielomianem algebraicznym stopnia  $n$  ze współczynnikiem 1 przy  $x^n$ , jest najmniejsza wtedy, gdy  $p_n(x) = U_n(x)$ . Wzór (3.20) opisuje tzw. aproksymację w przestrzeni  $L$  (pkt 3.6).

Rakovich otrzymał jeszcze następujące przypadki graniczne

- $\alpha = -3/2$  - filtry Czebyszewa,  $\psi(\omega^2) = T_n^2(\omega)$ ,  $T_n$  - wielomian Czebyszewa pierwszego rodzaju (patrz pkt 3.5.),
- $\alpha \rightarrow \infty$  - filtry Butterwortha,  $\psi(\omega^2) = \omega^{2n}$ ,
- $\alpha \rightarrow -1$  - filtry Legendre'a<sup>1)</sup>,  $\psi(\omega^2) = P_n^2(\omega)$ ,  $P_n$  - wielomian Legendre'a zdefiniowany za pomocą wzoru (3.18).

W tym miejscu należy zrobić małą dygresję, gdyż może powstać pytanie: jaka jest geneza filtrów Legendre'a i jak inaczej można otrzymać te filtry?

Historycznie biorąc, początkowo stosując kryterium Gaussa do omawianego na początku niniejszego podrozdziału problemu P, wstawiano w miejsce warunku normalizacyjnego  $f(\omega) \Big|_{\omega=1} = 1$  warunek  $a_n = 1$  (tzn. zakładano, że wielomian  $f(\omega)$  jest wielomianem monicznym). Następnie po rozwiązaniu tak uwarunkowanego problemu, tj. po znalezieniu funkcji monicznej  $F(\omega^2)$  dla której całka (3.15) jest minimalna, dobierano stałą  $C$  w taki sposób, aby funkcja

$$\psi(\omega^2) = CF(\omega^2) \quad (3.21)$$

---

<sup>1)</sup> Filtry Legendre'a często są mylone w literaturze z filtrami typu  $L$  otrzymanymi przez Papoulisa (patrz pkt 3.5).

spełniała warunek normalizacyjny (3.4), tzn. stałą C przyjmowano jako  $C = 1/F(1)$ . Takie podejście powoduje, że problem aproksymacji daje się łatwiej rozwiązać niż w przypadku, gdy od razu się żąda spełnienia warunku normalizacyjnego (3.4). W powyższy sposób np. wykazano [30], że spośród wielomianów monicznych stopnia n najlepiej (w sensie kryterium Gaussa) aproksymuje funkcję  $g(\omega) \equiv 0$ , z funkcją wagi  $(1 - \omega^2)^\alpha$  w przedziale  $-1 \leq \omega \leq 1$ , wielomian będący wielokrotnością wielomianu ultrasferycznego. Znormalizowany wg zależności (3.21) kwadrat modułu funkcji filtracji można wówczas zapisać jako:

$$\psi(\omega^2) = \left[ F_n^\alpha(\omega) \right]^2, \quad (3.22)$$

gdzie

$$F_n^\alpha(\omega) = \frac{n!}{(1+\alpha)_n} P_n^{(\alpha, \alpha)}(\omega), \quad \alpha > -1.$$

Funkcje  $P_n^{(\alpha, \alpha)}$  są wielomianami ultrasferycznymi, które są szczególnym przypadkiem dla  $\beta = \alpha$  wielomianów Jacobiego  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  a

$$(1+\alpha)_n = (1+\alpha)(2+\alpha) \dots (n+\alpha), \quad n=1, 2, \dots$$

$$(1+\alpha)_0 = 1.$$

Ponadto wykazano, że dla pewnych określonych wartości  $\alpha$  można otrzymać następujące funkcje opisujące:

$$\alpha = 0 \quad - \psi(\omega^2) = \left[ P_n(\omega) \right]^2 \quad - \text{filtry Legendre'a,}$$

$$\alpha = -1/2 \quad - \psi(\omega^2) = \left[ T_n(\omega) \right]^2 \quad - \text{filtry Czebyszewa,}$$

$$\alpha = m \quad - \psi(\omega^2) = \left[ \frac{2^m n! m!}{(n+2m)!} P_n^{(m)}(\omega) \right]^2 \quad - \text{filtry Ku i Drubina}$$

oraz przypadek graniczny

$$\alpha \rightarrow \infty \quad - \psi(\omega^2) = \omega^{2n} \quad - \text{filtry Butterwortha.}$$



Jak widać z powyższych przypadków, charakterystyka filtru Legendre'a najlepiej (w sensie kryterium Gaussa) aproksymuje w klasie wielomianów monicznych funkcję tożsamościowo równą zeru przy warunkach, że przedział aproksymacji jest  $[-1, 1]$  oraz  $p(\omega) \equiv 1$ .

Porównując podane powyżej szczególne przypadki z przypadkami otrzymanymi przez Rakoviča, łatwo zauważyć, że dla tych samych wartości  $\alpha$  otrzymano zupełnie inne rezultaty. Należało się tego spodziewać, przecież w obydwu przedstawionych problemach sformułowano inaczej warunki dodatkowe. Konkludując, przy ustalonej wartości  $\alpha$  kwadrat modułu funkcji filtracji otrzymany przez Rakoviča (3.19) daje zawsze mniejszy błąd aproksymacji (3.15) niż kwadrat modułu  $\psi(\omega^2)$  opisany wzorem (3.22). Szczególnie błąd aproksymacji (3.15) funkcji  $\psi(\omega^2)$  dla filtrów MAL jest mniejszy niż błąd funkcji  $\psi(\omega^2)$  dla filtrów Legendre'a!<sup>1)</sup>

Charakterystyka amplitudowa filtrów typu MAL ma pewne zafalowania w PP (rys. 3.8). W praktyce czasem taki przebieg charakterystyki może okazać się niekorzystny, wówczas można zastosować monotoniczne filtry L.S.M (Least-Square Monotonic) wprowadzone przez Rakoviča [58] w 1973 roku. Wielomian  $\psi(\omega^2)$  opisujący filtry L.S.M ma najmniejszy błąd aproksymacji ( $p(\omega) \equiv 1$ ) (3.15) ze wszystkich parzystych wielomianów, które spełniają ponadto warunki:

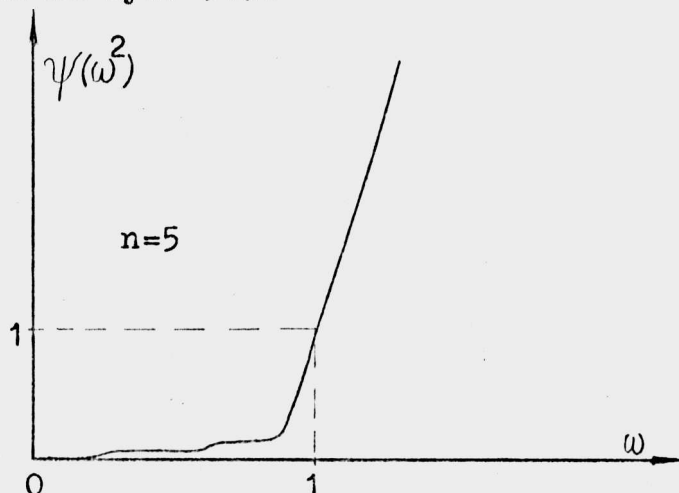
$$1^{\circ} \psi(\omega^2) \Big|_{\omega=1} = 1, \quad \psi(\omega^2) \Big|_{\omega=0} = 0,$$

---

<sup>1)</sup> Zawsze, gdy porównywane są dwie funkcje charakterystyczne opisujące różne filtry, milcząco zakłada się, że są one tego samego stopnia.

$$2^{\circ} \frac{d\psi(\omega^2)}{d\omega} \geq 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (\text{monotoniczność}).$$

Przykładowy przebieg funkcji filtracji opisującej filtry L.S.M. przedstawiono na rys. 3.9.



Rys. 3.9 Wykres funkcji  $\psi(\omega^2)$  dla filtrów L.S.M.

Nie istnieje wzór analityczny na  $\psi(\omega^2)$  filtrów L.S.M. Kwadrat modułu funkcji charakterystycznej tych filtrów znajduje się poprzez rozwiązanie układu nieliniowych równań metodami iteracyjnymi. W roku 1978 Rakovich i Popovich [62] podali w postaci skomplikowanego wzoru stosunkowo dobre przybliżenie funkcji filtracji opisującej filtry L.S.M. Ponadto wykazano [34], że charakterystyka tłumieniowa klasy filtrów monotonicznych, tj. filtrów o monotonicznej charakterystyce tłumieniowej w PP ma dla  $n$  parzystego  $(n/2)-1$ , a dla  $n$  nieparzystego  $(n-1)/2$  punktów przebiegu w PP. Charakterystyka ta ma zatem charakter „schodkowy”.

Dalsze prace prowadzone w ramach omawianego kryterium skoncentrowane zostały przede wszystkim na aproksymacji IAR za pomocą funkcji wymiernej postaci (3.11). W tym przypadku jest zbyt dużo współczynników do optymalizacji, toteż zwykle zakłada się postać mianownika funkcji wymiernej (3.11), np. przyjmuje się, że funkcja

$\sqrt{f(\omega^2)}$  ma pojedynczą parę biegunów tłumienia w PZ [77], m-krotną ( $1=2m$ ) parę [56], dwie rozsunięte pary biegunów tłumienia [55] czy m rozsuniętych par [39], a następnie minimalizuje się całkę (3.15) w przedziale  $[-1, 1]$  przy warunku dodatkowym  $f^2(1) = 1$  (zwykle zakłada się, że  $p(\omega) \equiv 1$ ). Powyższe problemy aproksymacji wymagają rozwiązania pewnego układu równań liniowych, przy czym znane współczynniki występujące w tych równaniach wyrażone są przez dość złożone funkcje.

Najbardziej korzystny przypadek, w sensie minimalnej SP przy zadanym tłumieniu w PZ, otrzymuje się, jeśli m par biegunów  $H(s)$  ( $2m < n$ ) jest tak rozłożone, że w wyniku charakterystyka tłumieniowa ma równomierne zafalowania w PZ. Taki rozkład biegunów tłumienia wymaga użycia metod iteracyjnych, np. metody [69, 82]. Jak się okazuje [39], zaprojektowane w ten sposób filtry mogą, w pewnych przypadkach, konkurować nawet z filtrami eliptycznymi (patrz pkt. 3.4).

Możliwa jest także konstrukcja funkcji filtracji, która opisuje monotoniczną charakterystykę tłumieniową w PP z biegunami tłumienia na osi  $j\omega$ . Poprawnie należałoby minimalizować całkę (3.15) przy warunku, że charakterystyka tłumieniowa ma być monotoniczna w PP i ma m ( $2m < n$ ) par biegunów tłumienia na osi  $j\omega$ <sup>1)</sup>. Tak postawiony problem jest trudny do rozwiązania i zgodnie z poglądami Rakovicha i Litovskiego [61] można go znacznie uprościć. Uproszczenie to polega na tym, że przyjmuje się jako licznik funkcji wymiernej (3.11) wielomian monotoniczny  $\psi(\omega^2)$  opisujący filtry L.S.M,

---

<sup>1)</sup> Szczególnie trudny problem do rozwiązania występuje wówczas, jeśli żąda się dodatkowo takiego rozłożenia biegunów tłumienia, aby charakterystyka tłumieniowa była równomiernie falista w PZ.

a następnie konstruuje się pojedynczą parę biegunów tłumienia na osi  $j\omega$  [58] czy m par biegunów tłumienia tak rozłożonych na osi  $j\omega$ , aby w wyniku uzyskać charakterystykę tłumieniową równomiernie falistą w PZ [61].

Na podstawie ostatnio pojawiających się prac [54, 78, 80] można zauważyć, że (podobnie jak to było przy kryterium Taylora) rezygnuje się z optymalizacji za pomocą kryterium Gaussa wszystkich współczynników funkcji aproksymującej  $f(\omega)$  na rzecz pewnej liczby stopni swobody w postaci wolnych współczynników, za pomocą których można spełnić dodatkowe warunki czy kryteria.

Kryterium Gaussa mimo swojej wyższości nad kryterium Taylora (funkcja  $f(\omega)$  oscyluje wokół funkcji  $g(\omega)$  przybliżając ją dokładnie w wielu punktach) nie znalazło szerokiego zastosowania w problemie aproksymacji IAR. Brak większego zainteresowania tym kryterium wynika przede wszystkim z trudności rachunkowych. Stosowanie metody opartej na wielomianach ortogonalnych prowadzi często do zawiłego algorytmu znajdowania funkcji  $\psi(\omega^2)$  - nierzadko poprzez rozwiązanie pewnego układu równań nieliniowych. Niechęć do stosowania kryterium średniokwadratowego w aproksymacji IAR wynika jeszcze z faktu, że minimalizacja błędu  $E$  (3.15) wcale nie oznacza, że bezwzględna różnica  $|g(\omega) - f(\omega)|$  jest mała dla wszystkich wartości  $\omega$  z przedziału aproksymacji  $[a, b]$ . Mogą więc wystąpić pewne częstotliwości, dla których różnica ta jest szczególnie duża. W wielu praktycznych przypadkach taka sytuacja jest niedopuszczalna (np. zastosowanie takiego filtra w sprzężeniu zwrotnym wzmacniacza może spowodować wzbudzenie się układu na uprzywilejowanych częstotliwościach). W takich przypadkach lepsze wyniki daje stosowanie kryterium Czebyszewa, które gwarantuje, że dla każdej częstotliwości pasma aproksymowanego bezwzględna różnica  $|g(\omega) - f(\omega)|$

nie przekracza zadanej wartości.

### 3.4. Kryterium Czebyszewa

Jak już wspomniano, często nie interesuje nas wartość średnia błędu aproksymacji tylko jego maksymalna wartość. Problemami aproksymacji, gdy za miarę błędu przyjmuje się bezwzględną wartość różnicy funkcji aproksymowanej i aproksymującej, zajmował się Czebyszew, który jest twórcą następującej definicji optymalnej aproksymacji.

#### Definicja

Mówimy, że funkcja  $f(x)$  „najlepiej” (w sensie Czebyszewa) aproksymuje funkcję  $g(x)$  w przedziale domkniętym  $[a, b]$ , jeśli maksymalna wartość bezwzględna błędu jest możliwie mała, tzn.

$$\max p(x) |g(x) - f(x)| \longrightarrow \min. \quad (3.23)$$

Funkcja  $p(x)$ , jak w poprzednim punkcie, jest funkcją wagi.

Zanim będą podane rozwiązania aproksymacji IAR za pomocą wielomianów i funkcji wymiernej w sensie Czebyszewa, najpierw zostaną sformułowane podstawowe określenia i twierdzenia, niezwykle użyteczne przy tego typu aproksymacji.

#### Twierdzenie 1 (Czebyszewa)[2]

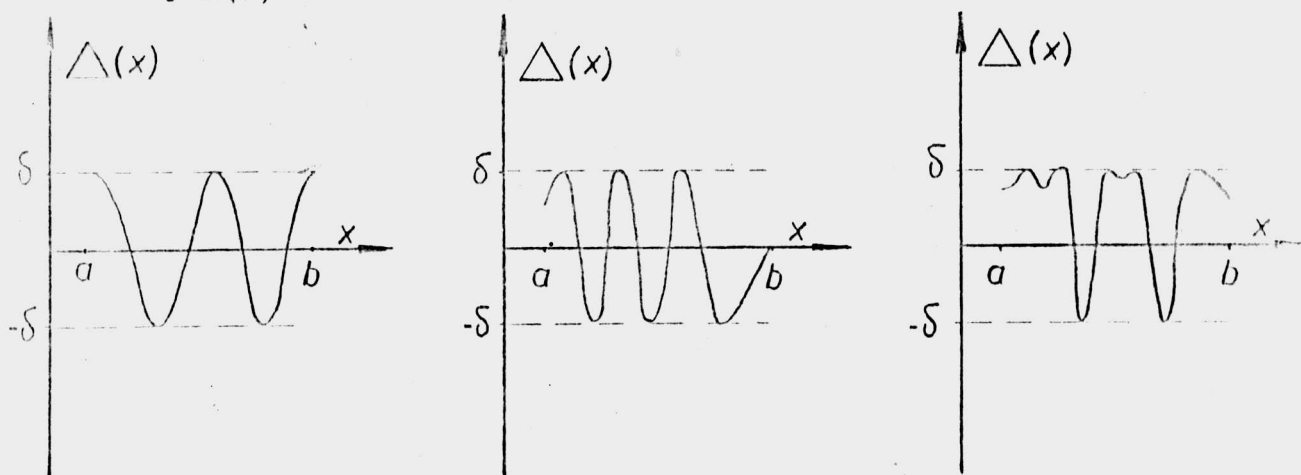
Na to, aby wielomian

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

stopnia  $n$  najlepiej przybliżał (w sensie miary 3.23) ciągłą funkcję  $g(x)$  w przedziale  $[a, b]$ , z funkcją wagi  $p(x)$ , potrzeba i wystarcza, aby w przedziale  $[a, b]$  istniały co najmniej  $n+2$  punkty  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ , w których różnica  $\Delta = p(x)[g(x) - f(x)]$  przyj-

muje ekstremalne wartości równe na przemian  $\delta$  i  $-\delta$ .

Na rys. 3.10. jako przykład, przedstawiono różne przebiegi różnicy  $\Delta(x)$  dla  $n=3$ .



Rys. 3.10 Wykresy różnych możliwych przebiegów funkcji  $\Delta(x)$  przy aproksymacji wielomianem 3-go stopnia.

Należy zwrócić uwagę na możliwy wzrost liczby punktów o rzędnych  $\pm\delta$  w stosunku do liczby  $n+2$ , a także na to, że dla granicznych punktów  $|\Delta(x)|$  może nie być równe  $\delta$ . Następne twierdzenie Czebyszewa o jednoznaczności podaje warunki konieczne i dostateczne dla funkcji najbliższej (w sensie miary (3.23)) funkcji aproksymowanej.

Twierdzenie 2 [2]

Niech  $\bar{a}$  będzie rozwiązaniem zadania aproksymacji postaci

$$\max_{p(x)} |g(x) - f(x, \bar{a})| = \min_{\bar{a}}$$

gdzie

$$f(x, \bar{a}) = \frac{a_1 + a_2x + \dots + a_{n+1}x^n}{a_{n+2} + a_{n+3}x + \dots + a_mx^t},$$

tzn. zadania aproksymacji funkcji  $g(x)$  za pomocą funkcji wymiernej  $f(x, \vec{a})$ .

Oznaczmy

$$\max_{x \in [a, b]} p(x) |g(x) - f(x, \vec{a}^*)| = \delta^* \quad \text{i załóżmy, że}$$

$$f(x, \vec{a}^*) = \frac{a_1^* + a_2^* x + \dots + a_{n+1-v}^* x^{n-v}}{a_{n+2-v}^* + a_{n+3-v}^* x + \dots + a_{m-1-u}^* x^{t-u}}$$

jest ułamkiem właściwym. Wówczas istnieje co najmniej  $N = m - \bar{d} = m - \min\{v, u\}$  punktów przedziału  $[a, b]$ , w którym różnica

$$\Delta(x) = p(x) [g(x) - f(x, \vec{a}^*)]$$

przyjmuje ekstremalne wartości równe na przemian  $\delta^*$  i  $-\delta^*$ .

Liczba  $\bar{d} = \min\{v, u\}$  nazywa się defektem rozwiązania. Zbiór punktów, w których różnica  $\Delta(x)$  przyjmuje ekstremalne wartości równe na przemian  $\delta^*$  i  $-\delta^*$  nazywa się alternansem Czebyszewa lub krótko alternansem.

Zjawisko defektu rozwiązania powstaje stąd, że licznik i mianownik ułamka najlepszego przybliżenia mają jednakowe czynniki lub współczynniki przy wyższych potęgach równają się zero.

Cytowane powyżej twierdzenia leżą u podstaw różnych metod rozwiązywania problemów aproksymacji w sensie metryki Czebyszewa (3.23). Ponadto twierdzenia te są szeroko wykorzystywane do sprawdzania, czy otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym.

Problemami związanymi z poszukiwaniem funkcji najbliższej (w sensie Czebyszewa) zajmowało się wielu badaczy. Istnieje dość bo-

gata literatura dotycząca aproksymacji w sensie metryki (3.23). Rozwój ten jest spowodowany przede wszystkim tym, że jak dotychczas nie istnieje metoda pozwalająca znaleźć funkcję najlepszego przybliżenia dla dowolnej funkcji ciągłej po skończonej liczbie działań; dlatego też powstało szereg twierdzeń pomocniczych i metod iteracyjnych, które pozwalają w przybliżony sposób rozwiązać występujące w praktyce problemy. Metody te nazywane są w literaturze metodami minimaksymalizacji; dokładniej można zapoznać się z nimi np. w pracy [16].

Na szczęście, podstawowe problemy aproksymacji IAR w klasie wielomianów i funkcji wymiernych rozwiązano w sposób analityczny w ramach omawianego kryterium.

Funkcja  $\psi(\omega)$  musi być funkcją nieujemną dla dowolnych wartości  $\omega$ , toteż w większości przypadków przyjmuje się, że  $\psi(\omega) = f^2(\omega)$ , gdzie  $f(\omega)$  jest, tak jak poprzednio, funkcją aproksymującą.

Najbardziej rozpowszechnione są w literaturze trzy rozwiązania dotyczące aproksymacji IAR w sensie Czebyszewa. Pokróćce omówione zostaną w następującej kolejności: filtry Czebyszewa, filtry Żołotariowa-Cauera oraz wymierne filtry Czebyszewa.

#### 1. Filtry Czebyszewa pierwszego rodzaju.

Rozważmy następujący problem: znaleźć wielomian postaci

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

najlepiej przybliżającą funkcję  $g(x) \equiv 0$ , z funkcją wagi  $p(x) = 1$ , w przedziale  $[-1, 1]$ .

Czebyszew w swoim rozwiązaniu posłużył się metodą, która po-



lega na spostrzeżeniu, że w punktach alternansu zachodzi równość  $f^*(x) = \delta^2$ , gdzie  $f^*(x)$  jest wielomianem najlepszego przybliżenia. Ponadto  $f'(x) = 0$  zachodzi w punktach alternansu, które leżą wewnątrz przedziału przybliżania. Punktów alternansu będzie tylko  $n+1$ , gdyż w istocie przy tak postawionym zadaniu przybliżamy  $x^n$  wielomianem stopnia  $n-1$ . Tak więc, jeśli np. punktami przybliżania są:  $-1, x_1, \dots, x_{n-1}, 1$  (nieznane są punkty  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ), to można je wyznaczyć z układu równań

$$\begin{aligned} f^2(1) &= \delta^2, \\ f^2(x_k) &= \delta^2, \quad f'(x_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \\ f^2(-1) &= \delta^2, \end{aligned}$$

w którym liczba  $\delta^2$  jest również niewiadomą. Czebyszew rozwiązał ten układ równań i udowodnił, że tym wielomianem jest

$$f(x) = \tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad \left( \delta = \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Wielomian  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  nazywany jest wielomianem Czebyszewa pierwszego rodzaju. Zauważmy, że

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Następnie, ponieważ

$$\cos(n+2)y + \cos ny = 2 \cos[(n+1)y] \cos y,$$

więc podstawiając do tej równości  $y = \arccos x$ , otrzymuje się dla funkcji  $T_n(x)$  związek rekurencyjny

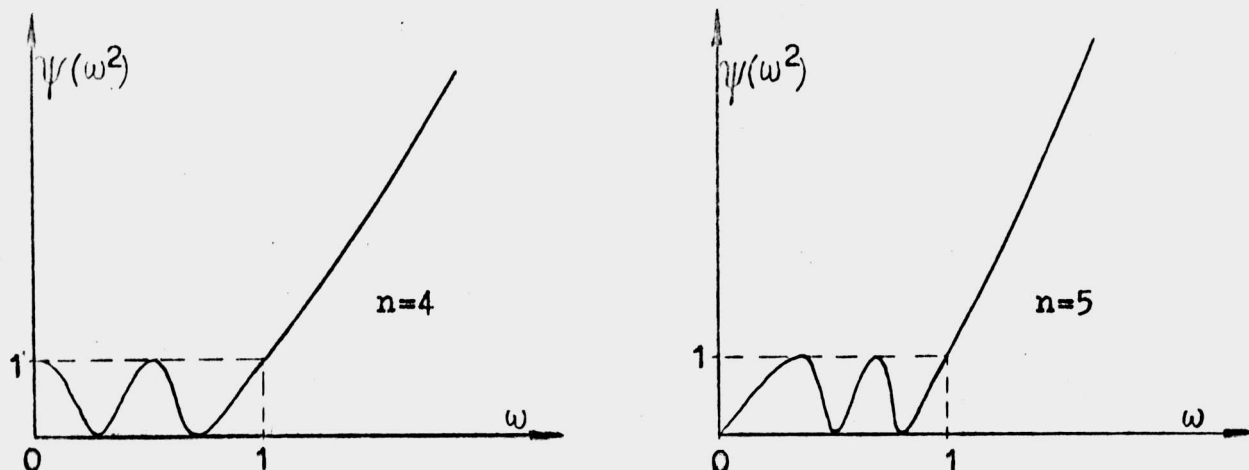
$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), \quad n=0, 1, \dots,$$

z którego wynika, że współczynnik przy najwyższej potędze  $T_n(x)$  jest równy  $2^{n-1}$ .

Filtry opisane funkcją filtracji postaci

$$\psi(\omega^2) = T_n^2(\omega)$$

nazywane są filtrami Czebyszewa pierwszego rodzaju lub w skrócie filtrami Czebyszewa. Przykładowy przebieg  $\psi(\omega^2)$  dla filtrów Czebyszewa przedstawiono na rys. 3.11



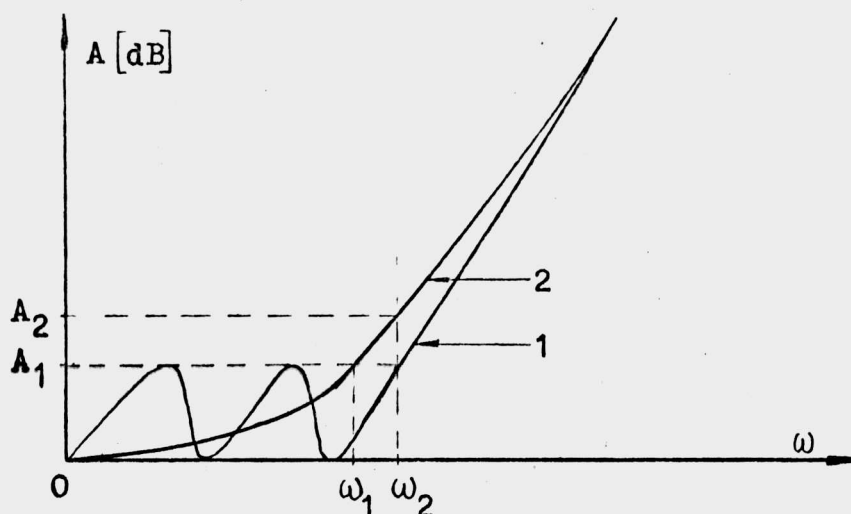
Rys. 3.11 Wykres funkcji  $\psi(\omega^2)$  opisującej filtry Czebyszewa.

Jak wykazano [11, 51, 65] charakterystyka amplitudowa filtru Czebyszewa, zwana także charakterystyką równomiernie falistą, przy danej nierównomierności charakterystyki w PP opada najszybciej w PZ ze wszystkich charakterystyk wielomianowych. Oznacza to, że filtry Czebyszewa, przy zadanej tolerancji tłumieniowej w PP, mają największe asymptotyczne tłumienie (tłumienie dla wielkich częstotliwości) oraz największe nachylenie charakterystyki tłumieniowej przy  $\omega=1$  spośród wszystkich charakterystyk wielomianowych.

Powyższe właściwości selektywne filtru Czebyszewa można opisać jeszcze inaczej, mianowicie można zawsze tak przekształcić

funkcje  $\psi(\omega^2)$  porównywanych filtrów, np. mnożąc je przez odpowiednią stałą czy zmieniając skalę częstotliwości, aby filtry te miały jednakowe asymptotyczne tłumienie. Wówczas charakterystyka Czebyszewa ma w porównaniu z innymi charakterystykami wielomianowymi następujące zalety:

- przy danym paśmie przepustowym pozwala na osiągnięcie minimalnej nierównomierności charakterystyki tłumieniowej wewnątrz tego pasma (rys. 3.12),
- przy danej nierównomierności charakterystyki tłumieniowej wewnątrz pasma pozwala na uzyskanie najszerszego pasma przepustowego (rys. 3.12).



Rys. 3.12 Porównanie charakterystyki Czebyszewa z inną dowolną charakterystyką wielomianową filtru przy założeniu, że obydwie charakterystyki mają takie samo tłumienie asymptotyczne 1 - charakterystyka filtru Czebyszewa, 2 - charakterystyka innego filtru wielomianowego .

Powyższe właściwości są często wykorzystywane we wzmacniaczach pasmowych.

## 2. Filtry Zołotariowa-Cauera

Problem aproksymacji w wyniku którego otrzymuje się charakterystyki filtrów Zołotariowa-Cauera można sformułować następująco: wśród wszystkich funkcji wymiernych postaci

$$f(x) = \frac{a_1 + a_2x + \dots + a_{n+1}x^n}{a_{n+2} + a_{n+3}x + \dots + a_{n+m}x^m}$$

stopnia nie większego niż dana liczba naturalna  $d$  ( $d=n+m$ ) znaleźć taką funkcję  $f(x)$ , dla której funkcja

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ f^{-1}(x) & \text{dla } x > 1 \text{ oraz } x < -1, \end{cases}$$

aproksymuje najlepiej stałą  $G(x)=0$ , w następujących przedziałach:  $[-\infty, -1/\sqrt{k}]$ ,  $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$  oraz  $[1/\sqrt{k}, \infty]$ , gdzie  $k < 1$ , tzn.

$$\max |F(x) - G(x)| \rightarrow \min.$$

Tak postawionym problemem aproksymacji<sup>1)</sup> zajął się wybitny rosyjski matematyk Zołotariow [90]. Zauważył on, że pewne funkcje eliptyczne Jacobiego spełniają twierdzenie 2 Czebyszewa dla tak postawionego problemu, a zatem są one poszukiwanym rozwiązaniem.

---

<sup>1)</sup> Jest to tzw. trzecie zadanie Zołotariowa.

W roku 1931 Cauchy [11] pokazał, że rozwiązanie otrzymane przez Zolotarewa otrzymuje się także poprzez rozwiązanie pewnego równania różniczkowego, gdy odpowiednio zmodyfikuje się powyższy problem.

Rozwiązanie tego problemu jest następujące:

$$f(x) = x \sum_{i=1}^m \frac{x_{2i}^2 - x^2}{1 - x_{2i}^2 x^2} \quad \text{gdy } n=2m+1, \quad (3.24)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{x_{2i-1}^2 - x^2}{1 - x_{2i-1}^2 x^2} \quad \text{gdy } n=2m,$$

przy czym parametry  $x_{2i}$  i  $x_{2i-1}$  są określone wzorami

$$x_{2i} = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2i}{n}K, k\right),$$

$$(i=1, \dots, m)$$

$$x_{2i-1} = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2i-1}{n}K, k\right).$$

Dla obydwu funkcji (3.24) prawdziwa jest zależność

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)},$$

z której wynika ścisły związek przebiegu funkcji w przedziale  $-\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$  z przebiegiem w przedziale  $1/\sqrt{k} \leq x \leq \infty$  oraz  $-\infty \leq x \leq -1/\sqrt{k}$ .

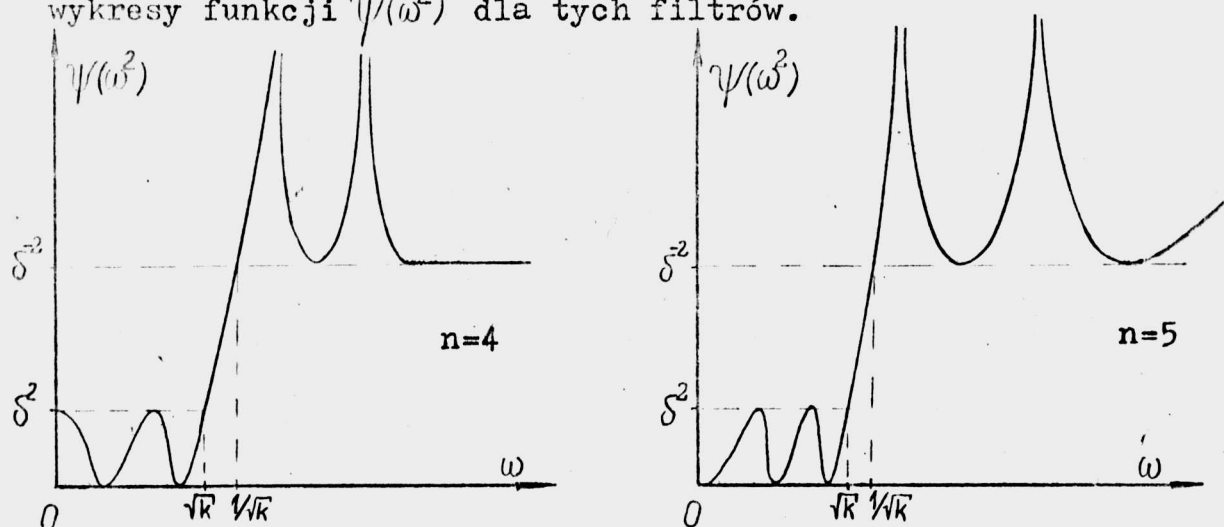
Maksymalną wartość modułu funkcji  $f(x)$  w przedziale  $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$  (a więc i maksymalną wartość modułu funkcji  $f^{-1}(x)$  w przedziałach  $[-\infty, -1/\sqrt{k}]$ ,  $[1/\sqrt{k}, \infty]$ ) wyznacza zależność

$$\delta^2 = k^n \sum_{i=1}^m \operatorname{sn}^4\left(\frac{2i-1}{n}K, k\right) \quad \text{dla } n=2m+1 \text{ i } n=2m.$$

Filtry opisane za pomocą kwadratu modułu funkcji charakterystycznej postaci

$$\psi(\omega^2) = f^2(\omega),$$

nazywane są filtrami Zolotarjowa-Cauera lub filtrami eliptycznymi (z powodu występowania w rozwiązaniu (3.24) funkcji eliptycznej  $\operatorname{sn}$  - sinus eliptycznego). Na rys. 3.13 przedstawiono wykresy funkcji  $\psi(\omega^2)$  dla tych filtrów.



Rys. 3.13 Wykresy funkcji  $\psi(\omega^2)$  opisującej filtry eliptyczne.

Papoulis [51] wykazał, że spośród wszystkich rzeczywistych, nieujemnych dla dowolnej wartości  $\omega$  funkcji  $h(\omega^2)$  stopnia  $n$  względem  $\omega^2$ , funkcja opisująca filtry eliptyczne osiąga najszybciej zadaną stałą  $M^2$  i pozostaje od niej większa, tzn. spełnia zależność  $\psi(\omega^2) > M^2$  dla najmniejszej możliwej wartości  $\omega > \sqrt{k}$ , przy ograniczeniu, że zafalowania w PP nie są większe od ustalonej wartości  $\delta^2$ . Papoulis podał również sposób znalezienia funkcji charakterystycznej filtrów eliptycznych na drodze algebraicznej (poprzez rozwiązanie nieliniowych równań algebraicznych). Filtry eliptyczne zostały nazwane przez niego filtrami optymalnymi.

Algorytm projektowania tych filtrów można znaleźć w pracy [42].

### 3. Wymierne filtry Czebyszewa

Rozpatrzmy następujący problem: wśród wszystkich funkcji wymiernych postaci

$$\frac{N(x, \bar{a})}{M(x)},$$

gdzie  $M(x) = a_{n+2} + a_{n+3}x + \dots + a_m x^t$  jest zadany wielomianem, który nie ma zer w przedziale  $[-1, 1]$ , a

$$N(x, \bar{a}) = a_1 + a_2 + \dots + a_n x^n,$$

znaleźć taką, dla której

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| 0 - \frac{N(x, \bar{a})}{M(x)} \right| = \min. \frac{1}{a}.$$

Rozwiązanie tak postawionego problemu prowadzi do wymiernych funkcji Czebyszewa [15].

Wymierna funkcja Czebyszewa jest bardziej ogólna w porównaniu z wymierną funkcją Zołotariowa-Cauera. Charakterystyka tłumieniowa filtrów opisanych funkcją Zołotariowa-Cauera jest równomiernie falista w PP i PZ; oznacza to, że wszystkie wartości maksymalne w PP są równe i wszystkie wartości minimalne w PZ są także równe. Charakterystyka tłumieniowa wymiernych filtrów Czebyszewa zachowuje, w ogólnym przypadku, równomierną falistość tylko w PP, w PZ z powodu dowolnego położenia biegunów tłumienia równość minimalnych wartości nie zachodzi. Dalej, w porównaniu z funkcjami Zołotariowa-Cauera, których stopień licznika musi być równy sto-

pniowi mianownika lub różnić się od tego stopnia nie więcej niż o jedność, funkcja Czebyszewa nie ma takiego ograniczenia. Dlatego też wielomian  $T_n(x)$  może być rozpatrywany jako szczególny przypadek wymiernej funkcji Czebyszewa. W porównaniu z funkcją Żołotariowa-Cauera nie istnieje analityczne wyrażenie pozwalające optymalnie (w sensie spełnienia różnych żądań odnośnie charakterystyki tłumieniowej w PZ) rozłożyć bieguny funkcji Czebyszewa.

Istnieją metody graficzne [7, 89], a także iteracyjne [6, 69] pozwalające otrzymać optymalne położenie biegunów tłumienia w zakresie PZ. Ostatnio Grinberg i Kacnelson [22, 23] otrzymali interesujące rezultaty odnośnie optymalnego rozłożenia biegunów tłumienia filtrów opisanych wymierną funkcją Czebyszewa w przypadku, gdy żądane tłumienie jest stałe w całym zakresie PZ.

Wymierna funkcja Czebyszewa zapisana za pomocą funkcji trygonometrycznych ma postać

$$f_n(x) = \cos \left[ (l+1) \arccos x + \sum_i l_i \arccos \frac{x_i x - 1}{x_i - x} \right],$$

gdzie

$n$  - stopień wielomianu licznika,

$x_i$  - bieguny funkcji  $f_n(x)$ ,

$l_i$  - krotność bieguna  $x_i$ ,

$l+1$  - różnica między stopniami wielomianu licznika

i mianownika funkcji  $f_n(x)$ .

Funkcja Czebyszewa może przyjmować ujemne wartości, toteż jako kwadrat modułu funkcji charakterystycznej należy przyjąć

$$\psi(\omega^2) = f_n^2(\omega).$$



Wymierna funkcja Czebyszewa ma, podobnie jak funkcja Zolotariowa-Cauera, optymalne właściwości w SP polegające na tym, że poza przedziałem  $[-1, 1]$  przyjmuje ona największą bezwzględną wartość ze wszystkich funkcji wymiernych, które w liczniku mają wielomian stopnia  $n$  przy ustalonym mianowniku, który nie ma zer w przedziale  $[-1, 1]$  i ograniczeniu, że zafalowania w przedziale  $[-1, 1]$  nie są większe od jedności. Wymierna funkcja Czebyszewa osiąga  $n+1$  razy ( $n$  - stopień wielomianu licznika) swoje ekstremalne wartości równe na przemian  $1$  i  $-1$ . Szczególnie nadaje się ona do konstrukcji filtrów pasmowych, których charakterystyki tłumieniowe nie mają geometrycznej symetrii.

Warto wspomnieć, że istnieje inne podejście, które także prowadzi do filtrów mających równomiernie falistą charakterystykę tłumieniową w PP i częstotliwości nieskończonego tłumienia  $\omega_i$  w PZ. Podejście to, ogólnie biorąc, polega na pewnej transformacji zmiennej  $s$ . Odwzorowanie to wybiera się w taki sposób, aby częstotliwości krytyczne na płaszczyźnie przetransformowanej były bardziej od siebie oddalone, przez co uzyskuje się większą dokładność obliczeń. Dokładne szczegóły tej metody projektowej można znaleźć w pracy [46], a program projektowania wymiernych filtrów Czebyszewa w [37].

Omówione w tym punkcie filtry mają korzystne właściwości pasmowe i filtracyjne. W przypadkach gdy interesuje nas tylko charakterystyka tłumieniowa filtru, przedstawione w tym punkcie charakterystyki można uważać za najbardziej efektywne i najekonomiczniejsze aproksymacje IAR. Do ujemnych cech tych filtrów można zaliczyć duże zniekształcenie charakterystyki fazy i niekorzystne właściwości impulsowe. Wady te w wielu przypadkach praktycznych powodują, że sięga się po inne typy aproksymacji, które prowadzą do bardziej kompromisowych rozwiązań.

Istnieją także w ramach kryterium Czebyszewa inne rozwiązania analityczne [21], dotyczące aproksymacji IAR za pomocą funkcji wymiernych z pewnymi funkcjami wagowymi. Rozwiązania te nie mają szerszego zastosowania.

Ostatnio rozwiązano (w sposób iteracyjny) [79] ciekawy przypadek aproksymacji IAR w klasie wielomianów w sensie miary Czebyszewa. Rozwiązanie to polega na tym, że zakłada się pewną płaskość charakterystyki tłumieniowej przy  $\omega=0$ , a następnie dobiera się tak pozostałe współczynniki wielomianu, aby w wyniku uzyskać równomierne zafalowania charakterystyki w PP. Problem ten prowadzi do pośrednich filtrów Butterwortha-Czebyszewa.

### 3.5 Kryterium Papoulisa

Jest rzeczą oczywistą, że w procesie aproksymacji IAR należy dążyć do tego, aby strefa przejściowa charakterystyki tłumieniowej filtru była w miarę minimalna.

Wychodząc na przeciw tym wymaganiom Papoulis [50] w 1958 r. wprowadził kryterium, które polega na maksymalizacji nachylenia charakterystyki tłumieniowej przy końcu PP ( $\omega=1$ ).

Uogólniając na dowolną częstotliwość SP, można symbolicznie zapisać to kryterium jako

$$\left. \frac{f'(\omega^2)}{\omega = \omega_0} \right|_{\omega_0 \geq 1} \rightarrow M_{\max} \quad (3.25)$$

co oznacza, że maksymalizacja nachylenia charakterystyki tłumie-

niowej przy wybranej częstotliwości  $\omega_0$  strefy przejściowej w istocie polega na maksymalizacji pochodnej funkcji aproksymującej  $f(\omega^2)$ .

Łatwo się przekonać, np. biorąc klasę wielomianów spełniających warunek  $f(1)=1$ , że maksymalizacja wyrażenia (3.25) staje się zagadnieniem nierozwiązalnym, jeśli nie narzuci się dodatkowych warunków na przebieg charakterystyki tłumieniowej w PP. Jest to więc kryterium, które może być wykorzystywane zwykle jako dodatkowe, przy stosowaniu innego kryterium, gdy pozostawi się pewną liczbę stopni swobody w postaci wolnych współczynników do dalszej optymalizacji. Istnieją jednak pewne rozwiązania, które opierają się przede wszystkim na tym kryterium i na takich warunkach dodatkowych, aby istniało jednoznaczne rozwiązanie.

I tak, Papoulis [48, 49] oraz Fukada [19] wprowadzili wielomianowe filtry o monotonicznej charakterystyce tłumieniowej w PP i maksymalnym nachyleniu tej charakterystyki przy  $\omega=1$ . Dokładniej, rozwiązali oni następujący problem<sup>1)</sup>: spośród wielomianów parzystych stopnia  $2n$  względem  $\omega$  spełniających warunki

$$1^\circ f(1) = 1, f(0) = 0,$$

$$2^\circ f'(\omega^2) \geq 0 \text{ w przedziale } 0 \leq \omega \leq 1,$$

znaleźć taki wielomian, którego nachylenie przy  $\omega_0=1$  osiąga wartość maksymalną, tzn.

$$3^\circ f'(\omega^2) \Big|_{\omega=1} = M_{\max}.$$

Stosując do powyższego problemu wielomiany ortogonalne Legendre'a  $P_k$  [1] wykazali, że następujące wielomiany spełniają warunki  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  i  $3^\circ$ :

---

<sup>1)</sup> Papoulis rozwiązał najpierw ten problem dla przypadku nieparzystego - a następnie równocześnie z Fukadą - przypadek parzysty.

$$\psi(\omega^2) = \int_{-1}^{2\omega^2-1} v^2(x) dx \quad - \text{gdy } n=2k+1,$$

gdzie

$$V(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + \dots + a_k P_k(x)$$

oraz

$$a_0 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_2}{5} = \dots = \frac{a_k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}(k+1)}$$

i

$$\psi(\omega^2) = \int_{-1}^{2\omega^2-1} \phi(x) dx \quad - \text{gdy } n=2k+2$$

gdzie

$$\phi(x) = B(x+1) \left[ \frac{dP_{k+1}(x)}{dx} \right]^2,$$

przy czym stałą B należy tak dobrać, aby

$$\psi(1) = 1$$

Papoulis (3.26a)

lub

$$\psi(\omega^2) = \int_{-1}^{2\omega^2-1} (x-1) \left[ \sum_{i=0}^k a_i P_i(x) \right]^2 dx \quad - \text{gdy } n=2k+2,$$

gdzie

$$a_0 = \frac{a_2}{5} = \dots = \frac{a_k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}},$$

gdzie k-parzyste

$$\frac{a_1}{3} = \frac{a_3}{7} = \dots = \frac{a_k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}},$$

gdzie k-nieparzyste.

Fukada (3.26b)

Filtry otrzymane przez Papoulisa i Fukadę są nazywane filtrami typu L i, jak już wspomniano, często są mylone z filtrami

Legendre'a.

Halpern [25] w 1969 roku wprowadził wielomiany monotoniczne:

$$\Psi(\omega^2) = \int_0^{\omega} x \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor n/2-1 \rfloor} C_{2i+1} U_{2i+1}(x) \right]^2 dx \quad \text{gdy } n \text{ parzyste,} \quad (3.27)$$

$$\Psi(\omega^2) = \int_0^{\omega} x \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} C_{2i} U_{2i}(x) \right]^2 dx \quad \text{gdy } n \text{ nieparzyste,}$$

gdzie  $C_k$  są stałymi, za pomocą których można optymalizować wyrażenie (3.27), a  $U_k$  są ortogonalnymi wielomianami Jacobiego w przedziale  $0 \leq x \leq 1$  z funkcją wagi  $W(x) = x [1]$ . Pokazał on, że rozwiązanie Papoulisa i Fukady jest szczególnym przypadkiem wielomianów monotonicznych (3.27), a mianowicie dobierając stałe  $C_k$  w ten sposób, że

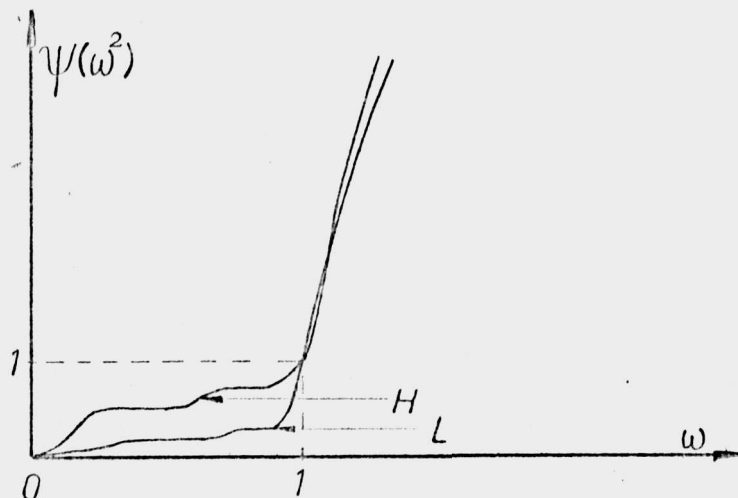
$$C_k = \frac{U_k(1)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{\lfloor n/2-1 \rfloor} U_{2i+1}^2(1)}} \quad \text{gdy } k=2l+1; \quad C_k = \frac{U_k(1)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} U_{2i}^2(1)}} \quad \text{gdy } k=2l, \\ (l=0, \dots, E[(n-1)/2])$$

otrzymuje się rozwiązanie (3.26). Halpern podał również inne rozwiązanie, mianowicie zamiast maksymalizacji nachylenia charakterystyki tłumieniowej przy  $\omega_0=1$  maksymalizował on asymptotyczne tłumienie, tj. maksymalizował wartość wyrażenia (3.27) przy  $\omega \rightarrow \infty$ .

Problem ten w istocie sprowadza się do maksymalizacji współczynnika przy najwyższej potędze wielomianu (3.27).

Filtry wprowadzone przez Halperna są nazywane filtrami typu H. Funkcję charakterystyczną tych filtrów otrzymuje się, jeśli w wy-

rażeniu (3.27) przyjmie się  $C_{n-1}=1$ , a pozostałe współczynniki  $C_k=0$ . Przykładowy przebieg funkcji  $\psi(\omega^2)$  opisującej filtry typu L i H przedstawiono na rys. 3.14.



Rys. 3.14 Przebieg funkcji  $\psi(\omega^2)$  opisującej filtry typu L i H.

Ostatnio Djurich [17] wykazał, że filtry Halperna mają największą selektywność ze wszystkich filtrów o monotonicznej charakterystyce tłumieniowej w PP. Selektywność tę rozumiał on jako zdolność do tłumienia energii białego szumu w PZ.

Dalszym rozwinięciem problemu Papoulisa są filtry o wypukłej charakterystyce tłumieniowej w PP. W pracy [43] po raz pierwszy przedstawiono klasę filtrów o wypukłej charakterystyce tłumieniowej w PP z zerami transmitancji w nieskończoności. Udowodniono tam pewien ogólny warunek konieczny, który musi spełniać kwadrat modułu funkcji charakterystycznej, opisującej te filtry oraz podano metodę analityczną określenia  $\psi(\omega^2)$  w przypadku, gdy za kryterium aproksymacji przyjmie się maksymalne asymptotyczne tłumienie.

Dalszą kontynuacją powyższej pracy było podanie [44] ogólnej metody numerycznej, za pomocą której można wyznaczyć  $\psi(\omega^2)$  filtrów o wypukłej charakterystyce tłumieniowej w PP i o maksymalnym nachyleniu tłumienia przy wybranej częstotliwości  $\omega_0 \gg 1$  pasma za-

porowego.

Filtry monotoniczne i wypukłe mają lepsze właściwości tłumieniowe niż filtry Butterwortha przy jednocześnie niezłej charakterystyce fazy i odpowiedzi na pobudzenie impulsowe.

Ostatnio Roy i Varanasi [86], posługując się omawianym wyżej kryterium, rozwiązali ciekawy problem aproksymacji IAR, prowadzący do pośrednich filtrów Butterwortha-Czebyszewa. Poszukiwali oni wśród wielomianów parzystych względem  $\omega$  stopnia  $2n=RN$  postaci

$$f(\omega^2) = [(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \dots (\omega - \omega_R)]^N,$$

przy czym  $\omega_i \in [-1, 1]$ , takiego wielomianu, który ponadto spełnia następujące warunki:

- $f(1) = 1$ ,
- zafalowania  $f(\omega^2)$  w przedziale  $[-1, 1]$  nie przewyższają jedności,
- $f'(\omega^2) \Big|_{\omega=1} = M_{\max}$ .

Pokazali oni, że żądane właściwości mają następujące wielomiany:

$$\begin{aligned} \psi(\omega^2) &= [T_R(\omega)]^N && \text{- gdy } N \text{ parzyste,} \\ \text{lub} &&& \\ \psi(\omega^2) &= \frac{1 + \{k [T_{R/2}(\omega)]^2 - 1\}^N}{1 + (k - 1)^N} && \text{- gdy } N \text{ nieparzyste,} \end{aligned}$$

przy czym  $k$  jest rzeczywistym pierwiastkiem równania  $(k-1)^N - nk + 1 = 0$ , a  $T_R$  jest wielomianem Czebyszewa pierwszego rodzaju. Można zauważyć, że dla  $N=2$  otrzymuje filtry Czebyszewa.

Wydaje się, że kryterium podane po raz pierwszy przez Papoulisa może przynieść wiele cennych rezultatów, jeśli zamiast klasy

wielomianów rozważy się klasę nieujemnych dla dowolnej wartości  $\omega$  funkcji wymiernych, przy nałożonych pewnych ograniczeniach na przebieg charakterystyki tłumieniowej w PP (np. żądanie monotoniczności czy wypukłości charakterystyki) i biegunach tłumienia położonych na osi  $j\omega$ .

Są to jednak zagadnienia bardzo trudne do rozwiązania analitycznego.

### 3.6. Wnioski

Przedstawione w niniejszym rozdziale kryteria, wykorzystywane w aproksymacji IAR, stanowią doskonałe narzędzie do projektowania różnego typu filtrów. Kryteria te mają wyraźny sens fizyczny i zazwyczaj nie wymagają stosowania skomplikowanych metod, za pomocą których można otrzymać pożądane wyniki.

W teorii aproksymacji można również spotkać inne miary będące syntetycznym wskaźnikiem, mówiącym o jakości przybliżania jednej funkcji za pomocą drugiej. Dla określenia jakości aproksymacji w przestrzeniach abstrakcyjnych, tj. przestrzeniach, w których nie znamy samych elementów, lecz tylko właściwości jakie one spełniają, wprowadza się pojęcie metryki. Metryka - to kryterium, za pomocą którego można rozstrzygnąć, czy dana funkcja lepiej czy gorzej przybliży drugą funkcję. Na przykład metrykami całkowymi mogą być następujące miary

$$E = \int_a^b p(x) |g(x) - f(x)| dx \quad (\text{tzw. aproksymacja w przestrzeni } \mathbb{L}_{p(x)})$$



czy

$$E = \frac{1}{2m} \sqrt[2m]{\int_a^b p(x) |g(x) - f(x)|^{2m} dx} \quad (\text{tzw. aproksymacja w przestrzeni } L_{p(x)}^{2m}, m=1, 2, \dots).$$

Powyższe miary, z wyjątkiem aproksymacji w przestrzeni  $L_{p(x)}^2$  (kryterium Gaussa), nie są stosowane w aproksymacji IAR z następujących powodów:

- nie mają interpretacji fizycznej,
- są kłopotliwe w stosowaniu,
- nie wnoszą istotnych zmian jakościowych w aproksymacji.

Ostatni powód wymaga pewnego objaśnienia. Otóż z teorii aproksymacji w przestrzeniach abstrakcyjnych wynika, że przestrzenie  $L, L^2, L^4, \dots, C^1$  można pod względem właściwości ich metryk uporządkować następująco:

$$L, L^2, L^4, \dots, L^{2m}, C.$$

W ten sposób wyraża się fakt, że im wskaźnik  $m$  przestrzeni  $L^{2m}$  jest większy, tym jej metryka jest bliższa metryce w przestrzeni  $C$ . Oznacza to, że im większe jest  $m$  tym silniej metryka przestrzeni  $L^{2m}$  reaguje na duże odchylenia funkcji  $g(x)$  i  $f(x)$  od siebie, choćby w bardzo małej części przedziału  $[a, b]$ . Zatem dla dużych  $m$  funkcje  $g(x)$  i  $f(x)$  są sobie bliskie w metryce  $L^{2m}$  tylko wtedy, gdy w prawie całym przedziale nie różnią się one za dużo. Natomiast metryka przestrzeni  $L$  reaguje na te odchylenia najskąbiej. Tak więc przybliżanie w sensie metryk  $L, L^4, L^{2i}$  nie prowadzi do

---

<sup>1)</sup>  $C$  - jest to przestrzeń funkcji ciągłych w przedziale  $[a, b]$ , w której określona jest metryka  $E = \max_{a \leq x \leq b} p(x) |g(x) - f(x)|$ .

istotnych z praktycznego punktu widzenia korzyści.

Wydaje się, że oprócz przedstawionych w niniejszym rozdziale kryteriów, nie ma w praktyce potrzeby stosować w problemach aproksymacji IAR innych kryteriów, znanych z teorii aproksymacji w przestrzeniach abstrakcyjnych.

Warto wspomnieć na zakończenie przedstawionego przeglądu literaturowego, że istnieje wiele prac dotyczących aproksymacji IAR, w których nie używa się żadnych kryteriów, np. prace [9, 31, 32, 38, 60, 63]. Prace te, ogólnie biorąc, polegają na tym, że pod kwadrat modułu funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$  podstawia się różne wielomiany lub funkcje wymierne, a następnie bada się charakterystyki otrzymanego w ten sposób filtru. Prace te niewątpliwie mają duży aspekt poznawczy, jednak w zastosowaniach praktycznych przedstawiają mniejszą wartość niż prace dotyczące filtrów o charakterystykach optymalnych.

#### 4. FILTRY WYPUKŁE I-TEGO RZEDU

##### 4.1. Sformułowanie problemów

Z punktu widzenia syntezy filtrów interesujące są następujące problemy aproksymacji: spośród wielomianów parzystych stopnia  $2n$  względem  $x$ , spełniających warunki

$$1^{\circ} h(x) \Big|_{x=0} = 0$$

$$2^{\circ} h(x) \Big|_{x=1} = 1 \quad (\text{normalizacja})$$

$$3^{\circ} h^{(i)}(x) \geq 0 \quad \text{w przedziale } 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{wypukłość } i\text{-tego rzędu } i=1, 2, \dots, 2n-3)$$

znaleźć taki wielomian, który poza tym spełnia jeden z niżej podanych warunków:

- nachylenie wielomianu przy  $x=x_0 \geq 1$  osiąga wartość maksymalną, tzn.

$$4^{\circ} a \quad h^{(1)}(x) \Big|_{x=x_0 \geq 1} = M_{\max} \quad (\text{problem A1}),$$

- wartość wielomianu przy  $x=x_0 > 0$  osiąga wartość ekstremalną, tzn.

$$4^{\circ} b \quad h(x) \Big|_{x=x_0 > 1} = M_{\max} \quad \text{lub} \quad h(x) \Big|_{x=x_0 < 1} = M_{\min} \quad (\text{problem B}),$$

- wartość całki w przedziale  $[a, b]$  z wielomianu  $h(x)$  osiąga wartość ekstremalną, tzn.

$$4^{\circ} c \quad \int_a^b h(x) dx = M_{\min} \quad - \text{gdy } 0 \leq a < b \leq 1 \quad \text{lub} \quad \int_a^b h(x) dx = M_{\max} \quad - \text{gdy}$$

$$1 \leq a < b < \infty \quad (\text{problem C1}).$$

Symbol  $h^{(i)}(x)$  oznacza  $i$ -tą pochodną wielomianu  $h(x)$ . Zmieniając ponadto nieznacznie warunki  $1^{\circ}$ ,  $2^{\circ}$  i  $3^{\circ}$ , można w pewnym sensie rozszerzyć powyższe problemy aproksymacji na przypadek gdy  $i=0$ , wówczas symbol  $h^{(0)}(x)$  oznacza po prostu  $h(x)$ . Wtedy sens praktyczny mają tylko następujące, odpowiednio zmodyfikowane problemy aproksymacji: spośród wielomianów parzystych stopnia  $2n$  względem  $x$ , spełniających warunek normalizacyjny  $2^{\circ}$  oraz

$$3^{\circ\circ} \quad h(x) \geq 0 \text{ dla wszystkich } x \text{ (znak równości może zachodzić tylko w przedziale } -1 < x < 1),$$

znaleźć taki wielomian, który poza tym spełnia jeden z niżej podanych warunków:

- nachylenie wielomianu  $h(x)$  przy  $x=x_0 \geq 1$  osiąga wartość maksymalną, tzn.

$$4^{\circ\circ a} \quad h^{(1)}(x) \Big|_{x=x_0} = M_{\max}, \quad (\text{problem A2})$$

- wartość całki w przedziale  $[0, 1]$  z wielomianu  $h(x)$  osiąga wartość minimalną, tzn.

$$4^{\circ\circ c} \quad \int_0^1 h(x) dx = M_{\min}. \quad (\text{problem C2})$$

W powyższych problemach zakłada się, że  $M_{\max}$  i  $M_{\min}$  są wielkościami większymi od zera.

#### 4.2. Ogólna postać poszukiwanych wielomianów

Zostanie teraz wykazany pewien ogólny warunek konieczny dla wielomianu będącego rozwiązaniem problemów A, B i C.

##### Twierdzenie A

Wielomian optymalny  $h^{(i)}(x)$ , tzn. spełniający warunki  $1^{\circ}$ ,  $2^{\circ}$ ,

$3^0$  i  $4^0$  lub  $2^0$ ,  $3^{00}$  i  $4^{00}$  ma postać

$$h^{(i)}(x) = xV^2(x) \quad \text{gdy } i \text{ jest nieparzyste}$$

lub

$$h^{(i)}(x) = V^2(x) \quad \text{gdy } i \text{ jest parzyste,} \quad (i=0, 1, \dots, 2n-3)^1)$$

przy czym  $V(x)$  jest wielomianem parzystym lub nieparzystym stopnia  $n-k$  ( $k=E\left[\frac{i+1}{2}\right]$ <sup>2)</sup>), którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste i leżą w przedziale  $(-1, 1)$ .

Dowód dla problemu A1 (warunki  $1^0$ ,  $2^0$ ,  $3^0$  i  $4^0$ a)

Przypadek gdy  $i$  jest nieparzyste.

Wielomian  $h^{(i)}(x)$  jest wielomianem nieparzystym stopnia  $2n-i$ ; spełnienie warunku  $3^0$  wymaga, aby jego zera (o ile takie występują) w przedziale  $0 < x < 1$  były parzystej krotności. Zatem wielomian ten można przedstawić w postaci

$$h^{(i)}(x) = xV^2(x)q(x),$$

gdzie  $V^2(x)$  jest wielomianem mającym tylko rzeczywiste zera parzystej krotności w przedziale  $-1 < x < 1$ , a  $q(x)$  - wielomian parzysty nie mający zer w przedziale  $-1 < x < 1$  oraz taki, że

$$q(x) > 0 \text{ dla } -1 < x < 1.$$

Zostanie teraz pokazane, przez doprowadzenie do sprzeczności, że

---

<sup>1)</sup>  $i=0$  traktowane jest jako liczba parzysta .

<sup>2)</sup> Symbol  $E$  (entier) oznacza część całkowitą liczby.

spełnienie warunków 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> i 4<sup>o</sup>a wymaga, aby  $h^{(i)}(x)$  miał postać

$$h^{(i)}(x) = xV^2(x),$$

przy czym  $V(x)$  jest wielomianem parzystym lub nieparzystym stopnia  $n-k$ , tzn., że stopień  $q(x)$  musi być równy zeru.

Niech wielomian  $xV^2(x)q(x)$  będzie wielomianem optymalnym, tzn. spełniający założenia 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> i 4<sup>o</sup>a i niech stopień wielomianu  $q(x)$  jest równy  $2l \neq 0$ .

Warunki 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> i 4<sup>o</sup>a można zapisać w równoważnej postaci

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) q(x_1) dx_1 = 1 \quad (4.1)$$

$$\int_0^{x_0} dx_{i-1} \int_0^{x_{i-1}} dx_{i-2} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) q(x_1) dx_1 = M_{\max}^{(1)} \quad (4.2)$$

oraz

$$q(x) > 0 \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

Łatwo zauważyć, że przez odpowiedni dobór stałej  $a^2$  można zawsze spełnić warunek

$$\int_0^{x_0} dx_{i-1} \int_0^{x_{i-1}} dx_{i-2} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) (a^2 - x_1^2) dx_1 = 0. \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup> Gdy  $i=1$  wyrażenie (4.2) należy interpretować jako

$$x_0 V^2(x_0) q(x_0) = M_{\max}.$$

Mogą teraz wystąpić dwa przypadki.

I Przypadek gdy  $a^2 \leq 1$

Konstruujemy nowy wielomian

$$G(x) = xV^2(x)q_1(x),$$

gdzie  $q_1(x) = A[q(x) - \varepsilon(a^2 - x^2)]$ ,  $A > 0$  i  $\varepsilon > 0$  jest dostatecznie małe, aby wielomian  $q_1(x)$  pozostawał wielomianem dodatnim w przedziale  $-1 < x < 1$ .

Zgodnie z założeniem wielomian  $q(x)$  jest wielomianem co najmniej stopnia drugiego, toteż stopień wielomianu  $q_1(x)$  nie ulega zmianie. Spełnienie warunku normalizacyjnego 2<sup>o</sup> wymaga, aby zachodziła zależność

$$\begin{aligned} & A \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_{1-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) [q(x_1) - \varepsilon(a^2 - x_1^2)] dx_1 = \\ & A \left[ 1 - \varepsilon \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_{1-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) (a^2 - x_1^2) dx_1 \right] = 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Wielomian  $xV^2(x)(a^2 - x^2)$  ma tylko jedno pojedyncze zero leżące na dodatniej półosi  $x$ . W przedziale  $0 \leq x \leq a$  przyjmuje on wartości nieujemne, a w przedziale  $a \leq x \leq \infty$  - wartości niedodatnie. Wielomian

$$\int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) (a^2 - x_1^2) dx_1$$

ma również tylko jedno zero pojedyncze w punkcie  $b > a$ . Także w przedziale  $0 \leq x_2 \leq b$  przyjmuje on wartości nieujemne, a w prze-

dziale  $b \leq x_2 \leq \infty$  - wartości niedodatnie. Rozumując analogicznie, dochodzi się do wniosku, że wielomian

$$F(x_i) = \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) (a^2 - x_1^2) dx_1$$

musi mieć także tylko jedno zero pojedyncze na dodatniej półosi  $x_i$ . Zgodnie z założeniem (4.3) wielomian  $F(x_i)$  przyjmuje wartość równą zero w punkcie  $x_i = x_0$ . Zatem tym zerem może być tylko  $x_0 \geq 1$ . Z powyższych rozważań wynika, że wielomian  $F(x_i)$  jest na pewno nieujemny w przedziale  $0 \leq x_i \leq 1$ , toteż z równania (4.4), które można zapisać teraz jako

$$A \left[ 1 - \varepsilon \int_0^1 F(x_i) dx_i \right] = 1,$$

wynika, że  $A > 1$ .

Nowy wielomian  $G(x)$  daje większe nachylenie przy  $x = x_0$ , gdyż uwzględniając (4.3) otrzymuje się

$$A \int_0^{x_0} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) [q(x_1) - \varepsilon (a^2 - x_1^2)] dx_1 = AM_{\max} > M_{\max}.$$

Jest to sprzeczne z założeniem, że wielomian  $xV^2(x)q(x)$  jest wielomianem optymalnym. Zatem stopień 2l wielomianu  $q(x)$  jest równy zero, a stałą zawsze można włączyć do wielomianu  $V(x)$ .

II Przypadek gdy  $a^2 > 1$

W tym przypadku nowy wielomian  $G(x)$  ma postać

$$G(x) = xV^2(x)q_2(x),$$



gdzie

$$q_2(x) = A[q(x) - \varepsilon(a^2 - x^2) + \varepsilon(a^2 - 1)],$$

$A > 0$  i  $\varepsilon > 0$  jest dostatecznie małe, aby wielomian  $q_2(x)$  pozostał wielomianem dodatnim w przedziale  $-1 < x < 1$ . Tak jak poprzednio stopień wielomianu  $q_2(x)$  jest równy stopniowi  $q(x)$ . Spełnienie warunku normalizacyjnego  $2^0$  wymaga, aby zachodziła zależność

$$A \int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) [q(x_1) - \varepsilon(a^2 - x_1^2) + \varepsilon(a^2 - 1)] dx_1 =$$

$$A \left[ 1 - \varepsilon \int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) (1 - x_1^2) dx_1 \right] = 1.$$

Rozumując analogicznie jak w I przypadku łatwo pokazać, że funkcja

$$F(x_i) = \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) (1 - x_1^2) dx_1$$

jest nieujemna w przedziale  $0 \leq x_i \leq 1$ , toteż z równania

$$A \left[ 1 - \varepsilon \int_0^1 F(x_i) dx_i \right] = 1$$

wynika, że  $A > 1$ .

Nowy wielomian  $G(x)$  daje także większe nachylenie przy  $x = x_0$ , gdyż uwzględniając (4.3) otrzymuje się

$$A \int_0^{x_0} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) [q(x_1) - \varepsilon(a^2 - x_1^2) + \varepsilon(a^2 - 1)] dx_1 =$$

$$AM_{\max} + \varepsilon A(a^2 - 1) \int_0^{x_0} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1 V^2(x_1) dx_1 > AM_{\max} > M_{\max}$$

Zatem i w tym przypadku przeczy to założeniu, że stopień 21

wielomianu  $q(x)$  jest różny od zera.

Dowód dla problemu A1, gdy  $i$  jest parzyste, przeprowadza się w analogiczny sposób i z tego powodu nie będzie tutaj przytaczany. W identyczny sposób można przeprowadzić dowód dla problemu B. Natomiast dla problemu C1 ogólna koncepcja dowodu pozostaje taka sama, ulegają zmianie tylko pewne szczegóły. Zostanie teraz pokazany dowód dla problemu C1 tylko gdy  $i$  jest parzyste, gdyż dla  $i$  nieparzystego nie ulega on istotnym zmianom.

Dowód dla problemu C1 (warunki 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> i 4<sup>o</sup>c)

Przypadek gdy  $i$  jest liczbą parzystą.

Wielomian  $h^{(i)}(x)$  jest wielomianem parzystym stopnia  $2n-i$ ; spełnienie warunku 3<sup>o</sup> wymaga, aby jego zera (jeśli takie występują) w przedziale  $-1 < x < 1$  były parzystej krotności. Zatem analogicznie jak w problemie A1 wielomian ten można zapisać jako

$$h^{(i)}(x) = v^2(x)q(x),$$

gdzie  $v^2(x)$  jest wielomianem mającym tylko rzeczywiste zera parzystej krotności w przedziale  $-1 < x < 1$ , a  $q(x)$  - wielomian parzysty nie mający zer w przedziale  $-1 < x < 1$  oraz taki, że

$$q(x) > 0 \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

Zostanie teraz pokazane przez doprowadzenie do sprzeczności, że spełnienie warunków 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> i 4<sup>o</sup>c wymaga, aby  $h^{(i)}(x)$  miał postać

$$h^{(i)}(x) = v^2(x),$$

tzn. stopień wielomianu  $q(x)$  musi być równy zeru.

Niech zatem wielomian  $v^2(x)q(x)$  będzie wielomianem optymalnym, tzn. spełniający warunki:

$$\int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} v^2(x_1) q(x_1) dx_1 = 1$$

$$\int_a^b dx_{i+1} \int_0^{x_{i+1}} dx_i \dots \int_0^{x_2} v^2(x_1) q(x_1) dx_1 = M_{\text{ekst}}^{(1)}$$

oraz

$$q(x) > 0 \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

Łatwo zauważyć, że przez odpowiedni dobór stałej  $c^2$  można spełnić warunek

$$\int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} v^2(x_1) (c^2 - x_1^2) dx_1 = 0. \quad (4.5)$$

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w dowodzie dla problemu A1 (I przypadek) nietrudno zauważyć, że może zachodzić tylko przypadek  $c^2 < 1$ .

Można teraz skonstruować nowy wielomian

$$G(x) = v^2(x)q_1(x),$$

gdzie  $q_1(x) = q(x) - \varepsilon(c^2 - x^2)$ , a  $\varepsilon > 0$  jest dostatecznie małe, aby wielomian  $q_1(x)$  pozostawał wielomianem dodatnim w przedziale  $-1 < x < 1$ . Nowy wielomian  $G(x)$  spełnia warunek normalizacyjny, gdyż uwzględniając (4.5) otrzymuje się

$$\int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} v^2(x_1) [q(x_1) - \varepsilon(c^2 - x_1^2)] dx_1 =$$

$$\int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} v^2(x_1) q(x_1) dx_1 = 1.$$

---

<sup>1</sup>  $M_{\text{ekst}} = M_{\text{min}}$  gdy  $0 \leq a < b \leq 1$  lub  $M_{\text{ekst}} = M_{\text{max}}$  gdy  $1 \leq a < b \leq \infty$ .

Natomiast warunek 4<sup>o</sup>c jest lepiej spełniony przez nowy wielomian  $G(x)$ , gdyż

$$\int_a^b dx_{i+1} \int_0^{x_{i+1}} dx_i \dots \int_0^{x_2} V^2(x_1) [q(x_1) - \varepsilon(c^2 - x_1^2)] dx_1 =$$

$$M_{\text{ekst}} - \varepsilon \int_a^b F(x_{i+1}) dx_{i+1} \lesssim M_{\text{ekst}},$$

ponieważ funkcja

$$F(x_{i+1}) = \int_0^{x_{i+1}} dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} V^2(x_1) (c^2 - x_1^2) dx_1,$$

jak to wynika z zależności (4.5) jest nieujemna w przedziale  $[a, b]$ , gdy  $0 \leq a < b \leq 1$  lub jest niedodatnia w przedziale  $[a, b]$ , gdy  $1 \leq a < b < \infty$ . Jest to więc sprzeczne z założeniem, że wielomian  $V^2(x)q(x)$  jest wielomianem optymalnym. Zatem stopień 2l wielomianu  $q(x)$  jest równy zeru.

Dowód dla problemu A2 (warunki 2<sup>o</sup>, 3<sup>oo</sup> i 4<sup>oo</sup>a, i=0)

Wielomian  $h(x)$  można przedstawić jako

$$h(x) = V^2(x)q(x),$$

gdzie  $V^2(x)$  jest wielomianem mającym tylko zera parzystej krotności z przedziału  $-1 < x < 1$ , a  $q(x)$  - wielomian parzysty nie mający zer w przedziale  $-1 < x < 1$  oraz taki, że

$$q(x) > 0 \text{ dla wszystkich } x.$$

Zostanie teraz pokazane, przez doprowadzenie do sprzeczności, że spełnienie warunków 2<sup>o</sup>, 3<sup>oo</sup> i 4<sup>oo</sup> wymaga, aby wielomian  $h(x)$  miał postać

$$h(x) = v^2(x),$$

tzn. stopień  $q(x)$  musi być równy zeru.

Niech wielomian  $v^2(x)$  będzie wielomianem optymalnym, tzn. spełniającym założenia 2<sup>o</sup>, 3<sup>oo</sup> i 4<sup>oo</sup> i niech stopień wielomianu  $q(x)$  jest równy  $2l \neq 0$ .

Można teraz skonstruować nowy wielomian

$$G(x) = v^2(x)q_1(x),$$

gdzie  $q_1(x) = A[q(x) - \varepsilon(x_0^2 - x^2)]$ ,  $A > 0$  i  $\varepsilon > 0$  jest dostatecznie małe, aby wielomian  $q_1(x)$  pozostawał wielomianem dodatnim dla dowolnych  $x$ .

Spełnienie warunku normalizacyjnego 2<sup>o</sup>

$$Av^2(x)[q(x) - \varepsilon(x_0^2 - x^2)] = A[1 - \varepsilon v^2(1)(x_0^2 - 1)] = 1,$$

wymaga aby  $A \geq 1$ , gdyż  $v^2(1)(x_0^2 - 1) > 0$  ( $x_0 \geq 1$ ).

Nowy wielomian  $G(x)$  daje jednak większe nachylenie przy  $x=x_0$ , gdyż

$$G(x) \Big|_{x=x_0 \geq 1} = AM_{\max} + 2\varepsilon x_0 v^2(x_0) > M_{\max}.$$

Jest to więc sprzeczne z założeniem, że wielomianem  $v^2(x)q(x)$  jest wielomianem optymalnym. Zatem stopień  $2l$  wielomianu  $q(x)$  jest równy zeru.

Przez doprowadzenie do sprzeczności można także łatwo przepro-

wadzić dowód dla problemu C2 (warunki  $2^0$ ,  $3^{00}$  i  $4^{00c}$ ,  $i=0$ ).  
Dowód ten można znaleźć w dodatku do pracy [41].

#### 4.3 Jednoznaczność rozwiązania

Zostanie teraz pokazane, że jeśli istnieje wielomian optymalny, tj. spełniający warunki  $1^0$ ,  $2^0$ ,  $3^0$  i  $4^0$  lub  $2^0$ ,  $3^{00}$  i  $4^{00}$ , to wielomian ten może być tylko jeden.

Dowód tego stwierdzenia również łatwo przeprowadzić metodą doprowadzenia do sprzeczności z założeniami.

Niech zatem  $i$  będzie liczbą parzystą i niech istnieją dwa różne wielomiany optymalne  $h_1(x)$  i  $h_2(x)$ . Wówczas zgodnie z twierdzeniem A  $i$ -ta pochodna tych wielomianów ma postać

$$h_1^{(i)}(x) = V_{n-k}^2(x),$$

$$h_2^{(i)}(x) = W_{n-k}^2(x),$$

przy czym  $V_{n-k}(x) = W_{n-k}(x)$  są wielomianami parzystymi lub nieparzystymi stopnia  $n-k$  ( $k = E[(i+1)/2]$ ), których wszystkie pierwiastki są rzeczywiste i leżą w przedziale  $-1 < x < 1$ . Łatwo sprawdzić, że wielomian

$$h_3(x) = \frac{1}{2}[h_1(x) + h_2(x)] \quad (4.6)$$

również spełnia warunki  $1^0$ ,  $2^0$ ,  $3^0$  i  $4^0$  lub  $2^0$ ,  $3^{00}$  i  $4^{00}$ ; zatem jest to też wielomian optymalny, a stąd  $i$ -ta pochodna tego wielomianu musi być kwadratem pewnego wielomianu parzystego lub nieparzystego  $Z_{n-k}(x)$ . Ponadto biorąc pod uwagę (4.6) powinna

zachodzić zależność

$$h_3^{(1)}(x) = Z_{n-k}^2(x) = \frac{1}{2} [V_{n-k}^2(x) + W_{n-k}^2(x)].$$

Wszystkie pierwiastki wielomianu  $Z_{n-k}(x)$  muszą również być rzeczywiste i leżeć w przedziale  $-1 < x < 1$ . To jednak może zachodzić tylko w przypadku gdy zera wielomianu  $V_{n-k}(x)$  i  $W_{n-k}(x)$  są identyczne, czyli gdy  $V_{n-k}(x) = W_{n-k}(x)$ . Jest to więc sprzeczne z założeniem, że wielomiany  $h_1(x)$  i  $h_2(x)$  są różne.

5. FILTRY WYPUKŁE I-TEGO RZĘDU O MAKSYMALNYM NACHYLENIU  
 CHARAKTERYSTYKI TŁUMIENIOWEJ PRZY WYBRANEJ CZĘSTOTLIWOŚCI  
 PASMA ZAPOROWEGO (problem A)

5.1. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem A1 -  
filtry  $W_{A1}^1$ )

Problem aproksymacji A1 sprowadza się ostatecznie do znalezienia takiego wielomianu parzystego lub nieparzystego  $V_{n-k}(x)$ , dla którego całka

$$h(x) \Big|_{x=x_0} = \int_0^{x_0} dx_{i-1} \int_0^{x_{i-1}} dx_{i-2} \dots \int_0^{x_2} x_1^p V_{n-k}^2(x_1) dx_1 \quad (5.1)$$

osiąga wartość maksymalną przy dodatkowym warunku normalizacyjnym

$$h(x) \Big|_{x=1} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1^p V_{n-k}^2(x_1) dx_1 = 1, \quad (5.2)$$

przy czym w powyższych wzorach:  $p=0$  - gdy  $i$  jest liczbą parzystą lub  $p=1$  - gdy  $i$  jest liczbą nieparzystą.

Rozwiązanie analityczne tak postawionego problemu dla dowolnego  $i$  ( $i=1, \dots, 2n-3$ ) i  $x_0$  nie jest możliwe. Sprowadzając jednak powyższy problem do zagadnienia ekstremalizacji formy kwadratowej, można zbudować stosunkowo prosty algorytm znajdowania optymalnego wielomianu  $V_{n-k}(x)$ .



Zapiszmy wielomian  $V_{n-k}(x)$  w postaci

$$V_{n-k}(x) = a_{n-k}x^{n-k} + a_{n-k-2}x^{n-k-2} + \dots + \begin{cases} a_0 & - n-k - \text{parz.} \\ a_1x & - n-k - \text{niep.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Wówczas zależność (5.1) można zapisać w postaci następującej formy kwadratowej

$$h'(x) = a^t B a, \quad (5.4)$$

gdzie  $a = [a_{n-k}, a_{n-k-2}, \dots]^t$  jest wektorem kolumnowym współczynników  $a_{n-k-(2l-2)}$ ,  $l=1, \dots, m$  ( $m = E[\frac{2n-i}{4} + 1]$ ) oraz  $B = [b_{lj}]$  jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$b_{jl} = b_{lj} = \int_0^{x_0} dx_{1-1} \int_0^{x_{i-1}} dx_{i-2} \dots \int_0^{x_2} x_1^{2n-2l-2j-i+4} dx_1 =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)_{i-1}} x_0^{2n-2l-2j+3}, \quad (l, j=1, \dots, m) \quad (5.5)$$

gdzie

$$(1+\alpha)_p = (1+\alpha)(2+\alpha) \dots (p+\alpha),$$

$$(1+\alpha)_0 = 1,$$

$$\alpha = 2n - 2l - 2j - i + 4.$$

Natomiast warunek (5.2) można zapisać w postaci

$$h(1) = a^t D a = 1, \quad (5.6)$$

gdzie  $D = [d_{ij}]$  jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$d_{1j} = d_{j1} = \int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1^{\alpha} dx_1 = \frac{1}{(1 + \alpha)_i}, \quad (5.7)$$

$$i, j = 1, \dots, m,$$

gdzie symbol  $(1 + \alpha)_i$  jest zdefiniowany tak samo jak we wzorze (5.5).

Zatem problem znalezienia optymalnego wielomianu  $V_{n-k}(x)$  sprowadza się do znalezienia wektora  $a$ , dla którego forma kwadratowa  $F_1 = a^t B a$  osiąga wartość maksymalną przy warunku dodatkowym  $F_2 = a^t D a = 1$ .

Zależności (5.2) i (5.6) wskazują, że macierz  $D$  jest macierzą dodatnio określoną. Wobec tego można ją przedstawić w postaci  $D = K^t K$  [20], gdzie  $K$  jest nieosobliwą macierzą trójkątną dolną.

Stosując teraz do  $F_1$  i  $F_2$  przekształcenie liniowe zmiennych  $a = K^{-1} b = L b$ , problem sprowadza się do znalezienia wektora  $b$ , dla którego forma kwadratowa  $F_1 = b^t L^t B L b = b^t A b$  osiąga wartość maksymalną przy warunku dodatkowym  $F_2 = b^t L^t K^t K L b = b^t b = 1$ . Z teorii form kwadratowych [20] wiadomo, że największa wartość  $F_1 = b^t A b$ , przy warunku  $b^t b = 1$ , jest równa największej wartości własnej  $\lambda_m$  macierzy  $A$ , tzn. można ją znaleźć z równania  $\det(A - \lambda_m 1_m) = 0$ , a wektor  $b_m$ , przy którym to zachodzi jest unormowanym wektorem własnym  $b_m^t b_m = 1$  macierzy  $A$ , odpowiadającym wartości  $\lambda_m$ , czyli  $(A - \lambda_m 1_m) b_m = 0$ .

Z przeprowadzonych rozważań wynika więc następujący algorytm wyznaczania optymalnej funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$ , która jest  $i$ -tego ( $i=1, 2, \dots, 2n-3$ ) rzędu wypukła w PP i ma maksymalne nachylenie przy wybranej częstotliwości  $\omega_0 \gg 1$  PZ:

Algorytm A1

1. Wyznaczyć za pomocą zależności (5.5) i (5.7) macierze B i D.
2. Przeprowadzić faktoryzację macierzy  $D=K^t K$ , gdzie K jest nieosobliwą macierzą trójkątną dolną.
3. Wyznaczyć macierz odwrotną  $K^{-1}=L$ .
4. Znaleźć największą wartość własną  $\lambda_m$  i odpowiadający jej unormowany wektor własny  $b_m$  ( $b_m^t b_m=1$ ) macierzy  $A=L^t B L$ .
5. Obliczyć wektor  $a_m=L b_m$ .
6. Wyznaczyć funkcję filtracji 
$$\psi(\omega^2) = \int_0^\omega dx_1 \dots \int_0^{x_2} x_1^p V_{n-k}^2(x_1) dx_1$$
( $p=0$  - i parzyste,  $p=1$  - i nieparzyste).

Algorytm powyższy znacznie się upraszcza w przypadku gdy  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , tzn. gdy żąda się, aby funkcja  $\psi(\omega^2)$  była i-tego rzędu wypukła w PP i jej asymptota pochyła miała największy współczynnik nachylenia. Otrzymana w tym granicznym przypadku funkcja  $\psi(\omega^2)$  ma największe nachylenie (odpowiada to jednocześnie największej wartości tłumienia dla dużych  $\omega$ ) w punkcie  $\omega_0 \rightarrow \infty$ . Mówi się wówczas, że filtr o takiej charakterystyce ma największe asymptotyczne tłumienie. Maksymalizacja asymptotycznego tłumienia sprowadza się więc do maksymalizacji współczynnika stojącego przy najwyższej potędze wielomianu  $V_{n-k}(x)$  przy warunku normalizacyjnym (5.2).

Macierz B ma wówczas następującą postać

$$b_{11}=1,$$

$$b_{1j}=b_{j1}=0, \quad 1, j=1, \dots, m \text{ (z wyjątkiem } i=j=1),$$

tzn. macierz B można przedstawić jako

$$B=qq^t,$$

gdzie  $q = [1, 0, 0, \dots, 0]^t$  jest wektorem kolumnowym wymiaru  $m$ .

Cały problem w tym szczególnym przypadku sprowadza się, tak jak poprzednio, do znalezienia największej wartości własnej formy kwadratowej  $F_1 = b^t A b$  ( $A = L^t B L$ ) przy warunku  $b^t b = 1$ . Macierz  $B$  jest rzędu jeden i ponieważ  $L$  jest nieosobliwą trójkątną macierzą dolną, przeto największą wartością własną macierzy  $A$  jest  $\lambda_m = q^t L L^t q = q^t C^{-1} q$ , a odpowiadający jej wektor własny

$$b_m = \frac{L^t q}{\sqrt{q^t L L^t q}} = q.$$

Ostatecznie powyższy problem redukuje się do problemu faktoryzacji dodatnio określonej macierzy  $D = K^t K$ , gdzie  $K$  jest nieosobliwą macierzą trójkątną dolną i wyznaczenia macierzy odwrotnej  $L = K^{-1}$ , a poszukiwany wektor współczynników  $a_1$  ma postać

$$a = L q.$$

## 5.2 Wnioski

Na podstawie algorytmu A1 wyznaczono wielomiany  $\psi(\omega^2)$  dla różnych wartości  $i$  i  $\omega_0 \geq 1$ . Następnie zgodnie z zależnościami podanymi w rozdziale 2 obliczono pożądane charakterystyki filtrów. Na rysunkach 5.1, 5.2, 5.3 (problem A1,  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) oraz 5.4, 5.5, 5.6 (problem A1,  $\omega_0 = 1$ ) przedstawiono najważniejsze charakterystyki, opisujące właściwości rozpatrywanych filtrów; kolejno są to: charakterystyka tłumieniowa, opóźnienia grupowego i odpowiedź filtru na pobudzenie skokiem jednostkowym  $1(t)$ . Z przedstawionych rysunków wynika, że

- otrzymane filtry mają charakterystyki pośrednie między charakterystykami filtru monotonicznego ( $i=1$ ) oraz Butter-

wortha ( $i=2n-3$ ),

- ze wzrostem  $i$ , przejście z jednej charakterystyki na drugą odbywa się nierównomiernie, duży „skok” ilościowy i jakościowy obserwuje się dla pierwszych dwóch wskaźników  $i=1, 2$  (patrz także - tabela 5.1 i 5.2) oraz stosunkowo niewielki dla pozostałych,
- parametr  $\omega_0$  wpływa w istotny sposób tylko na przebieg charakterystyki tłumieniowej w zakresie PP.

Przedstawione rysunki potwierdzają znany fakt, że polepszenie charakterystyki tłumieniowej w zakresie PP odbywa się kosztem pogorszenia tłumienia w PZ oraz im mniejsze zafalowania ma charakterystyka tłumieniowa w PP, tym lepsza jest charakterystyka grupowego opóźnienia i czasowa odpowiedź filtru. W tabeli 5.1 i 5.2 przedstawiono przykładowo kwadrat modułu funkcji filtracji rozpatrywanych w tym punkcie filtrów aż do siódmego stopnia włącznie.

Należy zaznaczyć, że w przedstawionym uogólnieniu problemu aproksymacji IAR można odnaleźć znane z literatury filtry, mianowicie gdy

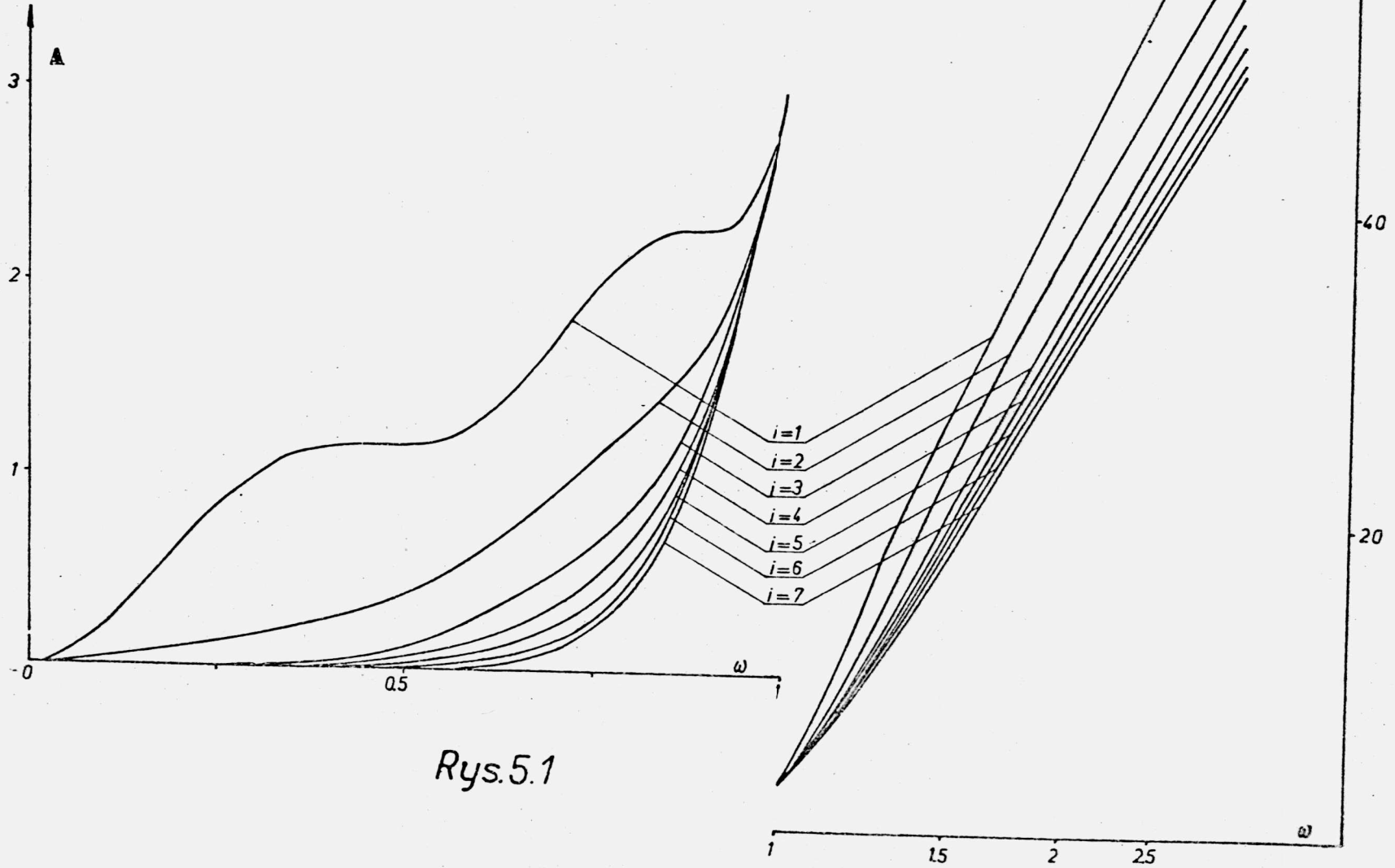
- $i=1, \omega_0=1$  - filtry typu L,
- $i=1, \omega_0 \rightarrow \infty$  - filtry typu H,
- $i=2, \omega_0 \geq 1$  - filtry typu  $W_{[44]}$ ,
- $i=2n-3$  - filtry typu B.

Jest ciekawą rzeczą, że funkcje  $\psi(\omega^2)$  dla  $i \geq 1$  i  $\omega_0 \rightarrow \infty$  (rys. 5.1) mają jednakowe nachylenie przy  $\omega=1$ , które wynosi  $2n$ . Fakt ten oznacza, że wszystkie te funkcje przechodzą przez  $\omega=1$  pod tym samym kątem co funkcja opisująca filtr Butterwortha.

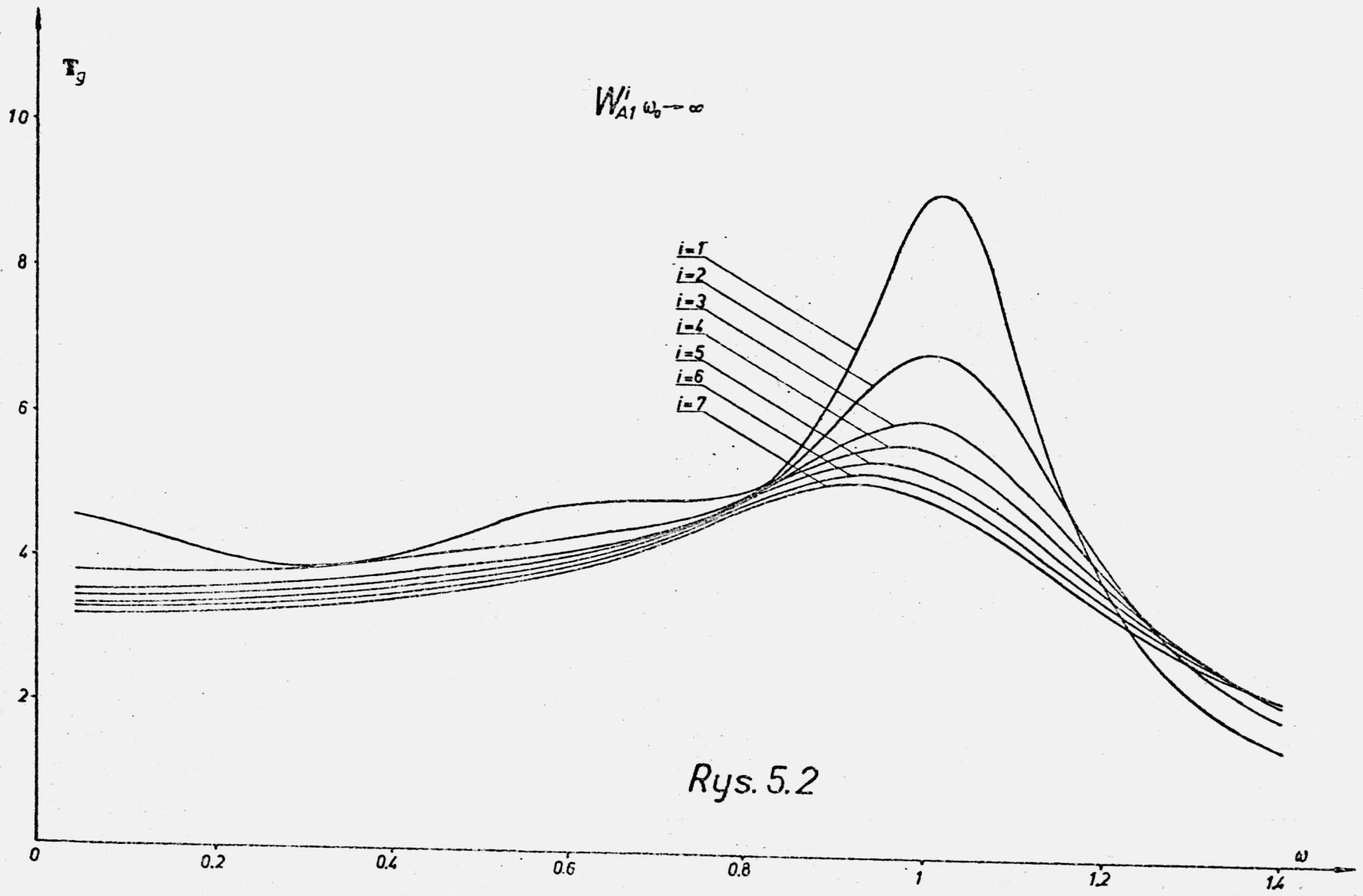
Wnioski przedstawione powyżej dla  $n=5$  nie ulegają istotnym zmianom dla wyższych stopni  $n$ .

$$A = 10 \lg[1 + \psi(\omega^2)]$$

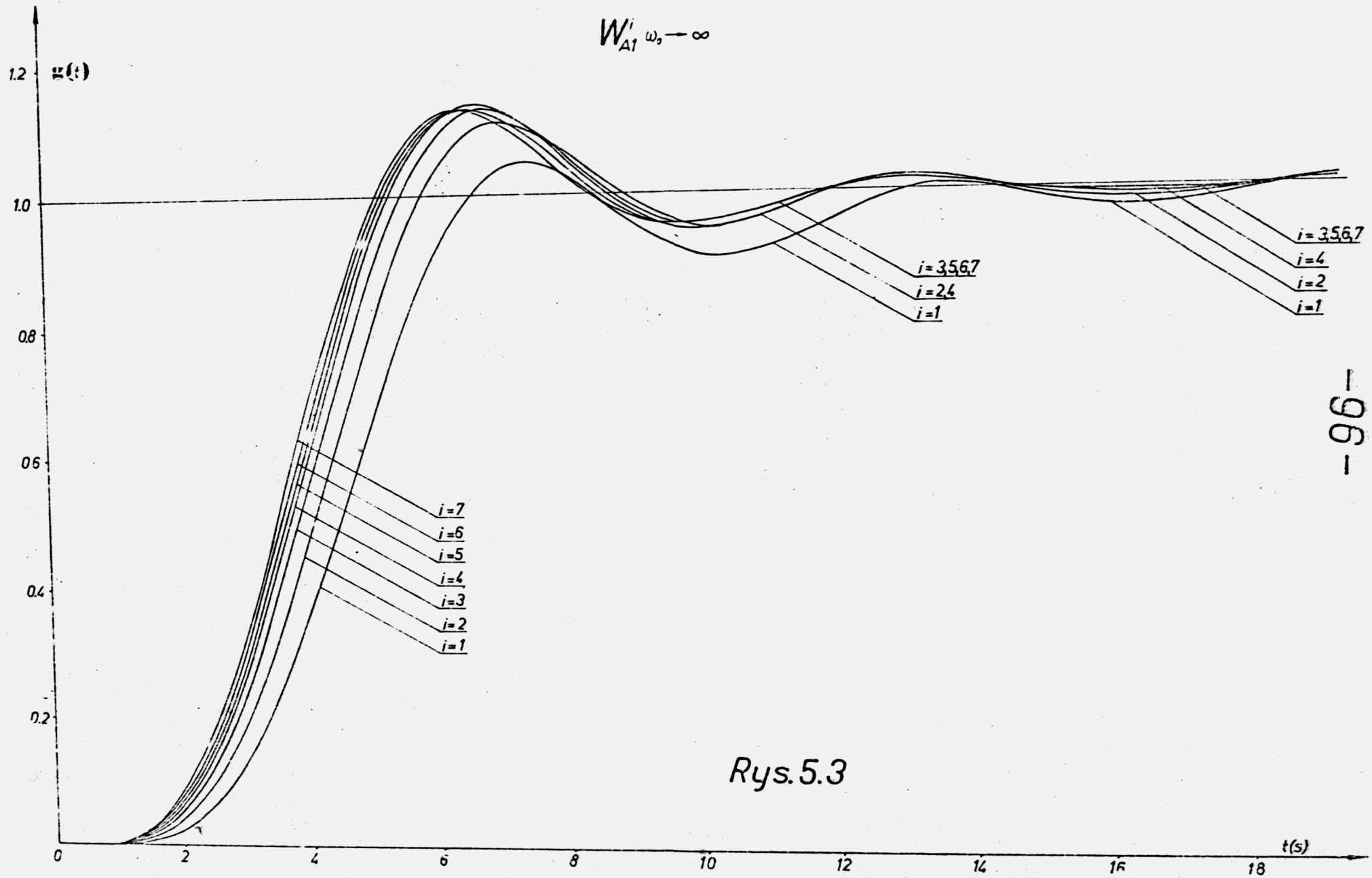
$$W_{A1}^i \omega_0 \rightarrow \infty$$



Rys.5.1



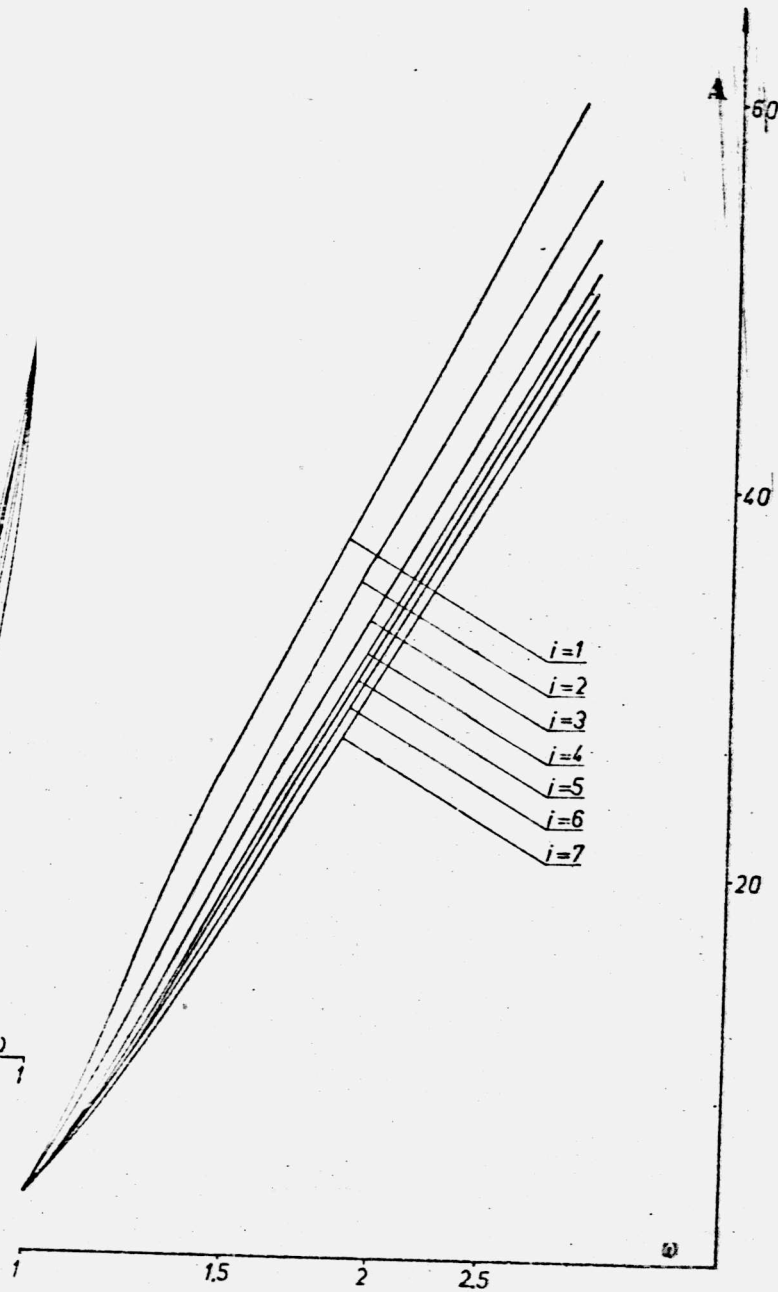
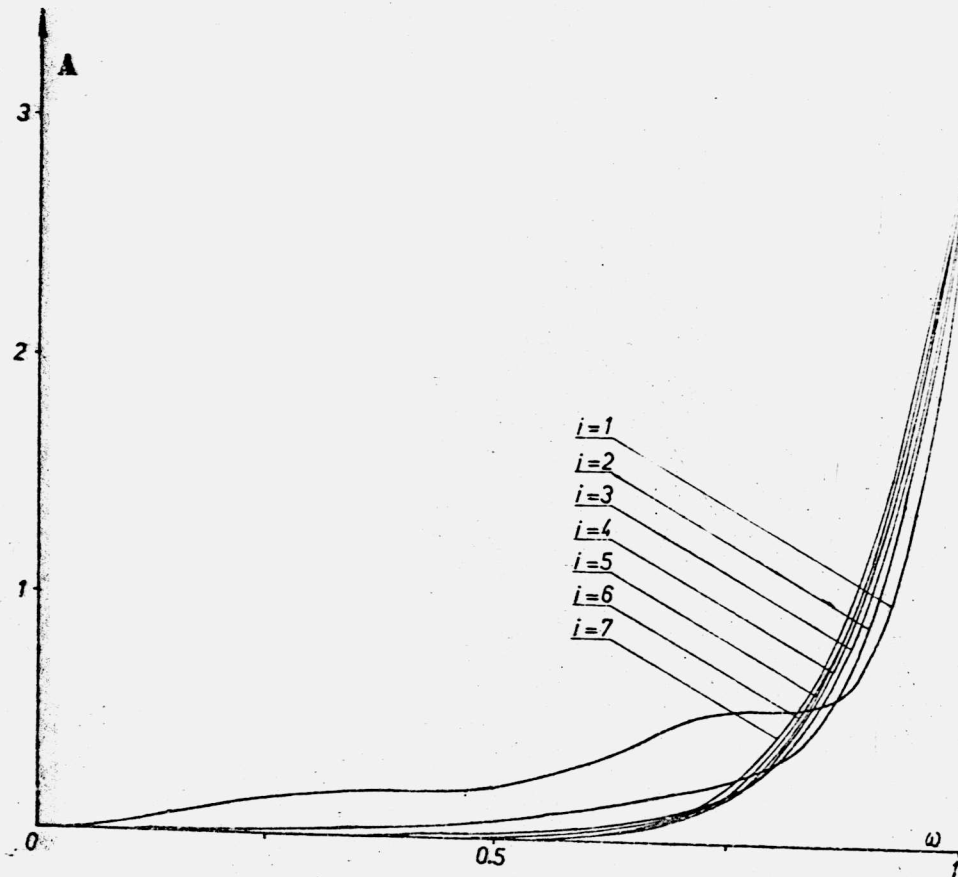
Rys. 5.2



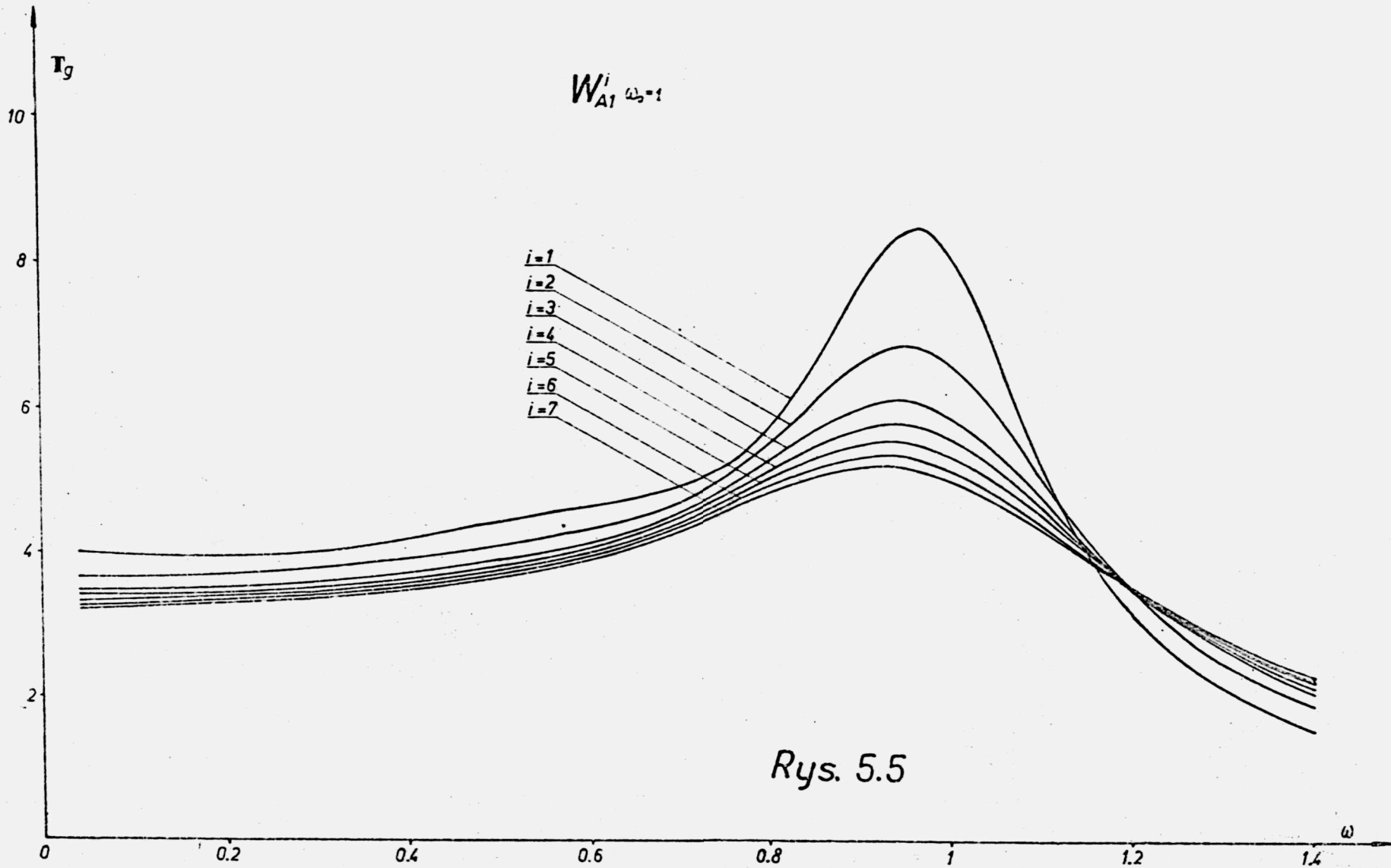


$$A = 10 \lg |\Pi \cdot \psi(\omega^2)|$$

$$W_{A1}^i \quad \omega_0 = 1$$



Rys. 5.4



Rys. 5.5

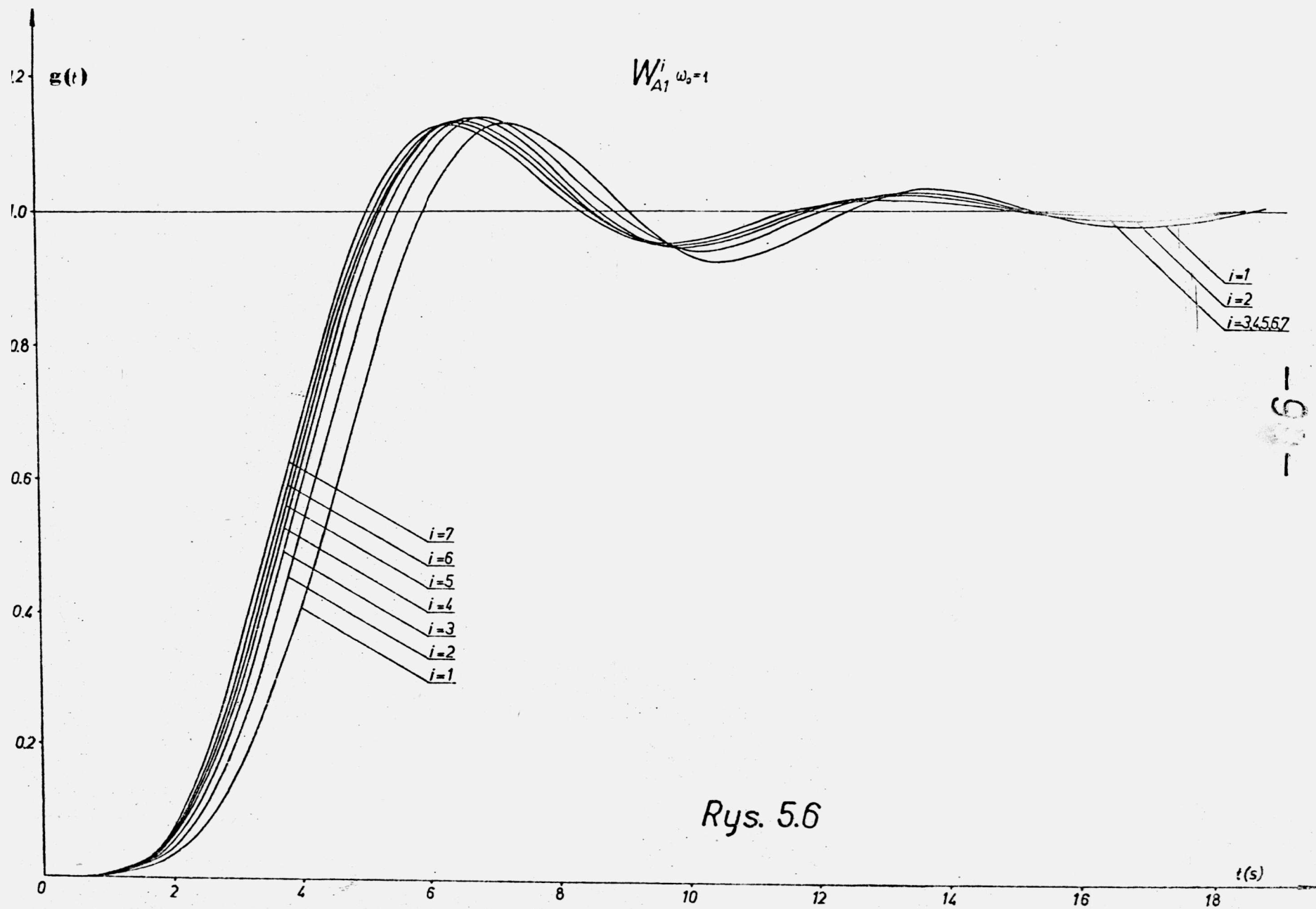


Tabela 5.1

n	1	Kwadrat modulu funkcji filtracji (problem A1, $\omega_0 \rightarrow \infty$ )
2	1	$\omega^4$
3	1	$4\omega^6 - 6\omega^4 + 3\omega^2$
	2	$1.7142857\omega^6 - 1.4285714\omega^4 + .7142857\omega^2$
	3	$\omega^6$
4	1	$9\omega^8 - 16\omega^6 + 8\omega^4$
	2	$3.9473684\omega^8 - 5.8947368\omega^6 + 2.9473684\omega^4$
	3	$2.2727273\omega^8 - 2.5454545\omega^6 + 1.2727273\omega^4$
	4	$1.4516129\omega^8 - .90322581\omega^6 + .4516129\omega^4$
	5	$\omega^8$
5	1	$36\omega^{10} - 90\omega^8 + 80\omega^6 - 30\omega^4 + 5\omega^2$
	2	$10.043924\omega^{10} - 20.424597\omega^8 + 14.396988\omega^6 - 3.6958795\omega^4 + .67956494\omega^2$
	3	$4.2608695\omega^{10} - 6.5217391\omega^8 + 3.2608696\omega^6$
	4	$2.8\omega^{10} - 3.6\omega^8 + 1.8\omega^6$
	5	$1.9310345\omega^{10} - 1.8620690\omega^8 + .93103448\omega^6$
	6	$1.3658537\omega^{10} - .73170173\omega^8 + .36585366\omega^6$
	7	$\omega^{10}$
6	1	$100\omega^{12} - 288\omega^{10} + 306\omega^8 - 144\omega^6 + 27\omega^4$
	2	$28.235889\omega^{12} - 72.653749\omega^{10} + 69.394670\omega^8 - 29.771649\omega^6 + 5.7948388\omega^4$
	3	$11.838926\omega^{12} - 26.305725\omega^{10} + 21.714460\omega^8 - 7.8584503\omega^6 + 1.6137889\omega^4$
	4	$5.9162610\omega^{12} - 10.796495\omega^{10} + 7.2329051\omega^8 - 1.7413701\omega^6 + .38869868\omega^4$
	5	$3.3157895\omega^{12} - 4.6315789\omega^{10} + 2.3157895\omega^8$
	6	$2.4193548\omega^{12} - 2.8387097\omega^{10} + 1.4193548\omega^8$
	7	$1.7857143\omega^{12} - 1.5714286\omega^{10} + .78571429\omega^8$
	8	$1.3235294\omega^{12} - .64705882\omega^{10} + .32352941\omega^8$
	9	$\omega^{12}$
7	1	$400\omega^{14} - 1400\omega^{12} + 1932\omega^{10} - 1330\omega^8 + 473\omega^6 - 84\omega^4 + 7\omega^2$
	2	$82.795893\omega^{14} - 255.65126\omega^{12} + 307.04413\omega^{10} - 179.83551\omega^8 + 5.2830547\omega^6 - 6.8501617\omega^4 + .66635596\omega^2$
	3	$27.685421\omega^{14} - 73.508124\omega^{12} + 74.203041\omega^{10} - 34.62339\omega^8 + 7.2430544\omega^6$
	4	$14.049196\omega^{14} - 33.403974\omega^{12} + 30.449763\omega^{10} - 12.984390\omega^8 + 2.7894040\omega^6$
	5	$7.8371247\omega^{14} - 16.146497\omega^{12} + 12.812369\omega^{10} - 4.5337454\omega^8 + 1.0307490\omega^6$
	6	$4.6460295\omega^{14} - 7.9028713\omega^{12} + 5.1579820\omega^{10} - 1.1950683\omega^8 + .29302806\omega^6$
	7	$2.9117647\omega^{14} - 3.8235294\omega^{12} + 1.9117647\omega^{10}$
	8	$2.2297297\omega^{14} - 2.4504595\omega^{12} + 1.2297297\omega^{10}$
	9	$1.7054264\omega^{14} - 1.4108527\omega^{12} + .70542636\omega^{10}$
	10	$1.2983607\omega^{14} - .59672131\omega^{12} + .29836066\omega^{10}$
	11	$\omega^{14}$

Tabela 5.2

n	i	Kwadrat modulu funkcji filtracji (problem A1, $\omega_0=1$ )	M <sub>max</sub>
2	1	$\omega^4$	4
3	1	$3\omega^6 - 3\omega^4 + 1\omega^2$	8
	2	$1.5117965\omega^6 - .71428571\omega^4 + .20248919\omega^2$	6.619
	3	$\omega^6$	6
4	1	$6\omega^8 - 8\omega^6 + 3\omega^4$	12
	2	$2.9670835\omega^8 - 2.9473684\omega^6 + .98028494\omega^4$	9.974
	3	$1.8901420\omega^8 - 1.2727273\omega^6 + .38258528\omega^4$	9.015
	4	$1.3282209\omega^8 - .45161290\omega^6 + .12339195\omega^4$	8.409
	5	$\omega^8$	8
5	1	$20\omega^{10} - 40\omega^8 + 28\omega^6 - 8\omega^4 + 1\omega^2$	18
	2	$6.5278694\omega^{10} - 9.7386182\omega^8 + 5.003235\omega^6 - .91035479\omega^4 + .11786832$	13.98
	3	$3.1625285\omega^{10} - 3.2608696\omega^8 + 1.098341\omega^6 - 1.0983411\omega^4$	12.13
	4	$2.23666\omega^{10} - 1.8\omega^8 + .56333997\omega^6$	11.35
	5	$1.6603256\omega^{10} - .93103448\omega^8 + .2707089\omega^6$	10.78
	6	$1.2672755\omega^{10} - .36585366\omega^8 + .0985781\omega^6$	10.34
	7	$\omega^{10}$	10
6	1	$50\omega^{12} - 120\omega^{10} + 105\omega^8 - 40\omega^6 + 6\omega^4$	24
	2	$16.012677\omega^{12} - 32.152344\omega^{10} + 23.767005\omega^8 - 7.7704209\omega^6 + 1.1430834\omega^4$	18.71
	3	$7.4964226\omega^{12} - 12.239729\omega^{10} + 7.3959476\omega^8 - 1.9405178\omega^6 + .28787631\omega^4$	16.24
	4	$4.1546787\omega^{12} - 5.2394269\omega^{10} + 2.4287460\omega^8 - .40745446\omega^6 + .06345665\omega^4$	14.70
	5	$2.5683602\omega^{12} - 2.3157895\omega^{10} + .74742927\omega^8$	13.64
	6	$1.9873912\omega^{12} - 1.4193548\omega^{10} + .43196365\omega^8$	13.11
	7	$1.5610102\omega^{12} - .78571429\omega^{10} + .22470403\omega^8$	12.67
	8	$1.2369884\omega^{12} - .32352941\omega^{10} + .08654096\omega^8$	12.30
	9	$\omega^{12}$	12
7	1	$175\omega^{14} - 525\omega^{12} + 615\omega^{10} - 365\omega^8 + 105\omega^6 - 15\omega^4 + 1\omega^2$	32
	2	$41.590616\omega^{14} - 104.58997\omega^{12} + 101.56679\omega^{10} - 47.621698\omega^8 + 11.089817\omega^6 -$ $1.1199473\omega^4 + .08440063\omega^2$	24.11
	3	$15.703533\omega^{14} - 32.306783\omega^{12} + 25.155356\omega^{10} - 8.9841976\omega^8 + 1.4320910\omega^6$	20.44
	4	$8.6796030\omega^{14} - 15.265791\omega^{12} + 10.279326\omega^{10} - 3.2030874\omega^8 + .50994967\omega^6$	18.55
	5	$5.2640479\omega^{14} - 7.6484096\omega^{12} + 4.2891573\omega^{10} - 1.0798320\omega^8 + .17503645\omega^6$	17.21
	6	$3.3934480\omega^{14} - 3.8641060\omega^{12} + 1.6964558\omega^{10} - .27224992\omega^8 + .04645218\omega^6$	16.20
	7	$2.3090770\omega^{14} - 1.9117647\omega^{12} + .60268766\omega^{10}$	15.41
	8	$1.8614788\omega^{14} - 1.2297297\omega^{12} + .36825089\omega^{10}$	14.99
	9	$1.5056730\omega^{14} - .70542636\omega^{12} + .19975331\omega^{10}$	14.61
	10	$1.2189085\omega^{14} - .29836066\omega^{12} + .07945218\omega^{10}$	14.28
	11	$\omega^{14}$	14

5.3. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem A2 -  
filtry  $W_{A2}^0$ )

Problem aproksymacji A2 sprowadza się do znalezienia takiego wielomianu parzystego lub nieparzystego  $V_n(x)$ , dla którego nachylenie przy  $x=x_0 \geq 1$  osiąga wartość maksymalną, tzn.

$$h(x) = \left[ V_n^2(x) \right]_{x=x_0} = M_{\max} \quad (5.8)$$

przy warunku dodatkowym

$$h(x) \Big|_{x=1} = V_n(x) \Big|_{x=1} = 1^1) \quad (5.9)$$

Łatwo sprawdzić, że warunki (5.8) i (5.9) nie prowadzą do żadnego skończonego rozwiązania. Dołączając do warunków (5.8) i (5.9) jeszcze dodatkowe żądanie, można spowodować, że tak zmodyfikowany problem będzie miał jednoznaczne rozwiązanie. Można np. żądać, aby maksymalna wartość wielomianu  $V_n^2(x)$  w przedziale  $[-1, 1]$  nie była większa niż zadana wartość. Warunek ten jest jednak trudny do ujęcia z punktu widzenia matematycznego.

Prostsze i zarazem mające sens fizyczny jest żądanie, aby powierzchnia zawarta pomiędzy  $V_n^2(x)$  a osią  $x$  była z góry ustalona,

---

1) Właściwie należałoby przyjąć warunek normalizacyjny  $V_n^2(1) = 1$ , gdyż dla  $V_n(x)$  istnieją alternatywy  $V_n(1)=1$  lub  $V_n(1)=-1$ . Otrzymane rozwiązania w tych dwóch przypadkach będą się różniły między sobą tylko przeciwnymi znakami przy odpowiednich współczynnikach wielomianu  $V_n(x)$ . Dlatego też, bez zmniejszania ogólności rozważań, można rozpatrywać tylko warunek (5.9).

tj., aby

$$\int_0^1 V_n^2(x) dx = c. \quad (5.10)$$

Wielkość tej powierzchni ma, jak wiadomo [52], ścisły związek ze stratami energii sygnału przenoszonego przez filtr w PP.

Z praktycznego punktu widzenia najistotniejsze są rozwiązania tak zmodyfikowanego problemu, tj. problemu sformułowanego za pomocą warunków (5.8), (5.9) i (5.10), tylko dla  $x_0=1$  lub  $x_0 \rightarrow \infty$ .

Rozpatrzmy najpierw przypadek gdy  $x_0=1$ .

Zapisując wielomian  $V(x)$  w postaci (5.3) ( $k=0$ ), zależność (5.9) można przedstawić jako

$$V_n(x) \Big|_{x=1} = a^t \mathbf{1} = 1, \quad (5.11)$$

gdzie  $a = [a_n, a_{n-2}, \dots]^t$  jest wektorem kolumnowym współczynników  $a_{n-(2i-2)}$  ( $i=1, \dots, m$ , ( $m=E[n/2+1]$ )) wielomianu  $V_n(x)$ , a  $\mathbf{1}$  jest następującym wektorem

$$\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^t. \quad (5.12)$$

Natomiast warunek (5.8) można zapisać jako

$$\left[ V_n^2(x) \right]' \Big|_{x=1} = 2V_n(x) V_n'(x) \Big|_{x=1} = 2V_n'(x) \Big|_{x=1} = 2a^t p \rightarrow \max, \quad (5.13)$$

gdzie  $p = [n, n-2, \dots]^t$  jest wektorem, którego współrzędne są pochodnymi  $x^{n-(2i-2)}$  ( $i=1, \dots, m$ ) w punkcie  $x=1$ . Ponadto warunek dodatkowy (5.10) można zapisać w postaci następującej formy kwadratowej

$$\int_0^1 v_n^2(x) dx = a^t C a = c, \quad (5.14)$$

przy czym  $C$  jest kwadratową macierzą dodatnio określoną o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$b_{j1} = b_{1j} = \frac{1}{2n-2l-2j+5} \quad (1, j=1, \dots, m). \quad (5.15)$$

Do rozwiązania tak postawionego problemu, tj. maksymalizacji iloczynu skalarnego (5.13) przy warunkach dodatkowych (5.11) i (5.14), skorzystajmy z metody nieoznaczonych czynników Lagrange'a. W tym celu jest wygodnie posłużyć się funkcją postaci

$$f(\bar{a}, \lambda) = 2a^t p + \lambda_1 (a^t C a - c) + \lambda_2 (a^t 1 - 1).$$

Rozwiązanie powyższego problemu sprowadza się do znalezienia ekstremum funkcji  $f$ . Warunek na ekstremum ma postać

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i=1, 2. \quad (5.16)$$

Stosując znany wzór na pochodną iloczynu skalarnego względem wektora [81]

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{u}^t(\bar{x}), \bar{v}(\bar{x})) = \bar{u}^t(\bar{x}) \frac{\partial \bar{v}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \bar{v}^t(\bar{x}) \frac{\partial \bar{u}(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, \quad (5.17)$$

warunki (5.16) sprowadzają się do rozwiązania układu równań

$$\begin{aligned} 2p + 2\lambda_1 C a + \lambda_2 1 &= 0, \\ a^t C a &= c, \\ a^t 1 &= 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$



Wyznaczając wektor  $a$  z równania pierwszego i wstawiając go do równania drugiego i trzeciego układu równań (5.18), otrzymuje się dwa równania z dwoma niewiadomymi  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Rozwiązując te dwa równania, okazuje się, że istnieją dwa rozwiązania, jedno gdy  $\lambda_1 < 0$ , a drugie gdy  $\lambda_1 > 0$ .

Hessian funkcji  $f(a, \lambda)$  w punkcie stacjonarnym  $\bar{a}_m$  jest równy

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \right|_{\bar{a}=\bar{a}_m} = H(\bar{a}_m) = 2\lambda_1 c$$

i ponieważ przy  $\lambda_1 < 0$  jest on macierzą ujemnie określoną, więc funkcja  $f$  jest funkcją wklęsłą, a znalezione rozwiązanie jest rzeczywiście maksimum.

Rozwiązanie to jest następujące:

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{d^2 - be}{1 - bc}}, \quad (5.19)$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{b}(-d + \lambda_1), \quad (5.20)$$

$$a_m = -\frac{1}{2\lambda_1} c^{-1}(2p + \lambda_2 1), \quad (5.21)$$

$$M_{\max} = 2a_m^t p = -2\lambda_1 c - \lambda_2, \quad (5.22)$$

przy czym

$$\begin{aligned} b &= 1^t c^{-1} 1, \\ d &= p^t c^{-1} 1, \\ e &= p^t c^{-1} p. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Zadana wartość powierzchni  $c$  ma, jak to wynika z rozważań w punkcie (7.3), dolną granicę równą

$$c = M_{\min} = 1/b.$$

Zatem, gdy  $c \rightarrow 1/b$  powinniśmy otrzymać rozwiązanie opisujące filtry MAL. Rzeczywiście, gdy  $c \rightarrow 1/b$ ,  $\lambda_1 \rightarrow -\infty$  i  $\lambda_2 \rightarrow -\infty$  ale z (5.21)

$$a_m = c^{-1} \left( -\frac{1}{\lambda_1} p - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} 1 \right) \xrightarrow{c \rightarrow 1/b} \frac{1}{b} c^{-1} 1,$$

co jest zgodne z rozwiązaniem (7.11).

W przypadku gdy  $\omega_0 \rightarrow \infty$  maksymalizacja wyrażenia (5.8) sprowadza się do maksymalizacji współczynnika stojącego przy najwyższej potędze wielomianu  $V(x)$  przy warunku (5.11) i (5.14). Zatem rozwiązanie w tym przypadku jest również określone za pomocą zależności (5.19), (5.20), (5.21) i (5.22), z tym że wektor  $p$ , występujący w tych wzorach ma postać

$$p = [1, 0, 0, \dots, 0]^t. \quad (5.24)$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika następujący algorytm wyznaczania funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$ , która jest zerowego rzędu wypukła w PP i ma maksymalne nachylenie przy częstotliwości granicznej  $\omega=1$  lub maksymalne asymptotyczne tłumienie przy warunku, że są ustalone straty energii sygnału przenoszonego przez taki filtr w PP.

#### Algorytm A2

1. Wyznaczyć za pomocą zależności (5.15) macierz  $C$ .
2. Przeprowadzić faktoryzację macierzy  $C = K^t K$ , gdzie  $K$  jest nieosobliwą macierzą trójkątną dolną.
3. Wyznaczyć macierz odwrotną  $L = K^{-1}$ .
4. Wyznaczyć macierz odwrotną  $C^{-1} = LL^t$ .

5. Znaleźć za pomocą zależności (5.21) i (5.22) wektor  $a_m$  i  $M_{\max}$ .
6. Wyznaczyć funkcję filtracji  $\psi(\omega^2) = V_n^2(x)$ .

#### 5.4. Wnioski

Na podstawie algorytmu A2 wyznaczono wielomiany  $\psi(\omega^2)$  dla różnych wartości  $c$ . Następnie zgodnie z zależnościami podanymi w rozdziale 2 obliczono pożądane charakterystyki filtrów. Na rysunkach 5.7, 5.8, 5.9 ( $\omega_0=1$ ), 5.10, 5.11, 5.12 ( $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) przedstawiono najważniejsze charakterystyki opisujące właściwości rozpatrywanych w tym punkcie filtrów, kolejno są to: charakterystyka tłumieniowa, opóźnienia grupowego i odpowiedź filtru na pobudzenie skokiem jednostkowym  $1(t)$ . Z przedstawionych rysunków wynika, że

- otrzymane filtry mają charakterystykę tłumieniową nierównomiernie falistą w PP<sup>1)</sup>, drugie zafalowanie (bliższe końca PP) ma większą amplitudę niż pierwsze, ponadto różnica amplitud kolejnych zafalowań, przy ustalonej wartości  $c$ , jest mniejsza dla  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ,
- ze wzrostem  $c$  filtr ma lepsze właściwości tłumieniowe w PZ,
- ze wzrostem  $c$  zera charakterystyki tłumieniowej przesuwają się w stronę końca PP, z tym, że pierwsze zero ulega większym zmianom położenia niż drugie (bliższe końca PP),
- parametr  $\omega_0$  nie wpływa w istotny sposób na przebieg charakterystyki tłumieniowej w PZ,
- jak należało się spodziewać, ze wzrostem  $c$  pogarsza się charakterystyka grupowego opóźnienia i odpowiedź impulsowa filtru

---

<sup>1</sup> Gdy  $n=2$  i  $3$  oraz  $c = \frac{2n^2-1}{4n^2-1}$  można otrzymać dla  $\omega_0=1$  i  $\omega_0 \rightarrow \infty$  charakterystykę filtru Czebyszewa.

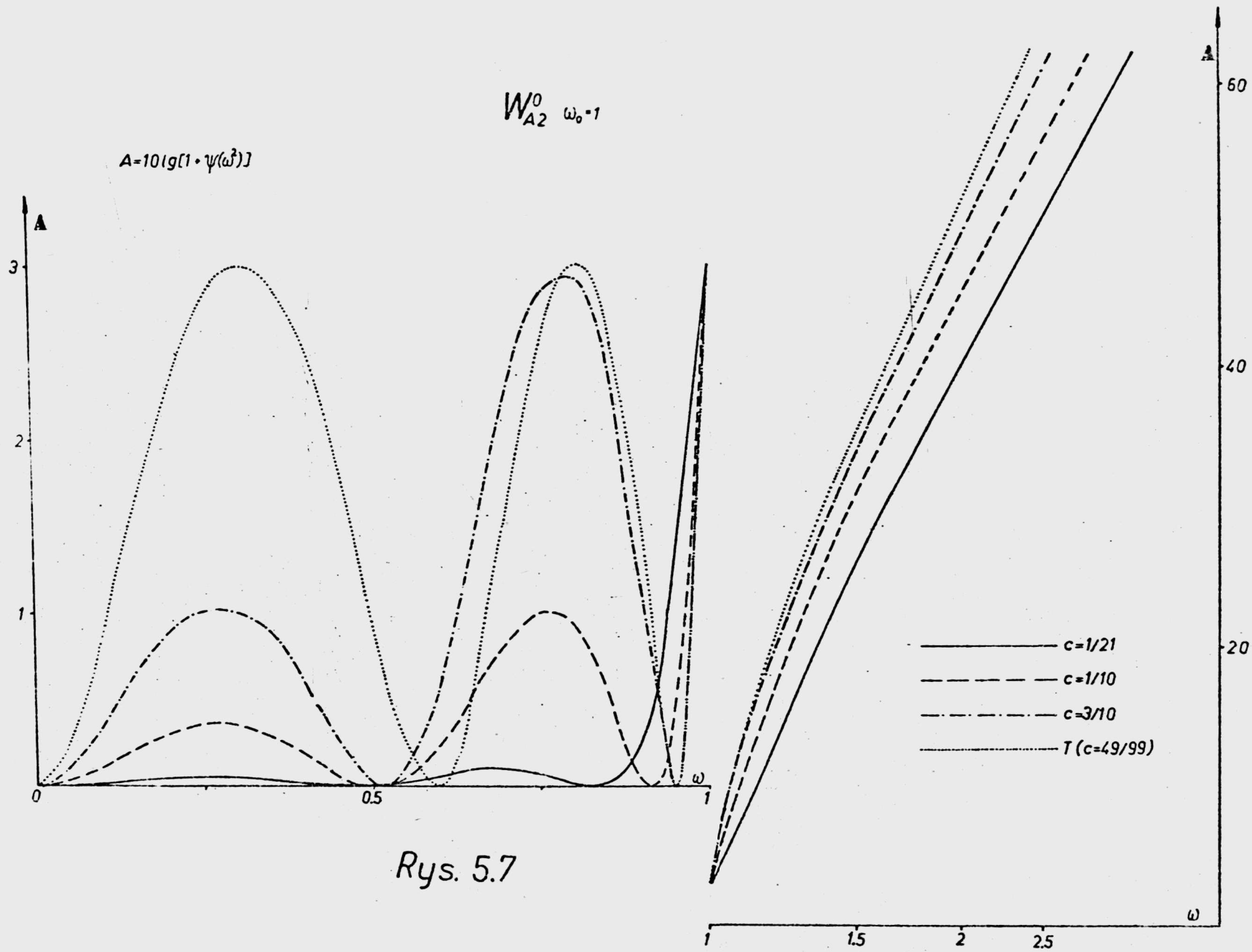
Na rysunkach 5.7, 5.8, 5.9 ( $\omega_0=1$ ), 5.10, 5.11, 5.12 ( $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) przedstawiono również charakterystyki filtru Czebyszewa (T). Z porównania wynika, że dla  $c \approx 0.3$ ,  $n=5$  filtry rozpatrywane w tym punkcie mają nieznacznie gorsze właściwości tłumieniowe w PZ niż filtr Czebyszewa przy jednocześnie dużo lepszych właściwościach energetycznych i tłumieniowych w PP oraz lepszej charakterystyce grupowego opóźnienia i charakterystyce impulsowej.

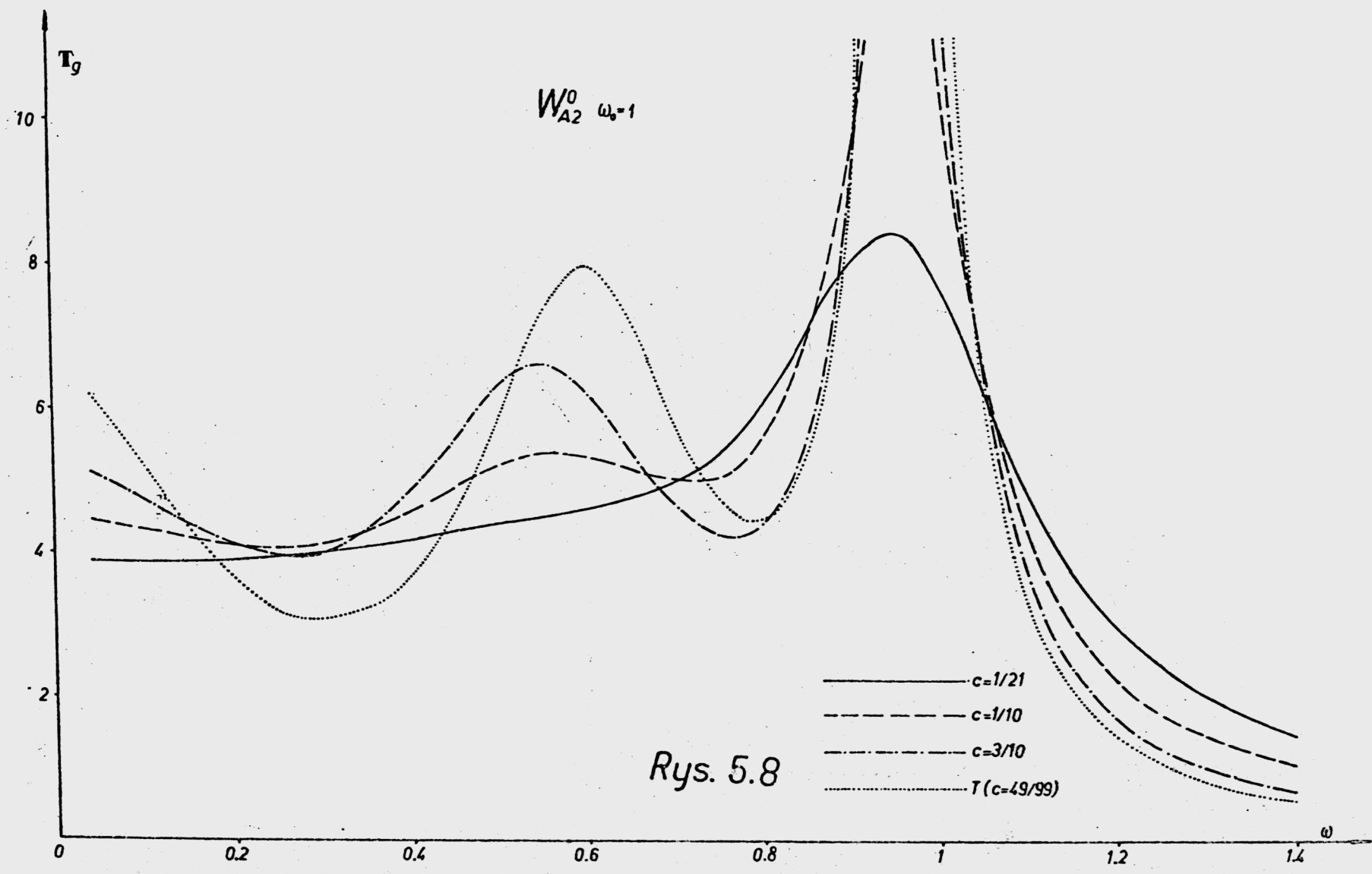
Jak zaznaczono w punkcie 5.2, funkcje  $\psi(\omega^2)$  dla  $i \geq 1$  i  $\omega_0 \rightarrow \infty$  (problem A1) mają jednakowe nachylenie przy  $\omega=1$ , które wynosi  $2n$ . Właściwości tej nie ma rozpatrywana w tym punkcie funkcja  $\psi(\omega^2)$  ( $i=0$ ,  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) dla żadnego dopuszczalnego parametru  $c$ .

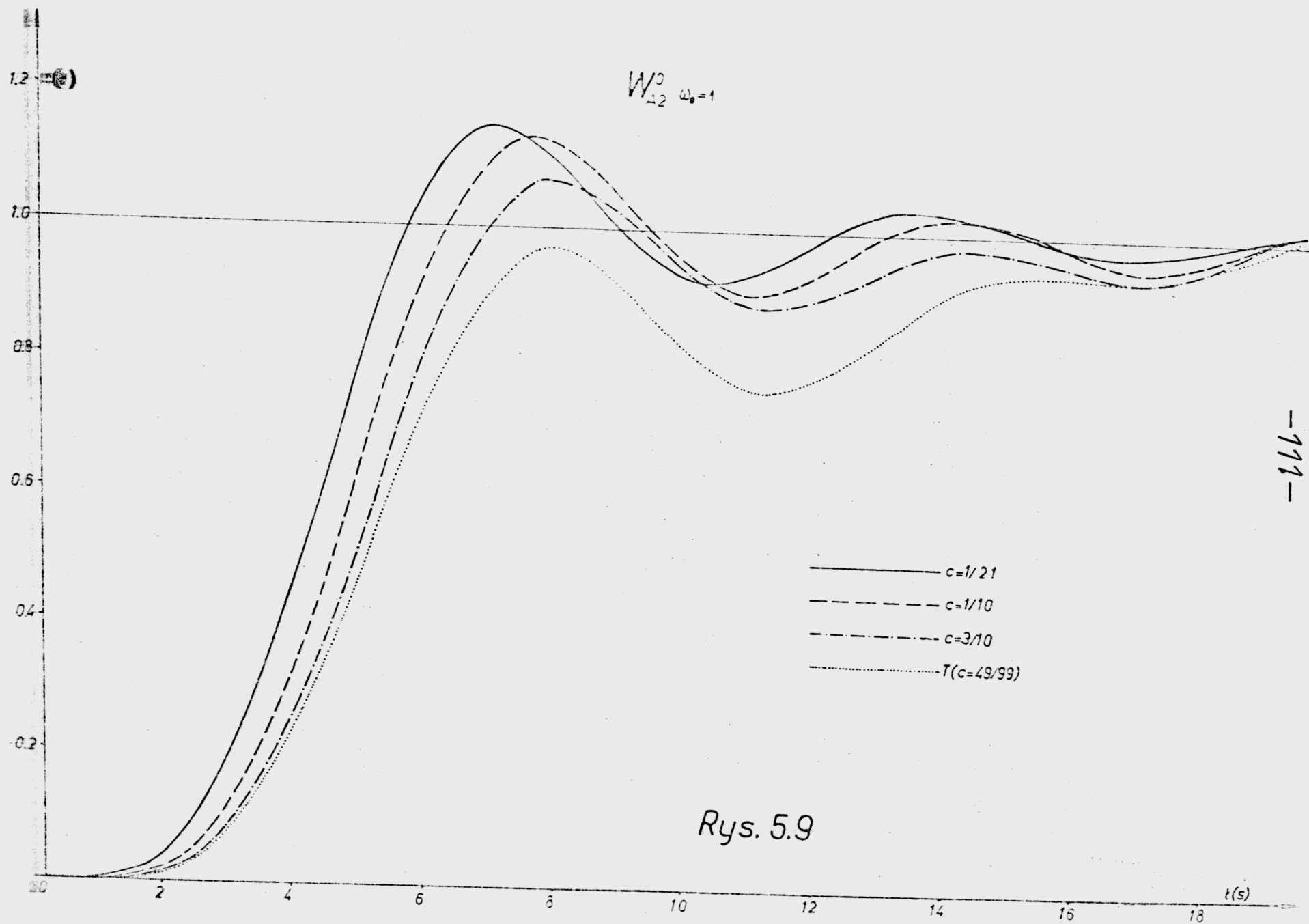
W tabeli 5.3 i 5.4 przedstawiono przykładowo kwadrat modułu funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$  rozpatrywanych w tym punkcie filtrów dla  $n=5$  i różnych wartości  $c$ . Dla porównania zamieszczono także funkcję  $\psi(\omega^2)$  opisującą charakterystykę filtru Czebyszewa. Jak wynika z tych tabel filtry  $W_{A2}^0$  mają lepsze właściwości tłumieniowe w PZ (większe nachylenie  $\psi(\omega^2)$  przy  $\omega=1$  - przypadek gdy  $\omega_0=1$  czy większe asymptotyczne tłumienie - przypadek gdy  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) niż filtr Czebyszewa przy tej samej powierzchni  $c$ . Polepszenie tych właściwości odbywa się jednak kosztem znacznie większego niż 3dB zafalowania w PP, co jest niedopuszczalne z praktycznego punktu widzenia. Zatem sens praktyczny mają tylko rozwiązania dla małych wartości  $c$ , gdyż wówczas mamy pewność, że zafalowania charakterystyki tłumieniowej w PP nie będą przewyższały poziomu 3dB.

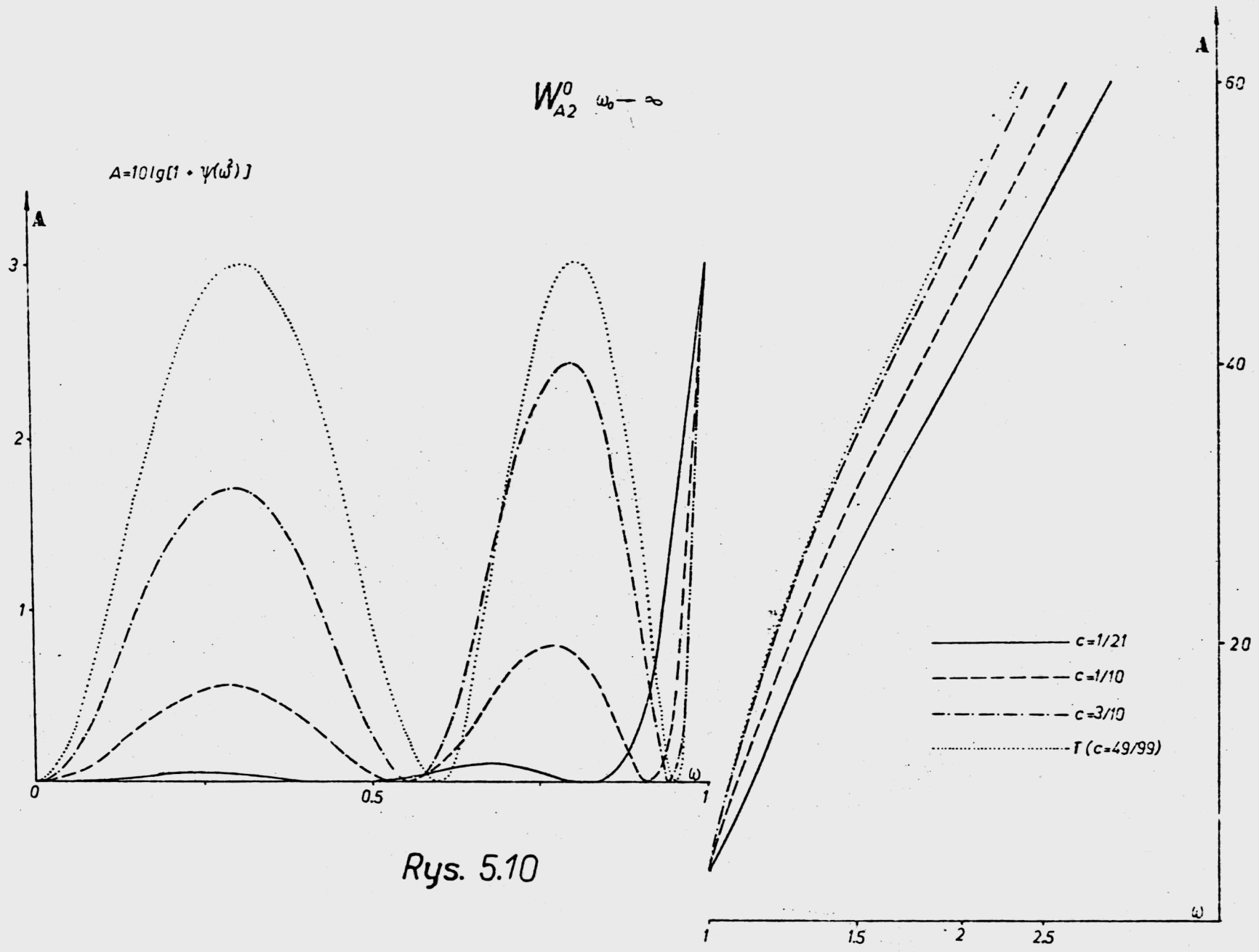
Jeśli jest znany rozkład częstotliwościowy energii sygnału, to można w wyrażeniu (5.10) zastosować odpowiednio dobraną funkcję wagi  $p(x)$ , aby otrzymać bardziej optymalne rozwiązanie.

Wnioski przedstawione powyżej dla  $n=5$  nie ulegają istotnym zmianom dla wyższych stopni  $n$ .

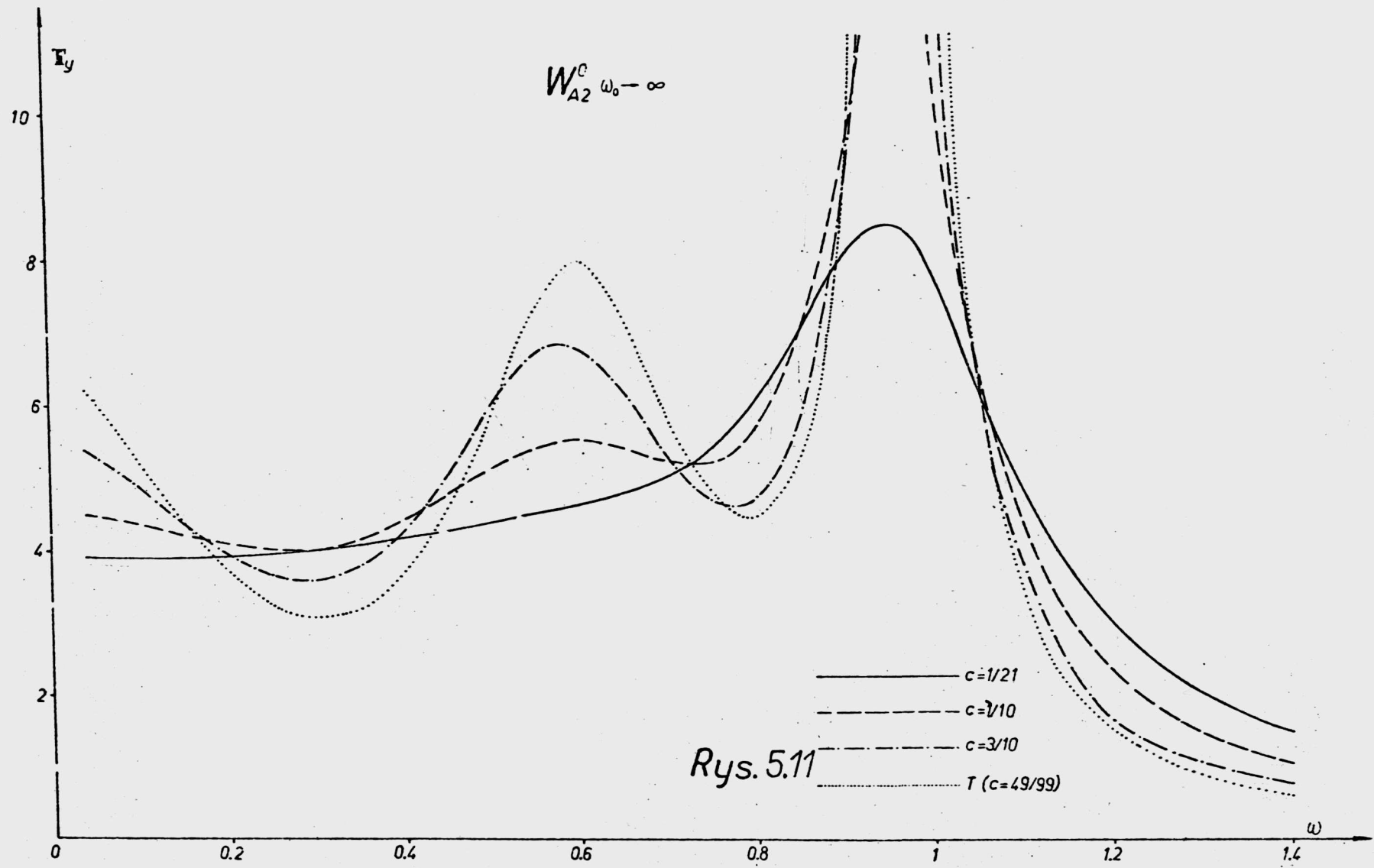




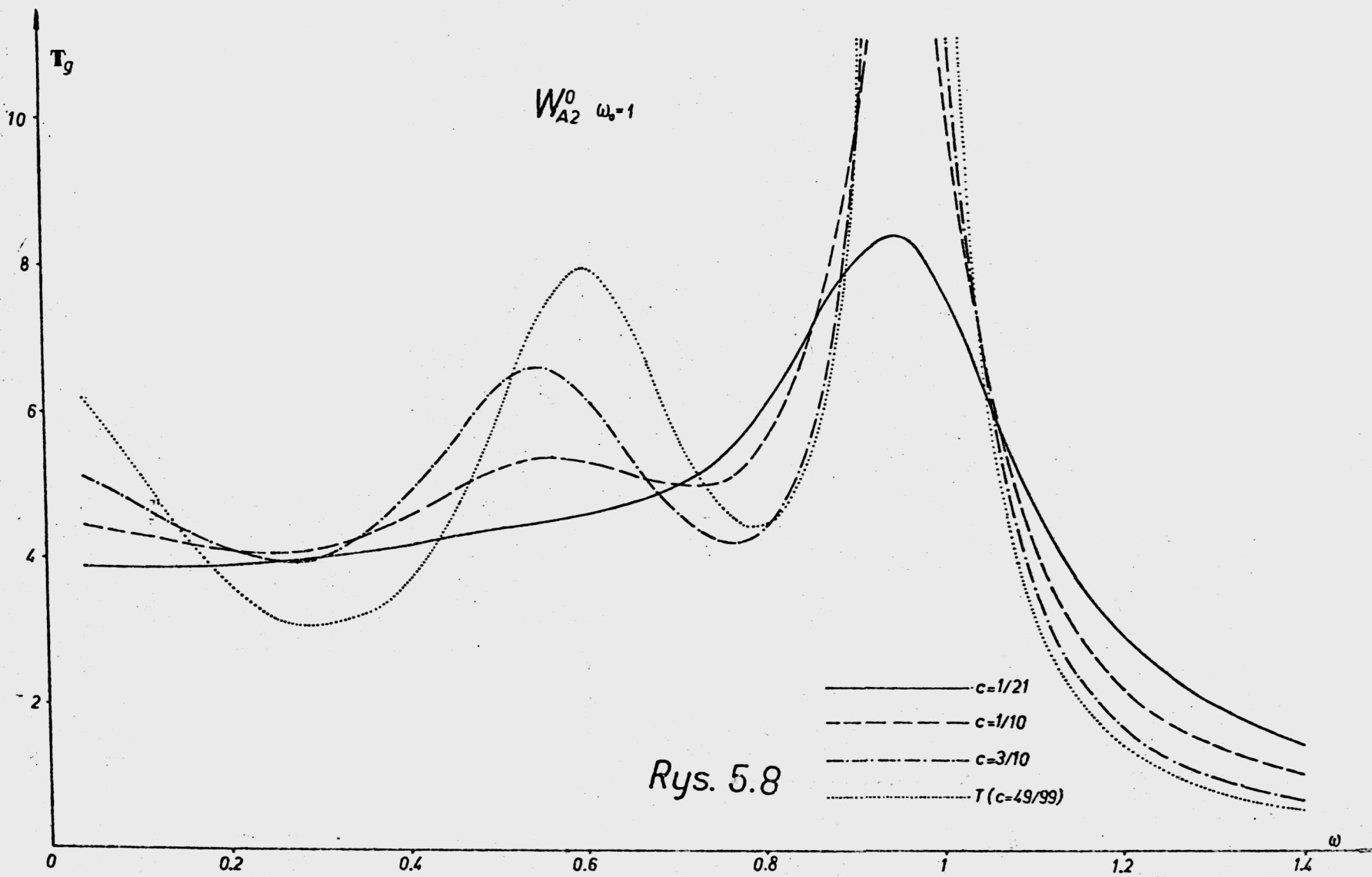


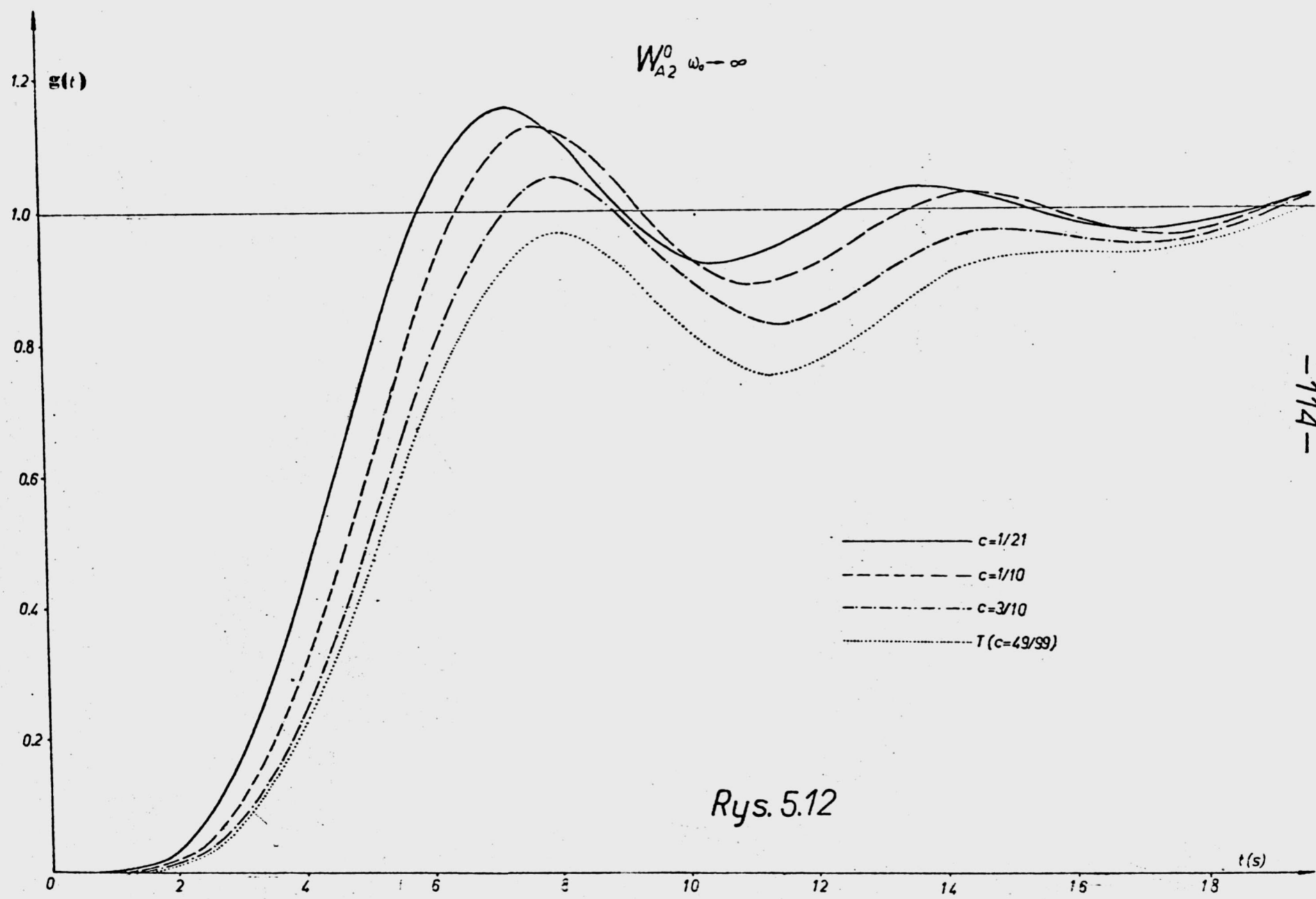






Rys. 5.11





Rys. 5.12

Tabela 5.3

c	Kwadrat modułu funkcji filtracji $\psi(\omega^2)$ Problem A2 $\omega_0=1$ $n=5$	$M_{\max}$
1/21	$17.015625\omega^{10} - 30.937500\omega^8 + 19.218750\omega^6 +$ $- 4.6875000\omega^4 + .39062500\omega^2$	19.00
1/10	$65.195723\omega^{10} - 141.72959\omega^8 + 104.51373\omega^6 +$ $- 29.877032\omega^4 + 2.8971631\omega^2$	31.49
2/10	$117.96342\omega^{10} - 267.68724\omega^8 + 205.34419\omega^6 +$ $- 60.682397\omega^4 + 6.0620216\omega^2$	39.60
3/10	$163.68759\omega^{10} - 378.27719\omega^8 + 295.03695\omega^6 +$ $- 88.383176\omega^4 + 8.9358251\omega^2$	45.22
49/99	$245.43502\omega^{10} - 577.74459\omega^8 + 458.20441\omega^6 +$ $- 139.12769\omega^4 + 14.232852\omega^2$	53.57
49/99 <sup>1)</sup>	$256.00000\omega^{10} - 640.00000\omega^8 + 560.00000\omega^6 +$ $- 200.00000\omega^4 + 25.000000\omega^2$	50.00

Tabela 5.4

c	Kwadrat modułu funkcji filtracji $\psi(\omega^2)$ Problem A2 $\omega_0 \rightarrow \infty$ $n=5$	$M_{\max}$
1/21	$17.015625\omega^{10} - 30.937500\omega^8 + 19.218750\omega^6 +$ $- 4.6875000\omega^4 + .39062500\omega^2$	17.02
1/10	$68.062500\omega^{10} - 152.62500\omega^8 + 118.56250\omega^6 +$ $- 37.000000\omega^4 + 4.0000000\omega^2$	68.06
2/10	$124.55952\omega^{10} - 293.09654\omega^8 + 238.71748\omega^6 +$ $- 78.002596\omega^4 + 8.8221349\omega^2$	124.6
3/10	$173.69981\omega^{10} - 417.07116\omega^8 + 346.38831\omega^6 +$ $- 115.28968\omega^4 + 13.272718\omega^2$	173.7
49/99	$261.77827\omega^{10} - 641.44692\omega^8 + 543.19097\omega^6 +$ $- 184.08151\omega^4 + 21.559193\omega^2$	261.8
49/99 <sup>1)</sup>	$256.00000\omega^{10} - 640.00000\omega^8 + 560.00000\omega^6 +$ $- 200.00000\omega^4 + 25.000000\omega^2$	256.0

<sup>1)</sup> W celu porównania podano  $\psi(\omega^2)$  - filtru Czebyszewa.

6. FILTRY WYPUKŁE I-TEGO RZĘDU O EKSTREMALNEJ WARTOŚCI TŁUMIENIA PRZY WYBRANEJ CZĘSTOTLIWOŚCI (problem B)

6.1. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (filtry  $W_B^i$ )

Problem aproksymacji B sprowadza się do znalezienia takiego wielomianu  $V_{n-k}(x)$  parzystego lub nieparzystego, dla którego całka

$$h(x) \Big|_{x=x_0} = \int_0^{x_0} dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1^p V_{n-k}^2(x_1) dx_1, \quad (k = E(i+1)/2) \quad (6.1)$$

gdzie  $p=0$ , gdy  $i$  jest parzyste lub  $p=1$ , gdy  $i$  jest nieparzyste, osiąga wartość ekstremalną, tzn. maksymalną gdy  $\omega_0 > 1$  lub minimalną gdy  $\omega_0 < 1$ , przy warunku normalizacyjnym

$$h(x) \Big|_{x=1} = \int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} x_1^p V_{n-k}^2(x_1) dx_1 = 1. \quad (6.2)$$

Sprowadzając, tak jak poprzednio, powyższy problem do zagadnienia ekstremalizacji formy kwadratowej można zbudować stosunkowo prosty algorytm znajdowania optymalnego wielomianu  $V_{n-k}(x)$ .

Zapisując wielomian  $V_{n-k}(x)$  w postaci (5.3), zależność (6.1) można wówczas przedstawić jako

$$h(x) \Big|_{x=x_0} = a^t B a, \quad (6.3)$$

gdzie  $a = [a_{n-k}, a_{n-k-2}, \dots]^t$  jest wektorem kolumnowym współczynników  $a_{n-k-(2l-2)}$ ,  $l=1, \dots, m$  ( $m = E[\frac{2n-i}{4} + 1]$ ) oraz  $B = [b_{lj}]$  jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$b_{jl} = b_{lj} = \int_0^{x_0} dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \dots \int_0^{x_2} dx_1^{2n-2l-2j-i+4} =$$

$$= \frac{1}{(1+\epsilon)_i} x_0^{2n-2l-2j+4}, \quad (l, j=1, \dots, m) \quad (6.4)$$

gdzie  $(1+\epsilon)_i$  jest tak samo zdefiniowane jak w punkcie 5.1.

Natomiast warunek (6.2) można zapisać w postaci

$$h(1) = a^t B a \Big|_{x_0=1} = a^t D a = 1, \quad (6.5)$$

gdzie  $D = [d_{lj}]$  jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych za pomocą wzoru (5,7).

Rozumując analogicznie jak w punkcie (5.2), można podać następujący algorytm - będący nieznaczną modyfikacją algorytmu A1 - wyznaczania optymalnej funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$ , która jest  $i$ -tego ( $i=1, \dots, 2n-3$ ) rzędu wypukła w PP i ma maksymalną wartość przy wybranej częstotliwości  $\omega_0 > 1$  PZ lub minimalną - przy  $\omega_0 < 1$  PP.

### Algorytm B

1. Wyznaczyć za pomocą zależności (6.4) i (5.7) macierze B i D.
2. Przeprowadzić faktoryzację macierzy  $D = K^t K$ , gdzie K jest nieosobliwą macierzą trójkątną dolną.
3. Wyznaczyć macierz odwrotną  $K^{-1} = L$ .

4. Znaleźć największą (gdy  $\omega_0 > 1$ ) lub najmniejszą (gdy  $\omega_0 < 1$ ) wartość własną  $\lambda_m$  i odpowiadający jej unormowany wektor własny  $b_m$  ( $b_m^t b_m = 1$ ) macierzy  $A = L^t B L$ .
5. Obliczyć wektor  $a_m = L b_m$ .
6. Wyznaczyć funkcję filtracji  $\psi(\omega^2) = \int_0^\omega dx_1 \dots \int_0^{x_2} V_{n-k}^2(x_1) dx_1$  ( $p=0$  - i parzyste,  $p=1$  - niep.).

### 6.2. Wnioski

Na podstawie algorytmu B wyznaczono wielomiany  $\psi(\omega^2)$  dla różnych wartości  $\omega_0$ . Następnie zgodnie z zależnościami podanymi w rozdziale 2 obliczono pożądane charakterystyki filtrów.

Z przeprowadzonych badań wynika, że z praktycznego punktu widzenia charakterystyki te, dla różnych  $i$  ( $\omega_0 > 1$ ), niewiele się różnią od charakterystyk przedstawionych w punkcie 5.2 (problem A1), toteż zdecydowano się na przedstawienie wpływu parametru  $\omega_0$  na przebieg tylko charakterystyki tłumieniowej filtrów monotonicznych ( $i=1$ ) (rys. 6.1 i 6.3) oraz wypukłych ( $i=2$ ) (rys. 6.2 i 6.4).

Z przedstawionych rysunków oraz tabeli 6.1 i 6.2 wynika, że

- gdy  $\omega_0 \rightarrow 0$  otrzymuje się charakterystykę tłumieniową filtru Butterwortha,
- gdy  $\omega_0 \rightarrow 1$  (z prawej lub z lewej strony) otrzymuje się charakterystykę tłumieniową filtru typu L ( $W_{A1}^1$ ) lub filtru typu  $W_{A2}^2$  (patrz tabela 5.2),
- gdy  $\omega_0 \rightarrow \infty$  otrzymuje się charakterystykę tłumieniową filtru typu H ( $W_{A1}^1$ ) lub filtru typu  $W_{A1}^2$ .

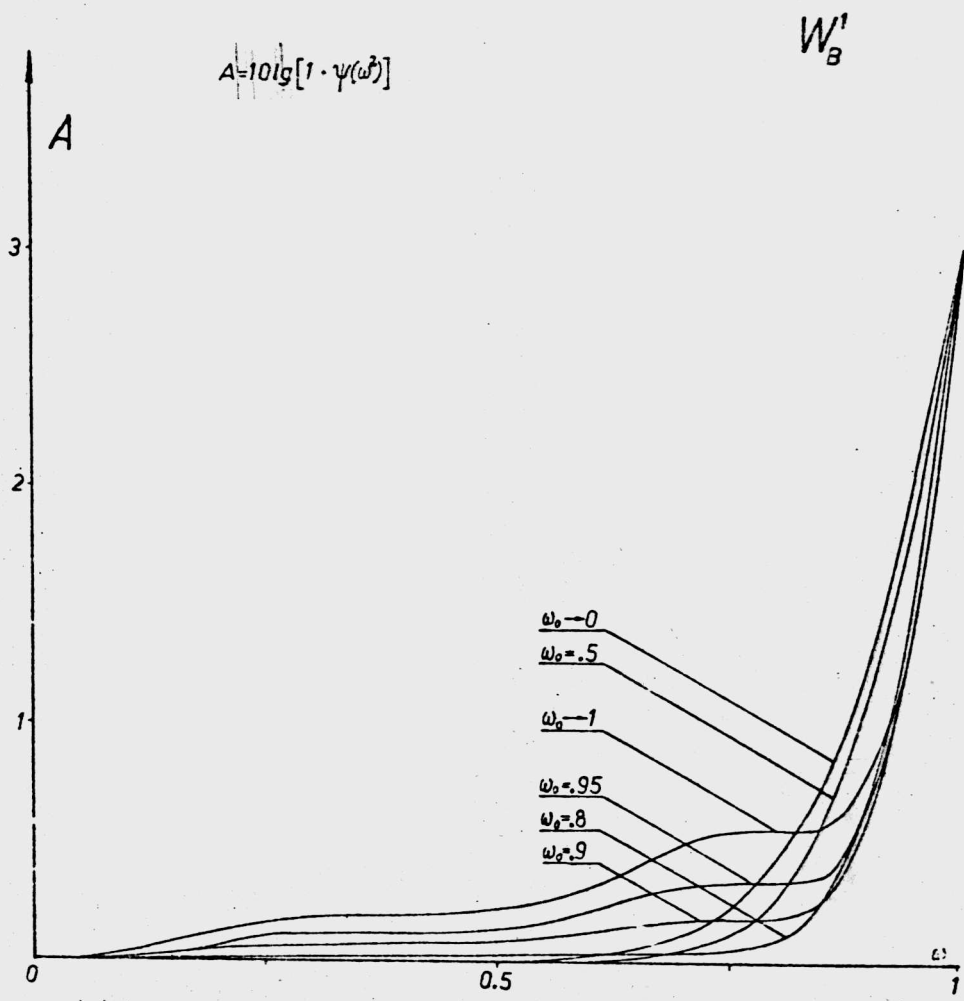
- istnieje takie  $\omega_0$  (w rozważanym przypadku  $\omega_0 \approx 0.8$ ), iż otrzymana charakterystyka jest bardzo zbliżona do charakterystyki filtru L.S.M ( $W_{C1}^1$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ ) - gdy  $i=1$  lub filtru  $W_{C1}^2$  ( $a=0$ ,  $b=1$ ) - gdy  $i=2$  (patrz tabela 6.1 i 6.2,  $\omega_0=0.8$  oraz tabela 7.1,  $n=5$ ,  $a=0$  i  $b=1$ ),
- gdy  $\omega_0 \in (0, 1)$  parametr ten w istotny sposób wpływa zarówno na przebieg charakterystyki tłumieniowej w zakresie PP, jak i w PZ, natomiast gdy  $\omega_0 \in (1, \infty)$  - tylko w zakresie PP.

Ponadto można stwierdzić, że wpływ parametru  $\omega_0$  jest większy na charakterystykę tłumieniową filtru monotonicznego ( $i=1$ ) niż filtru wypukłego ( $i=2$ ). Oznacza to, że charakterystyki filtrów wyższych rzędów  $i > 1$  są mniej wrażliwe na zmianę parametru  $\omega_0$ .

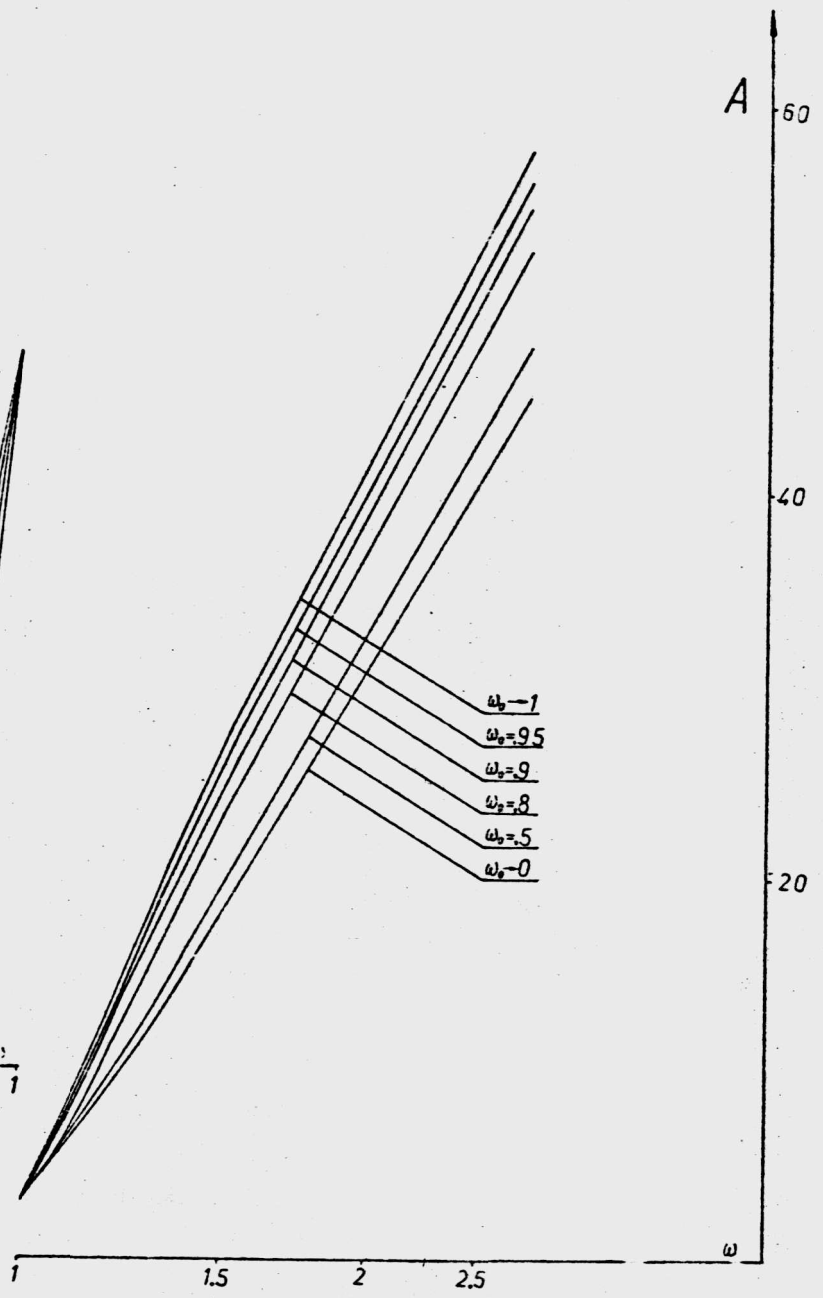
Wnioski przedstawione powyżej dla  $i=1$  i  $i=2$  oraz  $n=5$  nie ulegają istotnym zmianom dla wyższych stopni  $n$  i większych wartości  $i$ .

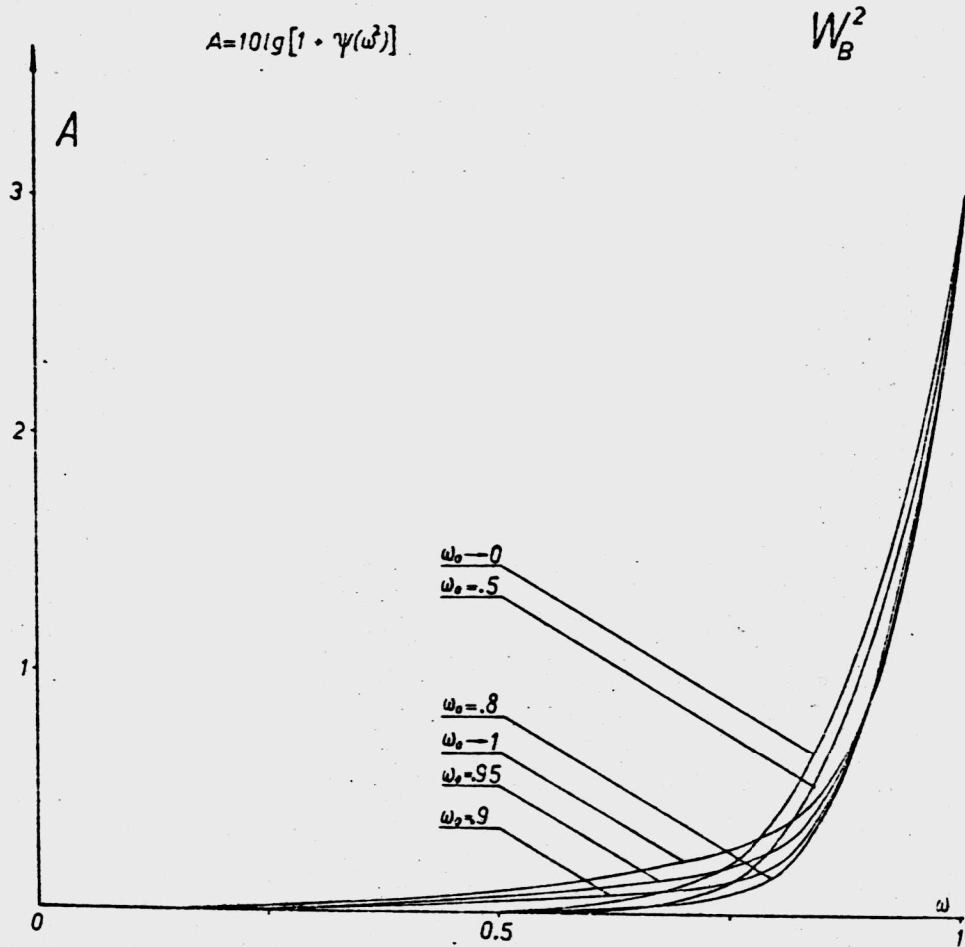
Zmieniając zatem, przy ustalonym  $i$ , parametr  $\omega_0$  można otrzymać nieskończenie wiele charakterystyk leżących pomiędzy charakterystykami filtru Butterwortha a charakterystykami filtru wypukłego  $i$ -tego rzędu o maksymalnym nachyleniu charakterystyki tłumieniowej przy  $\omega_0=1$  (filtry  $W_{A1}^i$ ,  $\omega_0=1$ ) lub o maksymalnym asymptotycznym tłumieniu (filtry  $W_{A1}^i$ ,  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ).



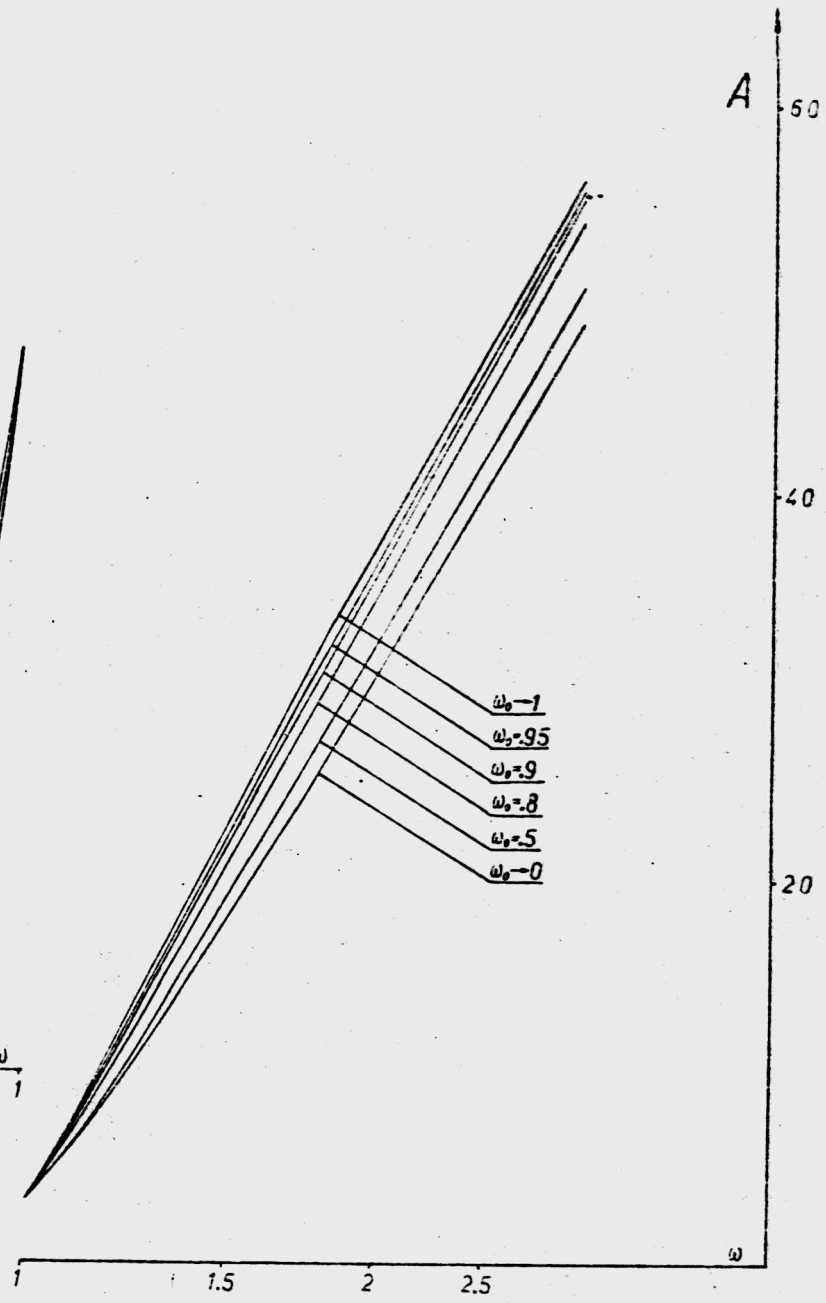


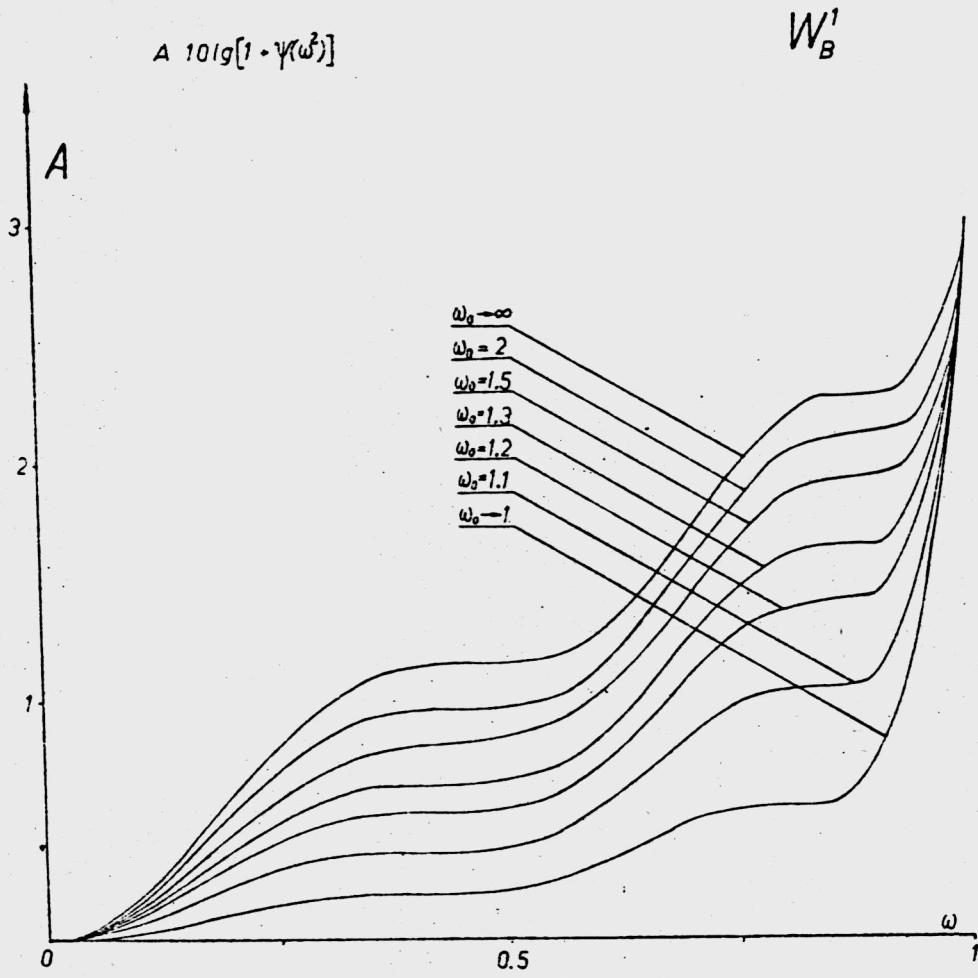
Rys. 6.1





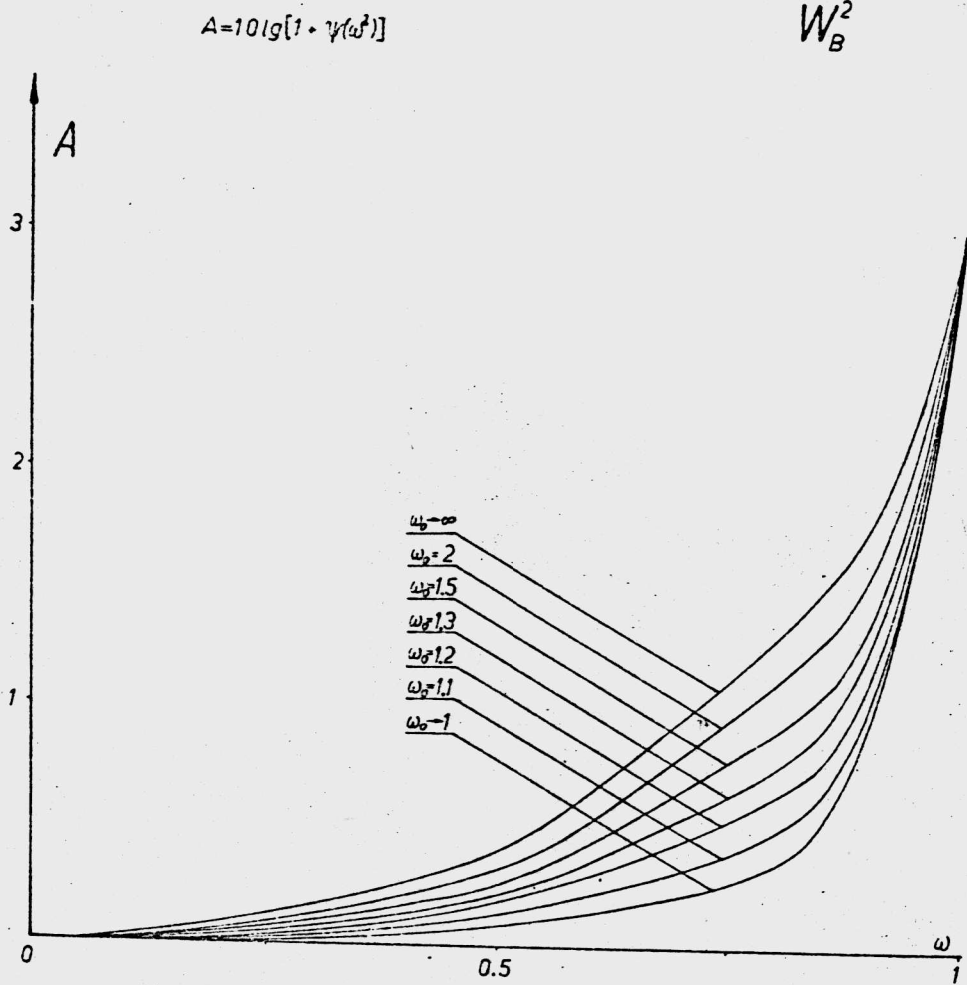
Rys. 6.2





Rys. 6.3





Rys. 6.4

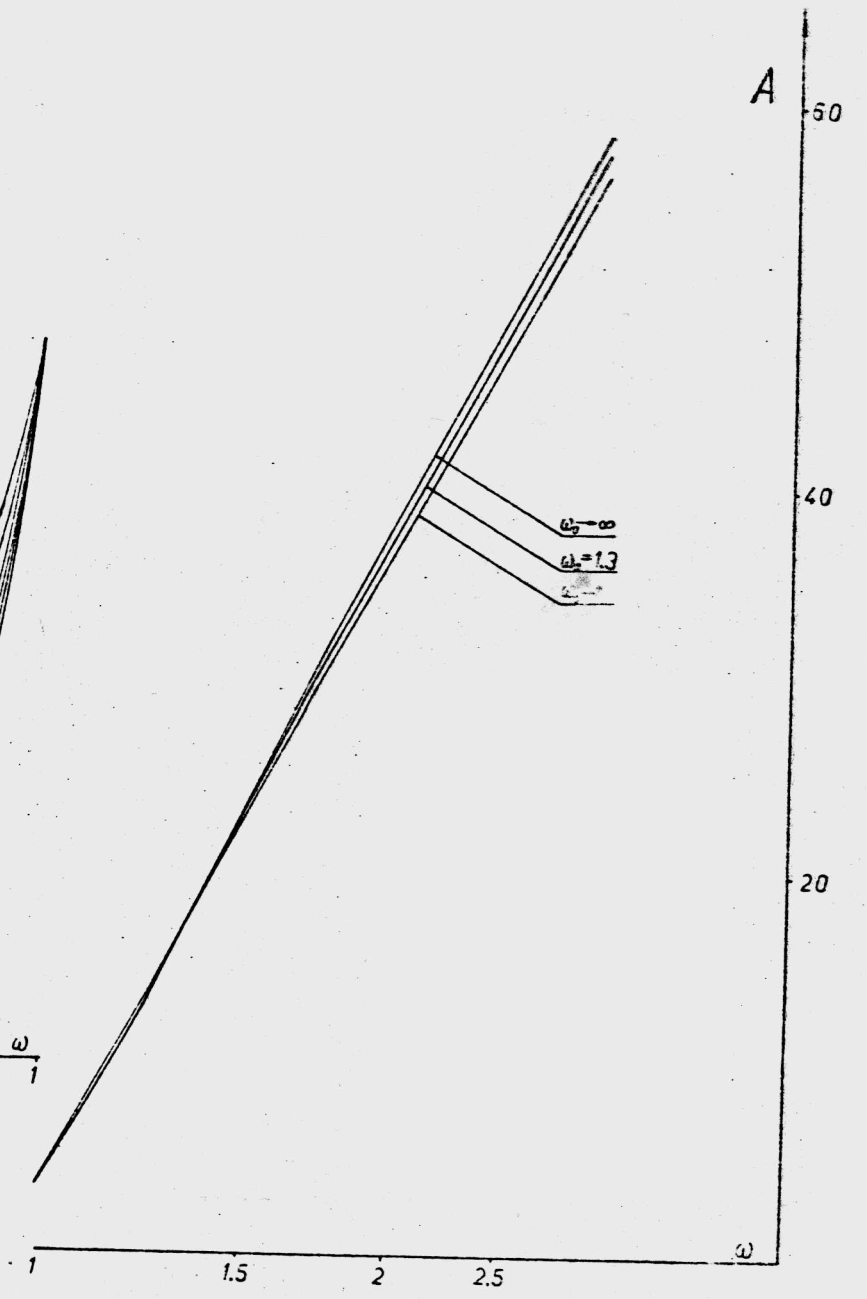


Tabela 6.1

$\omega_0$	Kwadrat modulu funkcji filtracji (problem B - filtry $W_B^1$ ) $n=5$
.05	$1.0062788\omega^{10} - .00629274\omega^8 + .00001399\omega^6 - .00000001\omega^4$
.2	$1.1064194\omega^{10} - .11026549\omega^8 + .00390395\omega^6 - .00005821\omega^4 + .00000039\omega^2$
.5	$1.9598582\omega^{10} - 1.1954685\omega^8 + .25790884\omega^6 - .02322303\omega^4 + .00092448\omega^2$
.8	$6.9208416\omega^{10} - 10.125458\omega^8 + 5.2000912\omega^6 - 1.0970232\omega^4 + .10154797\omega^2$
.95	$15.957726\omega^{10} - 30.149542\omega^8 + 19.941021\omega^6 - 5.3857151\omega^4 + .63651154\omega^2$
.999	$19.919943\omega^{10} - 39.799960\omega^8 + 27.832054\omega^6 - 7.9440482\omega^4 + .99201121\omega^2$
1.001	$20.079941\omega^{10} - 40.199954\omega^8 + 28.168049\omega^6 - 8.0560465\omega^4 + 1.0080110\omega^2$
1.1	$26.861381\omega^{10} - 57.990985\omega^8 + 43.848378\omega^6 - 13.552625\omega^4 + 1.8338518\omega^2$
1.5	$34.673333\omega^{10} - 82.403068\omega^8 + 68.986251\omega^6 - 23.903595\omega^4 + 3.6470799\omega^2$
20.	$35.999977\omega^{10} - 89.981168\omega^8 + 79.962410\omega^6 - 29.974963\omega^4 + 4.9937444\omega^2$

Tabela 6.2

$\omega_0$	Kwadrat modulu funkcji filtracji (problem B - filtry $W_B^2$ ) $n=5$
.05	$1.0050986\omega^{10} - .00510754\omega^8 + .00000899\omega^6$
.2	$1.0853266\omega^{10} - .08775994\omega^8 + .00245818\omega^6 - .00002501\omega^4 + .00000018\omega^2$
.5	$1.6945003\omega^{10} - .82533110\omega^8 + .13885146\omega^6 - .00838180\omega^4 + .00036113\omega^2$
.8	$3.8590280\omega^{10} - 4.3181673\omega^8 + 1.6646386\omega^6 - .22766443\omega^4 + .02216503\omega^2$
.95	$5.8536846\omega^{10} - 8.2656121\omega^8 + 4.0193589\omega^6 - .69227924\omega^4 + .08484785\omega^2$
.999	$6.5148557\omega^{10} - 9.7094708\omega^8 + 4.9832655\omega^6 - .90581326\omega^4 + .11716286\omega^2$
1.001	$6.5408592\omega^{10} - 9.7677414\omega^8 + 5.0232085\omega^6 - .9149017\omega^4 + .11857533\omega^2$
1.1	$7.6783590\omega^{10} - 12.442773\omega^8 + 6.9442126\omega^6 - 1.3729781\omega^4 + .19317916\omega^2$
1.5	$9.5471815\omega^{10} - 17.763628\omega^8 + 11.396639\omega^6 - 2.6041803\omega^4 + .42393614\omega^2$
20.	$10.043915\omega^{10} - 20.417189\omega^8 + 14.385953\omega^6 - 3.6909080\omega^4 + .67822924\omega^2$

7. FILTRY WYPUKŁE I-TEGO RZĘDU O EKSTREMALNYCH WŁAŚCIWOŚCIACH  
ENERGETYCZNYCH (problem C)

7.1. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem C1 -  
filtry  $W_{C1}^1$ )

Problem aproksymacji C1 sprowadza się do znalezienia takiego wielomianu  $V_{n-k}(x)$ , dla którego całka

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b dx_{i+1} \int_0^{x_{i+1}} dx_1 \dots \int_0^{x_2} x_1^p V_{n-k}^2(x_1) dx_1, \quad (7.1)$$

(  $k = E[(i+1)/2]$  )

gdzie  $p=0$ , gdy  $i$  jest parzyste lub  $p=1$ , gdy  $i$  jest nieparzyste, osiąga wartość ekstremalną, tzn. minimalną gdy  $0 \leq a < b \leq 1$  lub maksymalną gdy  $1 \leq a < b \leq \infty$ , przy dodatkowym warunku normalizacyjnym (5.2).

Zapisując wielomian  $V_{n-k}(x)$  w postaci (5.3), zależność (7.1) można przedstawić jako

$$\int_a^b h(x) dx = a^t B a, \quad (7.2)$$

gdzie  $a = [a_{n-k}, a_{n-k-2}, \dots]^t$  jest wektorem kolumnowym współczynników  $a_{n-k-(2l-2)}$ ,  $l=1, \dots, m$  ( $m = E[\frac{2n-i}{4} + 1]$ ) oraz  $B = [b_{lj}]$  jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$b_{jl} = b_{lj} = \int_a^b dx_{i+1} \int_a^{x_{i+1}} dx_1 \dots \int_a^{x_2} x_1^{2n-2l-2j-i+4} dx_1 =$$

$$= \frac{1}{(1 + \alpha)_{i+1}} (b^{2n-2i-2j+5} - a^{2n-2i-2j+5}) \quad (7.3)$$

(i, j=1, \dots, m).

gdzie  $(\alpha + 1)_{i+1}$  jest tak samo zdefiniowane jak w punkcie 5.1.

Natomiast warunek normalizacyjny (5.2) można zapisać w postaci (5.6).

Można już teraz podać algorytm wyznaczania optymalnej funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$ , która jest i-tego rzędu (i=1, \dots, 2n-3) wypukła w PP i ma ekstremalne właściwości energetyczne.

#### Algorytm C1

1. Wyznaczyć za pomocą zależności (7.3) i (5.7) macierze B i D.
- 2 i 3. Punkt taki sam jak dla Algorytmu A1.
4. Znaleźć najmniejszą (gdy  $0 \leq a < b \leq 1$ ) lub największą (gdy  $1 \leq a < b \leq \infty$ ) wartość własną  $\lambda_m$  i odpowiadający jej unormowany wektor własny  $b_m$  ( $b_m^t b_m = 1$ ) macierzy  $A = L^t B L$ .
- 5 i 6. Punkt analogiczny jak dla Algorytmu A1.

#### 7.2. Wyznaczanie kwadratu modułu funkcji filtracji (problem C2 - filtry $W_{C2}^0$ )

W celu znalezienia optymalnego wielomianu  $V_n(x)$ , tj. wielomianu, który spełnia warunki

$$V_n^2(1) = 1, \quad (7.4)$$

$$\int_0^1 V_n^2(x) dx = M_{\min}, \quad (7.5)$$

posłużmy się również metodą ekstremalizacji formy kwadratowej.

Zapisując wielomian  $V_n(x)$  w postaci (5.3) ( $k=0$ ), zależność (7.5) można zapisać w postaci następującej formy kwadratowej:

$$\int_0^1 V_n^2(x) dx = a^t C a, \quad (7.6)$$

gdzie  $a = [a_n, a_{n-2}, \dots]^t$  jest wektorem kolumnowym współczynników  $a_{n-(2l-2)}$ ,  $l=1, \dots, m$  ( $m=E[n/2+1]$ ) oraz  $C = [c_{lj}]$  jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$c_{lj} = c_{jl} = \int_0^1 x^{2n-2l-2j+4} dx = \frac{1}{2n-2l-2j+5} \quad (7.7)$$

( $l, j=1, \dots, m$ ).

Natomiast warunek (7.4) można zapisać w postaci

$$V_n^2(1) = a^t D a = 1, \quad (7.8)$$

gdzie  $D = [d_{lj}]$  jest macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$d_{lj} = d_{jl} = 1, \quad l, j=1, \dots, m, \quad (7.9)$$

tzn. macierz  $D$  można zapisać jako

$$D = ll^t, \quad (7.10)$$

przy czym  $l = [1, 1, \dots, 1]^t$  jest wektorem kolumnowym wymiaru  $m$ .



Problem znalezienia optymalnego wielomianu  $V_n(x)$  sprowadza się więc do znalezienia wektora  $a$ , dla którego forma kwadratowa  $F_1 = a^t C a$  osiąga wartość minimalną przy warunku dodatkowym  $F_2 = a^t D a = 1$ .

Zależności (7.6), (7.10) wskazują, że macierz  $C$  jest macierzą dodatnio określoną, natomiast macierz  $D$  jest macierzą dodatnio półokreśloną rzędu jeden. Wobec tego macierz  $C$  można przedstawić w postaci  $C = K^t K$ , gdzie  $K$  jest nieosobliwą macierzą trójkątną dolną. Stosując teraz przekształcenie liniowe zmiennych  $a = K^{-1} y = L y$ , problem sprowadza się do znalezienia wektora  $y$ , dla którego  $F_1 = y^t y$  osiąga wartość minimalną przy warunku  $F_2 = y^t L^t l l^t L y = y^t A y = 1$ .

Z teorii form kwadratowych [20] wiadomo, że najmniejsza wartość  $M_{\min}$  iloczynu skalarnego  $F_1 = y^t y$ , przy warunku  $y^t A y = 1$ , jest równa odwrotności największej wartości własnej  $\lambda_m$  macierzy  $A$ , tzn. można ją znaleźć z równania  $\det(A - \lambda_m 1_m) = 0$ , a wektor  $y_m$ , przy którym to zachodzi jest unormowanym wektorem własnym  $y_m^t y_m = 1/\lambda_m$  macierzy  $A$  odpowiadającym wartości  $\lambda_m$ , czyli  $(A - \lambda_m 1_m) y_m = 0$ .

Macierz  $A$  jest rzędu jeden, toteż łatwo można sprawdzić, że największą jej wartością własną jest

$$\lambda_m = l^t L L^t l = l^t C^{-1} l,$$

a odpowiadający jej unormowany wektor własny ma postać

$$y_m = \frac{L^t l}{l^t C^{-1} l}.$$

Ostatecznie rozwiązanie powyższego problemu jest następujące:

$$M_{\min} = 1/b,$$

$$a_m = Ly_m = \frac{1}{b} C^{-1} 1, \quad (7.11)$$

gdzie  $b = 1^t C^{-1} 1$ .

Z przeprowadzonych rozważań wynika następujący algorytm wyznaczania optymalnej funkcji filtracji  $\psi(\omega^2)$ , która jest zero-wego rzędu wypukła i w wyniku daje filtry o minimalnych stratach energii sygnału przenieszonego w PP.

#### Algorytm C2

1. Wyznaczyć za pomocą zależności (7.7) macierz C.
2. Znaleźć macierz  $C^{-1}$  (najlepiej przez faktoryzację  $C = K^t K$ ).
3. Obliczyć za pomocą zależności (7.11) wektor  $a_m$  i  $M_{\min}$ .
4. Wyznaczyć kwadrat modułu funkcji filtracji  $\psi(\omega^2) = v_n^2(\omega)$ .

### 7.3. Wnioski

Na podstawie algorytmu C1 i C2 wyznaczono wielomiany  $\psi(\omega^2)$  dla  $a=0$ ,  $b=1$  i różnych wartości  $i$ . Następnie zgodnie z zależnościami podanymi w rozdziale 2 obliczono pożądane charakterystyki filtrów. Na rysunkach 7.1, 7.2 i 7.3 przedstawiono najważniejsze charakterystyki opisujące właściwości rozpatrywanych w tym punkcie filtrów; kolejno są to: charakterystyka tłumieniowa, opóźnienia grupowego i odpowiedź filtru na pobudzenie skokiem jednostkowym  $1(t)$ . Z przedstawionych rysunków wynika, że

- w zależności od  $i$  otrzymuje się filtry pośrednie, których charakterystyki zawarte są pomiędzy charakterystykami filtru Butterwortha ( $i=2n-3$ ) oraz filtru MAL ( $i=0$ ),
- ze wzrostem  $i$  przejście z jednej charakterystyki na drugą odbywa się stosunkowo łagodnie (patrz także tabela 7.1),

można jednak zaobserwować względnie większy „skok” dla pierwszych wskaźników  $i$  ( $i=0, 1, 2$ ) oraz niewielki dla pozostałych.

W tabeli 7.1 przedstawiono kwadrat modułu funkcji filtracji filtrów wypukłych  $i$ -tego ( $i=0, \dots, 2n-3$ ) rzędu o minimalnych stratach energetycznych sygnału w PP. Należy zaznaczyć, że w tabeli 7.1 można odnaleźć znane z literatury funkcje  $\gamma(\omega^2)$  opisujące następujące filtry

$i=0$  - filtry MAL ( $W_{C2}^0, a=0, b=1$ ),

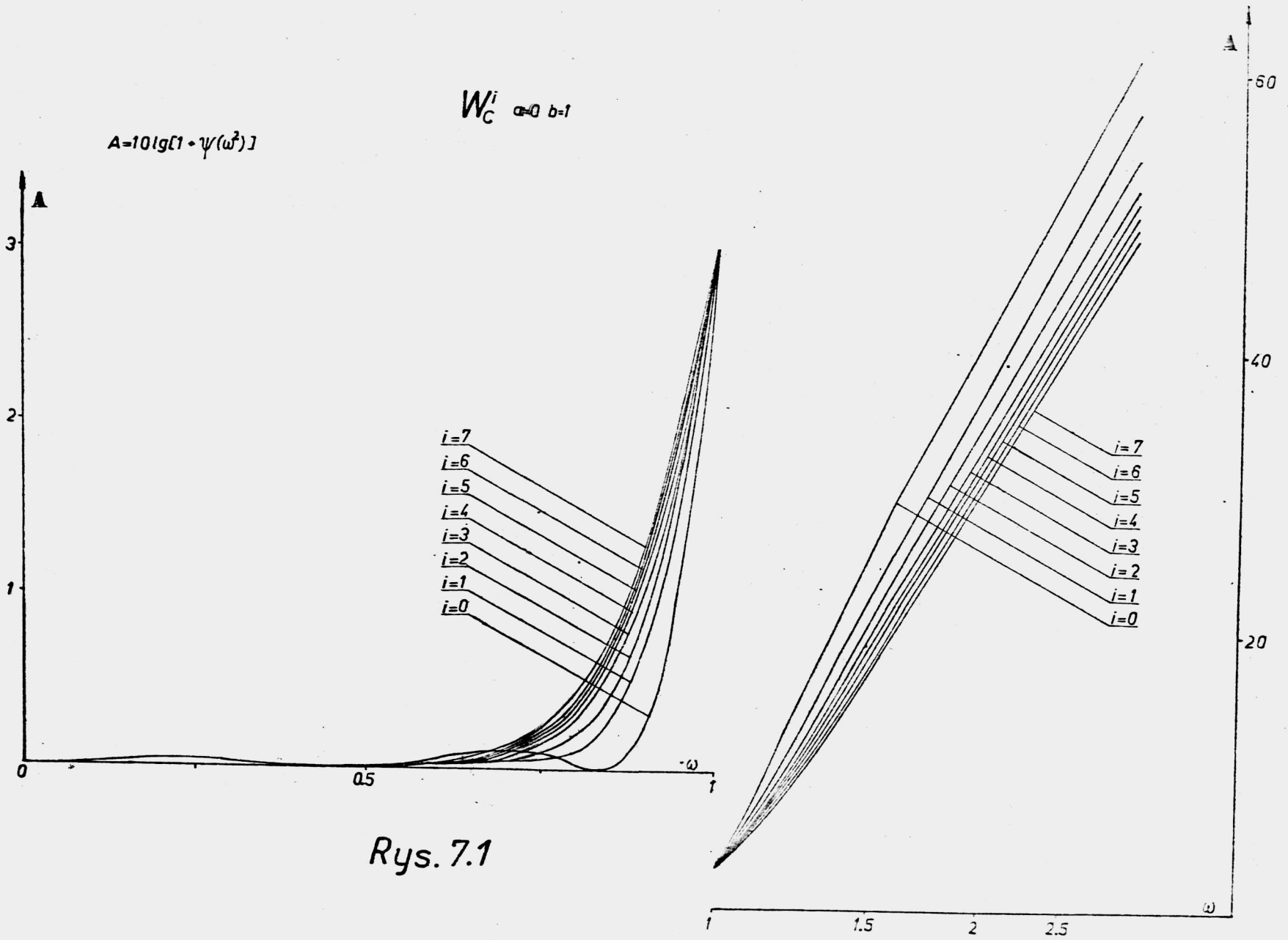
$i=1$  - filtry L.S.M ( $W_{C1}^1, a=0, b=1$ ),

$i=2n-3$  - filtry Butterwortha.

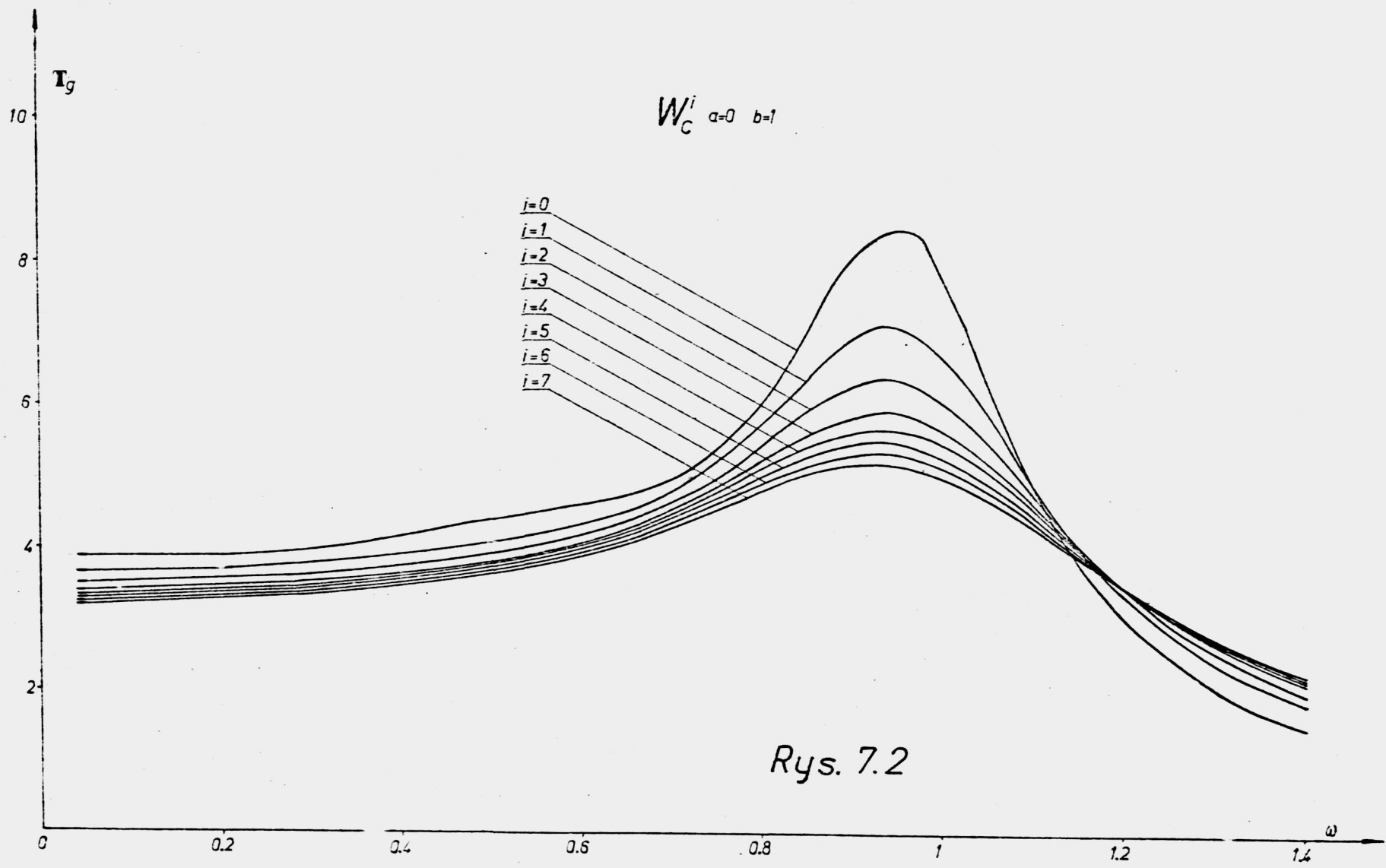
Zbadano również wpływ parametrów  $a$  i  $b$  na otrzymane rozwiązania problemu C1. Z badań tych wynika, że gdy parametry  $a$  i  $b$  kolejno przyjmują niżej podane wartości, otrzymuje się następujące filtry:

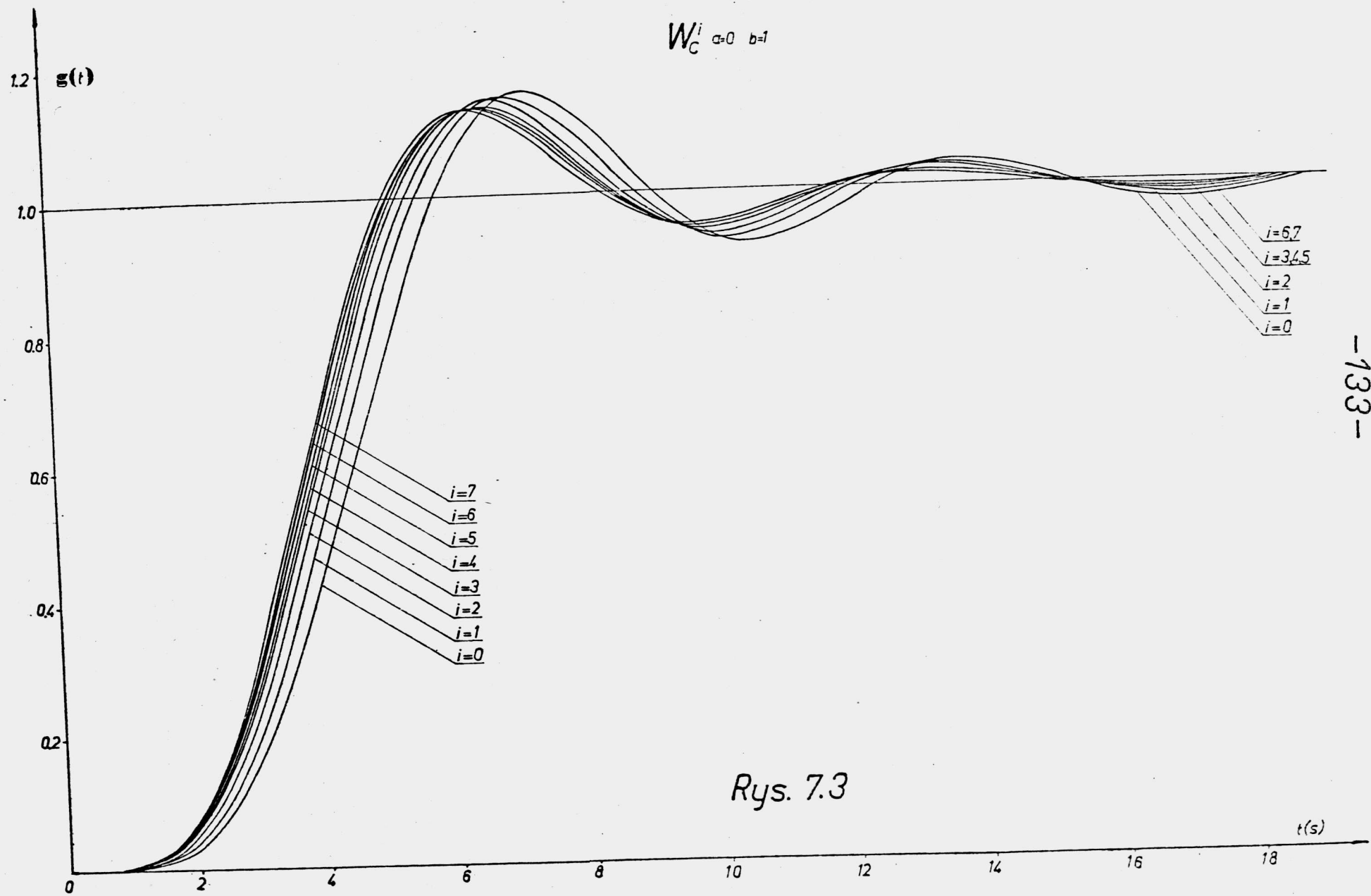
- $a=0, b \rightarrow 0$  - filtry Butterwortha,
- $a=0, b=1$  - filtry wypukłe  $i$ -tego ( $i=1, \dots, 2n-3$ ) rzędu o minimalnych stratach energetycznych sygnału w PP ( $W_{C1}^i$ ),
- $a=0, 0 < b < 1$  - filtry pośrednie Butterwortha +  $W_{C1}^i$  ( $a=0, b=1$ ),
- $a=1, b=1$  } - filtry wypukłe  $i$ -tego ( $i=1, \dots, 2n-3$ ) rzędu o maksymalnym nachyleniu charakterystyki tłumieniowej przy  $\omega_0=1$  ( $W_{A1}^i$ ),
- $a=1, b=1$  }
- $0 < a < 1, b=1$  - filtry pośrednie  $W_{C1}^i$  ( $a=0, b=1$ ) +  $W_{A1}^i$  ( $\omega_0=1$ ),
- $a=1, 1 < b < \infty$  - filtry pośrednie  $W_{A1}^i$  ( $\omega_0=1$ ) +  $W_{A1}^i$  ( $\omega_0 \rightarrow \infty$ ),
- $a=1, b \rightarrow \infty$  - filtry  $i$ -tego ( $i=1, \dots, 2n-3$ ) rzędu o maksymalnym tłumieniu asymptotycznym  $W_{A1}^i$  ( $\omega_0 \rightarrow \infty$ ).

W szczególności gdy  $i=1$ , powyższe wnioski zgadzają się z wnios-



Rys. 7.1





Rys. 7.3

Tabela 7.1

n	i	Kwadrat modulu funkcji filtracije (problem C, a=0, b=1)	M <sub>min</sub>
2	0	$1.5625\omega^4 - .625\omega^2 + .0625$	.1667
	1	$\omega^4$	.2
3	0	$3.0625\omega^6 - 2.625\omega^4 + .5625\omega^2$	.1
	1	$1.8356010\omega^6 - 1.0272122\omega^4 + .19161114\omega^2$	.1207
	2	$1.3001241\omega^6 - .35990076\omega^4 + .05977671\omega^2$	.1337
	3	$\omega^6$	.1429
4	0	$6.890625\omega^8 - 9.187500\omega^6 + 3.718750\omega^4 - .4375000\omega^2 + .01562500$	.0667
	1	$3\omega^8 - 2.6666667\omega^6 + .6666667\omega^4$	.0857
	2	$2.114597\omega^8 - 1.4452504\omega^6 + .33074261\omega^4$	.0946
	3	$1.592910\omega^8 - .75095996\omega^6 + .15804993\omega^4$	.1013
	4	$1.241078\omega^8 - .29893988\omega^6 + .05786196\omega^4$	.1068
5	$\omega^8$	.1111	
5	0	$17.015625\omega^{10} - 30.937500\omega^8 + 19.218750\omega^6 - 4.6875000\omega^4 + .39062500\omega^2$	.0476
	1	$7.0419313\omega^{10} - 10.237874\omega^8 + 5.1024850\omega^6 - .98862399\omega^4 + .08208136\omega^2$	.0612
	2	$3.8325755\omega^{10} - 4.2495488\omega^8 + 1.5977711\omega^6 - .19798804\omega^4 + .01719024\omega^2$	.0706
	3	$2.3941905\omega^{10} - 1.8726818\omega^8 + .47849180\omega^6$	.0779
	4	$1.8810702\omega^{10} - 1.1585730\omega^8 + .27750278\omega^6$	.0919
	5	$1.5043249\omega^{10} - .64991743\omega^8 + .14559249\omega^6$	.0953
	6	$1.2149827\omega^{10} - .27168447\omega^8 + .05670172\omega^6$	.0884
7	$\omega^{10}$	.0909	
6	0	$44.931885\omega^{12} - 103.68897\omega^{10} + 88.099365\omega^8 - 33.676758\omega^6 + 5.6579590\omega^4 - .32958984\omega^2 + .00610352$	.0357
	1	$14.520785\omega^{12} - 26.998744\omega^{10} + 18.052951\omega^8 - 5.1443543\omega^6 + .56936201\omega^4$	.0740
	2	$7.8135682\omega^{12} - 12.323912\omega^{10} + 7.0653940\omega^8 - 1.7469444\omega^6 + .19189364\omega^4$	.0546
	3	$4.7590999\omega^{12} - 6.1618488\omega^{10} + 2.9198591\omega^8 - .58196795\omega^6 + .06485763\omega^4$	.0602
	4	$3.1180119\omega^{12} - 3.1445840\omega^{10} + 1.1565018\omega^8 - .14718011\omega^6 + .01725038\omega^4$	.0649
	5	$2.1659190\omega^{12} - 1.5768451\omega^{10} + .41092611\omega^8$	.0689
	6	$1.7736124\omega^{12} - 1.0270523\omega^{10} + .25343989\omega^8$	.0712
	7	$1.4582639\omega^{12} - .59724536\omega^{10} + .13898143\omega^8$	.0733
	8	$1.2002797\omega^{12} - .25621504\omega^{10} + .05593539\omega^8$	.0753
9	$\omega^{12}$	.0769	
7	0	$124.81079\omega^{14} - 349.47021\omega^{12} + 379.04077\omega^{10} - 200.39551\omega^8 + 53.294978\omega^6 - 6.5795898\omega^4 + .29907227\omega^2$	.0357
	1	$38.921831\omega^{14} - 94.119608\omega^{12} + 87.777873\omega^{10} - 39.660909\omega^8 + 8.9827636\omega^6 - .94770279\omega^4 + .04575289\omega^2$	.0368
	2	$16.996736\omega^{14} - 34.826350\omega^{12} + 27.253277\omega^{10} - 10.125006\omega^8 + 1.8296323\omega^6 - .13567858\omega^4 + .00738962\omega^2$	.0434
	3	$8.8333523\omega^{14} - 14.948629\omega^{12} + 9.4930536\omega^{10} - 2.7235542\omega^8 + .34577766\omega^6$	.0488
	4	$5.7809086\omega^{14} - 8.4069749\omega^{12} + 4.6438128\omega^{10} - 1.1662003\omega^8 + .14845383\omega^6$	.0525
	5	$3.9563371\omega^{14} - 4.7748232\omega^{12} + 2.2089355\omega^{10} - .44874151\omega^8 + .05829210\omega^6$	.0557
	6	$2.7978011\omega^{14} - 2.6576803\omega^{12} + .96904263\omega^{10} - .12527966\omega^8 + .01713726\omega^6$	.0586
	7	$2.0449574\omega^{14} - 1.4208688\omega^{12} + .37591146\omega^{10}$	.0612
	8	$1.7116055\omega^{14} - .95125078\omega^{12} + .23964532\omega^{10}$	.0627
	9	$1.4300097\omega^{14} - .56486720\omega^{12} + .13485747\omega^{10}$	.0641
	10	$1.1908478\omega^{14} - .24624145\omega^{12} + .05539363\omega^{10}$	.0655
11	$\omega^{14}$	.0667	

kami podanymi przez Djuricha i Petkovich [18], którzy badali wpływ parametrów  $a$  i  $b$  na przebieg charakterystyki tłumieniowej klasy filtrów monotonicznych.

## 8. EKSTREMALIZACJA FORM KWADRATOWYCH JAKO NARZĘDZIE DO ROZWIĄZANIA PEWNEJ KLASY PROBLEMÓW APROKSYMACJI

Występujące w literaturze problemy aproksymacji IAR za pomocą kryterium całkowego Gaussa i Papoulisa najczęściej rozwiązywane są metodą ortogonalnych wielomianów. Metoda ta pozwala w pewnych przypadkach otrzymać rozwiązanie w postaci wzoru analitycznego, jednak często prowadzi ona do zagadnienia rozwiązywania układu równań nieliniowych, które zwykle wymagają użycia złożonych metod iteracyjnych. Fakt ten jest przyczyną, że każdy problem rozwiązywany przy użyciu metody wielomianów ortogonalnych wymaga opracowania nowego algorytmu. Algorytmy te przeważnie żądają zadania pewnych warunków początkowych i od tego czy zostały one wybrane trafnie zależy czas maszynowy i rodzaj rozwiązania - lokalne czy globalne ekstremum optymalizacji.

Wad tych nie ma metoda ekstremalizacji formy kwadratowej zaproponowana w niniejszej pracy. Zasadniczą jej zaletą jest to, że w każdym przypadku rozwiązanie problemu sprowadza się do znajdowania największej lub najmniejszej wartości własnej macierzy. Zagadnienie wyznaczania wartości własnych jest dobrze opracowane w literaturze w postaci bardzo efektywnych algorytmów, które stanowią standardowe oprogramowanie większości maszyn cyfrowych i większych kalkulatorów.

Dzięki przedstawieniu poszukiwanego wielomianu  $\psi(\omega^2)$  w postaci



formy kwadratowej  $a^t B(\omega) a$ , gdzie  $a$  jest poszukiwanym wektorem współczynników wielomianu, a  $B(\omega)$  jest symetryczną macierzą, można takie operacje jak całkowanie i różniczkowanie wielomianu przenieść na elementy macierzy  $B(\omega)$  i ponieważ elementy te są elementarnymi funkcjami, więc wykonanie tych operacji nie nas- tręcza poważniejszych trudności.

Na podstawie podanych algorytmów można zauważyć, że mają one wiele etapów wspólnych, takich jak: faktoryzacja macierzy dodat- nio określonej, odwracanie macierzy trójkątnej czy obliczanie ekstremalnej wartości własnej macierzy. Fakt ten powoduje, że przez stosunkowo niewielką modyfikację raz opracowanego programu można rozwiązać różne problemy aproksymacji.

Wszystkie problemy aproksymacji rozwiązane w sposób analitycz- ny za pomocą metody wielomianów ortogonalnych można także roz- wiązać i podać wynik w postaci wzoru za pomocą metody zapropono- wanej w niniejszej pracy. Jako przykład może służyć podany w roz- dziale 7.2 wzór analityczny, opisujący filtry typu MAL, otrzymany metodą ekstremalizacji formy kwadratowej. Również w szczególnym przypadku, gdy  $i=1$  (klasa filtrów monotonicznych) można podać w postaci analitycznej rozwiązanie problemu A1, tzn. następującego problemu: znaleźć taki wielomian  $V_{n-1}(x)$  dla którego

$$xV_{n-1}^2(x) \left| \begin{array}{l} \longrightarrow M_{\max} \\ x=x_0 \geq 1 \end{array} \right.$$

przy warunku dodatkowym

$$\int_0^1 xV_{n-1}^2(x) dx = 1.$$

Rozwiązanie tego problemu (rozumując analogicznie jak w rozdziale 7.2) prowadzi do następującej funkcji  $\psi(\omega^2)$ , która jest monotoniczna w PP i ma maksymalne nachylenie przy wbranej częstotliwości  $\omega_0$  PZ:

$$\psi(\omega^2) = \int_0^{\omega} x v_{n-1}^2(x) dx, \quad a_m = \frac{1}{b} D^{-1} \mathbf{1},$$

gdzie  $b = \mathbf{1}^t D^{-1} \mathbf{1}$ , przy czym  $\mathbf{1}$  jest następującym wektorem kolumnowym

$$\mathbf{1} = [\omega_0^{n-0.5}, \omega_0^{n-2.5}, \omega_0^{n-4.5}, \dots]^t$$

wymiaru  $m$  ( $m = E[\frac{2n-1}{4} + 1]$ ), a macierz  $D$  jest zdefiniowana za pomocą zależności (5.7) ( $i=1$ ). Gdy  $\omega_0=1$  otrzymuje się rozwiązanie podane przez Papoulisa i Fukadę (filtry typu L), a gdy  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , wtedy wektor  $\mathbf{1}$  ma postać

$$\mathbf{1} = [1, 0, 0, \dots, 0]^t,$$

otrzymuje się rozwiązanie podane przez Halperna (filtry typu H).

Metodę ekstremalizacji formy kwadratowej można w wielu przypadkach stosować do funkcji wymiernej. Jako przykład rozważmy następujący problem<sup>1)</sup>: należy znaleźć funkcję  $\psi(\omega^2)$ , która spełnia następujące warunki

$$1^\circ \psi(\omega^2) \text{ jest monotoniczna w PP } 0 \leq \omega \leq 1,$$

$$2^\circ \text{ ma jednokrotny biegun przy ustalonej częstotliwości } \omega_0 \text{ PZ,}$$

$$3^\circ \psi(1) = 1$$

---

<sup>1)</sup> Problem ten nie jest dotychczas rozwiązany w literaturze.

oraz dla której całka w przedziale  $[0, 1]$  jest minimalna, tj.

$$4^{\circ} \int_0^1 \psi(\omega^2) d\omega \rightarrow M_{\min}.$$

Z warunków tych wynika następująca postać funkcji  $\psi(\omega^2)$

$$\psi(\omega^2) = \frac{\int_0^{\omega} x V_{n-1}^2(x) dx}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2},$$

gdzie  $V_{n-1}(x)$  jest parzystym lub nieparzystym wielomianem stopnia  $n-1$ . Jeśli wielomian  $V_{n-1}(x)$  zapisze się w postaci (5.3), to wówczas warunek 4<sup>o</sup> można przedstawić w postaci następującej formy kwadratowej

$$F_1 = \int_0^1 \psi(\omega^2) d\omega = a^t C a, \quad (8.1)$$

gdzie  $a = [a_{n-1}, a_{n-3}, \dots]^t$  jest wektorem współczynników

$a_{n-(2i-2)}$ ,  $i=1, \dots, m$ , oraz  $C = [c_{ij}]$  jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco

[70] :

$$\begin{aligned} c_{ij} = c_{ji} &= \int_0^1 \frac{\int_0^{\omega} x^{2n-2j-2i+3} dx}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{2k} \int_0^1 \frac{\omega^{2k}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} d\omega = \\ &= \frac{1}{2k} (a_0^{2k} I_0 - \sum_{l=0}^{k-1} \omega_0^{2(k-l-1)} J_{2l}) \quad (i, l=1, \dots, m), \end{aligned}$$

przy czym

$$k = n - j - 1 + 2,$$

$$I_0 = \frac{1}{2\omega_0^2(\omega_0^2 - 1)} + \frac{1}{4\omega_0^3} \ln\left(\frac{\omega_0 + 1}{\omega_0 - 1}\right),$$

$$J_0 = \frac{1}{2\omega_0} \ln\left(\frac{\omega_0 + 1}{\omega_0 - 1}\right),$$

$$J_2 = -1 + \frac{\omega_0}{2} \ln\left(\frac{\omega_0 + 1}{\omega_0 - 1}\right),$$

$$J_{2l} = \omega_0^{2l-2} J_2 - \sum_{p=0}^{l-2} \frac{\omega_0^{2p}}{2l-2p-1}, \quad l > 2.$$

Natomiast warunek 3<sup>o</sup> można zapisać w postaci

$$\psi(1) = a^t D a = 1,$$

gdzie  $D = [d_{ij}]$  jest symetryczną dodatnio określoną macierzą o wymiarach  $m \times m$  i elementach określonych następująco:

$$d_{ij} = d_{ji} = \frac{1}{2n-2i-2j+4} \frac{1}{(\omega_0^2 - 1)^2}, \quad i, j=1, \dots, m.$$

Algorytm rozwiązania tak zapisanego problemu podano już w punkcie 7.1 niniejszej rozprawy.

Łatwo rozszerzyć powyższy problem na większą ilość ustalonych biegunów w PZ. Powstaje wówczas problem obliczania wartości całki

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}}{(x_1^2 - x^2)^2 \dots (x_l^2 - x^2)^2} dx.$$

Z problemem tym stosunkowo łatwo można sobie poradzić stosując szybki i bardzo efektywny algorytm [13] rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste, których całkowanie nie przedstawia poważniejszych trudności. Również uwzględnienie funkcji wagi  $p(\omega)$  w wyrażeniu (8.1) jest zagadnieniem stosunkowo prostym, gdyż wówczas ulegają zmianie elementy macierzy C w następujący sposób:

$$c_{ij} = c_{ji} = \int_0^1 \frac{p(\omega) \int_0^{\omega} x^{2n-2j-2i+3} dx}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{2n-2j-2i+4} \times$$

$$x \int_0^1 \frac{p(\omega) \omega^{2n-2j-2i+4}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} d\omega, \quad i, j=1, \dots, m.$$

W przypadku gdy  $p(\omega)$  nie jest wielomianem, lecz bardziej złożoną funkcją, wówczas należy zastosować do obliczenia powyższej całki jedną ze znanych metod numerycznego całkowania [64].

## 9. PODSUMOWANIE

Analizując istotne cechy zagadnień występujących w dziedzinie aproksymacji IAR sformułowano trzy główne problemy aproksymacji. Problemy te prowadzą do nowych klas wielomianowych filtrów o  $i$ -tego rzędu wypukłej charakterystyce tłumieniowej w PP i:

- a) maksymalnym nachyleniu charakterystyki tłumieniowej przy wybranej częstotliwości pasma zaporowego lub
- b) maksymalnym tłumieniem przy wybranej częstotliwości pasma zaporowego lub minimalnym tłumieniem przy wybranej częstotliwości pasma przepustowego lub
- c) minimalnych stratach energii sygnału przenoszonego w PP lub maksymalnym tłumieniu energii sygnału niepożądanego w PZ.

Udowodniono pewien ogólny warunek konieczny dla funkcji filtracji tych filtrów oraz wykazano, że istnieją jednoznaczne rozwiązania tak postawionych problemów.

Przedyskutowano również właściwości wprowadzonej klasy filtrów. Jak wynika z przedstawionych wniosków, dzięki parametrom  $i$ ,  $\omega_0$  lub  $a$  i  $b$  można zmieniać w szerokich granicach właściwości uzyskanych filtrów. Pokazano również, że dla odpowiednio dobranych parametrów  $i$ ,  $\omega_0$  lub  $a$  i  $b$  można otrzymać dobrze znane z literatury filtry. Ogólnie można stwierdzić, że filtry o wypukłej charakterystyce tłumieniowej w PP mają znacznie lepsze właściwości tłumieniowe niż filtry Butterwortha przy jednocześnie lepszej charakterystyce grupowego opóźnienia i lepszej charakterystyce impulsowej niż filtry Czebyszewa.

Dzięki wprowadzonej klasie filtrów stała się możliwa sys-

tematyka pewnych prac, porównywanie właściwości znanych i nowo wprowadzonych filtrów, jak również głębsze zrozumienie związku pomiędzy pewnymi typami filtrów.

W pracy zaproponowano oryginalne podejście polegające na wykorzystaniu teorii form kwadratowych do znajdowania funkcji charakterystycznej filtru. Podejście to pozwoliło na opracowanie jednolitego sposobu rozwiązywania pewnej, dość szerokiej, klasy problemów aproksymacji.

Pokazano, że pewne problemy aproksymacji rozwiązane w literaturze w sposób analityczny można także rozwiązać i podać wynik w postaci wzoru za pomocą metody ekstremalizacji formy kwadratowej. Przedstawiono również sposób stosowania tej metody do funkcji wymiernej.

Zwrócono uwagę na fakt, że metoda ekstremalizacji formy kwadratowej jest metodą prostą, szczególnie nadającą się do implementacji na maszynę cyfrową.

W dodatku do pracy zamieszczono kompletny program obejmujący wszystkie podane w pracy algorytmy. Z przeprowadzonych badań, polegających na porównywaniu wartości obliczonych współczynników funkcji  $\psi(\omega^2)$  pewnych filtrów z wartościami wzorcowymi [19, 25, 43, 48, 58], wynika, że dokładność obliczanych współczynników jest wystarczająca z praktycznego punktu widzenia (8 + 10 miejsc znaczących w zależności od stopnia  $n$  filtru,  $n \leq 15$ ).

Wyda się więc, że za pomocą metody zaproponowanej w pracy można będzie rozwiązać szereg nowych problemów aproksymacji, takich jak np. konstrukcja funkcji  $\psi(\omega^2)$  opisującej filtry z zerami transmitancji w skończoności, których charakterystyka tłumieniowa jest  $i$ -tego rzędu wypukła w PP i ma maksymalne nachylenie przy  $\omega=1$  lub minimalne straty energetyczne w PP.

## 10. LITERATURA

1. Abramowitz M.: Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1965, chapter 22.
2. Achiezer N. I.: Lekcii po teorii approksimacii. OGIZ, Moskva-Leningrad 1947, tłum. pol., PWN, Warszawa 1957.
3. Aronhime P., Chen C.: Maximally flat sharp cutoff low-pass filters. Phoenix Arizona, 1977. IEEE International Symposium on Systems Proceedings, April 1977, ss. 356-359.
4. Aronhime P., Budak A.: Maximally flat magnitude beyond the origin. IEEE Trans. CT-18, May 1971, ss. 409-411.
5. Balabanian N.: Network synthesis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1958.
6. Baskov E. I.: Rasčet filtrov nižnych častot na elektronnych vyčislitelnyh mašinach. Elektrosvjaz, 1968, No 5, ss.23-32.
7. Beleckij A. F.: Teoretičeskie osnovy elektroprovodnoj svjazi. M., Svjazizdat, 1959.
8. Budak A., Aronhime P.: Maximally flat low-pass filters with steeper slopes at cutoff. IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, AU-18, March 1970, ss. 63-66.
9. Budak A., Aronhime P.: Transitional Butterworth-Chebyshev Filters. IEEE Trans. CT-18, vol 3, 1971, ss. 413-415.
10. Butterworth S.: On the Theory of filter amplifiers. Experimental Wireless, vol 7, October 1930.
11. Cauer W.: Theorie der Linearen Wechselstromschaltungen. 2 Auflage 1954 Akademic Verlag, Berlin (book).
12. Chang C. Y.: Maximally Flat Amplitude Low-pass Filter with an Arbitrary Number of Pairs of Real Frequency Transmission Zeros. IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-15, No 4, Dec. 1968, ss. 465-467.
13. Chin F., Steiglitz K.: An  $O(N^2)$  Algorithm for Partial Fraction Expansion. IEEE Trans. on Circuits and Systems, Jan. 1977, ss. 42-45.
14. Christian E., Eisenmann E.: Filter desing, Tables and Graphs. J. Wiley, New York 1967, tłum. ros., Swjaz, Moskva 1975.
15. Čebyšev P. L.: Polnoe sobranie sočinenij. t. II AH CCCP 1947.



16. Diemianov V. F., Mažoziemov V. N.: Vviedienie v minimaks. Nauka, Moskva 1972, tłum. pol. WNT, Warszawa 1975.
17. Djurich B. M.: Monotonic low-pass filters with maximum selectivity. Electronics Letters, vol 11, No 4, Feb. 1975, ss. 82-83.
18. Djurich B. M., Petkovich R. A.: Generalized Analysis of Optimum Monotonic Low-Pass Filters. IEEE Trans. on Circuit and Systems, CAS 23, No 11, Nov. 1976, ss. 647-649.
19. Fukada M.: Optimum filters of even with monotonic response. IRE Trans. on Circuit Theory, vol 6, 1959, ss. 277-281.
20. Gantmacher F. R.: Teorija matric. Izdatelstvo Nauka, Moskva 1966.
21. Golde W., Norek C., Paszkowski S.: Zarys teorii aproksymacji i jej zastosowań w elektrotechnice. PWN, Warszawa-Wrocław 1958.
22. Grinberg E. Ja., Kacnelson L. Z.: Algebraičeskoe postroenii izoekstremalnych drobiej Čebyševa, prigodnych dlja optimalnogo sinteza elektriceskich cepej. Latviskij matematičeskij ežegodnik. Riga, Zinatne 1970, t. 8, ss. 43-69.
23. Grinberg E. Ja., Kacnelson L. Z.: Ob algebraičeskom postroenii izoekstremalnych drobiej Čebyševa. Letvijskij matematičeskij ežegodnik. Riga, Zinatne 1968, ss. 89-101.
24. Guillemin E.: Synthesis of passive networks. J. Willey, New York 1957, tłum. ros. Svjaz, Moskva 1970.
25. Halpern P. H.: Optimum monotonic low-pass filters. IEEE Trans. on Circuit Theory, vol CT-16. May 1969, ss. 240-242.
26. Hansell G. E.: Filter desing and evaluation. Von Nostrand Reinhold Company, New York 1969, tłum. ros. Sovetskoe radio, Moskva 1974.
27. Harris F. J.: On Maximally Flat Low-Pass Filters with Ripple on the Stopband. IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, AU-20, No 5, Dec. 1972, ss. 345-352.
28. Humpherys D. S.: The Analysis Design and Synthesis of Electrical Filters. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1970, ss. 377-380.

29. Jarzabek A.: Algorytmy wyznaczania macierzy admitancyjnej i transmisyjnej czwórnika bezstratnego w modelu Darlingtona. Raport nr. I28/R-207/78, Wrocław 1978.
30. Johnson D. E., Johnson J. R.: Low-pass filters using ultraspherical polynomials. IEEE Trans. Circuit Theory, vol CT-13, Dec. 1966, ss. 364-369.
31. Johnson D. E., Johnson J. R.: Orthogonal Polynomials Used in Filter Synthesis, IEEE Trans., Vol CT-16, No 2, May 1969, ss. 244.
32. Johnson D. E., Johnson J. R.: Special Functions of Circuits and Systems. Journal of the Franklin Institute, Vol 307, No 2, Feb. 1979, ss. 95-105.
33. Jovanovic V., Rabrenovic D.: Low-pass filter flat magnitude with sharp cutoff. Electron. Lett., Vol 11, No 8, 1975, ss 174.
34. Jovanovic V., Rabrenovic D.: Critical monotonic magnitude characteristic. Telekomunikacije, Vol 19, 1970, ss. 1-6, (in Serbian).
35. Kalman R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problem. Trans. ASME, March 1969.
36. Kołmogorov A. N.: Interpolirovanie i ekstrapolirovanie stacionarnych slučajnych posledovatelnostej. Izv. AN CCCP seria mat.
37. Kopias M., Uruski M.: Filtry o charakterystyce czebyszewa w paśmie przepustowym i kształtowanej charakterystyce tłumieniowej w paśmie zaporowym. Komunikat nr I-28/K-189/78, Pol. Wrocław., Wrocław 1978.
38. Ku Y. H., Drubin M.: Network synthesis using Legendre and Hermite polynomials. J. Franklin Inst., Vol 273, Feb. 1962, ss. 138-157.
39. Kurtz J., Orchard H. J., Gabor C.: Least-Squares Passband Filters. IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol CT-19, May 1972, ss. 302-304.
40. Langin A. A.: Rasčet električeskich filtrov. Riga 1974.
41. Michalik Cz.: Filtr dolnoprzepustowy maksymalnie płaski o maksymalnie tłumionej energii w paśmie zaporowym. Raport nr I-28/PRE-068/79, Pol. Wrocław., Wrocław 1979.
42. Michalik Cz., Uruski M.: Algorytmy i programy komputerowego projektowania filtrów eliptycznych, Raport nr I-28/R-181/77, Pol. Wrocław., Wrocław 1977.

43. Michalik Cz., Piekarski M. S.: Filtr dolnoprzepustowy o wypukłej charakterystyce tłumieniowej w paśmie przepustowym i o maksymalnym asymptotycznym tłumieniu. Komunikat nr I-28/K-152/78 Pol. Wrocł., Wrocław 1978, również Rozprawy Elektrotechniczne z. 1, 1980.
44. Michalik Cz., Piekarski M. S.: Filtr dolnoprzepustowy o wypukłej charakterystyce tłumieniowej w paśmie przepustowym i o maksymalnym tłumieniu przy wybranej częstotliwości pasma zaporowego. Materiały III Krajowej Konferencji Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne. Stawiska/Gdańsk, 24-27 paźdz. 1979.
45. Michalik Cz.: Filtry Butterwortha i Czebyszewa. Raport nr I-28/R-190/78, Pol. Wrocł., Wrocław 1978.
46. Orchard H. J., Temes G. C.: Filter desing using transformed variables. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol CT-15, No 4, 1968, ss. 385-408.
47. Osowski J.: Zarys rachunku operatorowego, Teoria i zastosowanie w elektrotechnice. WNT, Warszawa 1972.
48. Papoulis A.: Optimum filters with monotonic response. Proc. IRE, Vol 46, March 1958, ss. 606-609.
49. Papoulis A.: On monotonic response filters. Proc. IRE, Vol 47, Feb. 1959, ss. 332-333.
50. Papoulis A.: A new class of filters, National IRE Conv. Rec., pt. 2, 1958, ss. 42-47.
51. Papoulis A.: On the desing of filters by synthesis. IRE National Conv. Rec., pt. 2, 1957, ss. 175-185.
52. Picciarelli V., Tore M.: Low-pass filter with minimum integrated power-loss ratio in the passband. Electronics Letters, Vol 12, 1976, ss. 665-666.
53. Piekarski M. S.: Wybrane zagadnienia syntezy liniowych układów mikroelektronicznych. Pol. Wrocł., Wrocław 1976, seria : Monogr.
54. Phuc D. T., Attikiouzel J.: Generalised analysis of nonmonotonic lowpass filters with minimum power loss characteristic. Electronic Letters, Vol 14, No 12, 1978, ss. 359-360.
55. Phuc D. T., Attikiouzel J.: On lowpass filters having multiple pairs of imaginary-axis zeros at two distinct points in the stopband with weighted L.M.S. error characteristic. Electronics Letters, Vol 14, No 22, 1978, ss. 706-708.

56. Phuc D. T., Attikiouzel J.: General analysis of nonmonotonic low-pass filters having multiple pairs of imaginary-axis zeros with weighted last-mean-square error characteristic. Electronics Letters. Vol 14. No 18, August 1978, ss. 600-602.
57. Popovich M. V.: Selective filters using least-mean square approximation technique. Electr. Letters, Vol 14, No 18, 1978, ss. 596-597.
58. Rakovich B. D.: Least-squares monotonic low-pass filters with sharp cutoff. Letters, Vol 9, No 4, Feb. 1973, ss. 75-76.
59. Rakovich B. D.: Using least-mean-square-approximation technique in filter design. Circuit Theory and Applications, Vol 5, 1972, ss. 171-179.
60. Rokovich B. D., Lazovich M.: Monotonic low-pass filters with Improved stopband performance. IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol , 1972, ss. 218-221.
61. Rokovich B. D., Litovski V. B.: Monotonic Passband Low-pass Filters with Chebyshev Stopband attenuation. IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, Feb. 1974. ss. 39-44.
62. Rokovich B. D., Popovich M.: Explicit expression for the characteristic function of generalized Legendre filters. Circuit Theory and Applic., Vol. 6, 1978, ss. 363-373.
63. Rakovich B. D., Popovich V.: Modified Butterworth filters. INT. J. Electronics, Vol 44, No 4, 1978, ss. 436-444.
64. Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1972.
65. Richards P.: Universal Optimum-Response Curves for Arbitrarily Coupled Resonators, Proc. IRE, Vol 34, Sep. 1946, ss. 624-629.
66. Robrenovic D., Jovanovic V.: Lowpass filters with maximally flat magnitude beyond the origin and arbitrary transmission zeros. Jnt. J. Circuit Theory and Appl., No 1, 1974, ss. 83-87.
67. Roy S. C. D.: On maximally flat sharp cutoff low-pass filters. IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, AU-19, March 1971, ss. 58-63.
68. Saal R., Ulbrich E.: On the design of filters by synthesis. IRE Trans. on Circuit Theory, Vol CT-5, Dec. 1958, ss. 284-327
69. Smith. B. R., Temes G. C.: An iterative approximation procedure for automatic filter synthesis. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol CT-12, Mar. 1965, ss. 107-112.

70. Spiegel M. R.: Mathematical Handbook of Formulas and Tables. New York, Mc Graw Hill 1968.
71. Stańko J.: Język Fortran maszyn serii ODRA 1300, Wyd. Pol. Wrocł., Wrocław 1975.
72. Stańko J.: Biblioteka programów i podprogramów maszyn ODRA serii 1300. Wyd. Pol. Wrocł., Wrocław 1975.
73. Stratonovič R. L.: Primenenija teorij markovskich processov dlja optimalnej filtracii signalov. Radiotekhnika i elektronika No 11, 1960.
74. Su K. L.: Time Domain Synthesis of Linear Networks, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1971.
75. Taylor A. D., Lindquist C. S.: MFMBO Filter Response. IEEE Trans. Circuits Syst., Vol 23, 1976, ss. 477.
76. Temes G. C., Mitra S. K.: Modern Filter Theory and Design. J. Wiley and Sons, Inc. New York 1973, także wydanie polskie: Teoria i projektowanie filtrów. WNT, Warszawa 1978.
77. Thajchayapong P.: Least-mean-square ( Minimum integrated power loss ratio ) Low-pass filters with a pair of imaginary-axis zeros. Electronics Letters, Vol 14.No 9, April 1978, ss.268-270
78. Thajchayapong P.: Flat Magnitude Low-pass Filters with Multiple Pairs Imaginary-Axis Zeros. Proceedings of the IEEE, Vol 66, No 10, Octob. 1978.
79. Thajchayapong P., Cheevasavit F., Manapee S.: Transitional Butterworth-Chebyshev filters. Electron. Letters, Vol 14, No 20,1978, ss. 680-681.
80. Thajchayapong P., Lomtong P.: Flat Magnitude Low-pass Filters with a Pair of Imaginary Axis Zeros. Proceedings of the IEEE, Vol 66, No 5, May 1978, ss. 592-594.
81. Turowicz A.: Teoria macierzy. Akademia Gorniczo-Hutnicza, Kraków 1974.
82. Unbehauen R.: Low-pass filters with predetermined phase or delay and Chebyshev stopband attenuation. IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol CT-15, No 4, Dec. 1968, ss. 337-341.
83. Uruski M.: Low-pass filter flat attenuation characteristics with sharp cutoff. Raport No I-28/K-207/77 Pol. Wrocł., Wrocław 1977.
84. Uruski M.: Filtr dolnoprzepustowy o maksymalnie płaskiej charakterystyce tłumieniowej i dużej stromości przy częstotliwości granicznej. Komunikat nr I-28/K-218/77, Pol. Wrocław 1977, również Rozprawy Elektrotechniczne, z. 2, 1979, ss. 433-440.

85. Uruski M.: Flat low-pass filters with steeper slopes at cutoff. Komunikat nr I-28/K-022/78, Pol. Wrocł., Wrocław 1978.
86. Varanasi P., Roy S. C. D.: Transitional Butterworth-Chebyshev Filters. Electronics Letters, Vol 14, No 6, 1978, ss. 179-180.
87. Weinberg L.: Network analysis and synthesis. Mc Graw-Hill, New York 1960.
88. Wiener N.: The interpolation, extrapolation and smoothing of stationary time series. J. Willey, New York 1949.
89. Znamenskij A. E., Tepljuk I. N.: Aktivnye RC-filtry. M., Svjaz 1970.
90. Zolotariev E. I.: Polnoe sobranie socinenij. AH CCCP 1932.

DODATEK

W niniejszym dodatku zamieszczono kompletny program obejmujący wszystkie podane w poprzednich rozdziałach algorytmy. Program o nazwie MCMC został napisany w języku FORTRAN 1900 [71]. W programie wykorzystano gotowy podprogram F4EIGEN3 z biblioteki podprogramów maszyn Odra serii 1300 [72]. Podprogram ten oblicza zmodyfikowaną metodą Jacobiego wszystkie wartości własne i wektory własne danej kwadratowej macierzy symetrycznej A o wymiarach  $n \times n$ . Skrócony opis sposobu wywołania tego podprogramu jest następujący:

CALL F4EIGEN3 ( N, N1, N2, B, EPS, IVS, S )

w którym

$$N1 = n(n + 1)/2,$$

$$N = n,$$

$$N2 = n,$$

$B(k) = a_{ij}$  - elementy górnej lub dolnej połowy symetrycznej macierzy A zapisane kolumnami,

EPS - dokładność obliczeń (np. 1.E-11),

$$IVS = 0.$$

Po wyjściu z podprogramu elementy przekątne tablicy B są n wartościami własnymi danej macierzy A, a kolumny tablicy S są im odpowiadającymi wektorami własnymi.

Ponadto na uwagę zasługują następujące podprogramy :

SUBROUTINE FAKTMA przeprowadza faktoryzację symetrycznej dodatnio określonej macierzy  $A = B^t B$ , gdzie B jest trójkątną macierzą dolną. W podprogramie tym wykorzystano metodę Gaussa-Banachiewicza [64].

SUBROUTINE OMT oblicza macierz odwrotną T do zadanej trójkątnej macierzy dolnej B.

SUBROUTINE ILMA oblicza iloczyn dwóch macierzy

$$C = AB \quad \text{jeśli } TR = .0,$$

$$C = AB^t \quad \text{jeśli } TR = 1.,$$

$$C = A^t B \quad \text{jeśli } TR = 2..$$

Macierze A, B i C mają kolejno następujące wymiary  $M \times L$ ,  $L \times N$  i  $M \times N$  ( $M, L, N \leq 10$ ).

Tabulogram programu przedstawiono poniżej.

```
LIST
LIBRARY(SUBGROUPEFGIS)
LIBRARY(SUBGROUPEFSCE)
PROGRAM(MFCE)
MIXED SEGMENTS
COMPRESS INTEGER AND LOGICAL
INPUT 1=CR1
OUTPUT 2=LP1
TRACE 0
END
```

MASTER FILTRY WYPUKLE

```
INTEGER NOS,H,N,M
REAL A(10,10),B(10,10),C(10,10),P(10,10),T(10,10),MWA(10,3),BC(55)
1,S(100),MWW(2),MKWA(21,3),XMAX,RHO,X
DOUBLE PRECISION PPD(10,10),A1(10,10),B1(10,10),C1(10,10),T1(10,10)
1),OM,OMP,OMK
COMMON/BLOK1/N/BLOK2/M,KP,OM,OMP,OMK
IVS=0
RHO=1.E-11
READ(1,1)NOS
1 FORMAT(I0)
DO 1500 IE1=1,NOS
READ(1,2)N,KP,OM,OMP,OMK
2 FORMAT(2I0,3F0.0)
M=(2*N-KP)/4+1
IF(M.LE.1)GO TO 1500
IF(KP.NE.0)GO TO 55
CALL MAL(MWW,MKWA,MWA,PPD)
GO TO 56
55 CONTINUE
CALL SARA(A1,B1,C1)
CALL FAKTMA(A1,PPD)
CALL OMT(PPD,T1)
DO 61 I=1,M
DO 61 J=1,M
T(I,J)=T1(I,J)
B(I,J)=B1(I,J)
61 C(I,J)=C1(I,J)
DO 22 I=1,M
22 MWA(I,1)=T(I,1)
CALL ILMA(T,B,P,M,M,M,2.)
CALL ILMA (P,T,B,M,M,M,.0)
K=0
DO 20 J=1,M
DO 20 I=J,M
K=K+1
20 BC(K)=B(I,J)
M1=M*(M+1)/2
M2=M
CALL F4EIGEN3(M,M1,M2,BC,RHO,IVS,S)
XMAX=BC(1)
K=1
```



```
DO 21 I=2,M
IP=(2*M-I+2)*(I-1)/2+1
IF(BC(IP).LE.XMAX) GO TO 21
K=I
XMAX=BC(IP)
21 CONTINUE
MWW(1)=XMAX
IP=M*(K-1)
CALL ILMA(T,S(IP+1),MWA(1,2),M,M,1,.0)
CALL ILMA(T,C,P,M,M,M,2.)
CALL ILMA(P,T,C,M,M,M,.0)
K=0
DO 24 J=1,M
DO 24 I=J,M
K=K+1
24 BC(K)=C(I,J)
CALL F4EIGEN3(M,M1,M2,BC,RHO,IVS,S)
XMAX=BC(1)
K=1
IF(OMK.LE.1.) GO TO 57
DO 58 I=2,M
IP=(2*M-I+2)*(I-1)/2+1
IF(BC(IP).LE.XMAX) GO TO 58
K=I
XMAX=BC(IP)
58 CONTINUE
GO TO 59
57 DO 25 I=2,M
IP=(2*M-I+2)*(I-1)/2+1
IF(BC(IP).GE.XMAX) GO TO 25
K=I
XMAX=BC(IP)
25 CONTINUE
59 MWW(2)=XMAX
IP=M*(K-1)
CALL ILMA(T,S(IP+1),MWA(1,3),M,M,1,.0)
56 MM1=M+M-1
DO 27 I=1,3
27 CALL MNW(MWA(1,I),MWA(1,I),MKWA(1,I),M,M,MM1)
IF(KP.EQ.0) GO TO 80
DO 28 I=1,MM1
Y=2.+(N-I+1)
X=1.
DO 40 L=1,KP
40 X=X*(Y-L+1)
DO 28 J=1,3
28 MKWA(I,J)=MKWA(I,J)/X
80 CONTINUE
IF(KP.EQ.0)WRITE(2,62)N,KP,OM,OM,OMP,OMK
IF(KP.EQ.0) GO TO 63
IF(OMK.EQ..0)WRITE(2,64)N,KP,OM,OMP
IF(OMK.EQ..0)GO TO 63
IF(OMK.LE.1.)WRITE(2,29)N,KP,OM,OMP,OMK
IF(OMK.GT.1.)WRITE(2,60)N,KP,OM,OMP,OMK
```

```
62 FORMAT(//////////20X,82HAPROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWE
1J FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSTOWEGO///33X,43HMETODA EKSTREMA
2LIZACJI FORMY KWADRATOWEJ///47X,2HN=,12,12X,2HI=,12/// 3X,1
31HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM ://3X,36HMAKSZYMA
4LNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE,4X,37HMAKSZYMALNE NACHYLENIE PRZY 1
5 ,3X,23HMAKSZYMALNA POWIERZCHNIA//3X,2(2HD=,F19.15,19X),4HOMP
5=,F9.5,3X,4HOMK=,F9.5///3X, 23HWEKTOR MAKSYMALIZOW
6ANY,17X,23HWEKTOR MAKSYMALIZOWANY,17X,23HWEKTOR MAKSYMALIZOWANY/
7//3X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI,15X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI
8,15X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI)
60 FORMAT(//////////20X,82HAPROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWE
1J FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSTOWEGO///33X,43HMETODA EKSTREMA
2LIZACJI FORMY KWADRATOWEJ///47X,2HN=,12,12X,2HI=,12/// 3X,1
31HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM ://3X,36HMAKSZYMA
4LNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE,4X,37HMAKSZYMALNE NACHYLENIE PRZY
5 ,3X,23HMAKSZYMALNA POWIERZCHNIA//54X,6HOMEGA=,F7.3,16X,4HOMP
5=,F9.5,3X,4HOMK=,F9.5///3X, 23HWEKTOR MAKSYMALIZOW
6ANY,17X,23HWEKTOR MAKSYMALIZOWANY,17X,23HWEKTOR MAKSYMALIZOWANY/
7//3X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI,15X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI
8,15X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI)
29 FORMAT(//////////20X,82HAPROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWE
1J FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSTOWEGO///33X,43HMETODA EKSTREMA
2LIZACJI FORMY KWADRATOWEJ///47X,2HN=,12,12X,2HI=,12/// 3X,1
31HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM ://3X,36HMAKSZYMA
4LNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE,4X,37HMAKSZYMALNE NACHYLENIE PRZY
5 ,3X,23HMINIMALNA POWIERZCHNIA//54X,6HOMEGA=,F7.3,16X,4HOMP
5=,F9.5,3X,4HOMK=,F9.5///3X, 23HWEKTOR MAKSYMALIZOW
6ANY,17X,23HWEKTOR MAKSYMALIZOWANY,17X,23HWEKTOR MAKSYMALIZOWANY/
7//3X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI,15X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI
8,15X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI)
64 FORMAT(//////////20X,82HAPROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDOWE
1J FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSTOWEGO///33X,43HMETODA EKSTREMA
2LIZACJI FORMY KWADRATOWEJ///47X,2HN=,12,12X,2HI=,12/// 3X,1
31HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM :,29X,11HKRYTERIUM ://3X,36HMAKSZYMA
4LNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE,4X,37HMAKSZYMALNA WARTOSC TLUMIENIA
5 PRZY ,3X,37HMINIMALNA WARTOSC TLUMIENIA PRZY //54X,6HOMEGA=,
5F9.5,14X,6HOMEGA=,F9.5///3X,23HWEKTOR MAKSYMALIZOWANY,17X,23HWEKT
6OR MAKSYMALIZOWANY,17X,22HWEKTOR MINIMALIZOWANY///3X,25HSTOPIEN
7 WSPOLCZYNNIKI,15X,25HSTOPIEN WSPOLCZYNNIKI,15X,25HSTOPIEN
8 WSPOLCZYNNIKI)
63 IP=(2*N-KP)/2+2
DO 30 I=1,M
IP=IP-2
30 WRITE(2,31)IP,MWA(I,1),IP,MWA(I,2),IP,MWA(I,3)
31 FORMAT(/5X,12,5X,E17.10,16X,12,5X,E17.10,16X,12,5X,E17.10)
WRITE(2,32)
32 FORMAT(///1X,3(2X,18HFUNKCJA FILTRACJI,20X)///1X,3(2X,25HSTOPIEN
1 WSPOLCZYNNIKI,13X))
IP=2*N+2
DO 33 I=1,MM1
IP=IP-2
33 WRITE(2,31)IP,MKWA(I,1),IP,MKWA(I,2),IP,MKWA(I,3)
IF(OMK.LE.1.)WRITE(2,34)MWW(1),MWW(2)
IF(OMK.GT.1.)WRITE(2,82)MWW(1),MWW(2)
34 FORMAT(///1X,40(1H-),9X,5HXMAX=,E17.10,18X,5HXMIN=,E17.10)
82 FORMAT(///1X,40(1H-),9X,5HXMAX=,E17.10,18X,5HXMAX=,E17.10)
500 CONTINUE
STOP
END
```

```
SUBROUTINE MAL(MWW,MKWA,MWA,PPD)
REAL MWW(2),MWA(10,3),MKWA(21,3)
DOUBLE PRECISION A(10,10),PPD(10,10),X,OM,OMP,OMK
1,WL(10),WPA(10),WP1(10),WF,Y,XY,Y1,XY1,Z,XA,L2
COMMON/BLOK1/N/BLOK2/M,KP,OM,OMP,OMK
MM1=M+M-1
DO 16 I=1,M
WL(I)=1.
WP1(I)=N-2*I+2
16 WPA(I)=.0
WPA(1)=1.
I1=2*N
DO 1 L=1,M
DO 1 J=1,M
IM=I1-2*J-2*L+5
X=DBLE(FLOAT(IM))
1 A(L,J),A(J,L)=(OMK**(IM)-OMP**(IM))/X
CALL FAKTMA(A,PPD)
CALL OMT(PPD,A)
DO 21 J=1,M
DO 21 I=1,M
X=.0
DO 22 K=1,M
22 X=X+A(I,K)*A(J,K)
21 PPD(I,J)=X
X,XA=WF(WL,PPD,WL)
Y1=WF(WP1,PPD,WP1)
XY1=WF(WP1,PPD,WL)
Y=WF(WPA,PPD,WPA)
XY=WF(WPA,PPD,WL)
MWW(2)=1./X
DO 3 I=1,M
X=.0
DO 4 J=1,M
4 X=X+PPD(I,J)
3 MWA(I,3)=X*MWW(2)
IF(OM.EQ..0)OM=DBLE(2.*N*N-1.)/DBLE(4.*N*N-1.)
Z=DSQRT((XY**2-XA*Y)/(1.-XA*OM))
L2=(Z-XY)/XA
DO 14 I=1,M
X=.0
DO 15 J=1,M
15 X=X+PPD(I,J)*(WPA(J)+L2*WL(J))
14 MWA(I,1)=X/Z
Z=DSQRT((XY1**2-XA*Y1)/(1.-XA*OM))
L2=(Z-XY1)/XA
DO 12 I=1,M
X=.0
DO 13 J=1,M
13 X=X+PPD(I,J)*(WP1(J)+L2*WL(J))
12 MWA(I,2)=X/Z
MWW(1)=2.*(OM*Z-L2)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE SARA(A,B,G)
DOUBLE PRECISION A(10,10),B(10,10),C(10,10),X,Z,OM,OMP,OMK
COMMON/BLOK1/N/BLOK2/M,K,OM,OMP,OMK
I1=2*N-K
DO 1 L=1,M
DO 1 J=1,M
X=1.
DO 2 I2=1,K
Z=I1-2*J-2*L+4+I2
2 X=X*Z
IM=2*N-2*J-2*L+4
A(L,J),A(J,L)=1./X
IF(OMK.NE..0)GO TO 3
C(L,J),C(J,L)=1./X*(OMP**IM)
B(L,J),B(J,L)=1./X*(OM**IM)
GO TO 1
3 CONTINUE
C(L,J),C(J,L)=1./(Z+1.)/X*(OMK**(IM+1)-OMP**(IM+1))
B(L,J),B(J,L)=Z/X*(OM**(IM-1))
1 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE FAKTMA(A,B)
DOUBLE PRECISION B(10,10),A(10,10),X,S
COMMON/BLOK2/N
X,B(N,N)=DSQRT(A(N,N))
DO 1 I=1,N-1
1 B(N,I)=A(I,N)/X
DO 2 K=2,N
M=N+1-K
S=.0
IP=M+1
DO 3 I=IP,N
3 S=B(I,M)**2+S
X,B(M,M)=DSQRT(A(M,M)-S)
IF(M.EQ.1)GO TO 2
DO 5 J=1,M-1
S=.0
DO 4 I=IP,N
4 S=B(I,M)*B(I,J)+S
5 B(M,J)=(A(J,M)-S)/X
2 CONTINUE
DO 6 J=2,N
DO 6 I=1,J-1
6 B(I,J)=.0
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE OMT(B,T)
DOUBLE PRECISION B(10,10),T(10,10),X,S
COMMON /BLOK2/N
DO 10 J=1,N
DO 10 I=1,N
IF(I-J)0,11,12
T(I,J)=.0
GO TO 10
11 T(J,J)=1./B(J,J)
GO TO 10
12 S=.0
X=B(I,1)
DO 13 K=J,I-1
13 S=S-B(I,K)/X*T(K,J)
T(I,J)=S
10 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE ILMA(A,B,C,M,L,N,TR)
REAL A(10,10),B(10,10),C(10,10)
IF(TR-1.0)0,10,20
DO 1 J=1,N
DO 1 I=1,M
D=0.0
DO 2 K=1,L
2 D=D+A(I,K)*B(K,J)
1 C(I,J)=D
RETURN
10 DO 11 J=1,N
DO 11 I=1,M
D=0.0
DO 12 K=1,L
12 D=D+A(I,K)*B(J,K)
11 C(I,J)=D
RETURN
20 DO 21 J=1,N
DO 21 I=1,M
D=0.0
DO 22 K=1,L
22 D=D+A(K,I)*B(K,J)
21 C(I,J)=D
RETURN
END
```

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION WF(L,A,P)
DOUBLE PRECISION L(10),A(10,10),P(10),X,Y
COMMON/BLOK2/M
Y=.0
DO 2 J=1,M
X=.0
DO 1 I=1,M
1 X=X+L(I)*A(I,J)
2 Y=Y+X*P(J)
WF=Y
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE MNW(A,B,C,L,M,N)
DIMENSION A(L),B(M),C(N)
DO 1 K=1,N
S=.0
DO 2 J=MAX0(1,K-M+1),MIN0(L,K)
2 S=S+A(J)*B(K-J+1)
1 C(K)=S
RETURN
END
```

FINISH

Dane do obliczeń wprowadza się na kartach perforowanych wg następujących zasad.

Na pierwszej karcie powinna znajdować się tylko jedna liczba całkowita K - ilość serii danych. Druga (i następne jeśli  $K > 1$ ) powinna zawierać dwie liczby całkowite N i I oraz trzy liczby rzeczywiste z kropką pozycyjną. Kolejność zapisu liczb jest następująca :

N, I, OM, OMP, OMK.

Oznaczenia:

N - stopień n funkcji  $\psi_{2n}(\omega^2)$ ,  
I - i-ta pochodna funkcji  $\psi_{2n}^{(i)}(\omega^2)$ ,

Jeśli  $I \geq 1$

- OM - znormalizowana częstotliwość  $\omega_0$  przy której maksymalizuje się pochodną  $\psi^{(1)}(\omega^2)$  (problem A1,  $\omega_0 \geq 1$ ) lub maksymalizuje się wartość funkcji  $\psi(\omega^2)$  (problem B,  $\omega_0 > 1$ ),  
OMP - znormalizowana częstotliwość a (problem C1) lub znormalizowana częstotliwość  $\omega_0 < 1$  przy której minimalizuje się wartość funkcji  $\psi(\omega^2)$  (problem B),  
OMK - znormalizowana częstotliwość b (problem C1) lub  
OMK = .0 dla problemu B.

Jeśli  $I = 0$

- OM - wartość powierzchni c (problem A2),  
OMP - należy zapisać OMP = .0  
OMK - należy zapisać OMK = 1. } problem C2.

Dane na kartach muszą być oddzielone co najmniej jedną spacją i mogą być pisane w kolumnach od 1 do 80. Zbędne spacje są pomijane. Maksymalny stopień n jest ograniczony do dwudziestu.

Przykład przygotowania danych:

4

5 0 .2 .0 1.

5 1 1. .0 1.

4 2-1.1 .0 1.

5 1 2. .5 .0

Wydruki dla powyższych danych będą następujące:

APROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDEWJ FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSTOWEJO

METODA EKSTREMALIZACJI FORMY KWADRATOWEJ

N = 5 I = 0

KRYTERIUM 1  
MAKSYMALNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE  
D = 0.200000000000000

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
5	0.1116062364E 02
5	-0.1313083152E 02
1	0.2970207880E 01

FUNKCJA FILTRACJI

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
10	0.1245595200E 03
8	-0.2930965373E 03
6	0.2387174810E 03
4	-0.7800257950E 02
2	0.8822134850E 01

KRYTERIUM 1  
MAKSYMALNE NACHYLENIE PRZY 1  
D = 0.200000000000000

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
5	0.1086109679E 02
3	-0.1232321410E 02
1	0.2462117307E 01

FUNKCJA FILTRACJI

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
10	0.1179634235E 03
8	-0.2676872423E 03
6	0.2053441945E 03
4	-0.6064239743E 02
2	0.6062021634E 01

KRYTERIUM 1  
MAKSYMALNA POWIERZCHNIA  
DMP = 0.00000 DMR = 1.00000

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
5	0.4125000000E 01
3	-0.3750000000E 01
1	0.6250000000E 00

FUNKCJA FILTRACJI

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
10	0.1701562500E 02
8	-0.3093750000E 02
6	0.1921875000E 02
4	-0.4687500000E 01
2	0.3906250000E 00

XMAX = 0.3959591794E 02

XMIN = 0.4761904752E -01

APROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDEWJ FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSTOWEJO

METODA EKSTREMALIZACJI FORMY KWADRATOWEJ

N = 5 I = 1

KRYTERIUM 1  
MAKSYMALNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
4	0.1097365596E 02
2	-0.1097365596E 02
0	0.3102277660E 01

FUNKCJA FILTRACJI

KRYTERIUM 1  
MAKSYMALNE NACHYLENIE PRZY  
OMEGA = 1.000

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
4	0.1414213562E 02
2	-0.1131370850E 02
0	0.1414213562E 01

FUNKCJA FILTRACJI

KRYTERIUM 1  
MINIMALNA POWIERZCHNIA  
DMP = 0.00000 DMR = 1.00000

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
4	0.8391021570E 01
2	-0.4880043423E 01
0	0.4051099934E 00

FUNKCJA FILTRACJI



STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
10	0,3600000000E 02
8	-0,9000000000E 02
6	0,8000000000E 02
4	-0,3000000000E 02
2	0,5000000000E 01

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
10	0,2000000000E 02
8	-0,4000000000E 02
6	0,2800000000E 02
4	-0,7999999999E 01
2	0,9999999999E 00

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
10	0,7041931238E 01
8	-0,1023787331E 02
6	0,3102484980E 01
4	-0,9886239908E 00
2	0,8208136237E-01

-----  
XMAX= 0,1800000000E 02

XMIN= 0,0119613860E-01

APROKSYMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDEWJ FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSZOWEGO

METODA EKSTREMALIZACJI FORMY KWADRATOWEJ

N= 6                    I= 2

KRYTERIUM I  
MAKSYMALNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE

KRYTERIUM I  
MAKSYMALNE NACHYLENIE PRZY  
OMEGA= 1,100

KRYTERIUM I  
MINIMALNA POWIERZCHNIA  
UMP= 0,0000    UMK= 1,00000

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

WEKTOR MAKSYMALIZOWANY

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
3	0,1986783883E 02
1	-0,5947133333E 01

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
3	0,1374022210E 02
1	-0,417309204E 01

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
3	0,1088174781E 02
1	-0,1992212637E 01

FUNKCJA FILTRACJI

FUNKCJA FILTRACJI

FUNKCJA FILTRACJI

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
8	0,3947368621E 01
6	-0,5894735342E 01
4	0,2947368621E 01

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
8	0,3371403349E 01
6	-0,3822628320E 01
4	0,1431194971E 01

STUPIEN	WSPOLCZYNNIKI
8	0,2114507777E 01
6	-0,1443230303E 01
4	0,3307420003E 00

-----  
XMAX= 0,2334781136E 02

XMIN= 0,9462948937E-01

APROKSIMACJA CHARAKTERYSTYKI AMPLITUDEWJ FILTRU IDEALNEGO DOLNOPRZEPUSZOWEGO

METODA EKSTREMALIZACJI FORMY KWADRATOWEJ

N = 5                    I = 1

KRYTERIUM 1		KRYTERIUM 2		KRYTERIUM 3	
MAKSYMALNE ASYMPTOTYCZNE TLUMIENIE		MAKSYMALNA WARTOSC TLUMIENIA PRZY OMEGA = 2,00000		MINIMALNA WARTOSC TLUMIENIA PRZY OMEGA = 0,50000	
WEKTOR MAKSYMALIZOWANY		WEKTOR MAKSYMALIZOWANY		WEKTOR MINIMALIZOWANY	
STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI	STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI	STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
4	0,1897365526E 02	4	0,1887100885E 02	4	0,4427028607E 01
2	-0,1897365526E 02	2	-0,1843693060E 02	2	-0,1080154312E 01
0	0,3162277660E 01	0	0,2935795507E 01	0	0,4299945932E-01
FUNKCJA FILTRACJI		FUNKCJA FILTRACJI		FUNKCJA FILTRACJI	
STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI	STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI	STOPIEN	WSPOLCZYNNIKI
10	0,3600000000E 02	10	0,3568702152E 02	10	0,1959858222E 01
8	-0,9000000000E 02	8	-0,8707305478E 02	8	-0,1195468519E 01
6	0,8000000000E 02	6	0,7514011465E 02	6	0,2579088372E 00
4	-0,3000000000E 02	4	-0,2706352901E 02	4	-0,2322302582E-01
2	0,5000000000E 01	2	0,4302447429E 01	2	0,9244767538E-03

XMAX = 0,1864599667E 05

XMIN = 0,9363081650E-04

Odbiorcy

1. Ośrodek Informacji Naukowo-Technicznej ITA	1 egz.
2. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
3. Biblioteka Główna Politechniki Warszawskiej	1 egz.
4. Biblioteka Główna Politechniki Gdańskiej	1 egz.
5. Instytut Tele-Radiotechniczny W-wa Ratuszowa 11	3 egz.
6. Promotor	1 egz.
7. Recenzenci	2 egz.
8. Autor	2 egz.
	<hr/>
	12 egz.