

Centrum Wiedzy i Informacji  
Naukowo-Technicznej Politechniki Wrocławskiej



100100484402

HENRYK KUDELA

# MATEMATYCZNE WPROWADZENIE DO MECHANIKI PŁYNÓW



WYDAWNICTWO NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ



**Henryk Kudela**

**Matematyczne wprowadzenie  
do mechaniki płynów**



**Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław 2016**

NS 207085

### Recenzenci

Michał CIAŁKOWSKI

Zbigniew GNUTEK

### Opracowanie redakcyjne i korekta

Katarzyna SOSNOWSKA

### Projekt okładki

Marcin ZAWADZKI

Wszelkie prawa zastrzeżone. Niniejsza książka, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2016

**OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ**

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.edu.pl>

e-mail: [oficwyd@pwr.edu.pl](mailto:oficwyd@pwr.edu.pl)

[zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl](mailto:zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl)

ISBN 978-83-7493-953-9



Druk i oprawa: beta-druk, [www.betadruk.pl](http://www.betadruk.pl)

386911L/M

AKC 2016/08M/K

# Spis rzeczy

Słowo wstępne . . . . .	7
<b>Rozdział 1. Wybrane zagadnienia z rachunku wektorowego . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Przestrzeń euklidesowa – wektor położenia . . . . .	9
1.2. Pola skalarne, wektorowe i tensorowe . . . . .	11
1.3. Tensory rzędu drugiego . . . . .	12
1.3.1. Reprezentacja tensora rzędu drugiego w prostokątnym układzie kartezjańskim . . . . .	13
1.3.2. Przykłady tensorów rzędu drugiego . . . . .	14
1.4. Liniowa przestrzeń wektorowa . . . . .	16
1.5. Operacje różniczkowe na polach skalarnych i wektorowych . . . . .	17
1.5.1. Gradient funkcji . . . . .	18
1.5.2. Operator dywergencji . . . . .	20
1.5.3. Operator rotacji . . . . .	25
1.5.4. Wirowość pola prędkości bryły sztywnej i przepływu w pobliżu ściany . . . . .	28
1.5.5. Cyrkulacja pola prędkości i twierdzenie Stokesa . . . . .	31
1.5.6. Laplasian . . . . .	39
1.5.7. Laplasian w sferycznym i cylindrycznym układzie współrzędnych . . . . .	40
1.6. Równanie Laplace’a . . . . .	41
1.6.1. Zagadnienie Dirichleta i zagadnienie Neumanna . . . . .	43
1.6.2. Wzory całkowe Greena . . . . .	45
1.6.3. Własności funkcji harmonicznych . . . . .	47
<b>Rozdział 2. Kinematyka ośrodka ciągłego . . . . .</b>	<b>51</b>
2.1. Uwagi o hipotezie ośrodka ciągłego . . . . .	51
2.2. Ruch w ośrodku ciągłym . . . . .	52
2.2.1. Opis ruchu w zmiennych Lagrange’a i w zmiennych Eulera . . . . .	53
2.2.2. Trajektoria cząstki, linie prądu i linie wysnute . . . . .	55
2.2.3. Pochodna lokalna, konwekcyjna i substancjalna . . . . .	64
2.2.4. Pochodna jakobianu . . . . .	66
2.3. Twierdzenie transportowe . . . . .	70
2.4. Kinematyka deformacji ośrodka ciągłego . . . . .	73
2.4.1. Własności tensora symetrycznego $D$ . . . . .	74

2.4.2.	Własności tensora antysymetrycznego . . . . .	78
2.5.	Zadania kontrolne . . . . .	80
<b>Rozdział 3. Zasada zachowania masy i pędu dla ośrodka ciągłego . . . .</b>		<b>83</b>
3.1.	Zasada zachowania masy . . . . .	83
3.1.1.	Równanie ciągłości w zmiennych Lagrange'a . . . . .	85
3.1.2.	Przepływ nieściśliwy . . . . .	85
3.1.3.	Równanie Burgersa . . . . .	90
3.2.	Zasada zachowania pędu . . . . .	93
3.2.1.	Zasada zachowania pędu dla układu $n$ punktów materialnych . . .	95
3.2.2.	Prawo zachowania pędu dla ośrodka ciągłego . . . . .	96
3.2.3.	Zasada lokalnej równowagi naprężeń . . . . .	98
3.2.4.	Równania ruchu ośrodka ciągłego . . . . .	103
3.3.	Prawo zachowania momentu pędu . . . . .	104
3.3.1.	Zasada zachowania momentu pędu dla układu $n$ punktów materialnych . . . . .	104
3.3.2.	Prawo zachowania momentu pędu dla ośrodka ciągłego . . . . .	105
3.3.3.	Równanie transportu pędu . . . . .	107
3.3.4.	Równanie transportu energii kinetycznej . . . . .	114
<b>Rozdział 4. Równania ruchu cieczy nielepkiej . . . . .</b>		<b>117</b>
4.1.	Równanie Eulera dla cieczy nielepkiej . . . . .	117
4.1.1.	Równanie Gromeki–Lamba . . . . .	119
4.1.2.	Równanie Helmholtza (równanie transportu wirowości w płynie nielepkim) . . . . .	120
4.1.3.	Dekompozycja Hodge'a . . . . .	121
4.1.4.	Wyznaczanie pola ciśnień metodą projekcji . . . . .	123
4.2.	Przepływy potencjalne . . . . .	125
4.2.1.	Energia kinetyczna przepływu potencjalnego i twierdzenie Thomsona . . . . .	126
4.2.2.	Równanie Bernoulliego . . . . .	128
4.2.3.	Twierdzenie o cyrkulacji pola prędkości (twierdzenie Kelvina) . . .	131
4.3.	Twierdzenie o rozkładzie pola wektorowego (twierdzenie Helmholtza) . . .	133
4.4.	Przykłady trójwymiarowych przepływów potencjalnych . . . . .	136
4.4.1.	Źródło punktowe . . . . .	136
4.4.2.	Dipol . . . . .	140
4.4.3.	Optyw kuli strumieniem jednorodnym . . . . .	142
4.4.4.	Zagadnienie potencjalnego opływu kuli poruszającej się ze stałą prędkością . . . . .	150
4.5.	Delta Diraca . . . . .	151
<b>Rozdział 5. Wybrane zagadnienia z analizy zespolonej . . . . .</b>		<b>155</b>
5.1.	Liczby zespolone . . . . .	155
5.2.	Funkcje zmiennej zespolonej . . . . .	157
5.2.1.	Ciągłość funkcji zespolonej . . . . .	158
5.2.2.	Pochodna zespolona . . . . .	158

5.2.3.	Warunki Cauchy'ego–Riemanna we współrzędnych cylindrycznych . . . . .	161
5.2.4.	Funkcje zespolone a funkcje harmoniczne . . . . .	162
5.2.5.	Całkowanie funkcji zespolonej . . . . .	165
5.2.6.	Twierdzenie Cauchy'ego . . . . .	167
5.2.7.	Konsekwencje twierdzenia Cauchy'ego . . . . .	168
5.2.8.	Punkty osobliwe i residua . . . . .	169
5.2.9.	Twierdzenie Cauchy'ego o residuach . . . . .	170
<b>Rozdział 6. Dwuwymiarowe przepływy potencjalne . . . . .</b>		<b>173</b>
6.1.	Funkcja prądu, potencjał prędkości i potencjał zespolony . . . . .	173
6.2.	Przepływ jednorodny . . . . .	177
6.3.	Opływ kąta prostego . . . . .	177
6.4.	Przepływ wywołany źródłem . . . . .	179
6.5.	Złożenie źródła i przepływu jednorodnego . . . . .	180
6.6.	Dipol . . . . .	182
6.7.	Wir punktowy . . . . .	184
6.8.	Pole prędkości dwóch wirów . . . . .	188
6.9.	Układ $n$ wirów na płaszczyźnie . . . . .	193
6.9.1.	Uwagi o hamiltonowskich układach dynamicznych . . . . .	195
6.9.2.	Nawiasy Poissona . . . . .	196
6.10.	Ruch trzech wirów . . . . .	198
6.11.	Kolaps trzech wirów . . . . .	199
6.12.	Ewolucja wirowości zadana układem wirów punktowych . . . . .	207
6.13.	Twierdzenie Blasiusa . . . . .	209
6.14.	Twierdzenie Kuty–Żukowskiego . . . . .	211
6.15.	Twierdzenie o kole . . . . .	213
6.16.	Opływ walca . . . . .	214
6.17.	Opływ walca z cyrkulacją . . . . .	216
6.18.	Opływ walca w obecności wiru punktowego . . . . .	218
6.19.	Opływ walca w obecności stacjonarnej pary wirów . . . . .	222
<b>Rozdział 7. Ruch płynu lepkiego . . . . .</b>		<b>225</b>
7.1.	Wprowadzenie . . . . .	225
7.2.	Płyn Stokesa . . . . .	227
7.3.	Równanie Naviera–Stokesa . . . . .	230
7.3.1.	Laminarny przepływ w rurze . . . . .	233
7.3.2.	Przepływ wewnątrz obracających się cylindrów . . . . .	238
7.3.3.	Doświadczenie Reynoldsa i podobieństwo przepływów . . . . .	241
<b>Rozdział 8. Ruch wirowy płynu . . . . .</b>		<b>247</b>
8.1.	Wirowość w płynie nielepkiem . . . . .	247
8.1.1.	Linia wirowa i rurka wirowa . . . . .	248
8.1.2.	Wzór Biota–Savarta . . . . .	250
8.1.3.	Twierdzenia o transporcie wirowości w płynie nielepkiem i nieściśliwym . . . . .	253

8.1.4. Twierdzenia Helmholtza . . . . .	254
8.2. Uogólnione równanie transportu wirowości Helmholtza dla płynu lepkiego . . . . .	258
8.2.1. Równania Helmholtza dla przepływu dwuwymiarowego . . . . .	260
8.2.2. Wirowość w dwuwymiarowym przepływie ze ścianami stałymi . . . . .	261
<b>Literatura</b> . . . . .	265



## Słowo wstępne

Niniejsza książka powstała na bazie wykładów *Matematyczne wprowadzenie do mechaniki płynów* prowadzonych przez wiele lat na Politechnice Wrocławskiej dla słuchaczy studiów doktoranckich. Celem kursu było zaprezentowanie podstawowych idei fizycznych i aparatu matematycznego służącego do opisu dynamiki ośrodka płynnego. Przyjęto, że płyn jest płynem nieściśliwym. Dynamika płynów nieściśliwych opiera się na podstawowych prawach fizyki, tj. na prawie zachowania masy oraz na prawach zachowania pędu. Odpowiednie sformułowanie tych praw dla ośrodka płynnego było możliwe dzięki wykorzystaniu analizy matematycznej. Ważne było więc zaprezentowanie metod rachunkowych odnoszących się do rachunku wektorowego, tensorowego, równań różniczkowych i funkcji zmiennej zespolonej. Aby jednak materiał przedstawiony w książce był kompletny i możliwe było uzyskanie ciągłości omawianych zagadnień, w rozdziale pierwszym omówiono wybrane elementy rachunku wektorowego, tensorowego i równań różniczkowych cząstkowych. Materiał przedstawiony w rozdziałach drugim i trzecim odnosi się do mechaniki ośrodka ciągłego, a tym samym również do mechaniki płynów. Rozróżnienia pomiędzy ciałem stałym a płynem dokonuje się na podstawie równań konstytutywnych, których postać przesądza o własnościach ośrodka i jego reakcji na działające w nim siły. Najpierw zostały więc wyprowadzone równania ruchu ośrodka ciągłego, a dopiero później sformułowano równania konstytutywne dla płynu nielepkiego i lepkiego. Rozdział czwarty dotyczy trójwymiarowego ruchu płynu nielepkiego. Wybrane zagadnienia z teorii funkcji zmiennej zespolonej przedstawiono w rozdziale piątym. Zakres materiału dotyczącego analizy zmiennej zespolonej z pewnością pozwoli zrozumieć zagadnienia przedstawione w rozdziale szóstym, którego tematem jest potencjalny ruch płynu w dwóch wymiarach. Rozdział siódmy zawiera omówienie problematyki związanej z ruchem płynu lepkiego. Wyprowadzono równania ruchu dla tego płynu oraz podano przykłady rozwiązań tych równań. W rozdziale ósmym można natomiast zapoznać się z analizą wybranych zagadnień ruchu wirowego.

Matematyczne wprowadzenie do mechaniki płynów, w którym wykorzystuje się analizę matematyczną, zasady rachunku różniczkowego i analizę wektorową, jest intrygujące. Pozwala na przejrzyste formułowanie zagadnień, precyzyjną

analizę zjawisk hydrodynamicznych i ich właściwe pojmowanie. Takie podejście matematyczno-fizyczne do zagadnień hydrodynamiki autor zawdzięcza promotorowi swojej pracy doktorskiej Profesorowi Andrzejowi Krzywickiemu z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

W procesie powstawania niniejszej książki nieoceniona była natomiast pomoc dr. inż. Tomasza Kozłowskiego, który wykonał niezbędne rysunki, a także dr. inż. Ziemowita Malecha i dr. inż. Andrzeja Kosiora, którzy jako pierwsi czytali powstający tekst książki, sygnalizowali niejasności i dokonywali korekt.

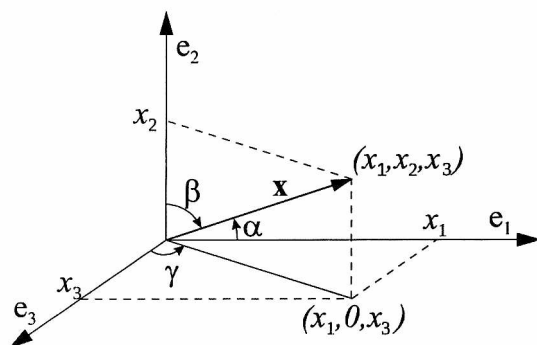
Do wykreślenia rozwiązań niektórych zagadnień matematycznych autor wykorzystał program MATHEMATICA firmy Wolfram Research.

## Rozdział 1

# Wybrane zagadnienia z rachunku wektorowego

### 1.1. Przestrzeń euklidesowa – wektor położenia

Do opisu położenia punktu w przestrzeni, będziemy wykorzystywali kartezjański układ współrzędnych  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , gdzie  $\mathbf{e}_i$  oznacza wektor jednostkowy, skierowany odpowiednio w kierunku osi  $i = 1, 2, 3$  (rys. 1.1).



**Rys. 1.1:** Wektor  $\mathbf{x}$  w kartezjańskim układzie współrzędnych z zaznaczonymi kątami między osiami współrzędnych

Zwyczajowo osie układu współrzędnych nazywane są osiami  $(x, y, z)$ . Oznaczenie osi indeksami ułatwia jednak zapis algebraiczny działań na wektorach i ich uogólnienie na większą liczbę wymiarów. Współrzędne wektora  $\mathbf{x}$  wyrażają się przez cosinusy kierunkowe następująco:

$$x_1 = |\mathbf{x}| \cos \alpha, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \cos \beta, \quad x_3 = |\mathbf{x}| \cos \gamma. \quad (1.1)$$

Wektor  $\mathbf{x}$  można przedstawić jako kombinację liniową liczb (skalarów) i wektorów bazowych:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.2)$$

Wektor  $\mathbf{x}$  można utożsamiać z uporządkowaną trójką (dwójką) liczb  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów  $n$  liczb (w naszym przypadku trzech lub dwóch) nazwany jest (wektorową) przestrzenią euklidesową a będziemy ją oznaczać jako  $\mathbb{E}^3$  (lub  $\mathbb{E}^2$ ). Te trzy liczby będziemy nazywać wektorem lub punktem przestrzeni euklidesowej [63], [94].

Elementem zerowym przestrzeni euklidesowej jest początek układu współrzędnych  $(0, 0, 0)$ . W przestrzeni euklidesowej określone są działania dodawania wektorów i mnożenia wektora przez liczbę rzeczywistą  $a$ :

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, ax_3). \quad (1.3)$$

Wprowadza się iloczyn skalarny dwóch wektorów:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^3 x_k y_k. \quad (1.4)$$

Za pomocą iloczynu skalarnego można zdefiniować normę (długość) wektora:

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_1^3 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

oraz można obliczyć kąt  $\phi$  między dwoma wektorami, ponieważ:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \phi. \quad (1.6)$$

**Definicja 1.1.** Dwa wektory są do siebie ortogonalne, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

Powyższe stwierdzenie wykorzystuje się do określenia współrzędnych wektora  $\mathbf{x}$  w ortogonalnym układzie współrzędnych  $\mathbf{e}_i$ , a mianowicie:

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.7)$$

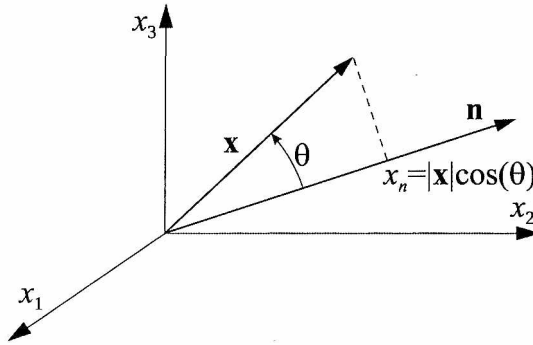
Iloczyn skalarny wektora  $\mathbf{x}$  przez wektor jednostkowy  $\mathbf{n}$  odpowiada projekcji wektora  $\mathbf{x}$  na kierunek  $\mathbf{n}$  (rys. 1.2).

Wprowadzimy symbol delta Kronekera, który definiuje się następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases} \quad (1.8)$$

Fakt, że wektory bazowe  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ , są do siebie ortogonalne, za pomocą symbolu  $\delta_{ij}$  możemy zapisać jako:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (1.9)$$



**Rys. 1.2:** Iloczyn skalarny wektora  $\mathbf{x}$  przez wektor jednostkowy  $\mathbf{n}$  odpowiada rzutowi wektora  $\mathbf{x}$  na kierunek wektora  $\mathbf{n}$

Podobnie wyrażenie  $\partial x_i / \partial x_j$ , gdzie  $x_i$  oraz  $x_j$  są współrzędnymi wektora  $\mathbf{x}$ , zapisujemy jako:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \quad (1.10)$$

Aby uprościć zapis i nie używać każdorazowo znaku sumy, będziemy wykorzystywać konwencję sumacyjną: jeżeli w członie wystąpią powtarzające się indeksy, to będzie to oznaczać, że po tych symbolach należy dokonać sumowania. Na przykład, we wzorze na iloczyn skalarny (1.4) powtarzającym się indeksem jest indeks  $i$ , więc iloczyn skalarny można zapisać jako  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$ .

W przypadku elementów euklidesowej przestrzeni wektorowej dowodzi się następującego twierdzenia [77]:

**Twierdzenie 1.1.** Niech  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  i niech  $a$  będzie liczbą rzeczywistą. Wtedy

1.  $|\mathbf{x}| \geq 0$ ;
2.  $|\mathbf{x}| = 0$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{x} = 0$ ;
3.  $|a\mathbf{x}| = |a||\mathbf{x}|$ ;
4.  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ ;
5.  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ ;
6.  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$ .

## 1.2. Pola skalarne, wektorowe i tensorowe

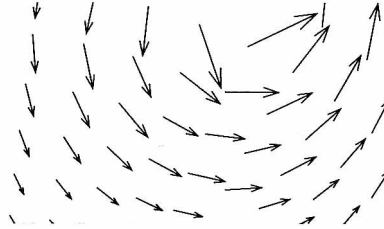
Jednym z podstawowych pojęć wykorzystywanych w fizyce, a w szczególności w mechanice ośrodka ciągłego i mechanice płynów, jest pojęcie pola. Posługujemy się polem skalarnym, wektorowym, tensorowym. Dla wygody przypomnimy pewne definicje i operacje, które dokonywane są na tych polach.

**Definicja 1.2.** *Polem skalarnym nazywamy funkcję  $f$ , która każdemu punktowi  $(x, y, z)$  pewnego obszaru przypisuje liczbę.*

Polem skalarnym jest więc funkcja rzeczywista  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ . Przykładami fizycznymi pól skalarnych są rozkłady temperatury, gęstości materii, ciśnienia. Przy obrocie układu współrzędnych, gdy punkt  $(x_1, x_2, x_3)$  przechodzi w  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  wartość funkcji skalarnej nie ulega zmianie.

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x'_1, x'_2, x'_3). \quad (1.11)$$

Innym, fundamentalnym polem dla mechaniki jest pole wektorowe. Tradycyjnie wektor rozumie się jako wielkość fizyczną, którą charakteryzuje wielkość, kierunek i zwrot. Obrazuje się je za pomocą strzałek-odcinków, których długość jest proporcjonalna do wielkości wektora z odpowiednio skierowanym grotem strzałki (rys. 1.3).



**Rys. 1.3:** Przykładowy obraz pola wektorowego prędkości. Wielkość strzałek jest proporcjonalna do modułu wektora prędkości

**Definicja 1.3.** *Polem wektorowym nazywamy funkcję  $\mathbf{v}$ , która każdemu punktowi w ustalonym obszarze przestrzeni przypisuje wektor.*

Przykładowo, na płaszczyźnie  $x_1, x_2$  pole wektorowe  $\mathbf{v}$  opisane jest za pomocą dwóch funkcji rzeczywistych  $u(x, y)$  oraz  $v(x, y)$ , które z użyciem bazowych wektorów jednostkowych przedstawia się jako:

$$\mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\mathbf{e}_1 + v(x, y)\mathbf{e}_2. \quad (1.12)$$

### 1.3. Tensory rzędu drugiego

W mechanice do opisu zjawisk, oprócz funkcji skalarnych i wektorowych, wykorzystuje się również obiekty nazywane tensorami. Jeżeli wektor przedstawiany jest jako uporządkowana trójka liczb, to tensor rzędu drugiego w ogólnym przypadku wymaga dziewięciu liczb. Tensor rzędu drugiego w mechanice płynów wystąpi

w opisie deformacji elementów płynu i naprężeń. W dalszej części książki przez tensor będziemy rozumieli liniową funkcję wektorową  $\mathbf{T}$ , która każdemu wektorowi  $\mathbf{a}$  przypisuje wektor  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .

Liniowa funkcja wektorowa nazywana tensorem spełnia warunki:

1.  $\mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T}\mathbf{a} + \mathbf{T}\mathbf{b}$  dla wszystkich wektorów  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$ .
2.  $\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{a}$  dla  $\alpha \in \mathbb{R}$  oraz  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$ .

Dwa tensory  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{T}$  uważamy za równe, jeżeli  $\mathbf{S}\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{a}$  dla wszystkich wektorów  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$ . Definiuje się tensor identycznościowy  $\mathbf{I}$  oraz tensor zerowy  $\mathbf{0}$ . Tensor jednostkowy pozostawia wektor  $\mathbf{a}$  niezmienny  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ , natomiast  $\mathbf{0}\mathbf{a} = \mathbf{0}$  dla każdego  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$ .

### 1.3.1. Reprezentacja tensora rzędu drugiego w prostokątnym układzie kartezjańskim

Rozpatrzmy składowe wektora  $\mathbf{b}$  jako efekt działania tensora  $\mathbf{T}$  na wektor  $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ , czyli  $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ . Składowe  $b_i$  wektora  $\mathbf{b}$  obliczamy jako  $b_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b}$ . Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} b_i &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = \\ &= a_1\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Współrzędne tensora definiuje się jako:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j. \quad (1.14)$$

Z równania (1.13) widać, że  $i$ -ta składowa wektora  $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$  jest sumą składowych  $j$ -tej kolumny tensora  $\mathbf{T}$  i współrzędnych  $a_j$  wektora  $\mathbf{a}$ :

$$b_i = T_{ij}a_j. \quad (1.15)$$

Tensory rzędu drugiego przedstawia się w postaci macierzy współczynników  $[\mathbf{T}]$ :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

W zapisie macierzowym działanie tensora  $\mathbf{T}$  można przedstawić następująco:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Operacja transpozycji macierzy  $[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}]^T$  oznacza, że  $[\mathbf{T}]^T_{ij} = [\mathbf{T}]_{ji}$ . Reprezentacja macierzowa tensora pozwala traktować kolumny macierzy jako wektory,

które są obrazami wektorów bazowych  $\mathbf{e}_i$ . Przykładowo, dla wektora  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$  mamy:

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_1 = (T_{11}, T_{21}, T_{31}) = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 = T_{j1}\mathbf{e}_j, \quad (1.18)$$

a więc uogólniając wynik z równania (1.18):

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j. \quad (1.19)$$

Niech  $[\mathbf{T}\mathbf{e}_i]$  oznacza  $i$ -tą kolumnę macierzy  $\mathbf{T}$ . Reprezentację macierzową tensora  $\mathbf{T}$  można zapisać w takim przypadku jako:

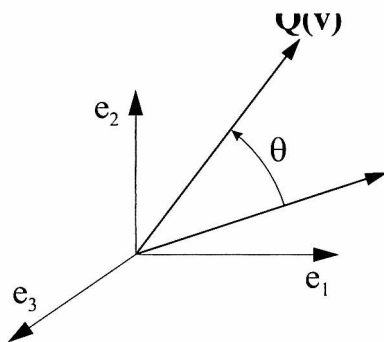
$$[\mathbf{T}] = ([\mathbf{T}\mathbf{e}_1], [\mathbf{T}\mathbf{e}_2], [\mathbf{T}\mathbf{e}_3]). \quad (1.20)$$

### 1.3.2. Przykłady tensorów rzędu drugiego

Kilka poniższych przykładów przekształceń geometrycznych wyrzonych za pomocą tensorów rzędu drugiego pozwoli oswoić się z własnościami tensora.

1. **Obrót wektora  $\mathbf{v}$  o zadany kąt  $\theta$ .** Zakłada się, że obrót następuje w płaszczyźnie  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  wokół wektora  $\mathbf{e}_3$ . Obrót wektora  $\mathbf{v}$  o zadany kąt  $\theta$  można wyrazić za pomocą tensora rzędu drugiego  $\mathbf{Q}$  (rys. 1.4). Dla bazy  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  mamy:

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 = \cos\theta\mathbf{e}_2 - \sin\theta\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Q}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3. \quad (1.21)$$



Rys. 1.4: Obrót wektora  $\mathbf{v}$  o zadany kąt  $\theta$

Macierz tensora obrotu ma postać:

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$



2. **Tensor identycznościowy.** Liniowa transformacja, która nie zmienia wektora, jest nazywana tensorem identycznościowym i oznaczana za pomocą  $\mathbf{I}$ . Mamy  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ , a więc również  $\mathbf{I}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$ . Składowe tensora identycznościowego mają postać:

$$I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (1.23)$$

a macierz współczynników przedstawia się następująco:

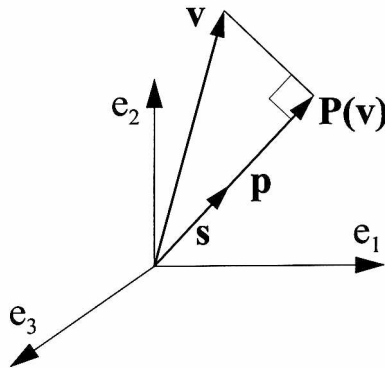
$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

3. **Tensor rzutowania.** Rzut wektora  $\mathbf{v}$  na prostą, której kierunek zadany jest wektorem jednostkowym  $\mathbf{s}$ , można przedstawić za pomocą tensora  $\mathbf{P}$  (rys. 1.5):

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}. \quad (1.25)$$

Jeżeli przyjmiemy, że  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ,  $s_i = \cos \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ , to  $i$ -ta składowa wektora  $\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{v}$  wyraża się jako  $p_i = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s})s_i$ . Można sprawdzić, korzystając z definicji (1.14) i (1.19), że macierz rzutowania  $\mathbf{P}$  będzie miała postać:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_1s_2 & s_1s_3 \\ s_1s_2 & s_2^2 & s_2s_3 \\ s_1s_3 & s_2s_3 & s_3^2 \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$



Rys. 1.5: Rzutowanie wektora  $\mathbf{v}$  na kierunek wektora  $\mathbf{s}$

Warto zauważyć następujące własności operatora rzutowania [89]:

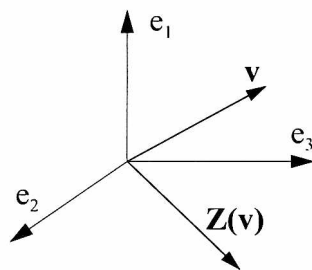
- kwadrat macierzy rzutowania jest równy samej macierzy, czyli  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ ;
- macierz operatora rzutowania jest symetryczna;

- wyznacznik macierzy  $\mathbf{P}$  jest równy zeru, czyli operator rzutowania jest nieodwracalny;
  - rząd macierzy rzutowania jest równy 1. Macierz posiada tylko jedną liniowo niezależną kolumnę.
4. **Tensor odbicia zwierciadlanego.** Zwierciadlane przekształcenie wektora  $\mathbf{v}$  względem ustalonej płaszczyzny, np. względem płaszczyzny, do której wektor  $\mathbf{e}_1$  jest prostopadły, można wyrazić za pomocą tensora rzędu drugiego następująco (rys. 1.6):

$$\mathbf{Z}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1. \quad (1.27)$$

Zwróćmy uwagę, że druga część wyrażenia po prawej stronie przedstawia rzutowanie wektora  $\mathbf{v}$  na kierunek  $\mathbf{e}_1$ . Nowy wektor ma współrzędne  $\mathbf{Z}(\mathbf{v}) = (-v_1, v_2, v_3)$ , a macierz współczynników tego tensora, można wyznaczyć z zależności  $\mathbf{e}_i \mathbf{Z}(\mathbf{e}_j) = Z_{ij}$ , ma postać:

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$



Rys. 1.6: Przekształcenie wektora  $\mathbf{v}$  w jego odbicie zwierciadlane

## 1.4. Liniowa przestrzeń wektorowa

Pojęcia wprowadzone dla przestrzeni euklidesowej, takie jak: norma, iloczyn skalarny, ortogonalność okazały się niezwykle przydatne w badaniu innych obiektów matematycznych. Umożliwiły m.in. zdefiniowanie abstrakcyjnej liniowej przestrzeni wektorowej [77].

**Definicja 1.4.** *Przestrzenią wektorową  $\mathbb{L}$  nazywamy zbiór elementów (wektorów), dla których spełnione są następujące aksjomaty:*

1. Dla każdej pary wektorów  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{L}$ , suma wektorów  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{L}$ , tzn. przestrzeń  $\mathbb{L}$  jest domknięta na operację dodawania.
2.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  (dodawanie jest przemienne).
3.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$  (dodawanie jest łączne).
4. Istnieje element zerowy, taki że dla każdego  $\mathbf{u} \in \mathbb{L}$  zachodzi  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ .
5. Istnieje mnożnik 1, taki że  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ .
6. Dla  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{L}$  oraz skalarów  $\alpha$  i  $\beta$  zachodzi  $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$  oraz  $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ .

Można sprawdzić, że zbiór wszystkich tensorów rzędu drugiego tworzy przestrzeń liniową. Jedną z ważniejszych przestrzeni wektorowych jest przestrzeń funkcji całkownych z kwadratem. Przykładowo, dla funkcji jednej zmiennej jest to zbiór wszystkich funkcji, dla których istnieje na odcinku  $[a, b]$  całka  $\int_a^b f(x)^2 dx < \infty$ . Przestrzeń tę będziemy oznaczać  $L_2$  [34].

W przestrzeni  $L_2$  iloczyn skalarny definiujemy jako:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (1.29)$$

Normę funkcji  $f(x)$  na przedziale  $x \in [a, b]$  w przestrzeni  $L_2$ , określamy wykorzystując iloczyn skalarny (1.29):

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}. \quad (1.30)$$

Podpunkty 4 i 5 twierdzenia 1.1 (rozdz 1.1) przyjmują postać nierówności [34]:

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx, \quad (1.31)$$

$$\int_a^b (f + g)^2 dx \leq \left( \int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b [g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.32)$$

Nierówność (1.31) nazywa się nierównością Schwarza, a nierówność (1.32) nierównością Minkowskiego [34].

## 1.5. Operacje różniczkowe na polach skalarnych i wektorowych

W rachunku wektorowym niezwykle pożyteczna jest możliwość nadawania wzorom wyrażającym prawa fizyczne zwięzłych form. Staje się to szczególnie ważne w tych przypadkach, w których stosowane są funkcje wielu zmiennych

i pochodne cząstkowe. W celu zwięzłej prezentacji twierdzeń oraz sformułowania fizycznych idei już w XIX wieku wprowadzono symbole dla pewnych operatorów różniczkowych. Należą do nich operatory: gradientu, dywergencji i rotacji.

### 1.5.1. Gradient funkcji

W analizie funkcji wielu zmiennych gradient funkcji  $\phi(x, y, z)$  stosowany jest przy obliczaniu liniowego przyrostu tej funkcji w przypadku zmiany wartości zmiennych  $(x_1, x_2, x_3)$  na  $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ :

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \Delta x_3 = \\ &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \cdot (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Wektor utworzony z pochodnych cząstkowych funkcji skalarnej nazywa się gradientem funkcji.

**Definicja 1.5.** Gradientem funkcji  $f(x_1, x_2, x_3)$ , który będziemy oznaczać jako  $\nabla f$  lub grad  $f$ , nazywamy wektor:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right). \quad (1.34)$$

Ważnym pojęciem, z którego będziemy niejednokrotnie korzystać, jest pochodna kierunkowa funkcji. W definicji pochodnej kierunkowej, która określa szybkość zmiany funkcji w zadanym kierunku, występuje gradient funkcji.

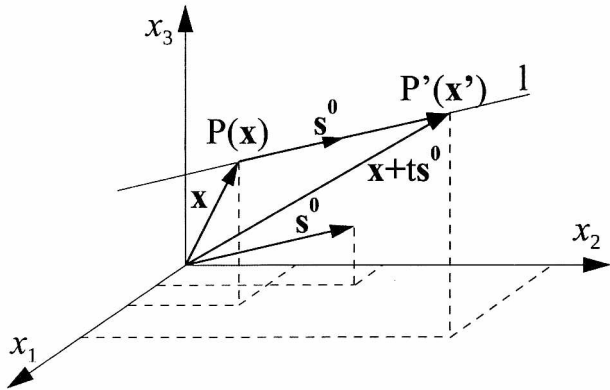
Niech  $\mathbf{s}^o = s_i \mathbf{e}_i = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$  będzie wektorem jednostkowym opisującym kierunek prostej  $l$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Kąty  $\alpha_i$  są kątami nachylenia prostej  $l$  względem osi układu  $\mathbf{e}_i$ . Wybierzmy na prostej  $l$  punkt  $P(x_1, x_2, x_3)$  i sąsiadujący z nim punkt  $P'(x_1 + t \cos \alpha_1, x_2 + t \cos \alpha_2, x_3 + t \cos \alpha_3)$  (rys. 1.7).

**Definicja 1.6.** Pochodną kierunkową funkcji  $\phi$  w punkcie  $x$  w kierunku wektora jednostkowego  $\mathbf{s}^o$  definiujemy jako:

$$\frac{df}{dl} = \lim_{|P'-P| \rightarrow 0} \frac{f(P') - f(P)}{|P' - P|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}^o) - f(\mathbf{x})}{t}. \quad (1.35)$$

Udowodnimy następujące twierdzenie [56], [63], [94]:

**Twierdzenie 1.2.** Załóżmy, że funkcja  $f(x_1, x_2, x_3)$  ma ciągłe pochodne cząstkowe i niech kierunek prostej  $l$  zadany jest wektorem jednostkowym  $\mathbf{s}^o = (s_1, s_2, s_3)$ ,



Rys. 1.7: Pochodna kierunkowa, tj. szybkości zmiany funkcji  $f$  wzdłuż prostej, której kierunek zadany jest wektorem jednostkowym  $s^0$

gdzie  $s_i = \cos(\alpha_i)$ , a  $\alpha_i$  oznacza kąt nachylenia prostej osi  $e_i$ . Pochodna kierunkowa funkcji  $f(x_1, x_2, x_3)$  w kierunku prostej  $l$  wyraża się wzorem:

$$\frac{df}{dl} = \nabla f \cdot s^0. \quad (1.36)$$

**Dowód:** Przyjmijmy, że prosta opisana jest równaniem  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + ts^0$ . Stąd  $f(\mathbf{x} + ts^0) = f(\mathbf{c}(t))$ . Na mocy reguły różniczkowania funkcji złożonej [63] wiemy, że

$$\frac{df(\mathbf{c}(t))}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t). \quad (1.37)$$

Ponieważ jednak  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ , a  $\mathbf{c}'(0) = s^0$ , to wzór (1.37) przyjmuje postać

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + ts^0) \right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot s^0. \quad (1.38) \quad \square$$

Jeżeli zadana jest krzywa  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , to pochodna funkcji  $f(\mathbf{c}(t)) = h(t)$  wzdłuż krzywej  $\mathbf{c}(t)$  wyraża się wzorem [63]

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t). \quad (1.39)$$

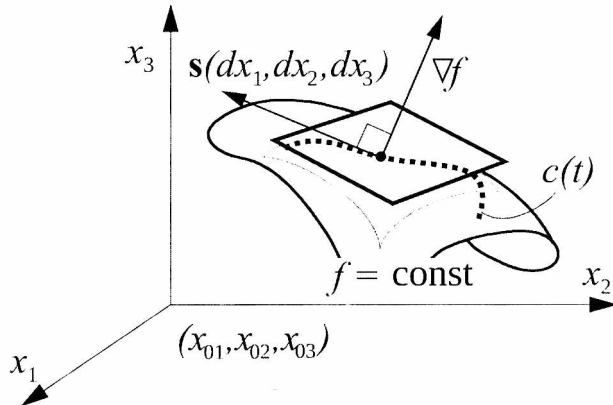
Przydatny w praktyce jest związek pomiędzy gradientem funkcji  $f$  a powierzchnią wyznaczoną równaniem  $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ . Powierzchnię taką nazywamy izopowierzchnią.

Niech krzywa  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  leży na powierzchni  $f = \text{const}$ . Wektor  $\mathbf{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ ,  $dx_i = x'_i(t)dt$  jest styczny do krzywej  $\mathbf{c}(t)$ . Różniczka funkcji  $df$

na izopowierzchni jest równa zero, ponieważ funkcja jest na tej powierzchni stała. Pochodna kierunkowa wzdłuż krzywej  $\mathbf{c}$  jest również równa zero. Stąd mamy:

$$\left. \frac{df(\mathbf{c})}{dt} \right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1.40)$$

gdzie  $\mathbf{c}(0) = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ . Ze wzoru (1.40) wynika, że wektor  $\nabla f$  jest ortogo-



**Rys. 1.8:** Gradient  $\nabla f$  jest prostopadły do powierzchni  $f = \text{const}$ . Szybkość zmiany funkcji  $f$  jest największa wzdłuż kierunku wektora  $\nabla f$

nalny do izopowierzchni  $f = \text{const}$ . Kierunek wektora  $\nabla f$  wyznacza kierunek najszybszych zmian funkcji  $f$ . Pochodna kierunkowa  $df/dl = \nabla f \cdot \mathbf{s} = |\nabla f| \cos \theta$  ma największą wartość gdy wektor jednostkowy  $\mathbf{s}$  pokrywa się z kierunkiem gradientu  $\nabla f$ , czyli gdy  $\cos 0 = 1$ . Gradient funkcji  $f$  w punkcie  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$  można wykorzystać do konstrukcji płaszczyzny stycznej do powierzchni  $f = \text{const}$  w tym punkcie (rys. 1.8). Równanie tej powierzchni ma postać:

$$\nabla f|_{(x_{01}, x_{02}, x_{03})} \cdot (x_1 - x_{01})(x_2 - x_{02})(x_3 - x_{03}) = 0. \quad (1.41)$$

W rachunku wektorowym  $\nabla$  przedstawia się również w postaci operatorowej jako:

$$\nabla = \left( \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (1.42)$$

### 1.5.2. Operator dywergencji

Niech  $\mathbf{v}$  będzie zadany polem wektorowym  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , gdzie  $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3)$ .

**Definicja 1.7.** Dywergencją pola wektorowego  $\mathbf{v}$  nazywamy funkcję skalarną:

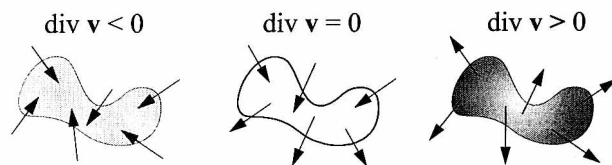
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (1.43)$$

Dywergencję można wyrazić jako iloczyn skalarny operatora  $\nabla$  i wektora  $\mathbf{v}$  lub używając konwencji sumacyjnej jako:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (1.44)$$

Spróbujmy nadać dywergencji pewną interpretację fizyczną. Najpierw zinterpretujemy dywergencję dla jednowymiarowego pola prędkości  $\mathbf{v} = v(x)\mathbf{e}_1$ . Dywergencja takiego pola jest równa pochodnej  $v'(x) = \frac{dv}{dx}$ . Jeżeli na odcinku  $a \leq x \leq b$ , to  $\frac{dv}{dx} > 0$ ,  $v(x)$  jest funkcją rosnącą. Wyobraźmy sobie, że prędkość związana jest z materialną cząstką płynu, z którą związana jest pewna elementarna objętość. Objętość płynu w odcinku  $a \leq x \leq b$  będzie się zmniejszała. Do odcinka  $[a, b]$  dopływa mniej cząstek niż go opuszcza. Gdy  $\frac{dv}{dx} < 0$ , to do odcinka  $[a, b]$  będzie więcej płynu będzie wpływało, niż z niego wypływało. Jeżeli  $v'(x) = 0$ , to objętość płynu, którą niosą cząstki, będzie stała. Dywergencja opisuje zachowanie się objętości płynu w odcinku  $[a, b]$ .

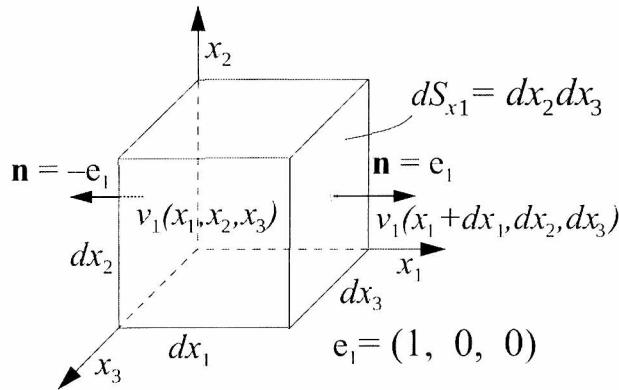
W przypadku wielowymiarowym dywergencja jest sumą pochodnych ze składowych pola wektorowego. Wartość dywergencji będzie określała, czy płyn będzie wypychany (płyn będzie się rozbiegał lub inaczej podlegał dywergencji) z obszaru kontrolnego ( $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ ), czy też będzie się w nim akumulował ( $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ ) (rys. 1.9).



**Rys. 1.9:** Schematyczne przedstawienie pola prędkości w zależności od znaku dywergencji  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  wewnątrz obszaru

Istnieje związek pomiędzy objętością płynu opuszczającą obszar ograniczony powierzchnią  $S$ , a funkcją skalarną określoną wartością dywergencji. Aby pokazać ten związek, najpierw posłużymy się metodą małych objętości [10], [91].

Rozważmy infinytezymalny sześcian o objętości  $dv = dx_1 dx_2 dx_3$  (rys. 1.10). Objętość płynu opuszczająca sześcian w jednostce czasu przez jego prawą ścianę jest równa  $dQ_{x_1} = v_1(x_0 + dx_1) dS_{x_1}$ , gdzie  $dS_{x_1} = dx_2 dx_3$ , objętość opuszczająca przez lewą powierzchnię  $dQ_{x_0} = -v_1(x_0) dS_{x_1}$ . Oznacza to, że objętość płynu, jaka



**Rys. 1.10:** Strumień objętości opuszczający infinytezymalny sześcian o bokach  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $dx_3$  przez dwie, równoległe ściany odległe od siebie od  $dx_1$  jest równy  $dQ_{x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dv$

wypływa z tego sześcianu przez te dwie ściany do siebie równoległe, jest równa  $dQ_1 = (v_1(x_0 + dx_1) - v_1(x_0))dx_1 dS_{x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dv$ . Po powtórzeniu tego rozumowania dla pozostałych ścian oraz dodaniu do siebie wyników otrzymujemy równanie, zgodnie z którym objętość płynu opuszczającej sześcian wynosi:

$$dQ = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dv = \operatorname{div} \mathbf{v} dv. \quad (1.45)$$

Wartość dywergencji w wybranym punkcie przestrzeni, z pola prędkości  $\mathbf{v}$ , równa się strumieniowi płynu wypływającego lub dopływającego do infinytezymalnej objętości  $dv$  zawierającej ten punkt, odniesionej do objętości  $dv$ . Wartość dywergencji w punkcie można interpretować jako miarę (gęstość) intensywności źródła wytwarzającego lub pochłaniającego płyn w objętości  $dv$ . Jeżeli  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , to strumień przez powierzchnię ograniczającą  $dv$  też jest równy zeru. Dlatego pola wektorowe, dla których dywergencja jest równa zeru, nazywane są polami bezźródłowymi. Jeżeli przyjąć, że  $dQ = dv/dt$ , to dywergencję można wyrazić również jako:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{dv} \frac{dv}{dt}. \quad (1.46)$$

Ze wzoru (1.46) wynika, że dywergencja równa się względnej szybkości zmiany infinytezymalnej objętości płynu. Widać, że wartość dywergencji związana jest ze strumieniem objętości przez powierzchnię ograniczającą tę objętość.

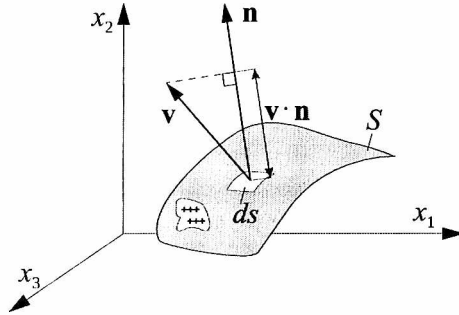
Rozpatrzmy skończoną objętość  $\Omega$  ograniczoną powierzchnią  $S$ . Niech w  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  będzie zadane pole wektorowe  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  oraz niech w każdym punkcie powierzchni  $S$  ograniczającej  $\Omega$  będzie zadany jednostkowy wektor  $\mathbf{n}$ , normalny do tej powierzchni i skierowany na zewnątrz powierzchni  $S$  (rys. 1.11). Przyjęcie



jednostkowego wektora normalnego do powierzchni powoduje, że powierzchnia staje się powierzchnią zorientowaną. Wektor normalny wskazuje kierunek od „ujemnej” do „dodatniej” strony powierzchni.

**Definicja 1.8.** Strumieniem objętości płynu  $q_v$  przez powierzchnię  $S$  nazywamy całkę powierzchniową:

$$q_v = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.47)$$



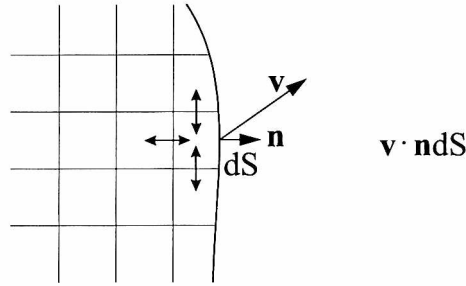
**Rys. 1.11:** Strumień objętości płynu przez powierzchnię  $S$ , zorientowaną jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni

Zauważmy, że we wzorze (1.47) występuje iloczyn skalarny  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_i n_i$ . Wartość tego iloczynu równa się rzutowi wektora  $\mathbf{v}$  na kierunek wyznaczony wektorem normalnym do powierzchni. Wartość strumienia jest ujemna, jeżeli pole  $\mathbf{v}$  jest skierowane (wplywa) do wnętrza obszaru (rys. 1.11).

Wyobraźmy sobie, że skończoną objętość  $\Omega$  dzielimy na dostatecznie dużą liczbę małych, sześciennych komórek. W każdej komórce obliczamy wartość dywergencji, która jest równa strumieniowi przez powierzchnię komórki (wzór (1.45)). Wyrażenia  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$  dla wewnętrznych ścian sąsiadujących ze sobą sześcianów będą nawzajem się znosiły, ponieważ ich strumienie będą miały przeciwne wartości. Jeżeli będziemy sumować wartość dywergencji we wszystkich komórkach, to wkład do strumienia będą miały tylko komórki przylegające do brzegu obszaru  $S$  (rys. 1.12). Zachodzi wówczas związek:

$$\sum_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \sum_{S \text{ brzegu}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.48)$$

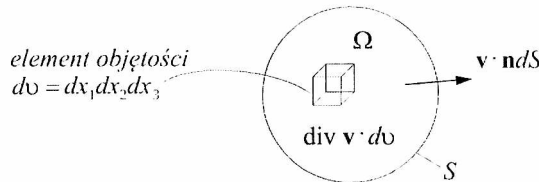
Dokonując coraz drobniejszego (o mniejszych bokach) podziału objętości  $\Omega$  sześciennymi komórkami, sumy we wzorze (1.48) można zastąpić całkami: lewą stronę wzoru (1.48) całką objętościową, natomiast prawą całką powierzchniową. Otrzymana równość wyraża twierdzenie Gaussa o dywergencji [28].



**Rys. 1.12:** Wewnętrzne strumienie objętości przez ściany elementarnych sześciątów nawzajem się znoszą i tylko strumienie przez ściany sześciątów przylegające brzegu obszaru  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  są różne od zera

**Twierdzenie 1.3.** Dla dowolnego, dostatecznie gładkiego (różniczkowalnego) pola wektorowego  $\mathbf{v}$  zadanego w obszarze  $\Omega$  ograniczonego dostatecznie gładką powierzchnią  $S$  zachodzi (rys. 1.13):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.49)$$



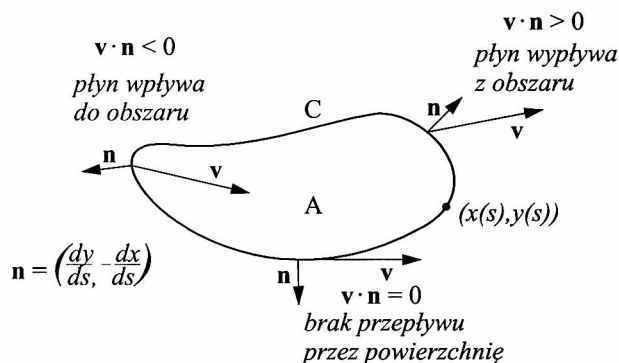
**Rys. 1.13:** Twierdzenie Gaussa. Objętość  $\Omega$  jest ograniczona powierzchnią zamkniętą  $S$ . Całka z dywergencji pola  $\mathbf{v}$  po objętości  $\Omega$  równa się całce ze strumienia pola wektorowego po powierzchni  $S$

Wzór (1.49) pozwala zamienić całkę objętościową z  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  na całkę powierzchniową z  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ .

Dla dwuwymiarowego pola  $\mathbf{v} = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ ,  $\Omega \rightarrow A$ , twierdzenie Gaussa przyjmuje formę:

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{v} dA = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (1.50)$$

gdzie  $A$  oznacza płaski obszar na płaszczyźnie, ograniczony krzywą  $C$ . Całkowanie  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  po powierzchni  $A$  (lewa strona równania (1.50)) można zastąpić całkowaniem po krzywej  $C$  ograniczającej powierzchnię  $A$ . Prawa strona wzoru (1.50) wyraża strumień płynu przez krzywą  $C$  (rys. 1.14).



**Rys. 1.14:** Twierdzenie Gaussa na płaszczyźnie. Pole  $A$  jest ograniczone krzywą zamkniętą  $C$ . Strumień płynu przez krzywą  $C$  może mieć wartość dodatnią  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ , ujemną  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$  albo mieć wartość równą zero,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

Jeżeli krzywa  $C$  ma parametryczne przedstawienie  $C(s) = (x_1(s), x_2(s))$ , to wektor normalny do krzywej  $C$  jest równy  $\mathbf{n} = (dx_2/ds, -dx_1/ds)$  i prawą stronę wzoru (1.50) można przepisać jako:

$$q_v = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) \cdot \left( \frac{dx_2}{ds} \mathbf{e}_1 - \frac{dx_1}{ds} \mathbf{e}_2 \right) ds = \int_C (v_1 dx_2 - v_2 dx_1). \quad (1.51)$$

### 1.5.3. Operator rotacji

Operator rotacji dla dowolnego, dostatecznie gładkiego pola wektorowego  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  w kartezjańskim układzie współrzędnych jest zdefiniowany następująco:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \quad (1.52)$$

Działanie operatora **rot** na wektor daje w wyniku również wektor. Rotację można wyrazić jako iloczyn wektorowy operatora  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  i wektora  $\mathbf{v}$ :

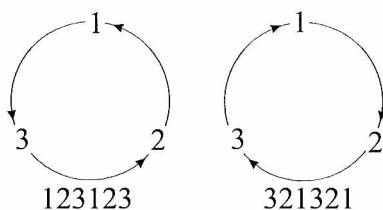
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Użycie zapisu za pomocą wyznacznika służy jedynie do łatwego zapamiętania sposobu obliczania składowych wektora **rot**  $\mathbf{v}$ .

Iloczyn wektorowy można zapisać w konwencji sumacyjnej za pomocą indeksów. W tym celu wprowadza się symbol permutacyjny Leviego–Civity  $\varepsilon_{ijk}$  [76]:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } ijk \text{ jest parzystą permutację indeksów } 123 \\ -1, & \text{gdy } ijk \text{ jest nieparzystą permutację indeksów } 123 \\ 0, & \text{jeżeli indeksy się powtarzają.} \end{cases} \quad (1.54)$$

Liczba wszystkich możliwych permutacji cyfr 1 2 3 wynosi 6. Aby ułatwić zapamiętanie permutacji parzystych, gdy  $\varepsilon_{ijk} = 1$ , oraz nieparzystych, gdy  $\varepsilon_{ijk} = -1$ , można się posłużyć diagramem przedstawionym na rys. 1.15.



**Rys. 1.15:** Symbol  $\varepsilon_{ijk} = 1$  dla przystej permutacji wskaźników (diagram po lewej stronie rysunku) oraz  $\varepsilon_{ijk} = -1$  dla nieparzystej permutacji indeksów (diagram po prawej stronie)

Gdy poruszamy się po okręgu zgodnie ze wskazówkami zegara na diagramie rys. 1.15, to otrzymujemy numery wskaźników permutacji parzystej  $\varepsilon_{ijk} = 1$  dla 123, 231 oraz 312. Jeżeli przebiegamy diagram w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to otrzymujemy permutacje nieparzyste  $\varepsilon_{ijk} = -1$  dla 132, 321, 213.

Iloczyn wektorowy wektorów  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  za pomocą symbolu  $\varepsilon_{ijk}$  wyraża się następująco:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \mathbf{e}_i. \quad (1.55)$$

Składowe wektora  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  mają postać:

$$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k, \text{ gdzie } i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.56)$$

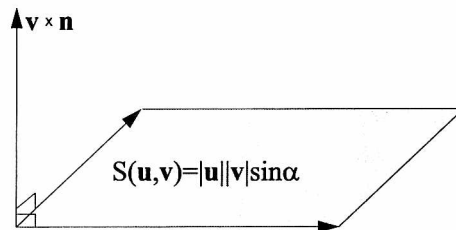
Sumowanie według wskaźników polega na tym, że gdy jeden z indeksów jest ustalony, to pozostałe dwa mogą przyjmować tylko wartości różne od tego ustalonego, a więc:

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1. \quad (1.57)$$

Jak już zostało powiedziane (wzór (1.52)), iloczyn wektorowy wektorów  $\mathbf{u}$  oraz  $\mathbf{v}$  również można wyznaczać za pomocą wyznacznika (1.53):

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (1.58)$$

Wektor  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$ , a jego moduł  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$  jest równy polu równoległoboku  $S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  rozpiętego na wektorach  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  (rys. 1.16).



Rys. 1.16: Iloczyn wektorowy  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Iloczyn wektorowy nie jest przemienny, ale zmienia znak, gdy zostanie zmieniona kolejność wektorów:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}. \quad (1.59)$$

Traktując operator  $\nabla$  jak wektor o składowych  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ , rotację wektora  $\nabla \times \mathbf{v}$  można wyrazić przy pomocy symbolu Leviego-Civity jako:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \mathbf{e}_i. \quad (1.60)$$

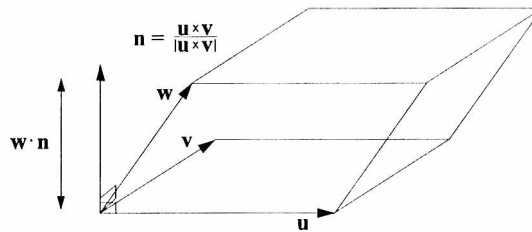
W mechanice płynów rotacja z pola prędkości  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$  nazywa się wirowością.

W praktyce spotykamy się również z iloczynem mieszanym trzech wektorów [94]:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}). \quad (1.61)$$

Iloczyn mieszany trzech wektorów jest równy co do wartości bezwzględnej objętości równoległoscianu rozpiętego na trzech wektorach i równy wyznacznikowi macierzy utworzonej ze składowych wektorów  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  (rys. 1.17):

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (1.62)$$



**Rys. 1.17:** Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego trzech wektorów  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

Iloczyn mieszany wektorów bazowych  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k]$  jest równy symbolowi permutacyjnemu Leviego–Civity  $\varepsilon_{ijk}$ :

$$(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk}. \quad (1.63)$$

Jeżeli dwa wektory występujące w iloczynie  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$  są takie same lub do siebie równoległe, to iloczyn ten jest równy zeru.

Trzy wektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  są liniowo niezależne, a więc mogą tworzyć bazę w przestrzeni wektorowej, jeżeli ich iloczyn mieszany jest różny od zera.

#### 1.5.4. Wirowość pola prędkości bryły sztywnej i przepływu w pobliżu ściany

Rozpatrzmy, jaki związek zachodzi pomiędzy wirowością a polem prędkości liniowej punktów ciała stałego (bryły) wirującego ze stałą prędkością kątową  $\boldsymbol{\omega}_{os} = (\omega_{os1}, \omega_{os2}, \omega_{os3})$ . Zakładamy, że oś obrotu przechodzi przez początek układu współrzędnych a promień wodzący ma współrzędne  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ . Wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach leżących na płaszczyznach prostopadłych

do osi obrotu (rys. 1.18). Prędkość liniowa dowolnego punktu  $(x_1, x_2, x_3)$  wyraża się wzorem:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}_{os} \times \mathbf{r}. \quad (1.64)$$

Zgodnie ze wzorem (1.55) składowe pola prędkości mają postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \omega_{os_j} x_k \mathbf{e}_i &= (\omega_{os_2} x_3 - \omega_{os_3} x_2) \mathbf{e}_1 + \\ &+ (\omega_{os_1} x_3 - \omega_{os_3} x_1) \mathbf{e}_2 + (\omega_{os_1} x_2 - \omega_{os_2} x_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.65)$$

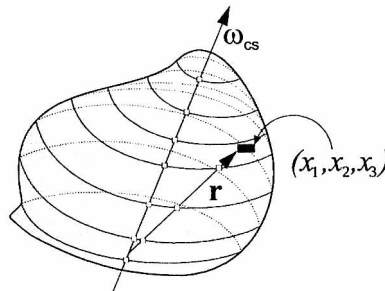
Rotacja pola prędkości punktów liniowej bryły sztywnej wynosi:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \mathbf{e}_i = \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_{os_1} x_2 - \omega_{os_2} x_1) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_{os_3} x_1 - \omega_{os_1} x_3) \right] \mathbf{e}_1 + \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_{os_2} x_3 - \omega_{os_3} x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{os_1} x_2 - \omega_{os_2} x_1) \right] \mathbf{e}_2 + \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{os_3} x_1 - \omega_{os_1} x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_{os_3} x_3 - \omega_{os_3} x_1) \right] \mathbf{e}_3 = \\ &= 2(\omega_{os_1} \mathbf{e}_1 + \omega_{os_2} \mathbf{e}_2 + \omega_{os_3} \mathbf{e}_3) = 2\boldsymbol{\omega}_{os}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

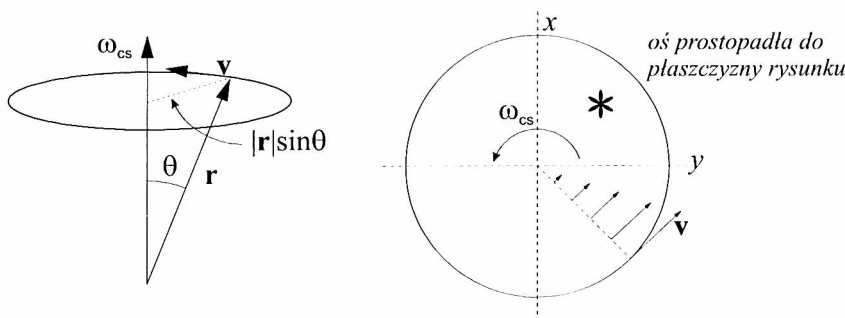
Z przedstawionych wyżej rachunków wynika, że rotacja pola prędkości wirującej bryły sztywnej równa jest podwójnej wartości prędkości kątowej  $\boldsymbol{\omega}_{os}$ :

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}_{os}. \quad (1.67)$$

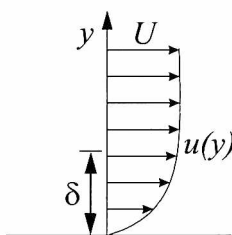
Jeżeli wektor prędkości kątowej pokrywa się z osią  $x_3$  lub jest do niej równoległy (rys. 1.19), to pole prędkości bryły sztywnej ma tylko dwie składowe prędkości różne od zera, a więc  $\mathbf{v} = (u, v, 0)$ . W takim przypadku można sprawdzić, korzystając



**Rys. 1.18:** Obrót ciała sztywnego wokół osi  $\omega_{cs}$



**Rys. 1.19:** Obrót ciała sztywnego wokół osi  $\omega_{cs}$  równoległej do osi  $z$ . Wektor wirowości posiada tylko jedną składową różną od zera  $\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$



**Rys. 1.20:** Przepływ ścinający w pobliżu ściany. Wirowość jest różna od zera w warstwie o grubości  $\delta$

ze wzoru (1.53), że spośród składowych wektora wirowości tylko jedna skierowana wzdłuż osi  $x_3$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ ,  $\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}$  jest różna od zera.

Innym elementarnym przykładem dotyczącym mechaniki płynów, w którym pojawia się wirowość, jest przepływ w pobliżu ściany, gdzie rozkład prędkości zmienia się w kierunku prostopadłym do ściany. Lepkość płynu powoduje, że na nieruchomej ścianie prędkość płynu jest zawsze równa zero. Z badań doświadczalnych wiadomo jednak, że przy dostatecznie dużej prędkości nad ścianą wpływ lepkości, jej hamujące działanie na cząstki płynu w pobliżu ściany ogranicza się do warstwy płynu wokół ciała o grubości  $\delta$ . W warstwie tej rozkład prędkości  $u(y)$  zmienia się od zera  $u(0) = 0$  do wartości ustalonej  $u(\delta) = U$ .

Rozpatrzmy jednowymiarowy rozkład pola prędkości płynu w pobliżu ściany  $\mathbf{v} = (u(y), 0, 0)$  (rys. 1.20). Przyjmijmy, że rozkład prędkości wewnątrz warstwy opisany jest wielomianem drugiego stopnia:

$$u(y) \approx \begin{cases} U \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) & \text{dla } 0 \leq y \leq \delta \\ U & \text{dla } y > \delta. \end{cases} \quad (1.68)$$



Wielomian jest tak dobrany, aby spełnione były warunki: na granicy warstwy  $u(\delta) = U$ , i  $du/dy|_{y=\delta} = 0$  oraz aby na ścianie prędkość płynu była równa zeru  $u(0) = 0$ . Wirowość jest równa:

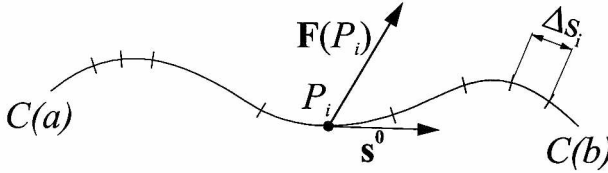
$$\omega(y) = \nabla \times \mathbf{v} = -\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_3 = \frac{2U}{\delta} \left( \frac{y}{\delta} - 1 \right) \mathbf{e}_3. \quad (1.69)$$

Ze wzoru (1.69) widać, że wartość ekstremalną, w tym przypadku ujemną, wirowość  $\omega(y)$  osiąga na ścianie. Poza warstwą  $y > \delta$  wirowość  $\omega \rightarrow 0$ . Ze względu na fakt, że lepkość płynu zawsze powoduje zerową wartość prędkości płynu na ścianie, wirowość na ścianie jest zawsze różna od zera. Mówi się, że ściana jest źródłem wirowości.

Rotacja pola wektorowego wiąże się ściśle z cyrkulacją tego pola. Poniżej podamy, jaki związek zachodzi pomiędzy cyrkulacją a strumieniem pola wirowości.

### 1.5.5. Cyrkulacja pola prędkości i twierdzenie Stokesa

Całka krzywoliniowości została użyta we wzorze (1.50). Jej elementarnym zastosowaniem jest obliczanie pracy  $W$ , którą wykonuje siła  $\mathbf{F}$ , przesuając punkt materialny wzdłuż krzywej  $C$ . Praca  $\Delta W$  wykonana na drodze  $\Delta s_i$  równa się iloczynowi składowej stycznej siły  $F_s(P_i)$  do krzywej  $C$  pomnożonej przez przyrost długości drogi  $\Delta s_i$ ,  $\Delta W = F_s(P_i) \Delta s_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 \Delta s_i$ . Całkowita praca wykonana



**Rys. 1.21:** Praca wykonana przez pole  $\mathbf{F}$  na drodze  $C(a)$  do  $C(b)$  jest równa  $W = \sum_i \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 \Delta s_i$

przez pole sił  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  wzdłuż krzywej  $C$  o początku  $C(a)$  i końcu  $C(b)$  jest równa sumie prac  $\Delta W$ . Wyróżniony został początek i koniec krzywej. Krzywa została zorientowana. Granicę sumy gdy  $|\Delta s_i| \rightarrow 0$ , to znaczy gdy ilość punktów podziału  $N$  dąży do nieskończoności (rys. 1.21), nazywamy całką krzywoliniową:

$$\lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 \Delta s_i = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 ds. \quad (1.70)$$

Wartość całki zmienia znak, gdy zostanie zmieniona orientacja krzywej na przeciwną.

Jeżeli krzywa  $C$  zadana jest parametrycznie  $\mathbf{C}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , a  $t$  przebiega odcinek  $[a, b]$ , to wektor  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{C}(t + \Delta t) - \mathbf{C}(t) \approx \mathbf{C}'(t)\Delta t$  i całkę krzywoliniową można przedstawić jako całkę liniową:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{C}(t)) \cdot \mathbf{C}'(t) dt \quad (1.71)$$

Ze względu na fakt, że  $\mathbf{s}^0 ds = (dx_1, dx_2, dx_3)$  popularny zapis całki krzywoliniowej ma postać:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 ds &= \int_a^b \left( F_1 \frac{dx_1}{dt} + F_2 \frac{dx_2}{dt} + F_3 \frac{dx_3}{dt} \right) dt = \\ &= \int_{\mathbf{C}(t)} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3. \end{aligned} \quad (1.72)$$

W mechanice płynów ważną rolę odgrywa całka krzywoliniowa po krzywej zamkniętej ze składowej stycznej pola prędkości  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Całkę tę nazywa się cyrkulacją.

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds. \quad (1.73)$$

Jeżeli  $C$  jest krzywą na płaszczyźnie  $\mathbf{C} = (x_1(s), x_2(s))$ , to wektor styczny do krzywej wyraża się jako  $\mathbf{s}^0 = (dx_1/ds, dx_2/ds)$  a cyrkulacja jako:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \oint_C (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) \cdot \left( \frac{dx_1}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{ds} \mathbf{e}_2 \right) ds = \\ &= \oint_C (v_1 dx_1 + v_2 dx_2). \end{aligned} \quad (1.74)$$

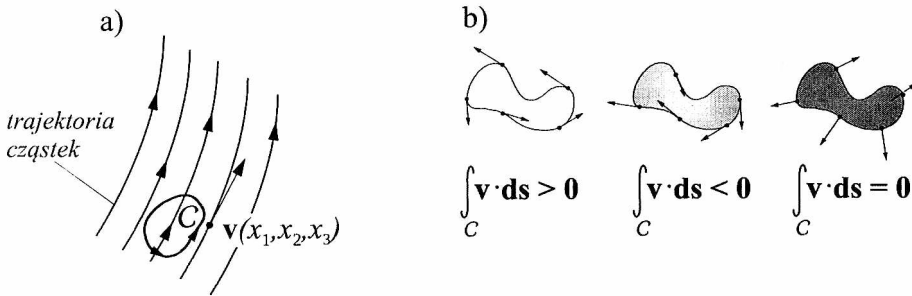
**Przykład 1.** Obliczyć całkę krzywoliniową z pola prędkości  $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = (\cos x_3, e^{x_1}, e^{x_2})$  wzdłuż krzywej  $\mathbf{C}(t) = (1, t, e^t)$  dla  $0 \leq t \leq 2$ .

**Rozwiązanie**

Ponieważ  $\mathbf{C}(t) = (1, t, e^t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , to wektor styczny do krzywej ma postać  $\mathbf{C}'(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) = (0, 1, e^t)$ , a  $\mathbf{v}(\mathbf{C}(t)) = (\cos e^t, e, e^t)$ . Całka krzywoliniowa równa się:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^2 \left( \cos e^t \frac{dx_1}{dt} + e^1 \frac{dx_2}{dt} + e^t \frac{dx_3}{dt} \right) dt = \\ &= \int_0^2 (0 + e + e^{2t}) dt = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wartość cyrkulacji jest miarą krążenia (wirowania) płynu wzdłuż zamkniętej krzywej zanurzonej w przepływie (rys. 1.22). Jeżeli wektor prędkości jest zawsze prostopadły do krzywej, to cyrkulacja jest równa zero. Cyrkulacja może mieć znak dodatni albo ujemny. Przyjmuje się, że cyrkulacja jest dodatnia, jeżeli płyn



**Rys. 1.22:** Cyrkulacja wokół zamkniętych krzywych  $C$  z różnymi znakami

krąży w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Orientacja krzywej jest dodatnia, gdy idąc po krzywej powierzchnia ograniczona krzywą pozostaje zawsze po lewej ręce, a wektor normalny do powierzchni skierowany jest na zewnątrz.

Z dwuwymiarowej wersji twierdzenia Gaussa (wzór (1.51)) wynika, że całka krzywoliniowa ze składowej normalnej dowolnego pola wektorowego  $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$  wzdłuż brzegu  $C$  ograniczającej pole  $A$  jest równa:

$$\int_A \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dA = \oint_C v_1(x_1, x_2) dx_2 - v_2(x_1, x_2) dx_1. \quad (1.75)$$

Jeżeli w powyższym wzorze pole  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  zastąpimy polem wektorowym  $\tilde{\mathbf{v}} = (v_2, -v_1)$ , to otrzymamy:

$$\int_A \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dA = \oint_C v_1(x_1, x_2) dx_2 + v_2(x_1, x_2) dx_1. \quad (1.76)$$

Prawa strona wzoru równa się cyrkulacji wzdłuż krzywej  $C$  ograniczającej powierzchnię  $A$  (patrz wzór (1.74)) natomiast lewa strona wyraża strumień wirowości pola prędkości  $(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2), 0)$  przez powierzchnię  $A$ :

Gdy pole wektorowe jest dwuwymiarowe  $\mathbf{v} = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2), 0)$ , wówczas, jak zostało już powiedziane wyżej, wektor wirowości posiada tylko jedną składową różną od zera  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 = \omega \mathbf{e}_3. \quad (1.77)$$

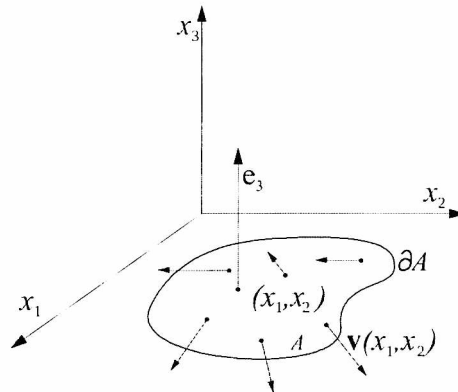
Wzór (1.76) stanowi tezę twierdzenia Greena [28], [56], [63].

**Twierdzenie 1.4.** Niech  $A \in \mathbb{R}^2$  będzie obszarem jednospójnym, a  $C = \partial A$  jego brzegiem dostatecznie gładkim. Niech  $\mathbf{v} = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$  będzie dwuwymiarowym polem wektorowym zadanym na  $A$ . Zachodzi wtedy zależność:

$$\oint_C v_1 dx_1 + v_2 dx_2 = \int_A \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2. \quad (1.78)$$

Inaczej, cyrkulacja po krzywej  $C$  jest równa strumieniowi wirowości przez pole  $A$  ograniczone tą krzywą:

$$\Gamma = \int_A \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (1.79)$$



**Rys. 1.23:** Twierdzenie Greena. Cyrkulacja po krzywej  $C$  równa się strumieniowi wirowości przez powierzchnię  $A$  w kierunku prostopadłym do płaszczyzny

Twierdzenie Greena (1.78) wiąże cyrkulację po krzywej  $C$  ze strumieniem wirowości przez powierzchnię  $A$  ograniczoną tą krzywą. Jeżeli wirowość w całym obszarze jest równa zeru (obszar  $A$  jest obszarem jednospójnym), to cyrkulacja

po dowolnej krzywej zamkniętej w tym obszarze też jest równa zero. Takie pole wektorowe nazywa się bezwirowym i daje się przedstawić w postaci gradientu z pewnej funkcji skalarnej  $\phi$ ,  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ . Gdy  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ , to na krzywej  $C_{a,b}$  zachodzą związki:

$$\int_{C_{a,b}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_{C_{a,b}} \nabla\phi \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_C d\phi = \phi(C(b)) - \phi(C(a)). \quad (1.80)$$

Całka krzywoliniowa (1.80) nie zależy od kształtu krzywej, która łączy dwa punkty  $a$  i  $b$ , a jej wartość równa się różnicy wartości funkcji skalarnej w tych punktach. Pole wektorowe, które wyraża się przez gradient z funkcji skalarnej, nazywa się potencjalnym lub zachowawczym. Prostym kryterium, które pozwala rozstrzygnąć, czy pole  $\mathbf{v}$  jest polem potencjalnym w obszarze jednopójnym, jest warunek  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ .

Zachodzą następujące, możliwe do wykazania za pomocą bezpośredniego rachunku tożsamości wektorowe: rotacja z dowolnego pola potencjalnego jest równa zero oraz dywergencja z wirowości jest również równa zero:

$$\mathbf{rot} \nabla\phi = \nabla \times \nabla\phi = 0, \quad (1.81)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (1.82)$$

Z tożsamości (1.82) wynika, że wirowość jest polem bezźródłowym.

**Przykład 2.** Dane jest pole wektorowe  $\mathbf{v} = 0\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2$ . Sprawdzić twierdzenie Greena dla przypadku, gdy obszar  $D$  jest kołem  $x^2 + y^2 \leq r^2$ .

### Rozwiązanie

Brzeg obszaru można wyrazić za pomocą równań parametrycznych  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  dla  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Parametryzacja pozwala zamienić całkę krzywoliniową na zwykłą całkę liniową. Wartość cyrkulacji obliczamy jako:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds &= \int_0^{2\pi} (0\mathbf{e}_1 + r \cos t \mathbf{e}_2) \cdot (-r \sin t, r \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 t dt = r^2 \pi. \end{aligned}$$

Wartość strumienia wirowości w kierunku  $\mathbf{e}_3$  jest równa:

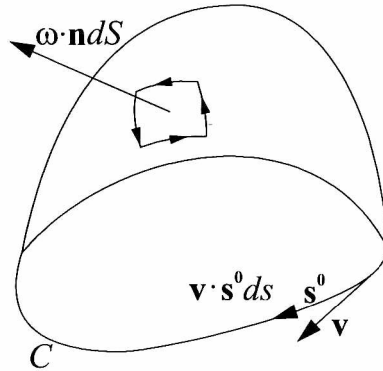
$$\int_D \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_D dS = r^2 \pi.$$

Jak należało oczekiwać, oba wyniki są takie same.

Uogólnienia twierdzenia Greena na dowolną krzywą zamkniętą, niekoniecznie leżącą na płaszczyźnie dokonał George Stokes. Uogólnienie to wiąże cyrkulację wzdłuż krzywej  $C$  ze strumieniem pola wirowości przez powierzchnię rozpiętą na krzywej  $C$ . Stokes swoje twierdzenie wyraził w 1954 roku w formie zadania egzaminacyjnego na Uniwersytecie w Cambridge. Natomiast George Green, genialny samouk, opublikował swoje twierdzenie w 1828 roku.

**Twierdzenie 1.5. Twierdzenie Stokesa.** *Całka krzywoliniowa ze składowej stycznej pola  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0$  wzdłuż krzywej  $C$  stanowiącej brzeg obszaru  $S$  równa się całce powierzchniowej po powierzchni  $S$  ze składowej normalnej pola wirowości  $\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  (rys. 1.24).*

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.83)$$



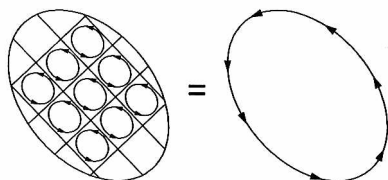
**Rys. 1.24:** Schematyczna ilustracja twierdzenia Stokesa. Cyrkulacja  $\Gamma$  po brzegu  $C$  równa się strumieniowi wirowości przez powierzchnię rozpiętą na krzywej  $C$

Inaczej można powiedzieć, że twierdzenie Stokesa wiąże cyrkulację po krzywej zamkniętej ze strumieniem wirowości przez powierzchnię rozpiętą na tej krzywej:

$$\Gamma = \int_S \omega_n dS, \quad (1.84)$$

gdzie  $\omega_n = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ .

Aby uzasadnić twierdzenie Stokesa, posłużymy się, podobnie jak przy twierdzeniu Gaussa (1.49), metodą sumowania wkładów od elementów nieskończenie małych [35]. Podzielmy powierzchnię  $S$  prostokątami na tyle małe, że można je uważać za płaskie, i w każdym z tych prostokątów przyjmijmy orientację taką jak na krzywej  $C$  (rys.1.25). Jeżeli zsumujemy cyrkulacje małych prostokątów pokrywających powierzchnię  $S$ , to otrzymamy cyrkulację po krzywej  $C$ , ponieważ



**Rys. 1.25:** Schematyczna ilustracja do twierdzenia Stokesa. Cyrkulacja  $\Gamma$  po brzegu  $C$  równa się strumieniowi wirowości przez powierzchnię rozpiętą na krzywej  $C$

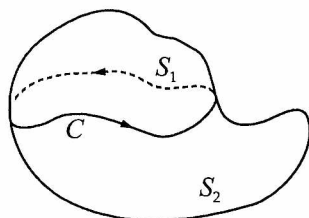
na wspólnych granicach prostokątów wkładamy całek krzywoliniowych do cyrkulacji będą się wzajemnie znosiły ze względu na przeciwne orientacje. Cyrkulacja po małym prostokącie równa się, na mocy twierdzenia Grenna, strumieniowi wirowości przez pole tego prostokąta. Można to wyrazić następująco:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \sum_{i=1}^N (\nabla \times \mathbf{v})_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\omega})_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i, \quad (1.85)$$

gdzie  $(\nabla \times \mathbf{v})_i$  oznacza rotację pola prędkości w środku  $i$ -tego prostokąta,  $N$  – liczbę prostokątów pokrywających powierzchnię  $S$ . W granicy, gdy  $\Delta S_i \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , otrzymujemy całkę stojącą po prawej stronie wzoru (1.84).

Zauważmy, że twierdzenie odnosi się do wszystkich powierzchni rozpiętych na krzywej  $C$ . Jeżeli wyobrazimy sobie, że powierzchnia  $S$  na rys. 1.24 jest zamocowana do krzywej  $C$  i wykonana z gumy oraz w sposób ciągły podlega deformacji, to do wszystkich tych powierzchni znajduje zastosowanie twierdzenie Stokesa. Gdy powierzchnia podlega deformacji, to wektor normalny też przesuwają się wzdłuż powierzchni.

Załóżmy, że dwie powierzchnie  $S_1$  i  $S_2$  rozpięte są na tej samej krzywej, przy czym  $S_1$  leży po przeciwnej stronie krzywej  $C$  w stosunku do  $S_2$  (rys. 1.26).



**Rys. 1.26:** Na krzywej  $C$  rozpięte są dwie powierzchnie  $S_1$  i  $S_2$  o przeciwnej orientacji. Z twierdzenia Stokesa wynika, że strumień wirowości przez powierzchnię zamkniętą jest równy zeru

Zachodzą wówczas następujące związki:

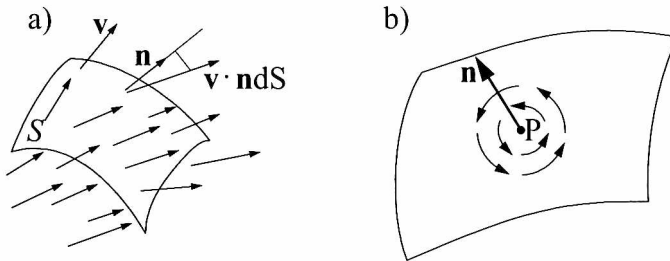
$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} dV = \int_{S_1 \cup S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.86)$$

Tak więc:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.87)$$

Całka powierzchniowa po  $S_1$  ze składowej normalnej wirowości  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$  jest równa cyrkulacji po brzegu  $\partial S_1 = C$ . Natomiast ta sama całka powierzchniowa po powierzchni  $S_2$  jest równa tej samej cyrkulacji, ale ze znakiem przeciwnym, ponieważ orientacja powierzchni zmienia znak na przeciwny.

Porównując strumienie pola prędkości  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  oraz strumienie rotacji  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ , należy stwierdzić, że o ile duża wartość strumienia pola prędkości przekłada się na dużą wartość strumienia objętości wychodzącego z danej powierzchni, o tyle duża wartość strumienia rotacji przez powierzchnię świadczy o pozostawaniu pola prędkości na powierzchni i o dużej cyrkulacji (krążeniu) wzdłuż brzegu powierzchni  $\partial S$ .



**Rys. 1.27:** Duża wartość strumienia pola prędkości,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  świadczy o wypływie wektorów z powierzchni  $S$ , duża wartość strumienia wirowości świadczy o pozostawaniu wektorów prędkości w powierzchni i dużym krążeniu wzdłuż krzywej  $C$

**Przykład 3.** Dane jest pole wektorowe  $\mathbf{v} = (2yz, x, x^2)$ . Obliczyć cyrkulację tego pola po okręgu  $x^2 + y^2 = 1$ , korzystając z twierdzenia Stokesa.

### Rozwiązanie

Rotacja zadanego pola wynosi  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = (0, 2y, (1 - 2z))$ . Z twierdzenia Stokesa mamy:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (2y\mathbf{e}_2 + (1 - 2z)\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} dS.$$



Forma  $S$ , która rozpięta jest na brzegu  $C$ , może być dowolna. Wybieramy więc najprostszą, leżącą w płaszczyźnie  $z = 0$ . Ponieważ w takim przypadku  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ , otrzymujemy:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_S dS = \pi.$$

### 1.5.6. Laplasian

Działanie dywergencji na pole wektorowe daje w wyniku pole skalarne. Jeżeli pole wektorowe wyrażane jest za pomocą gradientu z funkcji skalarnej, to dywergencja z takiego pola wektorowego jest również polem skalarnym i wyrażana jest za pomocą operatora różniczkowego nazywanego laplasianem.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla \varphi &= \operatorname{div} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \Delta \varphi, \end{aligned} \quad (1.88)$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (1.89)$$

Jeżeli symbol  $\nabla$  potraktujemy jako wektor o składowych  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ , to laplasian można traktować jako wynik iloczynu skalarnego  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ . Laplasian jest niezwykle ważnym operatorem różniczkowym w fizyce matematycznej. Wchodzi w skład każdego z równań „wielkiej trójki” fizyki matematycznej:

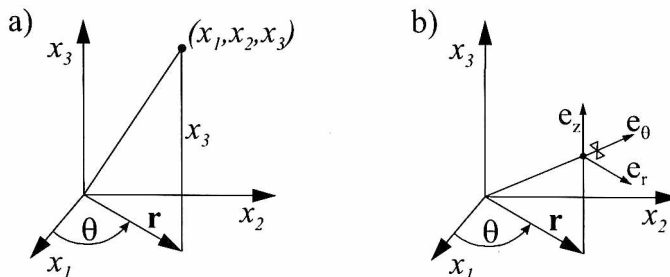
1.  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$  – równanie przewodnictwa temperaturowego (nazywane równaniem ciepła lub równaniem dyfuzji), gdzie  $u(t, x_1, x_2, x_3)$  wyraża temperaturę lub koncentrację materii zależną od czasu i współrzędnych przestrzennych  $x_1, x_2, x_3$ , natomiast  $\alpha$  współczynnik przewodnictwa temperaturowego lub współczynnik dyfuzji. Szybkość zmiany temperatury  $\frac{\partial u}{\partial t}$  zależy od przebiegu funkcji  $u(\mathbf{x}, t)$ , czyli wartości laplasianu  $\Delta u$ . Jeżeli funkcja jest wklęsła, to wartość laplasianu jest ujemna i  $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ . Oznacza to, że temperatura  $u$  będzie funkcją malejącą względem czasu. Jeżeli funkcja jest wypukła, to wartość laplasianu jest dodatnia i  $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$  czyli temperatura  $u$  rośnie. Działanie laplasianu  $\Delta u$  powoduje wygładzenie lokalnych nierównomierności rozkładu temperatury. Równanie przewodnictwa temperaturowego wyraża prawo zachowania energii [85], [93],
2.  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi$  – równanie falowe opisujące rozchodzenie się fal (zaburzeń), gdzie  $\psi(t, x_1, x_2, x_3)$  oznacza przemieszczenie, wychylenie od położenia równowagi.

W wersji jednowymiarowej  $\psi(x_1, t)$  równanie to nazywane jest równaniem drgającej struny i wyraża prawo zachowania pędu. Parametr  $c$  równa się prędkości rozchodzenia się zaburzenia [85],

3.  $\Delta\varphi = -\rho(x_1, x_2, x_3)$  – równanie rozkładu potencjału (nazywane równaniem Poissona). Jeżeli gęstość (masy, ładunku)  $\rho(x_1, x_2, x_3) = 0$ , to równanie nazywane jest równaniem Laplace’a.

### 1.5.7. Laplasian w sferycznym i cylindrycznym układzie współrzędnych

W dalszej części książki będziemy posługiwali się cylindrycznym i sferycznym układem współrzędnych. Niekiedy analiza zjawisk w tych układach współrzędnych jest dużo prostsza ze względu na istniejącą lub zakładaną z góry symetrię zjawiska. Jeżeli można wyróżnić symetrię zagadnienia względem osi  $x_3$ , wtedy wygodnie jest posługiwać się cylindrycznym układem współrzędnych (rys. 1.28). Można zauważyć, że dowolny punkt w układzie współrzędnych kartezjańskich  $(x_1, x_2, x_3)$  jest przedstawiony za pomocą współrzędnych cylindrycznych  $(r, \theta, z)$  w ten sposób, że przedstawieniem dwóch pierwszych współrzędnych  $x_1, x_2$  są współrzędne biegunowe  $(r, \theta)$ , natomiast trzecia współrzędna  $x_3$  pozostaje niezmienną. Ortonormalnej bazie wektorów jednostkowych  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  układu kartezjańskiego odpowiadają wektory jednostkowe  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  pokazane na rys. 1.28b.



**Rys. 1.28:** Cylindryczny układ współrzędnych: a) przedstawienie punktu  $(x_1, x_2, x_3)$  w zmiennych  $(r, \theta, z)$ ; b) ortonormalne wektory bazowe  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  w układzie cylindrycznym

**Definicja 1.9.** *Cylindryczny układ współrzędnych  $(r, \theta, z)$  punktu  $(x_1, x_2, x_3)$  zdefiniowany jest zależnościami:*

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z \quad (1.90)$$

lub w sposób jawny jako:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad z = x_3, \quad (1.91)$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(x_2/x_1), & \text{gdy } x_1 > 0 \text{ i } x_2 \geq 0 \\ \pi + \arctan(x_2/x_1), & \text{gdy } x_1 < 0 \\ 2\pi + \arctan(x_2/x_1), & \text{gdy } x_1 > 0 \text{ i } x_2 < 0. \end{cases} \quad (1.92)$$

Związek pomiędzy wektorami jednostkowymi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  i wektorami układu cylindrycznego  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  jest następujący:

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3. \quad (1.93)$$

Definicja układu sferycznego jest następująca [63]:

**Definicja 1.10.** *Sferyczny układ współrzędnych  $(r, \theta, \phi)$  punktu w układzie kartezjańskim  $(x_1, x_2, x_3)$  określony jest zależnościami:*

$$x_1 = r \sin\phi \cos\theta, \quad x_2 = r \sin\phi \sin\theta, \quad x_3 = r \sin\theta \quad (1.94)$$

lub w sposób jawny:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad \phi = \arccos\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right), \quad (1.95)$$

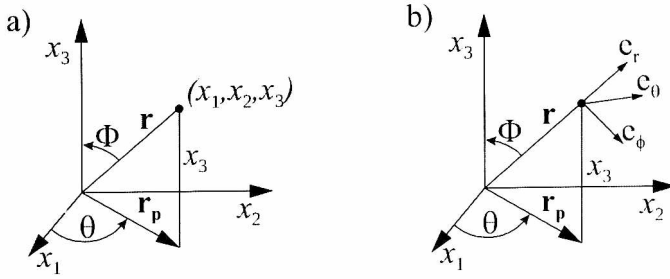
gdzie:

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (1.96)$$

## 1.6. Równanie Laplace'a

Równanie Laplace'a odgrywa w mechanice płynów bardzo ważną rolę. Jak zostało stwierdzone wcześniej, pewne pola wektorowe mogą być wyrażone jako  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ . Takie pola nazywamy potencjalnymi, a funkcje  $\phi$  potencjałem. Pole  $\mathbf{v}$  może być również polem bezźródłowym, czyli takim, że  $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ . W takim przypadku wyznaczenie potencjału  $\phi$  sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a:

$$\Delta\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = 0. \quad (1.97)$$



**Rys. 1.29:** Sferyczny układ współrzędnych: a) przedstawienie punktu  $(x_1, x_2, x_3)$  w zmieni-  
nych  $(r, \theta, \phi)$ ; b) ortonormalne wektory bazowe  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  w układzie sferycznym

Funkcje, które spełniają równanie Laplace'a  $\Delta\varphi = 0$ , nazywane są funkcjami harmonicznymi.

W fizyce często rozpatruje się zjawiska, w których siła zależy od odległości od wybranego punktu, np. od punktu o współrzędnych  $(0, 0, 0)$ , nazywanego centrum  $\mathbf{F} = \nabla\varphi(r)$ , gdzie  $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ . Siły te nazywane centralnymi, działają wzdłuż prostej łączącej dwa punkty. Przykładem są siły grawitacyjne, siła Culomba przyciągania (odpychania) się ładunków. W wyznaczaniu potencjału  $\phi$  takich sił uwikłane są rozwiązania równania Laplace'a nazywane fundamentalnymi. Dla trzech wymiarów, w nieograniczonej przestrzeni rozwiązanie to ma postać  $\varphi = \frac{1}{r}$ , natomiast dla dwóch wymiarów ma postać  $\varphi = \ln \frac{1}{r}$ . Przedstawimy ten wynik w formie twierdzenia [54]:

**Twierdzenie 1.6.** *W przestrzeni trójwymiarowej ( $n = 3$ ) funkcja:*

$$\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2}} \quad (1.98)$$

*jest funkcją harmoniczną z wyjątkiem punktu  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ . W przestrzeni dwuwymiarowej ( $n = 2$ ) funkcją harmoniczną jest funkcja:*

$$\varphi = \ln r = \ln \frac{1}{\sqrt{((x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2)}} \quad (1.99)$$

*z wyjątkiem punktu  $(x_{10}, x_{20})$ .*

**Dowód:** Ze względu na symetrię radialną wygodnie jest przyjąć odpowiednie układy współrzędnych. Dla równania (1.98) przyjmijmy sferyczny układ współrzędnych. Równanie Laplace'a we współrzędnych sferycznych ma postać:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1.100)$$

Z założenia funkcja  $\varphi$  zależy tylko od  $r$ , więc równanie Laplace'a redukuje się do postaci:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = 0. \quad (1.101)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu powyższego równania otrzymujemy rozwiązanie w postaci  $\varphi = a_1 \frac{1}{r} + a_2$ , gdzie  $a_1, a_2$  są współczynnikami stałymi. W szczególności rozwiązanie to jest funkcją harmoniczną dla  $a_2 = 0$  i  $a_1 = 1$ .

Dla równania (1.99) przyjmujemy biegunowy układ współrzędnych  $(x, y) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi)$ . We współrzędnych biegunowych równanie Laplace'a przyjmuje postać:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0. \quad (1.102)$$

Ze względu na to, że rozwiązanie  $\varphi$  zależy tylko od  $r$ , równanie Laplace'a przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0. \quad (1.103)$$

Po pomnożeniu powyższego równania stronami przez  $r$  można je zapisać w postaci  $\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) = 0$ . Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy rozwiązanie w postaci  $\varphi = c_1 \ln r + c_2$ , gdzie  $c_1, c_2$  są stałymi współczynnikami. Dla  $c_1 = -1, c_2 = 0$  otrzymujemy więc rozwiązanie (1.99).  $\square$

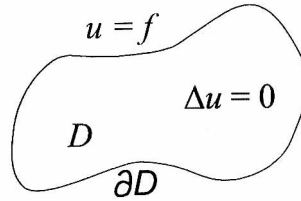
### 1.6.1. Zagadnienie Dirichleta i zagadnienie Neumanna

W celu otrzymania jednoznacznego rozwiązania równania Laplace'a (1.97) należy w obszarze, dla którego poszukujemy rozwiązania, postawić warunki brzegowe, które musi spełniać rozwiązanie. Typowe warunki brzegowe prowadzą do zagadnienia Dirichleta lub zagadnienia Neumanna.

**Definicja 1.11.** *Zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a polega na wyznaczeniu funkcji harmonicznego wewnątrz obszaru  $D$  z warunkiem:*

$$u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \partial D. \quad (1.104)$$

Oznacza to, że należy wyznaczyć taką funkcję harmoniczną  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  wewnątrz obszaru  $D$ , aby na brzegu obszaru  $\partial D$  przyjmowała ona zadaną wartość  $\varphi = f$ . Obszar  $D$  może być obszarem skończonym, ograniczonym zamkniętą powierzchnią  $S$  lub obszarem nieograniczonym. W przypadku obszaru skończonego mówimy o wewnętrznym zagadnieniu Dirichleta. Jeżeli obszar jest nieograniczony, leży na zewnątrz obszaru  $D$ , to zagadnienie Dirichleta jest zagadnieniem

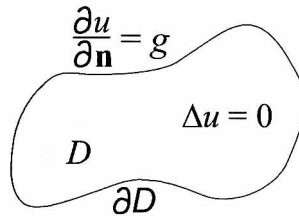


**Rys. 1.30:** Zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a

zewnętrznym. W przypadku zagadnienia zewnętrznego dodatkowo żąda się, aby rozwiązanie w nieskończoności dążyło do zera, natomiast w przypadku zagadnienia wewnętrznego, aby rozwiązanie w nieskończoności dążyło do stałej wartości.

**Definicja 1.12.** *Zagadnienie Neumanna dla równania Laplace'a (rys. 1.31) polega na wyznaczeniu funkcji harmonicznej wewnątrz obszaru  $D$  z warunkiem:*

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial n} = g(x_1, x_2, x_3) \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \partial D. \quad (1.105)$$



**Rys. 1.31:** Zagadnienie Neumanna dla równania Laplace'a

Zagadnienie Neumanna określone jest z dokładnością do stałej. Jeżeli funkcja  $\varphi$  jest rozwiązaniem zagadnienia Neumanna, to również funkcja  $\varphi_1 = \varphi + c$ , gdzie  $c$  jest dowolną stałą, jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Ponadto dla zagadnienia Neumanna zachodzi zależność:

$$0 = \int_D \Delta \varphi dV = \int_D \operatorname{div} \nabla \varphi dV = \int_{\partial D} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.106)$$

Ze wzoru (1.106) oraz z warunku (1.105) wynika, że funkcja  $g$ , która występuje w warunku Neumanna, musi spełniać zależność:

$$\int_{\partial D} g dS = 0. \quad (1.107)$$

Warunek (1.107) nazywa się warunkiem rozwiązywalności dla zagadnienia Neumanna.

Aby pokazać pewne własności funkcji harmoniczych, posłużymy się tożsamościami całkowymi Greena.

### 1.6.2. Wzory całkowe Greena

Punktem wyjścia będzie następująca tożsamość:

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.108)$$

Używając symbolu operatora  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ , tożsamość (1.108) można zapisać następująco:

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi. \quad (1.109)$$

Podstawmy we wzorze (1.109)  $\mathbf{v} = \nabla \psi$ . Otrzymamy:

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi. \quad (1.110)$$

Po scałkowaniu stronami (1.110) po obszarze  $D$  i wykorzystaniu twierdzenia Gaussa (1.49) otrzymujemy pierwszą tożsamość Greena:

$$\int_D (\nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) dv = \int_{\partial D} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (1.111)$$

Przypomnijmy, że  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \nabla \psi \cdot \mathbf{n}$  oznacza pochodną kierunkową funkcji  $\psi$  w kierunku prostopadłym do brzegu obszaru. Formuła (1.111) jest słuszna dla dowolnych, dostatecznie regularnych funkcji. Jeżeli za  $\varphi$  położymy funkcję stałą  $\varphi \equiv 1$ , a za funkcję  $\psi$  funkcję harmoniczną, to z tożsamości (1.111) wynika, że dla funkcji harmoniczej  $\psi$  w obszarze  $D$  zachodzi zależność:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0. \quad (1.112)$$

Wyprowadzimy teraz drugą tożsamość Greena. Jeżeli we wzorze (1.110) zamienimy miejscami funkcje  $\varphi$  i  $\psi$ , to przepisując wzór (1.110) i dopisując wzór powstały po zamianie miejscami  $\varphi$  oraz  $\psi$ , mamy:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) &= \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi, \\ \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) &= \nabla \psi \nabla \varphi + \psi \Delta \varphi. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Odejmując stronami powyższe dwa równania, otrzymujemy:

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) = \varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi. \quad (1.114)$$

Po scałkowaniu równania (1.114) po obszarze  $D$  oraz wykorzystaniu twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego (1.49) otrzymujemy równość nazywaną drugą tożsamością Greena:

$$\int_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv = \int_{\partial D} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (1.115)$$

Pożyteczną i zarazem podkreślającą znaczenie laplasianu jest możliwość przedstawienia dowolnej funkcji  $u$  odpowiednio regularnej na obszarze  $D$  za pomocą jej wartości i pochodnej na brzegu  $\partial D$  oraz całki z laplasianu funkcji po całym obszarze  $D$  [54], [85].

**Twierdzenie 1.7.** *Wartość funkcji  $u$  ciągłej wraz z pochodnymi dwóch pierwszych rzędów aż do powierzchni  $\partial D$ , wewnątrz dowolnego punktu  $\mathbf{x}_0 \in D$  wyraża się jako sumę całki powierzchniowej i całki objętościowej w postaci:*

- dla  $n = 3$  jako:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\Delta u}{r} dv; \quad (1.116)$$

- dla  $n = 2$  jako:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left( \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) ds - \frac{1}{2\pi} \int_D \Delta u \ln \frac{1}{r} dS. \quad (1.117)$$

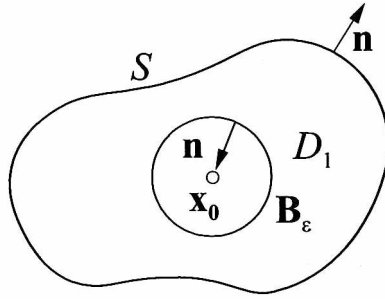
**Dowód:** Do wykazania wzorów (1.116) oraz (1.117) wykorzystamy drugi wzór Greena (1.114). Niech we wzorze (1.115) funkcja  $\psi = \frac{1}{r}$  (patrz wzór (1.98)), a za funkcję  $\varphi$  podstawimy funkcję  $u$ . Funkcja  $\frac{1}{r}$  jest funkcją harmoniczną i przyjmuje wartość nieskończoną w punkcie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ . Z tego powodu musimy wyciąć z obszaru  $D$  otoczenie punktu  $\mathbf{x}_0$  w postaci kuli  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  o małym promieniu  $\varepsilon$  i środka w punkcie  $\mathbf{x}_0$ . Dla tak zmodyfikowanego obszaru  $D_1 = D \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  możemy już zastosować wzór (1.114) (rys. 1.32). Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \left[ u \Delta \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right] dv &= \int_S \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \\ &+ \int_{B_\varepsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Na kuli  $B_\varepsilon$  wektor normalny skierowany jest do wnętrza tej kuli, ponieważ obowiązuje konwencja przyjmowania kierunku normalnej na zewnątrz obszaru, po którym odbywa się całkowanie. Tak więc:

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{B_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (1.119)$$



Rys. 1.32: Obszar  $D$  z wyciętym otoczeniem  $B_\varepsilon$ 

Wzór (1.118) można zapisać w postaci:

$$\int_{D_1} \frac{1}{r} \Delta u dv + \int_S \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} u dS - \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \quad (1.120)$$

Niech teraz promień kuli  $B_\varepsilon$  dąży do zera. Wtedy pierwsza całka dąży do całki objętościowej po całym obszarze  $D$ , druga nie zależy od promienia  $\varepsilon$ , natomiast trzecia, na mocy twierdzenia o wartości średniej, dąży do wartości  $4\pi u(\mathbf{x}_0)$ :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_\varepsilon} u dS = \frac{1}{\varepsilon^2} u(\mathbf{x}_\varepsilon) 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi u(\mathbf{x}_\varepsilon) \rightarrow 4\pi u(\mathbf{x}_0) \quad \text{przy } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.121)$$

gdzie  $\mathbf{x}_\varepsilon$  jest pewnym punktem kuli  $B_\varepsilon$  spełniającym twierdzenie o wartości średniej. Podobnie możemy obliczyć granicę ostatniej całki, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Funkcja  $u$  posiada ciągle pochodne do drugiego rzędu włącznie, więc są one w obszarze  $D$  ograniczone. W związku z tym mamy:

$$- \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = - \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} |_{x_\varepsilon} 4\pi \varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad \text{gdy } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.122)$$

Stąd wynika wzór podany w tezie twierdzenia.

Analogiczne rozumowanie przeprowadza się dla płaszczyzny  $n = 2$ , przyjmując, że  $\psi = -\ln r$ .  $\square$

Podkreślmy jeszcze raz, że wzory (1.116) i (1.117) obowiązują dla dowolnej funkcji  $u$  ciągłej do brzegu  $S$  łącznie z jej pierwszą i drugą pochodną.

### 1.6.3. Własności funkcji harmonicznych

Jeżeli wzory (1.116) i (1.117) zastosujemy do funkcji harmonicznej, to otrzymamy:

- dla  $n = 3$ :

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS, \quad (1.123)$$

- dla  $n = 2$ :

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left( \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) ds. \quad (1.124)$$

Wzory (1.123) i (1.124) stanowią tezę twierdzenia [54], [85]:

**Twierdzenie 1.8.** *Wartość funkcji harmonicznego w obszarze  $D$  w dowolnym punkcie wewnątrz obszaru wyraża się wzorem (1.123) dla  $n = 3$  lub wzorem (1.124) dla  $n = 2$  i zależy od wartości tej funkcji i jej pochodnych wzdłuż normalnej do brzegu tego obszar  $\partial D$ .*

Warto zauważyć, że funkcja harmonicznego wyraża się przez wartość funkcji i wartość pierwszej pochodnej na brzegu obszaru.

Prawdziwe jest twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [70], [71].

**Twierdzenie 1.9.** *Funkcja harmonicznego  $u(x)$  wewnątrz obszaru  $D$  ma pochodne wszystkich rzędów.*

Ważną własnością funkcji harmonicznego jest twierdzenie o wartości średniej [85].

**Twierdzenie 1.10.** *Wartość funkcji harmonicznego w środku kuli (dla  $n = 3$ ) lub koła (dla  $n = 2$ ) równa się średniej arytmetycznej tej funkcji po powierzchni kuli (po brzegu koła dla  $n = 2$ ):*

- $n = 3$ :

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS, \quad (1.125)$$

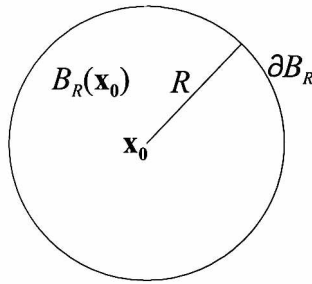
- $n = 2$ :

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u ds. \quad (1.126)$$

**Dowód:** Przyjmijmy, że funkcja  $u(x_0)$  jest funkcją harmoniczną wewnątrz kuli  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R$ . Ze wzoru (1.123),  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) |_{r=R} = -\frac{1}{R^2}$  oraz własności (1.112) otrzymujemy wzór (1.125). Podobnie dowód przebiega dla płaszczyzny  $n = 2$ .  $\square$

Z twierdzenia o wartości średniej można wyprowadzić ważną własność funkcji harmonicznego nazywaną zasadą maksimum [54], [71]

**Twierdzenie 1.11.** *Różna od stałej funkcja harmonicznego wewnątrz obszaru  $D$  i ciągła aż do brzegu obszaru  $\partial D$  osiąga największą i najmniejszą wartość tylko na brzegu obszaru.*



**Rys. 1.33:** Kula o promieniu  $R$ , wewnątrz której funkcja  $u$  spełnia równanie Laplace'a  $\Delta u = 0$

Zwróćmy uwagę jeszcze na fakt, że wzory (1.116) i (1.117) pozwalają również wyrazić rozwiązanie równania Poissona:

$$\Delta u = -\rho(\mathbf{x}), \quad (1.127)$$

gdzie  $\rho$  jest zadaną funkcją współrzędnych położenia w sposób następujący:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} dv. \quad (1.128)$$

Jeżeli na brzegu obszaru  $D$  funkcja  $u$  i jej pochodna są równe zero, np. nośnik funkcji  $\rho$  jest ograniczony a promień obszaru  $D$  dąży do nieskończoności, to rozwiązanie równania Poissona dane jest wzorem:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} dv. \quad (1.129)$$

Dla dwóch wymiarów rozwiązanie Poissona w obszarze nieograniczonym przybiera postać:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_D \rho(\mathbf{x}) \ln \frac{1}{r} dS. \quad (1.130)$$



## Rozdział 2

# Kinematyka ośrodka ciągłego

Ze względu na zastosowanie w dalszych obliczeniach wprowadzimy niezbędne pojęcia dotyczące kinematyki ruchu ośrodka ciągłego. Kinematyka zajmuje się ruchem, w którym pomija działanie sił, naprężeń czy obecność masy. Uwzględnia geometrię ruchu, trajektorię cząstek, deformację objętości. W rozdziale tym wprowadzimy kilka pojęć potrzebnych do opisu ruchu ośrodka ciągłego, co w szczególności odnosi się do mechaniki płynów.

### 2.1. Uwagi o hipotezie ośrodka ciągłego

Mechanika ośrodka ciągłego obejmuje teorię sprężystości, mechanikę ciała stałego, mechanikę cieczy i gazów. Zajmuje się ruchem, kinematyką i dynamiką, traktując ośrodek materialny jako nieskończenie ciągły układ cząstek cieczy, gazu lub ciała stałego. W mechanice ośrodka ciągłego ignorowane są szczegóły budowy materii na poziomie atomowym (cząsteczkowym). Zakłada się, że:

- rzeczywisty materiał można zastąpić ciągłym (gładkim) hipotetycznym kontinuum;
- każda, dowolnie mała porcja kontinuum jest dobrze scharakteryzowana za pomocą parametrów opisujących dany materiał, takich jak: gęstość, lepkość, ciśnienie. Parametry te zmieniają się w obrębie objętości zajmowanej przez materiał w sposób ciągły i są określone w każdym jej punkcie. Mogą one być obliczone na podstawie reguł analizy matematycznej, np. obliczania granicy funkcji czy pochodnych.

Hipoteza kontinuum przestaje obowiązywać, gdy skala opisywanych zjawisk zachodzących w ośrodku jest tego samego rzędu co odległości międzyatomowe. Dla gazów taką granicą jest odległość rzędu  $10^{-7}$  m, dla cieczy rzędu  $10^{-9}$  m.

Aby lepiej zrozumieć ograniczenia hipotezy kontinuum, przeprowadzimy następujący eksperyment myślowy: W obszarze  $\Omega$  zajmowanym przez płyn rozpatrzmy objętość kontrolną zlokalizowaną wokół punktu  $\mathbf{x}_0$  w kształcie sześcianu o boku  $h$ , który zawiera masę  $M_h$ . Określmy średnią gęstość płynu zwartą w tej objętości

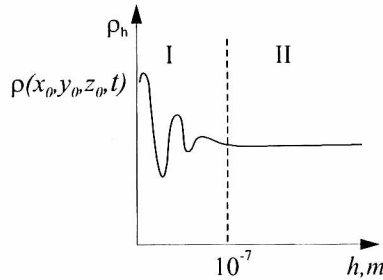
jako:

$$\rho_h(x_0) = \frac{M_h}{h^3}.$$

Aby obliczyć wartość gęstości w punkcie  $x_0$ , należy obliczyć granicę:

$$\rho(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_h(x_0).$$

W układzie rzeczywistym traktowanie przejścia granicznego w sposób dosłowny będzie prowadzić do wykresu gęstości w zależności od rozmiaru kontrolnej objętości  $h$  jak na rys. 2.1.



**Rys. 2.1:** Wykres średniej gęstości w sześcianie o boku  $h$  w zależności od długości jego boku  $h$

W obszarze oznaczonym na rys. 2.1 jako II gęstość ma stałą wartość i wykres gęstości  $\rho_h$  jest poziomy. Mimo że cząstki są w ciągłym ruchu termicznym, co powoduje, że wpadają one do objętości kontrolnej i z niej wypadają, praktycznie nie zauważa się fluktuacji wartości gęstości. Liczba cząstek w objętości kontrolnej jest bardzo duża ( $1 \text{ cm}^3$  wody zawiera bowiem  $\sim 3 \times 10^{22}$  cząstek). Zmniejszanie  $h$  poniżej  $10^{-9} \text{ m}$  powoduje, że liczba cząstek w objętości sześcianu jest niewielka (przy  $h$  mniejszym od  $10^{-9} \text{ m}$  liczba cząstek cieczy wynosi około  $\sim 30$ ) i ich termiczne ruchy powodują nieregularne, gwałtowne zmiany gęstości. Dlatego przejście graniczne  $h \rightarrow 0$  należy rozumieć jako  $h \rightarrow h^*$ , gdzie  $h^* \cong 10^{-9} \text{ m}$  dla cieczy, a dla gazów  $h^* \cong 10^{-7} \text{ m}$ . W podobny sposób należy interpretować przejścia graniczne dla innych funkcji zależnych od punktu w przestrzeni z ciągłym rozkładem materii. Podkreślmy jeszcze raz, że w mechanice ośrodka ciągłego z hipotezą kontinuum zaniedbuje się molekularną strukturę materii.

## 2.2. Ruch w ośrodku ciągłym

Abyśmy mogli dalej zajmować się ruchem płynu, musimy wprowadzić pewne pojęcia, które ułatwią nam badanie ruchu. Najpierw zdefiniujemy pojęcie układu

referencyjnego, układu bieżącego, zmiennych materialnych i zmiennych przestrzennych. Podamy, jak należy rozumieć ruch z punktu widzenia matematyki oraz w jaki sposób należy go opisywać.

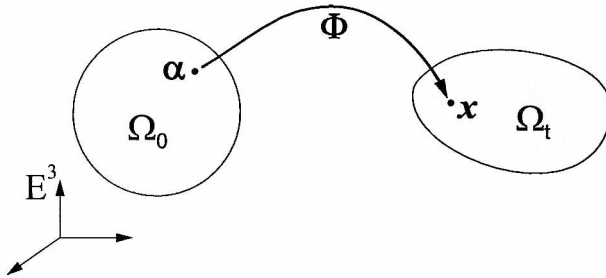
### 2.2.1. Opis ruchu w zmiennych Lagrange'a i w zmiennych Eulera

Do opisu położenia punktu będziemy wykorzystywali kartezjański układ współrzędnych  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Będziemy zakładać, że ośrodek ciągły spełnia hipotezę kontinuum i wypełnia pewną część lub całość przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Materialne cząstki ośrodka kontinuum będziemy nazywać cząstkami płynu.

Niech w pewnej wyróżnionej chwili  $t = 0$  cząstki zajmują pewne położenie w zbiorze  $\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$ . Położenia cząstek w zbiorze  $\Omega_0$  będziemy oznaczać za pomocą małych liter greckich, np.  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  (rys. 2.2). Zbiór wszystkich położzeń początkowych  $\Omega_0$  nazywa się konfiguracją referencyjną. Z upływem czasu  $t$  cząstka  $\alpha$  przemieści się do nowego położenia  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_t$ . Zbiór wszystkich cząstek  $\Omega_t$ , które w chwili początkowej znajdowały się w zbiorze  $\Omega_0$ , nazywa się konfiguracją bieżącą. Zakłada się, że każdej cząstce  $\alpha \in \Omega_0$  odpowiada tylko jedna cząstka  $\mathbf{x} \in \Omega_t$ . Przeniesienie cząstki  $\alpha$  ze zbioru  $\Omega_0$  do nowego położenia  $\mathbf{x} \in \Omega_t$  opisuje odwzorowanie  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ , które będziemy zapisywać jako:

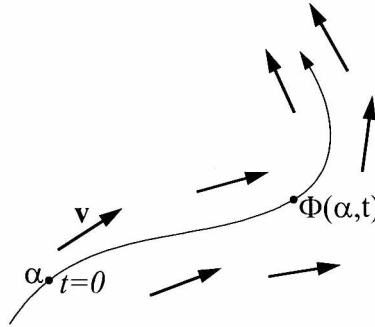
$$\mathbf{x} = \Phi(\alpha, t). \quad (2.1)$$

Odwzorowanie  $\Phi : \Omega_0 \mapsto \Omega_t$  w mechanice ciała stałego nazywa się deformacją względem układu referencyjnego  $\Omega_0$  [31],[92]. W niniejszej pracy  $\Phi$  nazywać będziemy odwzorowaniem przepływowym lub przepływem. Dla ustalonego czasu  $t$ , gdy ze zbioru  $\Omega_0$  zostaną wybrane wszystkie cząstki  $\alpha$ , odwzorowanie przepływowe  $\Phi$  przekształci zbiór  $\Omega_0$  w zbiór  $\Omega_t$ . Wyrażamy to jako  $\Omega_t = \Phi_t(\Omega_0)$  (rys. 2.2).



Rys. 2.2: Przemieszczenie cząstek ze zbioru  $\Omega_0$  do położenia  $\Omega_t$  pod wpływem deformacji  $\Phi(\alpha, t)$

**Definicja 2.1.** *Ruchem nazywamy ciągłą deformację objętości materialnej z upływem czasu  $t$ .*



**Rys. 2.3:** Trajektoria cząstki jest krzywą całkową równań różniczkowych (2.9)

np. mają pierwsze pochodne  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ , to na mocy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego [6], wynika, że dla  $t_2 > t_1 > 0$  zachodzi zależność:

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t_1 + t_2) = \Phi(\mathbf{x}(t_1), t_2), \quad (2.10)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.11)$$

gdzie  $\mathbf{x}(t_1) = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t_1)$ .

Jeżeli w chwili początkowej w jakiś sposób zaznaczymy cząstkę  $\boldsymbol{\alpha}$ , np. zabarwiając ją, to dokonując ciągłej rejestracji położenia cząstki zaobserwujemy jej trajektorię.

**Przykład 4.** Wyznaczyć odwzorowanie przepływowo oraz trajektorię przechodzącą przez punkt  $(1, 1)$  dla następującego pola prędkości:

$$v_1 = x_1, \quad v_2 = x_1 - x_2, \quad v_3 = 0. \quad (2.12)$$

Obliczyć jacobian odwzorowania przepływowego  $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ .

### Rozwiązanie

Różniczkowe równania ruchu zapiszemy w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

Kropka nad zmienną  $x_1$  oraz  $x_2$  oznacza różniczkowanie po czasie. Rozwiążemy powyższy układ równań różniczkowych metodą diagonalizacji macierzy  $\mathbf{A}$  [36]. Do jakościowego przedstawienia zachowania się rozwiązań wykorzystamy płaszczyznę fazową  $(x_1, x_2)$ , co znaczy, że osie układu współrzędnych będą wyrażały wartości rozwiązań  $x_1(t)$  oraz  $x_2(t)$ .



Dokonamy zamiany zmiennych, przyjmując:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x}, \quad (2.14)$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  jest pewną macierzą kwadratową  $2 \times 2$ . Jeżeli zróżniczkujemy powyższe równanie względem czasu, to otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y}.$$

Rozwiązywanie powyższego równania różniczkowego względem nowych zmiennych będzie wyjątkowo proste, jeżeli macierz  $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$  przybierze postać diagonalną:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Wtedy  $y_i = C_i e^{\lambda_i t}$ . Przyjmijmy, że rozwiązanie zagadnienia (2.13) będzie miało postać  $\mathbf{x} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ , gdzie  $\mathbf{K}$  jest stałym wektorem. Po podstawieniu wyrażenia do równania (2.13) sprawdzamy, jakie warunki musi spełniać wektor  $\mathbf{K}$  oraz  $\lambda$ :

$$\lambda \mathbf{K}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{K}e^{\lambda t}.$$

Po podzieleniu stronami przez  $e^{\lambda t}$  otrzymujemy:

$$\mathbf{A}\mathbf{K} = \lambda \mathbf{K} \quad (2.15)$$

lub inaczej

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = 0. \quad (2.16)$$

Równanie (2.15) określa zagadnienie na wartości własne  $\lambda$  oraz wektory własne  $\mathbf{K}$  dla macierzy  $\mathbf{A}$ . Równanie (2.16) ma różne od zera rozwiązanie względem  $\mathbf{K}$  wtedy i tylko wtedy, jeżeli wyznacznik macierzy lewej strony równania (2.16) jest równy zeru:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.17)$$

Wyznacznik (2.17) jest wielomianem charakterystycznym macierzy  $\mathbf{A}$  ze względu na  $\lambda$ . Liczba  $\lambda$  jest wartością własną macierzy  $\mathbf{A}$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego (2.17). W naszym przypadku wielomian charakterystyczny jest rzędu drugiego, a więc ma dwie wartości własne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

Każdej wartości własnej  $\lambda_i$  odpowiada wektor  $\mathbf{K}_i$ , który spełnia równanie (2.17). Nazywa się go wektorem własnym. Z konstrukcji widać, że  $\mathbf{K}_i e^{\lambda_i t}$ ,  $i = 1, 2$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego (2.13). Rozwiązanie ogólne równania (2.13) jest kombinacją liniową rozwiązań  $\mathbf{K}_i e^{\lambda_i t}$ :

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.18)$$

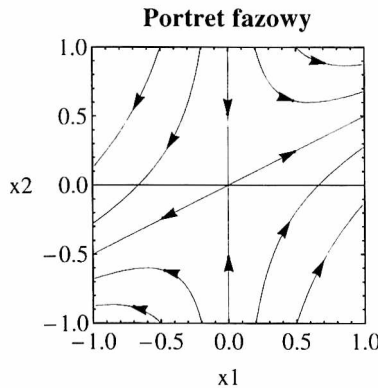
Dla macierzy  $\mathbf{A}$  równania (2.13) równanie charakterystyczne (2.17) ma postać:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Stąd mamy dwa pierwiastki własne  $\lambda_1 = -1$  oraz  $\lambda_2 = 1$ . Z równania (2.15) wyznaczamy wektory własne z dokładnością do stałego mnożnika:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Zauważmy, że wartości rozwiązań  $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{K}_i e^{\lambda_i t}$  dla ( $i = 1, 2$ ) leżą na prostych, które przechodzą przez punkt  $(0, 0)$  oraz  $K_i = \mathbf{X}_i(0)$ . Punkt  $(0, 0)$  jest rozwiązaniem równania (2.13) i nazywa się go punktem równowagi. Dla wartości  $\lambda_1 < 0$  rozwiązanie  $\mathbf{X}_1(t)$  maleje monotonicznie do 0 wraz ze wzrostem  $t$ . Strzałki na krzywych na rys. 2.4 wskazują kierunek ruchu punktu wraz z upływem czasu. Mówi się, że takie rozwiązanie jest stabilne. W tym przypadku kierunek wektora własnego pokrywa się z osią  $x_2$ . Ponieważ wartość  $\lambda_2 > 0$ , to rozwiązanie  $\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$  przy  $t \rightarrow \infty$  dąży do  $\infty$ . O takim rozwiązaniu mówimy, że jest niestabilne [36].



**Rys. 2.4:** Portret fazowy dla równania (2.13)

Z przedstawionego przykładu można wysnuć wniosek, że o kształcie portretu fazowego w pobliżu punktu równowagi  $(0, 0)$  decydują wartości własne. Portret fazowy, w którym spotykają się linie stabilne z niestabilnymi nazywa się siodłem [36]. Jeżeli obie wartości własne są ujemne (dodatnie), to portret fazowy będzie nazywał się ściekiem (źródłem). Wartości własne mogą być zespolone. W zależności od znaku części rzeczywistej pierwiastków  $\lambda$  trajektorie zbliżają się ( $Re(\lambda) < 0$ ) lub oddalają się od punktu równowagi ( $Re(\lambda) > 0$ ) spiralnie. Taki punkt równowagi

nazywa się ogniskiem. Gdy obie części rzeczywiste pierwiastków  $\lambda$  są równe zero, to obraz w przestrzeni fazowej jest nazwany środkiem lub centrum [36].

Aby wyznaczyć równanie trajektorii przechodzącej przez punkt  $(1, 1)$ , należy określić na podstawie warunków  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ , stałe  $c_1$  i  $c_2$  w równaniu (2.18). Są one równe  $c_1 = c_2 = 1/2$ .

Odwzorowania przepływowe powinny spełniać warunek:  $\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \alpha_1$  oraz  $\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \alpha_2$ . Stałe  $c_1, c_2$  w równaniu (2.18) należy wyrazić za pomocą  $\alpha_1, \alpha_2$ . Otrzymujemy wówczas układ równań:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy  $c_1 = -\alpha_1/2 + \alpha_2$ ,  $c_2 = -\alpha_1/2$ . Ostatecznie odwzorowanie przepływowe przyjmuje postać:

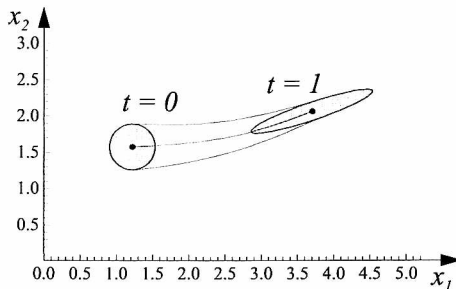
$$x_1 = \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_1 e^{-t}, \quad (2.21)$$

$$x_2 = \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{\alpha_1}{2}(e^t - e^{-t}) + \alpha_2 e^{-t} = \alpha_1 \sinh t + \alpha_2 e^{-t}. \quad (2.22)$$

Jakobian odwzorowania przepływowego ma wartość:

$$J = \det \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{-t}-e^t}{2} & e^t \end{bmatrix} = 1. \quad (2.23)$$

Zauważmy, że dywergencja pola prędkości (2.12) jest równa zero. Oznacza to, że przepływ  $\Phi$  jest nieściśliwy.



**Rys. 2.5:** Przemieszczenie cząstek ze zbioru  $\Omega_0$  (koło o promieniu  $r = 0,2$  wokół punktu  $(1, 1)$ ) do położenia  $\Omega_t$ ,  $t = 1s$ , pod wpływem deformacji  $\Phi(\alpha, t)$  (2.21)

Przepływ (2.21) przeniesie punkty z otoczenia punktu  $(1, 1)$ , np. leżące w kole o promieniu  $r = 0,2$ , do nowego położenia. Otoczenie punktu początkowego

zostanie zdeformowane. Jednak pola obszaru zdeformowanego, np. po czasie  $t = 1$ , i otoczenia początkowego będą dokładnie takie same (rys. 2.5).

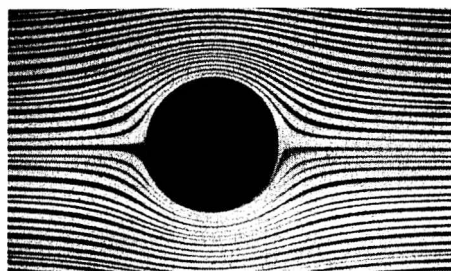
Na rysunku 2.5 oprócz trajektorii przechodzącej przez punkt  $(0, 0)$  zaznaczono dodatkowo dwie trajektorie przechodzące przez punkty  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, 2$  oraz  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, 8$ . Punkty, które leżały na brzegu koła, będą leżały na brzegu obszaru zdeformowanego.

## Linia prądu

**Definicja 2.3.** *Linia prądu dla chwili  $t = t_0$  nazywamy krzywą, która jest styczna do pola prędkości we wszystkich swoich punktach.*

Jeżeli pole prędkości jest zadane  $\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}, t_0), v_2(\mathbf{x}, t_0), v_3(\mathbf{x}, t_0))$ , to warunek styczności do krzywej  $x(s), y(s), z(s)$ , gdzie  $s$  jest parametrem krzywej, można wyrazić następująco:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t_0)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t_0)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t_0)} = ds. \quad (2.24)$$



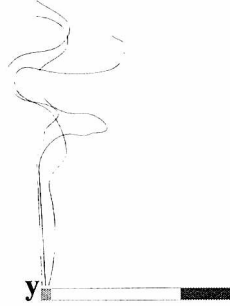
Rys. 2.6: Przykład linii prądu wokół walca [25]

Linie prądu są użytecznym wskaźnikiem pola kierunków ruchu cząstek płynu w zatrzymanym czasie. Jeżeli do przepływu wprowadzimy barwnik i wykonamy zdjęcie po czasie, w którym barwnik był rozprowadzany, to obraz na zdjęciu będzie przedstawiał linie prądu (rys. 2.6). Linia prądu, która przechodzi przez wybrany punkt  $\alpha = (x(0), y(0), z(0))$  jako rozwiązanie równań różniczkowych (2.24), jest określona jednoznacznie. Można zauważyć, że gdy pole prędkości nie zależy w sposób jawny od czasu  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ , to równania opisujące trajektorie i linie prądu są takie same i obie rodziny linii pokrywają się.

## Linia wysnuta

Podawanie w ustalonym punkcie obszaru przepływowego, przez pewien czas, znacznika w postaci np. dymu, farby, pozwala na uzyskanie jakościowego obrazu pola przepływu w postaci linii, nazywanej linią wysnutą (rys. 2.7).

**Definicja 2.4.** *Linia wysnutą obserwowaną w chwili  $t = T$  nazywamy linię utworzoną przez cząstki, które przeszły wcześniej przez ustalony punkt  $y$ .*



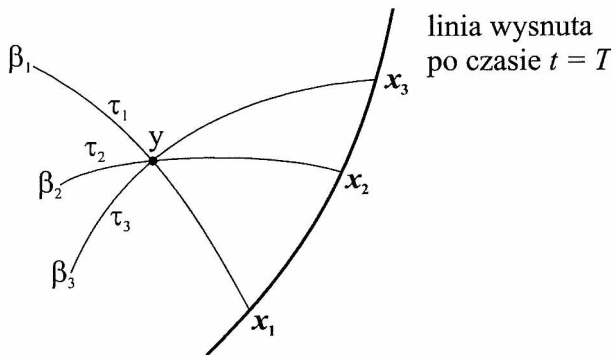
**Rys. 2.7:** Trajektorie utworzone przez cząstki, które w pewnym przedziale czasu  $0 < \tau < T$  przeszły przez wybrany punkt  $y$  (koniec papierosa). Miejsca, w których będą znajdowały się cząstki w czasie  $t = T$ , utworzą linię wysnutą

Oznaczmy jako  $\beta(\tau)$  zbiór cząstek, które przejdą przez wybrany punkt  $y$  w czasie  $\tau$ ,  $0 < \tau \leq T$ , a jako  $\beta_y(\tau)$  cząstkę, która w czasie  $\tau$  przeszła przez punkt  $y$  (rys. 2.8). Równanie linii wysnutej ma postać:

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(\beta_y(\tau), T) \quad \text{dla} \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (2.25)$$

Gdy  $\tau$  się zmienia od 0 do  $T$ , to przez punkt  $y$  przechodzą różne cząstki należące do zbioru  $\beta(\tau)$ . Cząstki te można wyznaczyć, odwracając odwzorowanie przepływowo:

$$\beta_y(\tau) = \Phi^{-1}(\mathbf{y}(\tau)) \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (2.26)$$



**Rys. 2.8:** Linia wysnuta, utworzona przez cząstki, które przeszły przez punkt  $y$  w chwilach  $0 \leq \tau \leq T$

Jeżeli pole prędkości  $\mathbf{v}$  nie zależy jawnie od czasu, to linia utworzona przez cząstki, które przeszły przez punkt  $\mathbf{y}$ , będzie tworzyła linię prądu, jak również trajektorię. W przypadku przepływu ustalonych trzy linie: trajektorii cząstki, linii prądu i linii wysnutej pokrywają się.

**Przykład 5.** Zadane jest pole prędkości

$$u = 2x_1 + t, \quad v = x_2 - t. \quad (2.27)$$

Wyznaczyć:

1. Linię prądu przechodzącą przez punktu  $(1, 1)$  w chwili  $t = 1$ .
2. Trajektorię cząstki płynu, która w chwili  $t = 0$  przechodziła przez punkt  $(1, 1)$ , oraz trajektorię, która w chwili  $t = 1$  przechodzi przez punkt  $(1, 1)$ .
3. Odwzorowanie przepływowe  $\Phi$ .
4. Linię wysnutą utworzoną przez cząstki przechodzące przez punkt  $(1, 1)$  dla czasu  $t \in (0, 1)$ .

**Rozwiązanie**

**Ad 1.** Linię prądu przechodzącą przez punkt  $(1, 1)$  w chwili  $t_0 = 1$  wyznaczamy z równania:

$$\frac{dx_1}{ds} = 2x_1 + t_0, \quad x_1(0) = 1. \quad (2.28)$$

$$\frac{dx_2}{ds} = x_2 - 2t_0, \quad x_2(0) = 1. \quad (2.29)$$

Przyjęto, że wartość parametru krzywej  $s$  odpowiadającej linii prądu w punkcie  $(1, 1)$  jest równa zeru. Rozwiązanie zagadnienia początkowego liniowych równań (2.28) i (2.29) ma postać:

$$x_1 = \frac{3}{2}e^{2s} - \frac{1}{2}, \quad (2.30)$$

$$x_2 = -e^s + 2. \quad (2.31)$$

Z równań (2.30) i (2.31) można wyeliminować parametr  $s$  z równania (2.31) otrzymujemy  $s = \ln(2 - x_2)$  a po podstawieniu do równania (2.30):

$$x_2 = 2 - \sqrt{\frac{1}{3}(2x_1 + 1)}. \quad (2.32)$$

**Ad 2.** Dla zadanego pola prędkości trajektorie opisywane są układem równań:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + t, \quad (2.33)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 - 2t. \quad (2.34)$$

Rozwiązania ogólne tego układu równań liniowych wyrażają się następująco:

$$x_1 = c_1 e^{2t} - \frac{1}{4} - \frac{t}{2}, \quad x_2 = c_2 e^t + 2(t+1). \quad (2.35)$$

Trajektorię przechodzącą przez punkt  $(1, 1)$  w chwili  $t = 0$  wyznaczamy z warunku  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ . Wartości stałych  $c_1$  i  $c_2$  są równe  $c_1 = 5/4$ ,  $c_2 = -1$ . Trajektorja przechodzącą przez punkt  $(1, 1)$  w chwili  $t = 0$  opisywana jest wzorem:

$$x_1(t) = -\frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{5}{4}e^{2t}, \quad x_2(t) = 2(1+t) - e^t. \quad (2.36)$$

**Ad 3.** Wyznamy teraz odwzorowanie  $\Phi$ . Będziemy przyjmować, że cząstka Lagrange'a  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  znajduje się w chwili  $t = 0$  w punkcie  $(1, 1)$ . Musimy zapewnić, aby  $x_1(0) = \Phi_1(\alpha_1, 0) = \alpha_1 = c_1 - 1/4$  oraz  $x_2(0) = \Phi_2(\alpha_2, 0) = \alpha_2 = c_2 + 2$ . Stąd mamy  $c_1 = \alpha_1 + 1/4$  oraz  $c_2 = \alpha_2 - 2$ . Odwzorowanie przepływowe ma postać:

$$x_1(t) = \Phi_1(\alpha, t) = -\frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \left(\alpha_1 - \frac{1}{4}\right) e^{2t}, \quad (2.37)$$

$$x_2(t) = \Phi_2(\alpha, t) = 2 - 2t + (\alpha_2 - 2) e^t. \quad (2.38)$$

**Ad 4.** Wyznamy najpierw zbiór punktów, które będą przechodzić przez punkt  $\mathbf{y} = (1, 1)$ . W tym celu wyznaczmy odwzorowanie odwrotne  $\beta_{\mathbf{y}}(\tau) = \Phi^{-1}(\mathbf{y})$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , korzystając z (2.37) i (2.38):

$$\beta_1 = \left(x_1 + \frac{1}{4} + \frac{\tau}{2}\right) e^{-2\tau} - \frac{1}{4}, \quad (2.39)$$

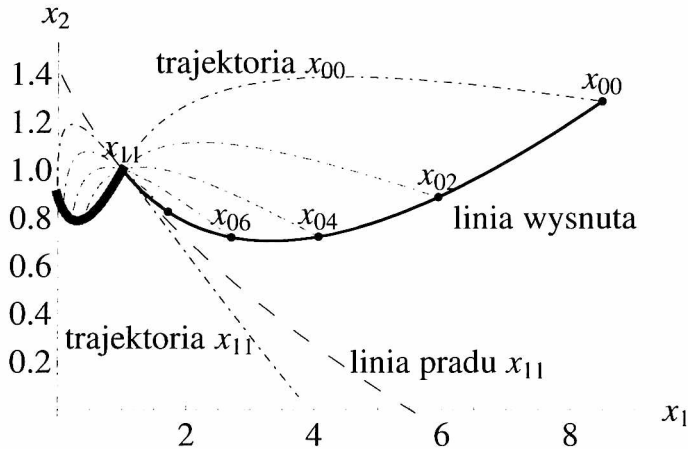
$$\beta_2 = (x_2 - 2(1 + \tau)) e^{-\tau} + 2. \quad (2.40)$$

Równania (2.39) i (2.40) zadają zbiór punktów  $\beta(\tau)$ , które przejdą przez punkt  $(1, 1)$ . Podstawiając (2.39) i (2.40) do odwzorowania przepływowego (2.37) i (2.38), otrzymujemy równanie linii wysnutej po czasie  $T = 1$  dla  $0 \leq \tau \leq 1$ :

$$x_1(\tau) = -\frac{1}{4} - \frac{T}{2} + e^{2T} \left(\beta_1(\tau) + \frac{1}{4}\right) \Big|_{T=1} = -\frac{3}{4} + e^{2(1-\tau)} \left(\frac{5}{4} + \frac{\tau}{2}\right), \quad (2.41)$$

$$x_2(\tau) = 2(1 + T) + e^T (\beta_2(\tau) - 2) \Big|_{T=1} = 4 + e^{1-\tau} (1 - 2(1 + \tau)). \quad (2.42)$$

Na rysunku 2.9 przedstawiono wykres linii wysnutej (linia ciągła od punktu  $x_{00}$  do punktu  $x_{11}$ ) którą tworzą punkty przechodzące przez punkt  $(1, 1)$ , dla  $0 \leq \tau \leq 1$ . Punkt  $x_{00}$  stanowi koniec trajektorii cząstki, która przeszła przez punkt  $(1, 1)$  w chwili  $\tau = 0$ . Punkt  $x_{02}$  oznacza koniec trajektorii cząstki, która przeszła przez punkt  $(1, 1)$  w chwili  $\tau = 0,2$  itd. Linia grubą oznaczono zbiór



**Rys. 2.9:** Trajektorie (linia-kropka-kreska), linia prądu (linia przerywana), linia wysnuta (linia ciągła od  $x_{00}$  do  $x_{11}$ ) po czasie  $T = 1$  utworzona z punktów, które przeszły przez punkt  $(1, 1)$ . Linia podwójnie grubą oznaczono zbiór punktów, które będą przechodziły przez punkt  $\mathbf{y} = (1, 1)$

cząstek, które przejdą przez punkt  $\mathbf{y} = (1, 1)$  dla  $0 \leq \tau \leq 1$  (wzory (2.41), (2.42)). Linia złożona z kresek oznacza linię prądu przechodzącą przez punkt  $(1, 1)$  w chwili  $t_0 = 1$  (wzór (2.32)). Za pomocą linii złożonych z kropek i kresek przedstawiono trajektorie cząstek, które w czasie  $0 \leq \tau \leq 1$  przechodzą przez punkt  $(1, 1)$  a kończą się na linii wysnutej w czasie  $T = 1$ .

### 2.2.3. Pochodna lokalna, konwekcyjna i substancjalna

Jak już wspomniano, prędkość  $\mathbf{v}_L$  i przyspieszenie  $\mathbf{a}_L$  w zmiennych Lagrange'a wyrażają się jako:

$$\mathbf{v}_L = \frac{\partial \Phi(\alpha, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{a}_L = \frac{\partial^2 \Phi(\alpha, t)}{\partial t^2}. \quad (2.43)$$

W zmiennych Eulera przy opisie parametrów ruchu płynu skupiamy się na zależności w ustalonym punkcie przestrzeni  $\mathbf{x}$  i chwili  $t$ . Na ogół nie interesuje nas historia ruchu cząstki. Jeżeli pole prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  jest znane, to możliwe jest, przynajmniej teoretycznie, wyznaczenie odwzorowania przepływowego  $\mathbf{x} = \Phi(\alpha, t)$  poprzez rozwiązanie zagadnienia początkowego (2.9) oraz odwzorowania przepływowego  $\Phi$ . Dysponując odwzorowaniem przepływowym (ruchem)  $\Phi(\alpha, t)$ ,



dowolną wielkość fizyczną zadaną w zmiennych Eulera  $f(\mathbf{x}, t)$ , można wyrazić w zmiennych Lagrange'a:

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t), t) = F(\boldsymbol{\alpha}, t). \quad (2.44)$$

Pochodna względem czasu funkcji  $f(\mathbf{x}, t)$  na mocy twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej wyraża się w postaci:

$$\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right), \quad (2.45)$$

gdzie  $x_i = \Phi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ . Ponieważ  $v_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ , to wzór (2.45) na pochodną funkcji  $f$  względem czasu przyjmuje postać:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f. \quad (2.46)$$

Pochodna  $\frac{\partial f}{\partial t}$  nazywa się pochodną lokalną, natomiast człon  $\mathbf{v} \cdot \nabla f$  nazywa się pochodną konwekcyjną. Pochodną (2.46), która jest sumą dwóch składników, nazywa się pochodną substancjalną a do jej interpretacji można wykorzystać różniczkowy przyrost funkcji  $df$  w punkcie  $(x, t)$ . Jest on sumą dwóch składników: różniczki wynikającej z jawnej, lokalnej zależności funkcji  $f$  od czasu  $df|_{\text{lok}} = \frac{\partial f}{\partial t} dt$  oraz różniczki konwekcyjnej  $df|_{\text{konv}} = \frac{df}{dl} dl$ , gdzie  $\frac{df}{dl}$  jest pochodną kierunkową wzdłuż trajektorii cząstki, która niesie informację o funkcji  $f$ , natomiast  $dl$  różniczkową długością trajektorii, którą przebędzie cząstka w czasie  $dt$ ,  $dl = |\mathbf{v}| dt$ . Wektor jednostkowy pokrywa się z kierunkiem pola prędkości  $\mathbf{s}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ . Tak więc różniczkowa zmiana funkcji  $f$  ma postać:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{df}{dl} dl = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \left( \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla f \right) |\mathbf{v}| dt = \frac{\partial f}{\partial t} dt + (\mathbf{v} \cdot \nabla f) dt. \quad (2.47)$$

Składowa  $i$ -ta przyspieszenia w zmiennych Eulera wyraża się następująco:

$$\frac{dv_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i. \quad (2.48)$$

W zapisie wektorowym wzór (2.48) przedstawia się następująco:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.49)$$

Gradient z pola prędkości  $\mathbf{v} = (v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3))$  jest tensorem i wyraża się w postaci dziewięcioelementowej macierzy:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Tensor  $\nabla \mathbf{v}$  odgrywał ważną rolę w opisie deformacji elementu objętości płynu i naprężeń występujących w płynie.

#### 2.2.4. Pochodna jacobianu

W dalszych obliczeniach niezwykle pożyteczny będzie wzór Eulera na pochodną jacobianu względem czasu. Sama wartość jacobianu  $J(\boldsymbol{\alpha}, t) = \det |\nabla \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)|$  (wzór (2.3)) wyraża względną zmianę objętości nazywaną dylatacją [55], [64]. Przypomnijmy z analizy matematycznej wzór na zamianę zmiennych w całce objętościowej [31], [56], [63]:

Niech  $\phi$  będzie dowolnym polem skalarnym w zmiennych materialnych na zbiorze  $B_t$  i  $\Omega_t \in B_t$  oraz  $\Omega_t = \Phi(\Omega_0, t)$ . Wtedy zachodzi równość:

$$\int_{\Omega_t} \phi(\mathbf{x}, t) dv_x = \int_{\Omega_0} \phi(\boldsymbol{\alpha}, t) |J| dv_\alpha. \quad (2.51)$$

Oznaczmy kulę o promieniu  $\varepsilon$  w zbiorze  $\Omega_t$  jako  $\Omega_{\varepsilon, t}$ , która jest obrazem kuli  $\Omega_{\varepsilon, 0}$  znajdującej się w chwili początkowej w punkcie  $\boldsymbol{\alpha}_0$   $\Omega_{\varepsilon, t} = \Phi(\Omega_{\varepsilon, 0}, t)$ . Przyjmując, że jacobian  $J(\boldsymbol{\alpha}, t)$  jest funkcją różniczkowalną, można go rozwinąć w otoczeniu punktu  $\boldsymbol{\alpha}_0$  w szereg Taylora:

$$J(\boldsymbol{\alpha}, t) = J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) + 0(\varepsilon). \quad (2.52)$$

Na mocy wzoru (2.51) objętość kuli  $\Omega_{\varepsilon, t}$  wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega_{\varepsilon, t}) &= \int_{\Omega_{\varepsilon, t}} dv_x = \int_{\Omega_{\varepsilon, 0}} |J| dv_\alpha = \\ &= \int_{\Omega_{\varepsilon, 0}} |J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) + 0(\varepsilon)| dv_\alpha = (J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) + 0(\varepsilon)) \text{vol}(\Omega_{\varepsilon, 0}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dzieląc stronami we wzorze (2.52) przez  $\text{vol}(\Omega_{\varepsilon, 0})$  i przechodząc do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , otrzymujemy:

$$J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\Omega_{\varepsilon, t})}{\text{vol}(\Omega_{\varepsilon, 0})}. \quad (2.54)$$

Wartość jacobianu  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}_0, t)$  jest więc ilorazem objętości  $\text{vol}(\Omega_{\varepsilon, t})$  zdeformowanej pod działaniem przepływu  $\Phi_t$  do objętości początkowej niezdeformowanej  $\text{vol}(\Omega_{\varepsilon, 0})$  w punkcie  $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \Omega_0$ . Gdy  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}_0, t) > 1$ , wówczas objętość materialna otoczenia  $\text{vol}(\Omega_{\varepsilon, t})$  powiększa się, co oznacza, że zachodzi rozciąganie materiału. Jeżeli natomiast  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, t) < 1$ , to materiał podlega kompresji. Gdy  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}_0, t) = 1$ , to objętość materialna w pobliżu punktu  $\boldsymbol{\alpha}_0$  będzie zachowana. Może on ulegać rozciąganiu w jednym kierunku i podlegać kompresji w innym, ale jego całkowita objętość nie ulega zmianie.

Udowodnimy teraz wzór Eulera na różniczkowanie jacobianu względem czasu [58], [62].

**Lemat 2.1.**

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} = J(\boldsymbol{\alpha}, t) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.55)$$

**Dowód:** Dowód zostanie przedstawiony dla ruchu dwuwymiarowego. Obliczenia przeprowadzone w dowodzie można przenieść na przepływ trójwymiarowy.

Niech  $(x_1, x_2) = (\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, t), \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, t))$ . Z definicji pochodnej mamy:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\boldsymbol{\alpha}, t+h) - J(\boldsymbol{\alpha}, t)}{h}. \quad (2.56)$$

Dla zachowania przejrzystości i zwartości zapisu argument  $\boldsymbol{\alpha}$  będziemy pomijać. Jakobian  $J(t+h)$  przyjmuje postać:

$$J(t+h) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t+h)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_1(t+h)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \Phi_2(t+h)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t+h)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix}. \quad (2.57)$$

Funkcje  $\frac{\partial \Phi_i(t+h)}{\partial \alpha_j}$  można rozwinąć w szereg Taylora:

$$\frac{\partial \Phi_i(t+h)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \Phi_i(t)}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 \Phi_i(t)}{\partial \alpha_j \partial t} h + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.58)$$

Wstawiając (2.58) do wyrażenia (2.57), otrzymamy:

$$\begin{aligned} J(t+h) &= \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1} + h \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) & \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2} + h \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} + h \frac{\partial^2 \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} + h \frac{\partial^2 \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Skorzystamy teraz z tego, że wyznacznik jest funkcją wieloliniową swoich wierszy. Niech  $w_1$  i  $w_2$  oznaczają pierwszy i drugi wiersz macierzy  $\mathbf{W}$ , której wyznacznik oznaczmy  $\det(\mathbf{W}) = \det(w_1, w_2)$ , a  $a_1$  i  $a_2$  pierwszy i drugi wiersz macierzy  $\mathbf{A}$  oraz  $\det(\mathbf{A}) = \det(a_1, a_2)$ . Wieloliniowość oznacza (co można sprawdzić za pomocą rachunku bezpośredniego), że:

$$\det(\mathbf{W} + h\mathbf{A}) = \det(w_1 + ha_1, w_2 + ha_2) = \det(w_1, w_2) + h(\det(a_1, w_2) + \det(w_1, a_2)) + h^2 \det(a_1, a_2). \quad (2.60)$$

Na mocy wzoru (2.60) wyrażenie (2.59) (pominięto symbol  $\mathcal{O}(h^2)$ ) można przekształcić do postaci:

$$J(t+h) = J + h \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial^2 \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \end{vmatrix} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.61)$$

Dzięki temu, że można zmienić kolejność różniczkowania w wyrażeniu  $\frac{\partial^2 \Phi_i(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_j \partial t}$  oraz że  $v_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ , wyrażenie  $\frac{\partial^2 \Phi_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j \partial t}$  można przekształcić następująco:

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j \partial t} = \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j}. \quad (2.62)$$

Aby uprościć nieco zapis, będziemy używać oznaczeń  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$  oraz  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_j} = \Phi_{i,j}$ , ( $x_i = \Phi_i(\alpha_1, \alpha_2)$ ). Z użyciem zapisu indeksowego wyrażenie (2.62) przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j \partial t} = v_{i,1} \Phi_{1,j} + v_{i,2} \Phi_{2,j}. \quad (2.63)$$

Wykorzystując wzór (2.63), a następnie wzór (2.60), pierwszy wyznacznik po prawej stronie wzoru (2.61) można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{1,1} \Phi_{1,1} + v_{1,2} \Phi_{1,2} & v_{1,1} \Phi_{1,2} + v_{1,2} \Phi_{2,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{vmatrix} = \\ & = v_{1,1} \begin{vmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{vmatrix} + v_{1,2} \begin{vmatrix} \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{vmatrix} = v_{1,1} J. \end{aligned}$$

Powtarzając powyższe obliczenia dla drugiego wyznacznika po prawej stronie wzoru (2.61), otrzymujemy;

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \end{vmatrix} = v_{2,2} J,$$

a ostatecznie

$$J(t+h) = J(t) + hJ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \mathcal{O}(h^2) = J + hJ \operatorname{div} \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\Phi(\alpha,t)} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.64)$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do wzoru (2.56) otrzymujemy tezę lematu (2.55).  $\square$

**Przykład 6.** Ruch zadany jest odwzorowaniem:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(\alpha, t) = \alpha_1 e^{bt}, \\ x_2 &= \Phi_2(\alpha, t) = \alpha_2 e^{bt}, \\ x_3 &= \Phi_3(\alpha, t) = \alpha_3 e^{-2bt}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

1. Obliczyć jacobian deformacji. Rozstrzygnąć, czy ruch będzie zachowywał objętość.
2. Obliczyć prędkość i przyspieszenie w zmiennych Lagrange'a (materialnych) oraz w zmiennych Eulera (przestrzennych).

**Rozwiązanie**

1. Jacobian odwzorowania (wzór (2.3)) ma postać:

$$J = \begin{vmatrix} e^{bt} & 0 & 0 \\ 0 & e^{bt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2bt} \end{vmatrix} = 1. \quad (2.66)$$

Ponieważ  $J = 1 \neq 0$ , to należy przyjąć, że istnieje odwzorowanie odwrotne, a przepływ  $\Phi$  będzie zachowywać objętość. Odwzorowanie odwrotne ma postać:

$$\alpha_1 = x_1 e^{-bt}, \quad \alpha_2 = x_2 e^{-bt}, \quad \alpha_3 = x_3 e^{2bt}. \quad (2.67)$$

2. Pole prędkości w zmiennych Lagrange'a wyraża się jako:

$$\begin{aligned} v_{L_1} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = b\alpha_1 e^{bt}, \\ v_{L_2} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = b\alpha_2 e^{bt}, \\ v_{L_3} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} = -2b\alpha_3 e^{-2bt}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Posługując się odwzorowaniem odwrotnym (2.67), można wyeliminować z wyrażeń (2.68) współrzędne materialne  $\alpha_i$ . Prędkość w zmiennych przestrzennych (Eulera) wyraża się następująco:

$$v_1 = bx_1, \quad v_2 = bx_2, \quad v_3 = -2bx_3. \quad (2.69)$$

Przyspieszenie w zmiennych Lagrange'a wyrażają wzory:

$$a_{L_1} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = b^2 \alpha_1 e^{bt}, \quad a_{L_2} = b^2 \alpha_2 e^{bt}, \quad a_{L_3} = 4b^2 \alpha_3 e^{-2bt}. \quad (2.70)$$

Eliminując z wyrażeń (2.70)  $\alpha_i$  za pomocą odwzorowania odwrotnego (2.67), otrzymujemy przyspieszenie w zmiennych przestrzennych:

$$a_1 = b^2 x_1, \quad a_2 = b^2 x_2, \quad a_3 = 4b^2 x_3. \quad (2.71)$$

Przyspieszenie w zmiennych przestrzennych możemy również wyznaczyć ze wzoru na pochodną substancjalną (2.48):

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \nabla v_1 \cdot \mathbf{v} = b^2 x_1, \quad a_2 = b^2 x_2, \quad a_3 = 4b^2 x_3. \quad (2.72)$$

Jak widać, wzory (2.71) oraz (2.72) są identyczne.

### 2.3. Twierdzenie transportowe

W praktyce często zachodzi konieczność obliczenia pochodnej względem czasu całki z funkcji  $f(\mathbf{x}, t)$  określonej na unoszonej (transportowanej) przez przepływ objętości  $\Omega_t$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) dv_x,$$

gdzie indeks  $x$  w symbolu  $dv_x$  oznacza całkowanie po ruchomej objętości  $\Omega_t$ . Dalej symbol  $dv_\alpha$  będzie oznaczać elementarną objętość w obszarze referencyjnym, niezależnym od czasu.

Przy obliczaniu powyższej pochodnej napotyka się pewne trudności wynikające z faktu, że obszar całkowania dla  $f(\mathbf{x}, t)$  jest zależny od czasu i nie można operacji różniczkowania wprowadzić bezpośrednio pod znak całki. Aby można było przejść z różniczkowaniem pod znak całki, do zmiany zmiennych wykorzystuje się odwzorowanie przepływowo (2.1) i wzór (2.51). Zmiana zmiennych powoduje, że całkowanie odbywa się po obszarze referencyjnym  $\Omega_0$ , niezależnym od czasu.

**Twierdzenie 2.1.** Niech będzie zadane odwzorowanie przepływowo  $\Phi(\alpha, t)$  z polem prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , wtedy:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dv_x = \int_{\Omega(t)} \left( \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_x \quad (2.73)$$

**Dowód:** Dokonamy zamiany zmiennej za pomocą odwzorowania przepływowego  $\Phi$ , a następnie skorzystamy ze wzoru Eulera na pochodną jacobianu (2.54). Mamy więc:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) dv_x &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\Phi(\alpha, t)) J(t, \alpha) dv_\alpha = \\ \int_{\Omega_0} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{v} \right) J + f J \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_\alpha &= \int_{\Omega_t} \left( \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_x. \quad \square \end{aligned} \quad (2.74)$$

Wzór (2.73) można zapisać nieco inaczej. Korzystając z definicji dywergencji i gradientu można sprawdzić, że dla dowolnej funkcji skalarnej  $f$  i wektora  $\mathbf{v}$  zachodzi następująca tożsamość:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = \nabla f \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.75)$$

Tożsamość (2.75) pozwala wyrażenie podcałkowe po prawej stronie wzoru (2.73) przekształcić do postaci:

$$\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{v}).$$

Następnie, wykorzystując twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego, można zapisać twierdzenie transportowe w postaci:

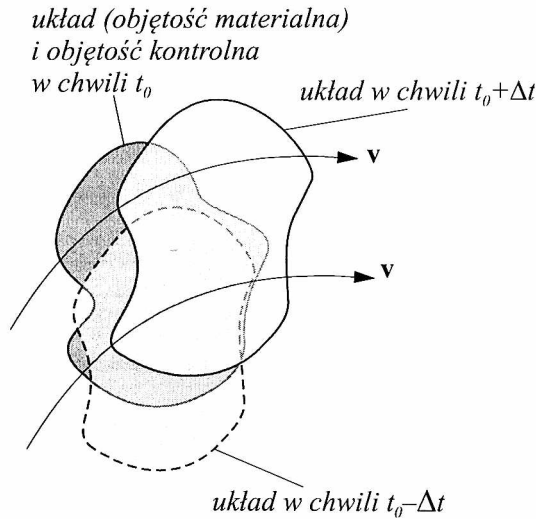
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dv_x = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv_x + \int_S f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.76)$$

Wzór (2.76) nosi nazwę wzoru Leibniza. Jego interpretacja fizyczna jest następująca: szybkość zmiany wielkości  $f$  w objętości  $\Omega(t)$  odpowiada sumie chwilowej szybkości zmiany  $f$  w tej objętości oraz strumienia  $f$  przez powierzchnię  $S$  ograniczającą tą objętość.

Brzeg  $\partial\Omega(t)$ , który zbudowany jest zawsze z tych samych cząstek, dzieli obszar przepływu na wewnętrzny oraz zewnętrzny. Taką wyodrębnioną objętość materialną nazywamy układem zamkniętym (odizolowanym) (rys. 2.10). W zastosowaniach praktycznych wygodnie jest wprowadzić do rozważań ustaloną w czasie objętość kontrolną, która pokrywa się z ruchomym układem zamkniętym tylko w ustalonej chwili  $t_0$ . Prędkość cząstek na powierzchni ograniczającej objętość kontrolną równa

się, w tej wybranej chwili, prędkości cząstek układu zamkniętego. Twierdzenie transportowe dla objętości kontrolnej przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{t_0}} f(\mathbf{x}, t) dv_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{t_0}} f(\mathbf{x}, t) dv_x + \int_S f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.77)$$



**Rys. 2.10:** Położenie układu zamkniętego względem objętości kontrolnej w różnych chwilach  $t_0 - \Delta t$ ,  $t_0$  oraz  $t_0 + \Delta t$ . Objętość układu zamkniętego pokrywa się w chwili  $t_0$  z objętością kontrolną

Jednowymiarowa wersja wzoru Leibnitza (2.76) ma postać [28]:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} f(b, t) - \frac{da}{dt} f(a, t). \quad (2.78)$$

Pochodna  $db/dt = u(b)$ , natomiast  $da/dt = u(a)$ . Równanie (2.78) można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + u(b) f(b, t) - u(a) f(a, t) = \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial(u f)}{\partial x} dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(u f)}{\partial x} \right) dx = \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \left( \frac{df}{dt} + f \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.79)$$



## 2.4. Kinematyka deformacji ośrodka ciągłego

Weźmy pod rozwagę infinitezymalną długość elementu trajektorii cząstki w układzie bieżącym i oznaczmy ją jako  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ . Zmiana składowej  $dx_i$  długości łuku wyrażona względem układu referencyjnego, na mocy reguł różniczkowania funkcji wielu zmiennych [56], [63], jest równa:

$$dx_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j. \quad (2.80)$$

Wektorową postać wyrażenia na zmianę długości elementu łuku  $d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha}, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}, t)$  można przedstawić następująco:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}) = \nabla \Phi \cdot d\boldsymbol{\alpha}, \quad (2.81)$$

gdzie  $\nabla \Phi$  jest gradientem deformacji (macierzą Jacobiego) (wzór (2.3)).

Szybkość zmiany długości  $dx_i$  podczas ruchu wynosi:

$$\frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j \right) = \frac{\partial v_{L_i}}{\partial \alpha_j} d\alpha_j, \quad (2.82)$$

gdzie  $v_{L_i}$  oznacza prędkość cząstki w zmiennych Lagrange'a. We wzorze (2.82) dokonano zamiany kolejności różniczkowania względem czasu i parametru  $\alpha_j$ . W zapisie wektorowym wzór (2.82) będzie miał postać:

$$\frac{d}{dt} d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}) = (\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{v}) d\boldsymbol{\alpha}, \quad (2.83)$$

przy czym  $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{v}$  oznacza gradient wektora prędkości względem współrzędnych materialnych.

Szybkość zmiany różniczkowej długości łuku w zmiennych przestrzennych wyraża się podobnie:

$$\frac{d}{dt} d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad (2.84)$$

przy czym  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$  oznacza gradient wektora prędkości względem współrzędnych przestrzennych. Pamiętajmy, że prędkość  $\mathbf{v}_L(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha})$ .

Ze wzoru (2.84) wynika, że szybkość zmiany różniczkowej długości elementu trajektorii równa jest różnicy prędkości na końcach różniczkowego elementu łuku, to jest  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  i  $\mathbf{x}$ . Szybkość zmiany obejmuje zarówno zmianę kierunku, jak i jego długości.

Dalej dla gradientu względem współrzędnych przestrzennych będziemy opuszczać indeks  $x$ . Tak więc  $\nabla_{\mathbf{v}_x} \equiv \nabla_{\mathbf{v}}$ .

Wiemy, że gradient wektora prędkości jest tensorem (wzór (2.50)), liniowym odwzorowaniem wektorowym. Jego działanie na element  $d\mathbf{x}$  daje różnicę prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}$  (por. rozdz. 1.5.1, działanie gradientu dla funkcji skalarnej).

Każdy tensor rzędu drugiego można przedstawić w sposób jednoznaczny jako sumę dwóch tensorów: symetrycznego i antysymetrycznego:

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}, \quad (2.85)$$

przy czym tensor  $\mathbf{D}$  jest tensorem symetrycznym a  $\mathbf{\Omega}$  antysymetrycznym, które zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} [(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{v})^T], \\ \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2} [(\nabla\mathbf{v}) - (\nabla\mathbf{v})^T]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Szybkość zmiany różniczkowej długości łuku wyrażonej wzorem (2.84) można przedstawić jako:

$$\frac{d}{dt} d\mathbf{x} = (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega})d\mathbf{x}. \quad (2.87)$$

#### 2.4.1. Własności tensora symetrycznego $\mathbf{D}$

Tensor symetryczny  $\mathbf{D}$  ma postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Rozpatrzmy takie działanie tensora  $\mathbf{D}$  na pewien wektor  $\mathbf{w}$ , w którego wyniku otrzymujemy ten sam wektor pomnożony tylko przez liczbę zespoloną  $\lambda$ , to znaczy:

$$\mathbf{D}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}. \quad (2.89)$$

Wektory  $\mathbf{w}$ , które spełniają równanie (2.89), nazywane są wektorami własnymi, a odpowiadające im liczby  $\lambda$  wartościami własnymi. Równanie (2.89) można przepisać następująco:

$$(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = 0. \quad (2.90)$$

Aby układ równań (2.90) miał nietrywialne, różne od zera rozwiązania, to wyznacznik tego układu równań musi być równy zeru:

$$\begin{vmatrix} D_{11} - \lambda & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} - \lambda & D_{23} \\ D_{31} & D_{23} & D_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = \quad (2.91) \\ = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0,$$

gdzie  $I_i$  oznaczają główne, skalarne niezmienniki tensora  $\mathbf{D}$ . Ich wartości nie zależą od przyjętego układu współrzędnych, względem którego obliczane są współrzędne tensora. Wartości własne  $\lambda_i$  są pierwiastkami wielomianu (2.91). Niezmienniki tensora są wyrażane za pomocą współczynników macierzy  $\mathbf{D}$  następująco:

$$I_1 = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{31} & D_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad (2.92) \\ I_3 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Niezmienniki tensora  $\mathbf{D}$  można wyrazić w sposób bardziej zwężły [92]:

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{D}, \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{D})^2 - \text{tr } \mathbf{D}^2], \quad I_3 = \det \mathbf{D}. \quad (2.93)$$

Równanie (2.91) nazywa się wielomianem charakterystycznym. Jego pierwiastki wyznaczają wartości własne zagadnienia (2.89). Należy pamiętać, że wektory własne jako rozwiązania równania (2.90) są wyznaczone przez swoje wartości własne z dokładnością do stałej  $c$ . Do jednej wartości własnej  $\lambda_i$  można przypisać nieskończenie wiele wektorów własnych w postaci  $c\mathbf{w}_i$ .

Symetryczna macierz  $\mathbf{D}$  o współczynnikach rzeczywistych posiada  $n = 3$  różnych pierwiastków rzeczywistych oraz  $n$  liniowo niezależnych, rzeczywistych wektorów własnych. Są one do siebie wzajemnie ortogonalne, to znaczy iloczyn skalarny  $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = 0$  dla  $i \neq j$ . Wektory własne tworzą tak zwane kierunki zasadnicze macierzy  $\mathbf{D}$  (por. rozdz. 2.2.2, przykład 4). Mówimy, że macierz  $\mathbf{D}$  jest diagonalizowalna. Można więc dobrać taką macierz  $\mathbf{S}$ , że:

$$\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

przy czym kolumny macierzy  $\mathbf{S}^{-1}$  stanowią wektory własne macierzy  $\mathbf{D}$ ,  $\lambda_i$  są wartościami własnymi.

Symetryczny tensor  $\mathbf{D}$  odgrywa ważną rolę w opisie deformacji elementu objętościowego płynu, co będzie miało związek z naprężeniami w płynie. Zbadamy teraz, jaki jest związek składowych tensora  $\mathbf{D}$  ze zmianą długości łuku i kątów między dwoma wektorami unoszonymi przez przepływ.

Kwadrat długości różniczkowego elementu łuku równa się  $d\mathbf{x}^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$ . Pochodną po czasie  $d\mathbf{x}^2$  można przedstawić jako:

$$\frac{d}{dt}d\mathbf{x}^2 = 2d\mathbf{x} \cdot \frac{d}{dt}d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}, \quad (2.95)$$

gdzie pochodna jest równa  $\frac{d}{dt}d\mathbf{x} = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{x}$  (patrz wzór (2.84)). Wykorzystując zapis indeksowy i zasadę sumacyjną odnoszącą się do powtarzających się indeksów, wzór (2.95) można zapisać następująco:

$$\frac{d}{dt}d\mathbf{x}^2 = 2dx_i \frac{d}{dt}dx_i = 2dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i D_{ij} dx_j. \quad (2.96)$$

Ze wzoru (2.96) wynika, że prędkość zmiany długości elementy różniczkowego trajektorii zależy od wartości współrzędnych tensora  $\mathbf{D}$ . Dlatego tensor ten nazywany jest tensorem prędkości deformacji lub w skrócie tensorem deformacji.

Aby zbadać, jak zmieniają się kąty wektorów unoszonych przez przepływ  $\Phi$ , wyznaczmy iloczyn skalarny dwóch wektorów jednostkowych  $\mathbf{w}_1(t) \cdot \mathbf{w}_2(t)$ . Najpierw wyznaczmy wzór opisujący, jak transportowany jest wektor przez przepływ  $\Phi$ .

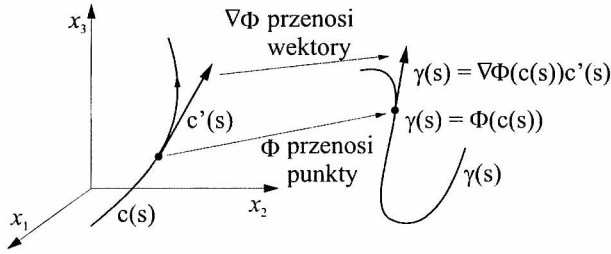
Niech  $\mathbf{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$  będzie krzywą w układzie referencyjnym. Wektor styczny to tej krzywej równa się  $\mathbf{c}'(s) = (c'_1(s), c'_2(s), c'_3(s))$ . Niech teraz  $\gamma(s, t) = \Phi(\mathbf{c}(s), t)$  będzie obrazem krzywej pod działaniem  $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wektor styczny do krzywej  $\gamma$  na mocy różniczkowania funkcji złożonej w zapisie macierzowym wyraża się następująco [63]:

$$\gamma'(s, t) = \nabla\Phi(\mathbf{c}(s), t) \cdot \mathbf{c}'(s). \quad (2.97)$$

Punkty krzywej  $\mathbf{c}(s)$  są przenoszone przez przepływ  $\Phi$ , natomiast wektory styczne do krzywej są odwzorowywane przez gradient przepływu  $\nabla\Phi$  (rys. 2.11). Wzór (2.97) będziemy traktować jako prawo transformacji wektora  $\mathbf{c}'(s) \rightarrow \gamma'(t, s)$  pod wpływem odwzorowania  $\Phi$ .

Niech  $\mathbf{w}_1(t)$  oraz  $\mathbf{w}_2(t)$  będą dwoma wektorami jednostkowymi, które w chwili początkowej  $t = 0$  zaczepione były w punkcie  $\alpha$ . Aby wyznaczyć, jak szybko zmienia się kąt między wektorami pod działaniem  $\Phi$ , obliczymy pochodną  $\left. \frac{d}{dt}(\mathbf{w}_1(t) \cdot \mathbf{w}_2(t)) \right|_{t=0}$ . Otrzymujemy:

$$\left. \frac{d}{dt}(\mathbf{w}_1(t) \cdot \mathbf{w}_2(t)) \right|_{t=0} = \left( \frac{d\mathbf{w}_1}{dt} \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1 \cdot \frac{d\mathbf{w}_2}{dt} \right) \Big|_{t=0}. \quad (2.98)$$



**Rys. 2.11:** Punkty krzywej  $\mathbf{c}(s)$  jest przenoszone przez odwzorowanie przepływowo  $\Phi(\mathbf{c}(s), t)$ , natomiast wektor styczny do krzywej  $\mathbf{c}(s)$  w chwili początkowej jest odwzorowywany przez gradient odwzorowania przepływowego  $\nabla\Phi(\mathbf{c}(s), t)$

Pochodną  $\frac{d\mathbf{w}}{dt}$ , korzystając ze wzoru (2.97) i z możliwości zamiany kolejności różniczkowania, można wyrazić następująco:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{d}{dt}(\nabla\Phi)\mathbf{w}(0) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j. \quad (2.99)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}_1}{dt} \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1 \cdot \frac{d\mathbf{w}_2}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_{1j} w_{2i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_{2j} w_{1i} = \\ &= w_{1i} w_{2j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2w_{1i} D_{ij} w_{2j}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

W zapisie wektorowym (2.100) wyraża się następująco:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2) \Big|_{t=0} = 2\mathbf{w}_1^T(t) \cdot \mathbf{D}\mathbf{w}_2(t) \Big|_{t=0}. \quad (2.101)$$

Szybkość zmiany kąta pomiędzy dwoma zależnymi od czasu wektorami wyraża się przez składowe tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ . Jeżeli przyjmiemy, że  $\mathbf{w}_1(0) = \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = \mathbf{e}_j$ , gdzie  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$  są jednostkowymi wektorami bazowymi, to otrzymamy:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = 2D_{ij}. \quad (2.102)$$

Zmiana kąta między wektorami jednostkowym zależy od wartości współrzędnych tensora  $\mathbf{D}$  poza główną przekątną. Natomiast szybkość zmiany długości wektora  $\mathbf{e}_i$  wyraża się wzorem bez konwencji sumacyjnej indeksów:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = \frac{d}{dt}|\mathbf{e}_i|^2 = 2D_{ii}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.103)$$

czyli szybkość zmiany długości wektora jednostkowego równa się podwojonej wartości elementu macierzy  $\mathbf{D}$  na głównej przekątnej. Suma równa się wartości współrzędnych diagonalnych tensora prędkości deformacji:

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.104)$$

Jak już wspomniano, wektory własne symetrycznej macierzy  $\mathbf{D}$  są liniowo niezależne i wzajemnie ortogonalne. W lokalnym układzie kartezjańskim, którego osie pokrywają się z kierunkami zasadniczymi macierzy (kierunkami wektorów własnych), macierz  $D$  ma postać diagonalną i w tym układzie deformacja obszaru odbywa się tylko przez wydłużenie lub skrócenie (kontrakcję) obszaru wzdłuż kierunków głównych.

#### 2.4.2. Własności tensora antysymetrycznego

Macierz tensora antysymetrycznego  $\Omega$  ma postać:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.105)$$

Z równania (2.105) można wysnuć wniosek, że antysymetryczny tensor posiada, z dokładnością do znaku, tylko trzy różne wartości. Działanie tego tensora na dowolny wektor (w naszym przypadku  $d\mathbf{x}$ ) można zastąpić iloczynem wektorowym przez pewien wektor  $\mathbf{t}^A$ , tak zwany dualny. Tak więc:

$$\Omega d\mathbf{x} = \mathbf{t}^A \times d\mathbf{x} \quad (2.106)$$

Składowe wektora  $\mathbf{t}^A$  wyraża się za pomocą elementów macierzy tensora  $\Omega$ . Wykorzystując własności tensora antysymetrycznego:

$$\Omega_{i,j} = \Omega_{j,i}$$

oraz uwzględniając fakt, że:

$$\Omega_{ij} = e_i \cdot \Omega e_j = e_i \cdot (\mathbf{t}^A \times e_j) = \mathbf{t}^A \cdot (e_j \times e_i) = t_k^A,$$

można sprawdzić, że składowe wektora  $\mathbf{t}^A$  można wyrazić za pomocą elementów macierzy tensora  $\Omega$  następująco:

$$\begin{aligned} t_1^A &= \Omega_{3,2} = -\Omega_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\ t_2^A &= \Omega_{1,3} = -\Omega_{3,1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \\ t_3^A &= \Omega_{2,1} = -\Omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Z wyrażen na składowe wektora dualnego (2.107) wynika, że wektor dualny równa się  $\frac{1}{2}$  wektora rotacji  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$ .

Tak więc wyrażenie  $\Omega dx$  można interpretować jako sztywny obrót cząstki wokół chwilowej osi obrotu, którą wyznacza kierunek wektora  $\frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$ . Precyzując pojęcie obrotu bryły sztywnej, przyjmujemy następującą definicję:

**Definicja 2.5.** *Cząstki wypełniające pewną objętość  $\Omega_t$  będą poruszały się jako ciało stałe, gdy dla dowolnych dwóch cząstek  $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$  oraz  $\mathbf{x}' = \Phi(\boldsymbol{\alpha}', t)$  będzie zachodzić:*

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = |\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t) - \Phi(\boldsymbol{\alpha}', t)|^2 = 0. \quad (2.108)$$

Udowodnimy lemat [92]:

**Lemat 2.2.** *Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby pole prędkości  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_t$  odpowiadało ruchowi ciała stałego, w każdej chwili  $t$  musi zachodzić warunek:*

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (2.109)$$

**Dowód:** Wykonując działania we wzorze (2.108) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)).$$

Powyższa definicja ruchu ciała sztywnego pozwala na użyteczne przedstawienie pola prędkości obracającego się ciała sztywnego. Wyrażone jest w poniższym lemacie, którego dowód pomijamy [92].  $\square$

**Lemat 2.3.** *Warunek (2.109) jest spełniony dla każdego  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega_t$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor stały  $\mathbf{b}$  i antysymetryczna macierz  $\Omega_A$  taka, że prędkość punktu  $\mathbf{x} \in \Omega_t$  wyraża się jako:*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Omega_A \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad (2.110)$$

gdzie

$$\Omega_A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{A_3} & \omega_{A_2} \\ \omega_{A_3} & 0 & -\omega_{A_1} \\ -\omega_{A_2} & \omega_{A_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

co jest równoważne wyrażeniu:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \omega_A \times \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.112)$$

gdzie  $\omega_A$  jest wektorem o składowych  $(\omega_{A_1}, \omega_{A_2}, \omega_{A_3})$ .

Powyższe rozważania można zamknąć w twierdzeniu Helmholtza [33], [45]:

**Twierdzenie 2.2.** Niech pole wektorowe  $v$  będzie dwukrotnie różniczkowalne w obszarze  $\Omega$ . Jeżeli  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  oraz  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , to pole prędkości w punkcie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$  możemy przedstawić z dokładnością do  $\mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2)$  jako:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{h} + \frac{1}{2} \omega(\mathbf{x}_0) \times \mathbf{h} + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2). \quad (2.113)$$

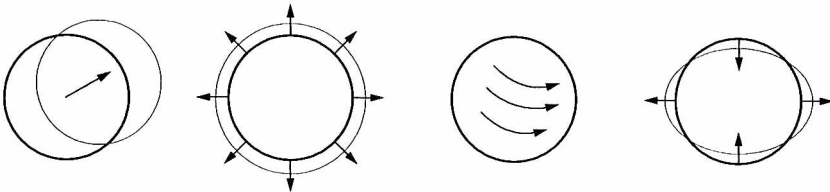
**Dowód:** Lokalną zmianę prędkości można wyrazić, rozwijając  $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{h}, t)$  w szereg Taylora względem ustalonego punktu  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}, t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) + \nabla \mathbf{v}|_{(\mathbf{x}_0, t_0)} \mathbf{h} + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2), \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.114)$$

Macierz gradientu prędkości można rozłożyć na część symetryczną  $\mathbf{D}$  oraz antysymetryczną  $\Omega$ ,  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \Omega$ , a działanie części antysymetrycznej sprowadzić do iloczynu wektorowego  $\Omega \mathbf{h} = (1/2)\omega \times \mathbf{h}$ . Stąd otrzymujemy tezę twierdzenia (2.113).  $\square$

Wzór (2.113) można interpretować fizycznie następująco: Mówimy, że prędkość elementu płynu w niewielkiej odległości od ustalonego  $\mathbf{x}_0$  składa się z prędkości sztywnego przesunięcia  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ , sztywnego obrotu  $\frac{1}{2}\omega(\mathbf{x}_0) \times \mathbf{h}$  oraz deformacji  $\mathbf{D}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$ . Deformację można rozłożyć na rozciąganie lub ściskanie wzdłuż kierunków własnych macierz  $\mathbf{D}$  z zachowaniem kątów (deformacja objętościowa) oraz ścinanie (deformacja postaciowa). Taki rozkład deformacji możliwy jest ze względu na to, że tensor szybkości deformacji  $\mathbf{D}$  można rozłożyć na sumę zachowującą kąty oraz zachowującą objętość:

$$\mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v} \mathbf{I} + (\mathbf{D} - \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I}. \quad (2.115)$$



**Rys. 2.12:** Prędkość w sąsiednim punkcie  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  można rozłożyć na prędkość postępową, deformację objętościową (zachowującą kąty), obrót i deformację postaciową (zachowującą objętość, ale zmieniającą kąty)



Pierwszy człon wzoru (2.115) zachowuje kąty ( $D_{ij} = 0$  gdy  $i \neq j$ ). Ślad macierzy drugiego członu we wzorze (2.115) jest równy zero, więc człon ten zachowuje objętość, ale zmienia kąty (rys. 2.12).

## 2.5. Zadania kontrolne

### Zadanie 1

Zadany jest ruch  $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(\boldsymbol{\alpha}, t) = \alpha_1 e^t + \alpha_3, \\ x_2 &= \Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, t) = \alpha_2, \\ x_3 &= \Phi_3(\boldsymbol{\alpha}, t) = \alpha_3 - t\alpha_1. \end{aligned} \quad (2.116)$$

1. Przedstawić równania opisujące ruch w postaci macierzowej  $\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$ . Wyznaczyć jacobian odwzorowania.
2. Pokazać, że odwzorowanie odwrotne  $\boldsymbol{\alpha} = \Phi^{-1}(\mathbf{x})$  zadane jest następującymi wzorami:

$$\alpha_1 = \frac{x_1 - x_3}{t + e^t}, \quad \alpha_2 = x_2, \quad \alpha_3 = \frac{tx_1 + e^t x_3}{t + e^t}. \quad (2.117)$$

3. Sprawdzić, że  $\Phi(\Phi^{-1}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{x}$ .
4. Wyznaczyć pole prędkości w zmiennych Lagrange'a  $\mathbf{v}_L(\boldsymbol{\alpha}, t)$  oraz pole prędkości w zmiennych Eulera  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

### Zadanie 2

Niech w przestrzeni  $\mathbb{E}^3$  zadane będą dwa pola skalarne  $\rho(\boldsymbol{\alpha}, t)$  oraz  $T(\mathbf{x}, t)$ , które określone są w zmiennych Lagrange'a i przestrzennych za pomocą wzorów:

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 + t, \quad T(\mathbf{x}, t) = x_1 + t. \quad (2.118)$$

Korzystając z przepływu  $\Phi$  podanego w zadaniu 1:

1. Wyznaczyć przestrzenny opis pola  $\rho(\mathbf{x}, t)$ .
2. Wyznaczyć opis pola w zmiennych materialnych dla pola  $T(\boldsymbol{\alpha}, t)$ .
3. Wyznaczyć pochodną substancjalną pola  $T(\mathbf{x}, t)$ .

### Zadanie 3

Dany jest tensor rzędu drugiego o następującej macierzy współczynników:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Obliczyć wartości własne i kierunki zasadnicze (wektory własne) dla tego tensora.
2. Obliczyć wartości skalarne niezmienników  $I_1$ ,  $I_2$  oraz  $I_3$ .
3. Utworzyć macierz  $\mathbf{S}^{-1}$ , której kolumny będą odpowiadały wektorom własnym. Obliczyć macierz  $\mathbf{S}$  (odwrotną do macierz  $\mathbf{S}^{-1}$ ), a następnie sprawdzić, czy iloczyn  $\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$  jest macierzą diagonalną, której elementy są wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{D}$ .

## Rozdział 3

# Zasada zachowania masy i pędu dla ośrodka ciągłego

### 3.1. Zasada zachowania masy

Prawo zachowania masy jest jednym z najbardziej fundamentalnych praw fizyki. Najpierw sformułujemy zasadę zachowania masy w postaci aksjomatu fizycznego, a następnie wyprowadzimy równoważne formy prawa zachowania masy w formie równań różniczkowych, a także w formie zapisanej dla objętości kontrolnej.

Masę zawartą w objętości  $\Omega(t)$  poruszającą się wraz z płynem, a więc taką, której ruch zadany jest odwzorowaniem przepływowym  $\Phi(\alpha, t)$ , można wyrazić za pomocą gęstości płynu następująco:

$$m = \int_{\Omega(t)} \rho dv_x. \quad (3.1)$$

**Definicja 3.1.** Niech gęstość cieczy w obszarze  $\Omega(t)$  będzie opisywana dodatnią funkcją  $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega(t)$  i niech wektorowe pole prędkości  $\mathbf{v}$  będzie związane z odwzorowaniem przepływowym  $\Phi(\alpha, t)$ . Mówimy, że pole prędkości  $\mathbf{v}$  i gęstość  $\rho(\mathbf{x}, t)$  spełniają zasadę zachowania masy, jeżeli:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho(\mathbf{x}, t) dv_x = 0. \quad (3.2)$$

Udowodnimy następujące twierdzenie [41]:

**Twierdzenie 3.1.** Zasada zachowania masy jest spełniona dla pola prędkości  $\mathbf{v}$  i gęstości cieczy  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , gdy zachodzą następujące równoważne związki:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t_0)} \rho dv_x = - \int_{S(t_0)} \rho \mathbf{v} dS. \quad (3.5)$$

**Dowód:** W dowodzie wykorzystamy twierdzenie transportowe (rodz. 2.3). Przyjmując w równaniu (2.73)  $f(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv_x &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} \rho(\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)) J(t, \boldsymbol{\alpha}) dv_\alpha = \\ &= \int_{\Omega(0)} \left( \frac{d\rho}{dt} J(t, \boldsymbol{\alpha}) + \rho J(t, \boldsymbol{\alpha}) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_\alpha = \\ &= \int_{\Omega(t)} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_x = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ponieważ powyższa równość zachodzi dla dowolnego podobszaru  $\Omega' \in \Omega$ , wyrażenie pod całką, na mocy lematu Duboisa–Reymonda (patrz lemat 3.1), jest tożsamościowo równe zero. Jeżeli ten warunek jest spełniony, otrzymujemy równanie (3.3) powyższego twierdzenia. Równanie (3.4) wynika z tożsamości:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (3.7)$$

która pozwala zapisać pochodną materialną jako:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}). \quad (3.8)$$

Równanie (3.5) wynika z twierdzenia transportowego zapisanego dla objętości kontrolnej (2.77) (rozdz. 2.3).  $\square$

Przytoczymy lemat Dubisa–Reymonda [58]:

**Lemat 3.1.** *Jeżeli dla funkcji ciągłej  $f(x_1, x_2, x_3)$  i każdego podobszaru  $\Omega' \in \Omega$  zachodzi:*

$$\int_{\Omega'} f(x_1, x_2, x_3) dv_x = 0, \quad (3.9)$$

to  $f(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$  dla  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ .

**Dowód (a contrario):** Załóżmy, że funkcja  $f(\mathbf{x})$  nie jest tożsamościowo równa zero, a zachodzi wzór (3.9). Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła i różna od zera na pewnym otoczeniu pewnego punktu  $\mathbf{x}_0$ , to możemy przyjąć, że na pewnym podzbiórze tego otoczenia jest dodatnia. Całkując po tym otoczeniu, otrzymamy całkę różną od zera, ponieważ  $f > 0$ . Przeczy to przyjętej tezie, że na każdym podobszarze całka powinna być równa zero. Stąd  $f \equiv 0$ .  $\square$

Udowodnimy teraz przydatny w zastosowaniach wzór, w którym istotną rolę odgrywa równanie ciągłości.

**Twierdzenie 3.2.** Niech  $f$  będzie dowolną funkcją rzeczywistą a  $\rho$  gęstością płynu. Ponadto niech  $\mathbf{v}$  będzie polem wektorowym z odwzorowaniem przepływowym  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ . Jeżeli  $\rho$  i  $\mathbf{v}$  spełniają zasadę zachowania masy, wtedy prawdziwe jest równanie:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho f dv_x = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{df}{dt} dv_x. \quad (3.10)$$

**Dowód:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho f dv_x &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} (\rho f) J dv_\alpha = \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} (\rho f J) dv_\alpha = \\ &= \int_{\Omega(0)} \left( \frac{d}{dt} (\rho f) J + \rho f \frac{dJ}{dt} \right) dv_\alpha = \int_{\Omega(0)} \left( \frac{d}{dt} (\rho f) J + \rho f J \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_\alpha = \\ &= \int_{\Omega(0)} \left( \frac{d\rho}{dt} f + \rho f \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \frac{df}{dt} \right) J dv_\alpha = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{df}{dt} dv_x. \quad \square \end{aligned}$$

Z twierdzenia wynika, że jeżeli różniczkujemy całkę, w której funkcja podcałkowa składa się z iloczynu dowolnej funkcji  $f$  i gęstości płynu  $\rho$ , to całka ta równa się całce z iloczynu pochodnej po czasie z funkcji  $f$  oraz gęstości płynu  $\rho$ . Różniczkowanie wyrażenia podcałkowego  $f\rho$  odnosi się tylko do funkcji  $f$ .

### 3.1.1. Równanie ciągłości w zmiennych Lagrange'a

Prawo zachowania masy w zmiennych Lagrange'a możemy zapisać jako:

$$\int_{\Omega(0)} \rho(\boldsymbol{\alpha}, 0) dv_\alpha = \int_{\Omega(t)} \rho(\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t), t) dv_x. \quad (3.11)$$

Dokonując zamiany zmiennej za pomocą odwzorowania przepływowego  $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ , w całce po prawej stronie wzoru (3.11) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega(0)} \rho(\boldsymbol{\alpha}, 0) dv_\alpha = \int_{\Omega(0)} \rho(\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t), t) J(\boldsymbol{\alpha}, t) dv_\alpha. \quad (3.12)$$

Przenosząc całki na jedną stronę równania, na mocy lematu Dubois'a–Reymonda otrzymujemy:

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \rho(\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t), t) J(\boldsymbol{\alpha}, t). \quad (3.13)$$

Równanie (3.13) jest równaniem ciągłości w zmiennych Lagrange'a.

### 3.1.2. Przepływ nieściśliwy

Objętość obszaru  $\Omega(t)$  unoszonego odwzorowaniem przepływowym  $\Phi$  wyraża się wzorem:

$$|\Omega(t)| = \int_{\Omega(t)} 1 dv_x. \quad (3.14)$$

W czasie ruchu objętość  $\Omega(t)$  może pozostawać stała, podlegać kompresji lub ekspansji. Jeżeli w transportowym twierdzeniu Reynoldsa położymy  $f \equiv 1$ , to otrzymamy:

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \mathbf{v} dv_x. \quad (3.15)$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej do prawej strony równania (3.15) dla wybranej, ustalonej chwili  $t = t_0$ , otrzymujemy:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}|_{t_0} = \frac{1}{|\Omega(t_0)|} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (3.16)$$

Dywergencja z pola prędkości w dowolnej chwili  $t$  wyraża względną szybkość zmiany objętości (por. rozdz. 1). Przyjmuje się następującą definicję ruchu nieściśliwego:

**Definicja 3.2.** *Przepływ zadany odwzorowaniem przepływowym  $\Phi$  nazywamy nieściśliwym, jeżeli:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dv_x = 0, \quad (3.17)$$

gdzie  $\Omega(t) = \Phi(\Omega(0))$ .

Powyższe rozważania z tego podpunktu i interpretację jakobianu (rozd. 2.2.4) można zamknąć następującym twierdzeniem:

**Twierdzenie 3.3.** *Przepływ zadany odwzorowaniem  $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$  jest nieściśliwym, wtedy i tylko wtedy, jeżeli:*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{lub} \quad (3.18)$$

$$J = 1 \quad \text{lub} \quad (3.19)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (3.20)$$

Należy zwrócić uwagę, że nieściśliwość przepływu nie oznacza, że gęstość płynu jest stała. Należy też podkreślić, że gęstość płynu poprzez prawo zachowania masy jest nierozzerwalnie związana z polem prędkości. Jeżeli znana jest gęstość płynu w postaci funkcji  $\rho(x, y, z)$ , to nakłada to ograniczenia na pole prędkości. Jeżeli założy się dodatkowo, że przepływ jest nieściśliwy, to pozwala to na wyznaczenie pola prędkości.

**Przykład 7.** Załóżmy, że znany jest rozkład gęstości  $\rho(x, y) = kxy$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Należy wyznaczyć pole prędkości  $\mathbf{v} = (u, v)$ , jeżeli wiadomo, że przepływ jest nieściśliwy a dla  $y = 1$ ,  $u(x, 1) = \sin(x)$ .

**Rozwiązanie**

Z równania  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  mamy:

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = uky + vkx = 0. \quad (*)$$

Jedną ze składowych prędkości można więc wyrazić za pomocą drugiej. Na przykład:

$$v = -\frac{y}{x}u. \quad (**)$$

Dla przepływu nieściśliwego zachodzi również  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ . Po uwzględnieniu równania (\*\*) otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}u. \quad (***)$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego. Sprowadzimy to równanie do postaci równania różniczkowego zwyczajnego, wykorzystując metodę charakterystyk.

Lewą stronę powyższego równania można zapisać jako pochodną kierunkową wzdłuż kierunku  $\mathbf{s} = (1, -\frac{y}{x})$ :

$$\nabla u \cdot (1, -y/x) = \frac{1}{x}u.$$

Krzywe styczne do pola kierunków  $\mathbf{s} = 1\mathbf{e}_1 - \frac{y}{x}\mathbf{e}_2$  nazywa się charakterystykami bazowymi rozpatrywanego przez nas równania różniczkowego cząstkowego. Równanie różniczkowe tej rodziny krzywych ma postać:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\frac{y}{x}}.$$

Rozwiązując powyższe równanie charakterystyczne otrzymujemy rodzinę charakterystyk:

$$xy = C.$$

Wzdłuż tych charakterystyk funkcja  $u$  zmienia się tak, jak to określa prawa strona równania (\*\*\*). Dokonamy zamiany zmiennych, wykorzystując równanie charakterystyk:

$$w = xy, \quad z = y,$$

oraz przyjmując, że w nowych zmiennych  $u(x, y) \equiv h(w, z)$ . Należy jednak upewnić się, że zamiana zmiennych jest odwracalna, czyli jakobian odwzorowania  $(x, y) \rightarrow (w, z)$  jest różny od zera:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

W tym przypadku  $J = y \neq 0$ ,  $y > 0$ . Obliczamy teraz wartości pochodnych w nowych zmiennych:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial w} \frac{dw}{dx} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{\partial h}{\partial w} y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial w} \frac{dw}{dy} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dy} = \frac{\partial h}{\partial w} x + \frac{\partial h}{\partial z}.\end{aligned}$$

Po podstawienie do równania (\*) powyższych pochodnych otrzymujemy:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{1}{z} h. \quad (****)$$

Zauważmy, że w równaniu występuje tylko pochodna po jednej zmiennej  $z$ . W takim przypadku równanie można traktować jako równanie różniczkowe zwyczajne względem tej zmiennej. Dowolną stałą całkowania zastępujemy dowolną funkcją po zmiennej, której pochodna w równaniu nie występuje. Postać dowolnej funkcji wyznaczamy z warunku brzegowego. Rozwiązanie równania (\*\*\*\*) ma postać:

$$h(w, z) = \frac{\varphi(w)}{z},$$

gdzie  $\varphi$  jest dowolną funkcją. Wracając do zmiennych pierwotnych  $x, y$  oraz  $u$ , otrzymujemy rozwiązanie dla składowej  $u$  pola prędkości w postaci:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(xy)}{y}.$$

W przykładzie żąda się, aby  $u(x, 1) = \sin(x)$ , a więc  $u(x, 1) = \varphi(x) = \sin(x)$ . Tak więc rozwiązanie naszego zagadnienia ma postać:

$$u(x, y) = \sin(xy)/y, \quad v(x, y) = -\frac{1}{x} \sin(xy).$$

Pole prędkości dla zadanej gęstości  $\rho$  i narzuconych warunków brzegowych zostało wyznaczone.

**Przykład 8.** Należy wyznaczyć rozkład gęstości w czasie  $\rho(x, t)$  w przypadku, gdy pole prędkości jest jednorodne:  $v(x) = v_0$ . Początkowy rozkład gęstości zadany jest funkcją  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ .

### Rozwiązanie

Jednowymiarowe równanie ciągłości ma postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = 0. \quad (3.21)$$



Równanie (3.21) możemy zapisać jako:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \cdot (1, v_0) = 0.$$

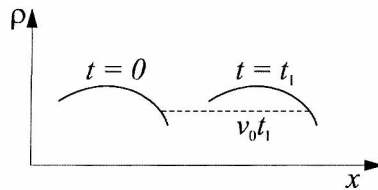
Równanie różniczkowe charakterystyk ma postać:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{v_0}.$$

Charakterystykami są proste  $x - v_0 t = C$ . Na płaszczyźnie  $(t, x)$ , wzdłuż kierunku  $s = (1, v_0)$  gęstość jest stała. Wartość gęstości zależy od wyboru charakterystyki, czyli wartości stałej  $C$ . Rozwiązanie ma postać:

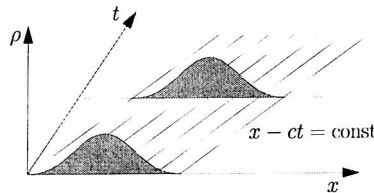
$$\rho(x, t) = \rho_0(x - v_0 t). \quad (3.22)$$

Równanie (3.22) jest równaniem ruchu jednowymiarowej fali poruszającej się w prawo.



**Rys. 3.1:** Zaburzenie gęstości przenosi się w prawo bez zmiany formy

W chwili  $t = 0$  kształt fali określa warunek początkowy  $\rho = \rho_0(x)$ . Dla  $t > 0$  początkowy profil prędkości przesuwa się w prawo o  $v_0 t$  jednostek długości, gdzie  $\frac{dx}{dt} = v_0$  jest prędkością rozchodzenia się zaburzenia wzdłuż charakterystyk.



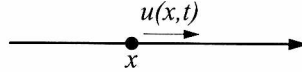
**Rys. 3.2:** Rozwiązanie  $\rho(x - v_0 t)$  przemieszczające się wzdłuż charakterystyk  $x - v_0 t = \text{const}$

W rzeczywistości prędkość rozchodzenia się zaburzenia może zależeć od gęstości  $v_0(\rho)$ . Równanie (3.21) przekształca się w równanie kwaziliniowe. Nieliniowość

może poważnie utrudniać rozwiązanie równania. Aby uzmysłowić sobie, jakie komplikacje w równaniach ruchu niesie nieliniowość rozpatrzmy jednowymiarowe, nielepkie, równanie Burgersa  $\frac{du}{dt} = 0$ . Odegrało i odgrywa ono w historii hydrodynamiki ważną rolę [100]. Zaproponowane przez Burgersa w latach 30. XX wieku jako jeden z modeli nieliniowych do badań nad turbulencją („burgulencją”). Jest ono również podstawowym równaniem do badania nieliniowych efektów rozchodzenia się fal, modelem powstawania fali uderzeniowej, ewolucji rozkładu materii we wszechświecie. Zwróćmy uwagę, że przyspieszenie  $\frac{du}{dt}$  jest jednowymiarową wartością pochodnej substancjalnej prędkości  $u$ . Pełne jednowymiarowe równanie Burgersa ma postać:  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Jest to analogon jednowymiarowego równania ruchu płynu lepkiego bez członu zawierającego ciśnienie. Stały współczynnik  $\nu$  odpowiada lepkości płynu.

### 3.1.3. Równanie Burgersa

Rozważmy jednowymiarowy ruch swobodny cząstki wzdłuż prostej równoległej do osi  $x$  (rys. 3.3) [8]. Prawo ruchu cząstki poruszającej się swobodnie ma postać:  $x = \Phi(\alpha, t) = \alpha + vt$ , gdzie  $v$  oznacza prędkość cząstki. Przyspieszenie cząstki jest równe zeru  $d^2\Phi/dt^2 = 0$ .



Rys. 3.3: Cząstka poruszająca się wzdłuż osi  $x$

Wyraźmy teraz pole przyspieszeń w zmiennych Eulera, pamiętając, że  $d\Phi/dt = u(x(t), t)$ . Mamy:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.23)$$

Jest to jednowymiarowe równanie Burgersa [61]. Zwróćmy uwagę, że nieliniowość, która pojawiła się w równaniu, wynika z zasad różniczkowania funkcji złożonej. Ta nieliniowość równań ruchu jest podstawowym źródłem komplikacji i trudności w rozwiązaniu równań ruchu płynu, o których będziemy mówili w kolejnych rozdziałach.

Rozpatrzmy następujące zagadnienie początkowe [61]:

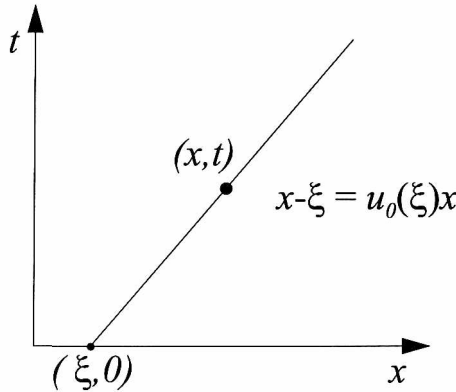
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

Do analizy zagadnienia (3.24) wykorzystamy metodę charakterystyk (rozdz. 3.1.2). Równanie charakterystyk przybiera postać:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t). \quad (3.26)$$

W przeciwieństwie jednak do liniowego równania różniczkowego cząstkowego prawa strona równania (3.26) jest nieznaną. Z równania (3.24) wynika, że wzdłuż krzywej całkowitej równania różniczkowego (3.26) rozwiązanie  $u = \text{const}$ . Można więc stwierdzić, że krzywa charakterystyczna jest linią prostą, ponieważ  $d^2x/dt^2 = du/dt = 0$ . Załóżmy, że rozwiązanie  $u(x, t)$  istnieje w pewnym obszarze płaszczyzny  $x, t$ . Z wybranego punktu  $(x, t)$  można dokonać powrotu wzdłuż charakterystyki do punktu przecięcia się charakterystyki z osią  $x$  (dla  $t = 0$ ) (rys. 3.4).



**Rys. 3.4:** Charakterystyka  $x = u(x, 0)t + \xi = \phi(\xi) + \xi$  równania (3.24)

Niech ten punkt przecięcia z osią  $x$  ma wartość  $\xi$ . Charakterystyki są liniami prostymi, więc ich równia mają postać:

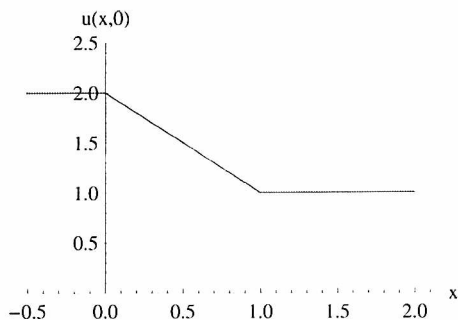
$$x = u(\phi, 0)t + \xi = \phi(\xi) + \xi. \quad (3.27)$$

Rozwiązaniem zagadnienia (3.24) jest równanie:

$$u(x, t) = \phi(\xi) = \phi(x - u(\xi, 0)t), \quad (3.28)$$

gdzie współrzędna  $\xi = \xi(x, t)$  zadana jest niejawnie równaniem (3.27).

Nachylenie charakterystyk we współrzędnych  $x, t$  zależy od  $1/u(x, 0)$ . Prędkość rozchodzenia się zaburzenia  $dx/dt$  wzdłuż charakterystyk określa wartość rozwiązania  $u(x, 0)$ . Konsekwencje tego prześledzimy na przykładzie [60].



Rys. 3.5: Wykres warunku początkowego dla zagadnienia (3.29), (3.30)

**Przykład 9.** Rozpatrzmy następujące zagadnienie początkowe:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.29)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}. \quad (3.30)$$

Ważną cechą warunku początkowego przyjętego w postaci jak na rys. 3.5 jest to, że w przedziale  $[0, 1]$  funkcja jest malejąca i jej pochodna jest ujemna. Będzie to powodowało, że nachylenie charakterystyk wyznaczone  $1/u(\xi, 0)$  będzie wzrastało wzdłuż osi  $x$ .

### Rozwiązanie

$u(x, t) = \phi(\xi)$  zadane jest równaniami (3.27) i (3.28). Jeżeli  $x < 2t$  ( $\xi < 0$ ), to  $u(x, t) = 2$ . Natomiast jeżeli  $x > 2t$  ( $\xi > 1$ ), to  $u(x, t) = 1$ . Dla  $2t < x < t + 1$  ( $\xi \in [0, 1]$ ) równanie charakterystyk (3.27) przyjmuje postać:

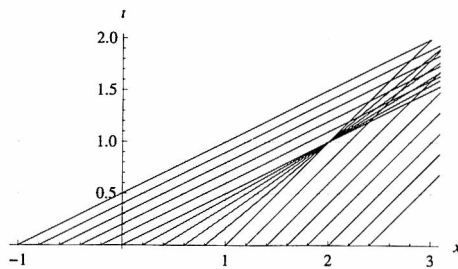
$$x = (2 - \xi)t + \xi. \quad (3.31)$$

W tym przedziale wszystkie charakterystyki przecinają się w jednym punkcie  $(1, 2)$  (rys. 3.6). Ze wzoru (3.31) można otrzymać wyrażenie dla  $\xi$ :

$$\xi = \frac{x - 2t}{1 - t}. \quad (3.32)$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla  $t = 1$  rozwiązanie jest nieograniczone i traci również jednoznaczność. Mówimy, że następuje utrata regularności rozwiązania. Fakt ten nazywa się załamaniem fali lub falą uderzeniową bądź katastrofą gradientową. Rozwiązanie w tym przedziale ma postać:

$$u(x, t) = \phi(\xi) = 2 - \xi = 2 - \frac{x - 2t}{1 - t} = \frac{2 - x}{1 - t}.$$



**Rys. 3.6:** Rodzina charakterystyk dla zagadnienia (3.29), (3.30). Dla  $2t < x < t + 1$  charakterystyki przecinają się w jednym punkcie  $x = 2, t = 1$

Ostateczne rozwiązanie zagadnienia (3.29) ma postać:

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < 2t \\ \frac{2-x}{1-t}, & 2t < x < t+1, \quad t < 1 \\ 1, & x > t+1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Na rysunku 3.7 przedstawiono sekwencję kształtów rozwiązania w różnych chwilach czasu, a na rys. 3.8 powierzchnię rozwiązania  $u(x, t)$  w przedziale  $0 < t < 1$ .

Prześledźmy, jak wzdłuż charakterystyk zmienia się wartość gradientu  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Różniczkując po współrzędnej  $x$  rozwiązanie równania Burgersa  $u(x, t) = \phi(x - ut)$ , otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(1 - t \frac{\partial u}{\partial x}\right) \phi'. \quad (3.34)$$

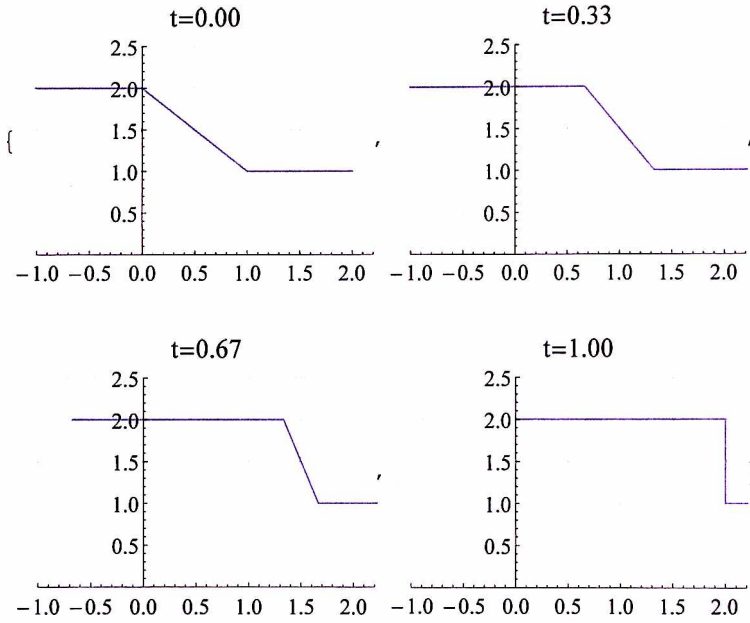
Stąd:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\phi'}{1 + t\phi'}. \quad (3.35)$$

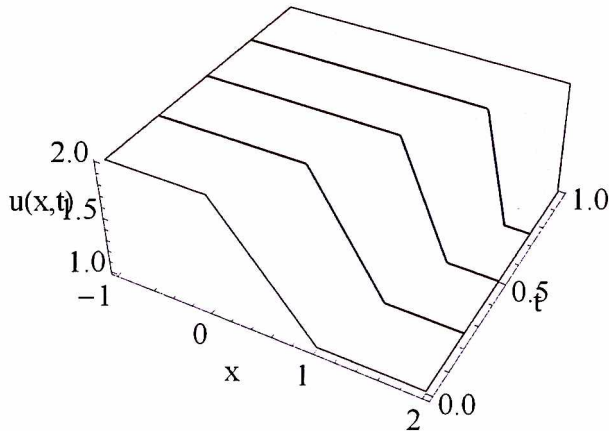
Pochodna  $\frac{\partial u}{\partial x}$  staje się nieskończona, gdy mianownik w równaniu (3.35) przyjmuje wartość równą zero. Dla  $t > 0$  jest to możliwe tylko wtedy gdy  $\phi' < 0$ , a więc gdy  $\phi(x)$  jest funkcją malejącą. Dla  $t_{\min} = -1/(\phi')_{\max}$ ,  $u_x = \infty$ . W takim przypadku mówimy, że zachodzi katastrofa gradientowa. Rozwiązanie traci wówczas również jednoznaczność.

### 3.2. Zasada zachowania pędu

Zajmijmy się dynamiką ruchu ośrodka ciągłego. Wykorzystując zasadę zachowania pędu (drugie prawo Newtona), wyprowadzimy równanie ruchu dla ośrodka



Rys. 3.7: Sekwencja rozwiązań zagadnienia (3.29), (3.30) dla  $t < 1$



Rys. 3.8: Powierzchnia rozwiązania zagadnienia (3.29), (3.30) dla  $t < 1$

ciągłego. Dla kompletności i przejrzystości wykładu przypomnijmy najpierw zasadę zachowania pędu dla układu  $n$  punktów materialnych [7].

### 3.2.1. Zasada zachowania pędu dla układu $n$ punktów materialnych

Niech w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  znajduje się  $n$  punktów materialnych. Położenie punktów opisywane jest wektorem  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , a ich ruch równaniem Newtona:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad (3.36)$$

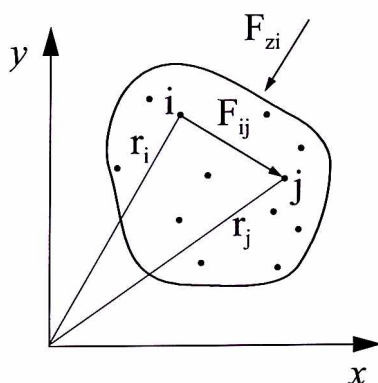
gdzie  $\mathbf{F}_i$  oznacza siłę działającą na  $i$ -tą cząstkę o masie  $m_i$ . Wzór opisujący siłę  $\mathbf{F}$  wyznaczany jest doświadczalnie. Na przykład Newton odkrył prawo oddziaływania grawitacyjnego: dwie masy  $m_i, m_j$  oddziałują na siebie w sposób, który można opisać za pomocą wzoru:

$$\mathbf{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}, \quad (3.37)$$

gdzie  $G$  oznacza stałą grawitacji a  $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ . W układzie  $n$  punktów materialnych siły działające między punktami nazywane są siłami wzajemnego oddziaływania. Działają one wzdłuż prostej łączącej punkty i zależą od odległości między nimi  $\mathbf{F}_{ij} \sim (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ . Dla sił wzajemnego oddziaływania zachodzi  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  (rys. 3.9). Jeżeli siły działające na punkty są tylko siłami wzajemnego oddziaływania, to taki układ punktów nazywa się układem zamkniętym (izolowanym).

Gdy układ cząstek nie jest izolowany, to na  $i$ -tą cząstkę, oprócz sił wzajemnego oddziaływania, działa siła zewnętrzna:  $\mathbf{F}_{zi}$  i wtedy:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{zi}. \quad (3.38)$$



Rys. 3.9: Siła wzajemnego oddziaływania między cząstkami  $i$  oraz  $j$  wraz z siłą zewnętrzną działającą na cząstkę  $i$

**Definicja 3.3.** *Pędem układu  $n$  punktów nazywamy wektor:*

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (3.39)$$

Udowodnimy twierdzenie o zachowaniu pędu:

**Twierdzenie 3.4.** *Prędkość zmiany pędu układu równa się sumie wszystkich sił zewnętrznych działających na punkty układu izolowanego.*

**Dowód:**

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{zi} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{zi}.$$

Suma sił wzajemnego oddziaływania  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{ij} = 0$ , ponieważ  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ .  $\square$

**Wniosek:** Jeżeli siły zewnętrzne działające na układ izolowany są równe zeru, to pęd układu nie ulega zmianie.

### 3.2.2. Prawo zachowania pędu dla ośrodka ciągłego

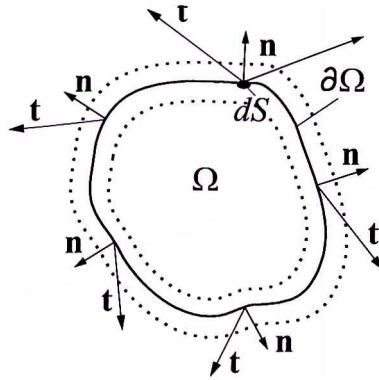
Z rozdziału 3.2.1 wynika, że zmiana pędu wyróżnionej (izolowanej), poruszającej się objętości  $\Omega$  może dokonać się tylko na skutek sił zewnętrznych. W mechanice płynów rozpatruje się dwa rodzaje sił zewnętrznych: dalekozasięgowe, np. siły grawitacyjne  $\mathbf{f} = (0, 0, -g)$ , (nazywane siłami masowymi) oraz bliskozasięgowe (krótkozasięgowe) (nazywane siłami powierzchniowymi), które powstają w wyniku fizycznego kontaktu pomiędzy materiałem zewnętrznym i materiałem znajdującym się we wnętrzu zamkniętej powierzchni.

Aby opisać oddziaływanie sił powierzchniowych, które będą uwzględniały oddziaływanie ośrodka otaczającego na układ izolowany, do rozważań wprowadza się pojęcie wektora naprężeń  $\mathbf{t}$ , który wyraża gęstość siły powierzchniowej przypadającą na jednostkę powierzchni. Siła powierzchniowa jest efektem oddziaływania ośrodka zewnętrznego na ośrodek wewnętrzny. Zorientowanie ośrodka zewnętrznego względem wewnętrznego charakteryzuje jednostkowy wektor normalny do elementu powierzchni rozdziału  $dS$ . Przyjmuje się, że wektor normalny skierowany jest na zewnątrz zamkniętej objętości. Postuluje się, że wektor naprężeń  $\mathbf{t}$  zależy tylko od wektora normalnego  $\mathbf{n}$  oraz położenia  $\mathbf{x}$  i czasu, ale nie zależy od krzywizny brzegu (rys. 3.10).

Siła wypadkowa wynikająca z obłożenia brzegu  $\partial\Omega$  wektorem naprężeń  $\mathbf{t}$  wyraża się wzorem:

$$\mathbf{F}_t = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) dS, \quad (3.40)$$





**Rys. 3.10:** Do brzegu  $\partial\Omega$  przyłożony jest wektor naprężenia  $\mathbf{t}$ , którego wartość zależy od wektora jednostkowego  $\mathbf{n}$  (orientacji elementu  $dS$  brzegu względem ośrodka zewnętrznego), położenia  $\mathbf{x}$  i czasu  $t$

gdzie  $dS$  jest różniczkowym elementem powierzchni. Podobnie wypadkowy moment sił względem wybranego punktu  $\mathbf{c}$  jest określony wzorem:

$$\mathbf{M}_t = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) dS_x. \quad (3.41)$$

Dalej fundamentalne znaczenie w sformułowaniu zasady zachowania pędu będzie miała zasada naprężeń Cauchy'ego z 1927 roku [80].

**Zasada naprężeń Cauchy'ego:** Oddziaływanie ośrodka zewnętrznego na dowolną zamkniętą powierzchnię  $S$  można zastąpić rozkładem na tej powierzchni wektora naprężeń  $\mathbf{t} = ((t_1(x_1, x_2, x_3), t_2(x_1, x_2, x_3), t_3(x_1, x_2, x_3)))$ . Wypadkowa siła i moment sił wektora są równoważne wszystkim rzeczywistym siłom działającym w materialnym ośrodku ciągłym i znajdującym się na zewnątrz powierzchni  $S$ .

W literaturze przedmiotu podkreśla się niezwykle prostotę zasady Cauchy'ego i możliwości, jakie daje [80]. Jej genialność można docenić, oceniając postęp, jaki po jej wprowadzeniu dokonał się w badaniach nad dynamiką ośrodka ciągłego. Zasada Cauchy'ego od razu stała się jedną z podstawowych zasad stosowanych w badaniach ruchu ośrodka ciągłego.

**Definicja 3.4.** Mówimy, że spełniona jest zasada zachowania pędu dla zadanej gęstości  $\rho$ , odwzorowania przepływowego  $\Phi$ , pola prędkości  $\mathbf{v}$ , sił masowych  $\mathbf{f}$  oraz wektora naprężeń  $\mathbf{t}$ , gdy zachodzi równość:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dv_x = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f} dv_x + \int_{S_t} \mathbf{t} dS, \quad (3.42)$$

gdzie  $\Omega_t = \Phi(\Omega_0, t)$ ,  $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ .

### 3.2.3. Zasada lokalnej równowagi naprężeń

Ze względu na to, że pod całką po lewej stronie równania (3.42) występuje gęstość  $\rho$ , równanie (3.42) można zapisać następująco (patrz wzór (3.10)):

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dv_x = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f} dv_x + \int_{S_t} \mathbf{t} dS. \quad (3.43)$$

Zastosujemy teraz do równania (3.43) twierdzenie o wartości średniej, przyjmując, że objętość  $\Omega_t$  jest zależna od wymiaru liniowego  $L$  w potęgze trzeciej  $|\Omega_t| = \lambda_v L^3$  a powierzchnia  $S_t$  w potęgze drugiej  $|S_t| = \lambda_s L^2$ :

$$\lambda_v L^3 \rho^* \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = \lambda_v L^3 \rho^* \mathbf{f}^* + \lambda_s L^2 \mathbf{t}. \quad (3.44)$$

Jeżeli przejdziemy do granicy  $L \rightarrow 0$ , to aby równość (3.44) była spełniona, musi zachodzić zależność:

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \int_{S_t} \mathbf{t} dS = 0. \quad (3.45)$$

Równanie (3.45) nazywa się zasadą lokalnej równowagi naprężeń [58], [80].

Zwróćmy uwagę, że równanie (3.45) jest równaniem wektorowym, a więc zachodzi dla każdej składowej wektora  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ . Zasada ta oznacza, że siły powierzchniowe dla nieskończenie małej objętości będą się wzajemnie równoważyć. Równanie (3.45) posłuży do określenia zależności wektora naprężeń  $\mathbf{t}$  od orientacji różniczkowego elementu powierzchni  $dS$  zadanej wektorem normalnym  $\mathbf{n}$ . Zwykle dokonuje się tego, wybierając szczególne formy obszaru  $\Omega$  i stosując do takiego obszaru zasadę lokalnej równowagi naprężeń (3.45).

Najpierw wybierzemy obszar w kształcie nieskończenie cienkiego prostopadłościanu, w którym róg umieszczony jest w punkcie  $x$ , szerokość i długość ścian ma wymiar  $L$  a głębokość  $\varepsilon L$ ,  $\varepsilon \ll 1$  (rys. 3.11).

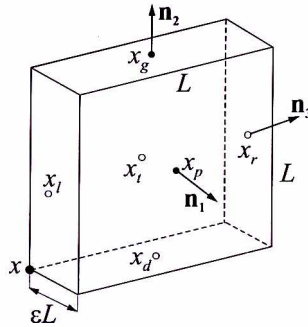
Na mocy równania (3.45) zastosowanego do tego obszaru oraz twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy:

$$\int_{S_t} t_i dS = L^2 [t_i(\mathbf{x}_p, t, \mathbf{n}) + t_i(\mathbf{x}_l, t, -\mathbf{n}) + \varepsilon B_i], \quad (3.46)$$

gdzie  $B_i$  oznacza naprężenia od składowej  $t_i$  na czterech bocznych ścianach o powierzchni  $\varepsilon L^2$ , oznaczonych punktami  $x_g, x_d, x_l, x_r$ :

$$B_i = t_i(\mathbf{x}_g, t, \mathbf{n}_1) + t_i(\mathbf{x}_d, t, -\mathbf{n}_1) + t_i(\mathbf{x}_r, t, \mathbf{n}_3) + t_i(\mathbf{x}_l, t, -\mathbf{n}_3),$$

natomiast indeksy  $p$  i  $t$  odnoszą się do ściany przedniej i tylnej o powierzchni  $L^2$ . Z zasady lokalnej równowagi naprężeń (3.45) oraz z tego, że składowe wektora



**Rys. 3.11:** Prostopadłościan w formie cienkiej płytki o grubości  $\varepsilon$ . Zasada lokalnej równowagi naprężeń zastosowana do takiego obszaru daje  $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n})$

naprężeń  $t_i$  są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi, punkty  $\mathbf{x}_p$  oraz  $\mathbf{x}_i$  dążą do punktu  $\mathbf{x}$ , a  $B_i \rightarrow 0$ , gdy  $L \rightarrow 0$ . Stąd otrzymujemy:

$$t_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) + t_i(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.47)$$

Równanie (3.47) stanowi odpowiednik III zasady dynamiki Newtona, która jest nazywana potocznie zasadą akcji i reakcji:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) \quad (3.48)$$

Jako szczególną postać obszaru wybierzemy czworościan (rys. 3.12). Nachylona ściana czworościanu ma pole równe  $L^2$  i wektor normalny do niej jest równy  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Natomiast ściany boczne są wzajemnie prostopadłe, a ich krawędzie równoległe do osi układu  $\mathbf{e}_i$ . Wektor normalny do ściany  $S_i$  jest równy  $-\mathbf{e}_i$ . Pola ścian bocznych odpowiadają rzutowi ściany nachylonej:

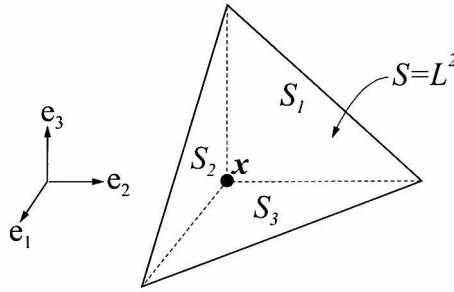
$$S_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = n_i S, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.49)$$

gdzie  $n_i = \cos \theta_i$  a kąt  $\theta_i$  równa się kątowi nachylenia wektora normalnego do osi  $\mathbf{e}_i$ . Siła powierzchniowa pochodząca od  $j$ -tej składowej wektora naprężeń  $t_j$  na powierzchnię  $S_i$  na mocy twierdzenia o wartości średniej jest równa:

$$S_i t_j(\bar{\mathbf{x}}_i, t, -\mathbf{e}_i),$$

gdzie  $\bar{\mathbf{x}}_i$  oznacza punkt leżący na  $i$ -tej ścianie. Stosując zasadę lokalnej równowagi naprężeń (3.45) do czworościanu z rys. 3.12 i przyjmując, że  $S \equiv L^2$ , otrzymujemy:

$$n_1 t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_1) + n_2 t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_2) + n_3 t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_3) + t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = 0. \quad (3.50)$$



Rys. 3.12: Czworościan Cauchy'ego

Ze wzoru (3.48) mamy  $t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i) = -t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_i)$ . Wzór (3.50) można przekształcić do postaci:

$$t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = n_1 t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) + n_2 t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) + n_3 t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3), \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.51)$$

Z wzoru (3.51) wynika, że składowe wektora naprężeń ( $t_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) wyrażają się przez kombinację liniową składowych wektora normalnego  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Po wprowadzeniu oznaczenia:

$$T_{i,j} = t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i), \quad (3.52)$$

wzór (3.51) można przedstawić za pomocą konwencji sumacyjnej jako:

$$t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = n_i T_{i,j}(\mathbf{x}, t), \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.53)$$

lub w postaci wektorowo-tensorowej jako:

$$[t_1, t_2, t_3] = [n_1, n_2, n_3] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}. \quad (3.54)$$

Tak więc wektor naprężenia jako liniowe odwzorowanie wektorowe zadany jest macierzą dziewięciu współczynników, które charakteryzują materiał ośrodka ciągłego:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Macierz  $[\mathbf{T}]$  nazywa się tensorem naprężeń, natomiast jego składowe:  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{33}$  nazywane są naprężeniami normalnymi. Sześć składowych leżących poza główną przekątną:  $T_{12}$ ,  $T_{13}$ ,  $T_{21}$ ,  $T_{23}$ ,  $T_{31}$ ,  $T_{32}$  nazwanych jest naprężeniami ścinającymi. Jednostką naprężeń jest  $\text{N/m}^2$ .

Wektor naprężeń  $\mathbf{t}$  może być przedstawiony jako suma wektorów wzdłuż normalnej  $\mathbf{n}$  i wektora do niego prostopadłego:

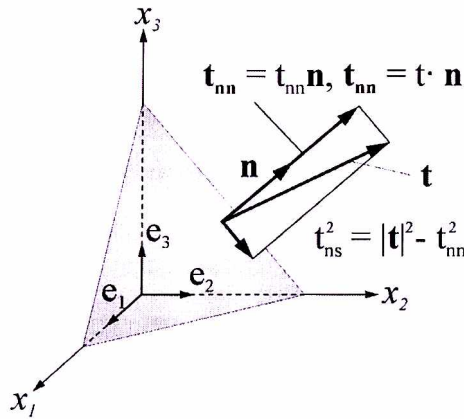
$$\mathbf{t} = t_{nn}\mathbf{n} + t_{ns}\mathbf{s} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{n}). \quad (3.56)$$

Wielkość składowej normalnej wektora  $\mathbf{t}$  do płaszczyzny można wyznaczyć ze wzoru:

$$t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = t_i n_i = n_j T_{ji} n_i, \quad (3.57)$$

a wielkość składowej stycznej ze wzoru (rys. 3.13):

$$t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}. \quad (3.58)$$



Rys. 3.13: Wektor naprężeń rozłożony na składową normalną do nachylonej ściany oraz składową styczną

**Przykład 10.** Składowe tensora  $\mathbf{T}$  zadane są macierzą współczynników:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix}.$$

1. Wyznaczyć wektor naprężeń  $\mathbf{t}(\mathbf{P})$  w kierunku zadanym wektorem normalnym:

$$\mathbf{n} = (1/7)(2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3).$$

2. Wyznaczyć naprężenia w punkcie  $\mathbf{P}$ , jeżeli punkt  $\mathbf{P}$  leży na płaszczyźnie:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2.$$

**Rozwiązanie**

1. Z równania (3.54) otrzymujemy:

$$[t_1, t_2, t_3] = \left[ \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right] \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} = [69, 54, -42].$$

Wektor naprężeń ma postać  $\mathbf{t} = 69\mathbf{e}_1 + 54\mathbf{e}_2 - 42\mathbf{e}_3$ . Naprężenia te występują na płaszczyźnie wyznaczonej wektorem normalnym do niej  $\mathbf{n} = [\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}]$ .

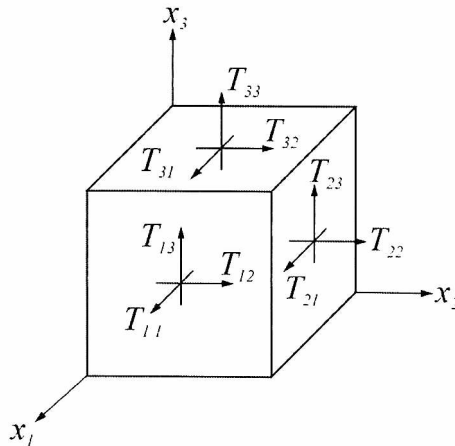
2. Wektor jednostkowy do płaszczyzny  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 = 0$  ma postać  $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f| = (1/3)(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ . Z równania (3.51) otrzymujemy:

$$[t_1, t_2, t_3] = \left[ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right] \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} = [-14, -14, 77].$$

Tym razem wektor naprężeń ma postać  $\mathbf{t} = -14\mathbf{e}_1 - 14\mathbf{e}_2 + 77\mathbf{e}_3$ .

Z przedstawionego przykładu wynika, że naprężenia zależą od nachylenia płaszczyzny przecinającej ośrodek ciągły oraz od współczynników tensora naprężeń.

Dziewięć składowych tensora naprężeń  $T_{ij}$  często jest prezentowanych za pomocą strzałek-wektorów związanych ze ścianami prostopadłościanu (rys. 3.14).

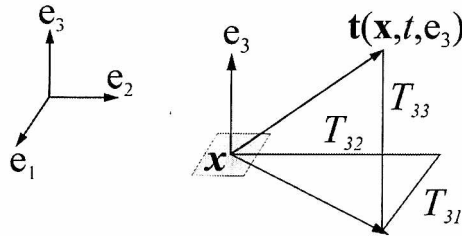


**Rys. 3.14:** Składowe tensora naprężeń w kartezjańskim układzie współrzędnych. Wszystkie składowe tensora naprężeń są dodatnie, ponieważ ich kierunki pokrywają się z kierunkami osi współrzędnych

Należy jednak mieć na uwadze, że prostopadłościan przedstawiony na rys. 3.14 nie jest wypełniony ośrodkiem ciągłym. Jest to tylko pewna konwencja przedsta-

wienia składowych tensora naprężeń. W rzeczywistym ośrodku ciągłym dziewięć składowych tensora odnosi się do pojedynczego punktu  $\mathbf{x}$ .

Na rysunku 3.15 przedstawione są naprężenia na element powierzchni w punkcie  $\mathbf{x}$ , do której wektor normalny równa się  $\mathbf{e}_3$ . Oddziaływanie materialnego ośrodka (zewnątrznego nad elementem powierzchni) w chwili  $t$  na ośrodek wewnętrzny (pod elementem powierzchni) zadane jest wektorem naprężenia  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3)$ . Trzy składowe tego wektora to  $T_{31}$ ,  $T_{32}$ ,  $T_{33}$  [58].



**Rys. 3.15:** Składowe tensora naprężeń dla elementu powierzchni w punkcie  $\mathbf{x}$ , do którego wektor normalny  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ . Składowe wektora naprężeń  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3)$  są równe  $T_{31}$ ,  $T_{32}$  i  $T_{33}$

Aby odnieść właściwe korzyści z równania (3.54), należy zaproponować związek pomiędzy współczynnikami  $T_{ij}$  a zmiennymi charakteryzującymi stan ośrodka ciągłego. W przypadku ośrodka płynnego zmiennymi charakterystycznymi są pole prędkości, pochodne  $\nabla v$  i ciśnienie. Związki pomiędzy składowymi tensora naprężeń a polem prędkości i ciśnienia powinny spełniać pewne aksjomaty racjonalności [27]. Ich konkretna postać określana jest na podstawie obserwacji doświadczalnych. Związki te nazywane są równaniami konstytutywnymi. Po sformułowaniu zasady zachowania momentu pędu okaże się, że aby ta zasada była spełniona, tensor naprężeń musi być symetryczny. Liczbę różnych współczynników macierzy  $[\mathbf{T}]$  będzie więc można zredukować do sześciu.

### 3.2.4. Równania ruchu ośrodka ciągłego

Przekształćmy teraz równanie w formie całkowej wyrażające prawa zachowania pędu (3.43) do równania różniczkowego. Wykorzystując twierdzenia Gaussa oraz to, że  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ , całkę powierzchniową w wyrażeniu (3.43) można przekształcić następująco:

$$\int_S t_j dS = \int_S n_i T_{ij} dS = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dv_x, \quad (3.59)$$

gdzie

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dv_x = \int_{\Omega(t)} \mathbf{div} \mathbf{T}|_j dv_x \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.60)$$

Zasadę zachowania pędu (3.43) można zapisać jako:

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} dv = \int_{\Omega(t)} (\rho \mathbf{f}_j - \mathbf{div} \mathbf{T}|_j) dv \quad \text{dla } j = 1, 2, 3. \quad (3.61)$$

Przenosząc wyrazy w równaniu (3.61) na jedną stronę, na mocy lematu Dubois-Reymonda (lemat 3.1) otrzymujemy równanie ruchu ośrodka ciągłego podane przez Cauchy'ego:

**Twierdzenie 3.5.** *Pierwsze prawo Cauchy'ego:*

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \mathbf{div} \mathbf{T}|_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.62)$$

Należy zapamiętać, że dywergencja z tensora rzędu drugiego  $\mathbf{div} \mathbf{T}$  jest wektorem, którego  $i$ -ta składowa jest równa sumie pochodnych z  $i$ -tej kolumny macierzy  $[\mathbf{T}]$ , czyli

$$\mathbf{div} \mathbf{T}|_i = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k}. \quad (3.63)$$

### 3.3. Prawo zachowania momentu pędu

#### 3.3.1. Zasada zachowania momentu pędu dla układu $n$ punktów materialnych

Przypomnijmy zasadę zachowania momentu pędu dla układu  $n$  punktów materialnych.

**Definicja 3.5.** *Momentem pędu punktu materialnego o masie  $m$  i prędkości  $\dot{\mathbf{r}}$  względem punktu 0 jest wektor:*

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}. \quad (3.64)$$

*Momentem pędu układu punktów materialnych względem punktu 0 jest suma momentów pędu wszystkich punktów układu:*

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}. \quad (3.65)$$

Następujące twierdzenie wyraża zasadę zachowania momentu pędu dla  $n$  punktów materialnych.

**Twierdzenie 3.6.** *Prędkość zmiany momentu pędu układu jest równa sumie momentów sił zewnętrznych działających na punkty układu.*



**Dowód:** Po zróżniczkowaniu równania (3.65) względem czasu otrzymujemy:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i. \quad (3.66)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest równy zeru ze względu na współliniowość wektorów w iloczynie wektorowym. Drugi składnik przekształćmy, wykorzystując równania Newtona:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{zi} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{zi}.$$

W powyższym równaniu wykorzystano fakt, że dla sił wzajemnego oddziaływania zachodzi  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , oraz że  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$ . Ostatecznie mamy więc:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{zi}.$$

Z powyższego twierdzenia można wnioskować, że jeżeli układ jest odosobniony, to moment pędu układu jest zachowywany, czyli  $\mathbf{M} = \text{const}$ .  $\square$

### 3.3.2. Prawo zachowania momentu pędu dla ośrodka ciągłego

Przyjmijmy, że znaczenie symboli  $\Phi, \rho, \mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{t}$  jest takie, jak w definicji zasady zachowania pędu.

**Definicja 3.6.** *Mówimy, że zasada zachowania momentu pędu dla ośrodka ciągłego jest spełniona, jeżeli zachodzi:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dv = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dv + \int_{S_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS. \quad (3.67)$$

Dalej udowodnimy drugie prawo Cauchy'ego, w którym stwierdza się symetrię tensora  $\mathbf{T}$ , czyli  $T_{ij} = T_{ji}$ . W literaturze przedmiotu [80] warunek  $T_{ij} = T_{ji}$  nazywany jest hipotezą Boltzmana. W klasycznej hydrodynamice, jeżeli rozpatrujemy zasadę lokalnej równowagi, biorąc pod uwagę tylko siły zewnętrzne, warunek ten wynika z zasady zachowania momentu pędu.

**Twierdzenie 3.7.** *W drugim prawie Cauchy'ego zakłada się, że spełniona jest zasada zachowania pędu (3.62). Zasada ta jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy tensor naprężeń  $\mathbf{T}$  jest symetryczny, czyli  $T_{ij} = T_{ji}$ .*

**Dowód:** Ponieważ pod całką, z lewej strony zasady zachowania momentu pędu (3.67) występuje gęstość  $\rho$ , przekształcimy ten wzór do postaci:

$$\int_{\Omega_t} \left( \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dv = \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dv + \int_{S_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS. \quad (3.68)$$

Ponieważ zachodzi pierwsze prawo Cauchy'ego, to wyrażenie po lewej stronie równania (3.68) można przekształcić do postaci:

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \mathbf{T}) dv = \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dv + \int_{S_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS. \quad (3.69)$$

Analizując lewą i prawą stronę równania (3.69), dochodzimy do wniosku, że równość będzie zachodziła, gdy:

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times (\mathbf{div} \mathbf{T}) dv = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS. \quad (3.70)$$

Oznaczmy lewą stronę równania (3.70) za pomocą  $L_i$  a prawą  $P_i$ . Iloczyn wektorowy pod znakiem całki zapiszemy za pomocą symbolu Leviego–Civity (1.54). Wyrażenie pod całką po lewej stronie równania (3.70) przekształcamy do postaci:

$$L_i = \mathbf{r} \times \mathbf{div} \mathbf{T}|_i = \varepsilon_{ijk} x_j \mathbf{div} \mathbf{T}|_k = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}. \quad (3.71)$$

Składowa  $i$ -ta iloczynu wektorowego po prawej stronie (3.70) jest równa:

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{t})|_i = \varepsilon_{ijk} x_j t_k = \varepsilon_{ijk} x_j n_l T_{lk}. \quad (3.72)$$

Prawą stronę  $P_i$  po zastosowaniu twierdzenia Gaussa i skorzystaniu z wyrażenia (3.72) można przekształcić następująco:

$$\begin{aligned} P_i &= \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{t})|_i dS = \int_S \varepsilon_{ijk} x_i n_l T_{lk} dS = \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j T_{lk}) dv = \int_{\Omega_t} \left( \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} T_{lk} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{lk}}{\partial x_l} \right) dv, \end{aligned} \quad (3.73)$$

gdzie  $\delta_{jl}$  oznacza symbol Kroneckera (patrz wzór (1.9)). Ponieważ  $\delta_{jl} = 1$  tylko wtedy, gdy  $j = l$ , więc  $\varepsilon_{ijk} \delta_{jl} T_{lk} = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$ . Pamiętamy, że powinna zachodzić równość  $L_i = P_i$ . Porównując wyrażenia (3.71) oraz (3.73), otrzymujemy:

$$\int_{\Omega_t} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dv = \int_{\Omega_t} \left( \varepsilon_{ijk} T_{lk} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{lk}}{\partial x_l} \right) dv. \quad (3.74)$$

Z porównania stron wyrażenia (3.74) wynika, że  $L_i = P_i$  tylko wtedy, gdy:

$$\varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.75)$$

Równość (3.75) gwarantuje, że macierz tensora  $\mathbf{T}$  będzie symetryczna. Przykładowo, dla  $i = 1$  otrzymujemy:

$$\varepsilon_{1jk}T_{jk} = \varepsilon_{123}T_{23} + \varepsilon_{132}T_{32} = T_{23} - T_{32} = 0,$$

a więc  $T_{23} = T_{32}$ . Warunek (3.75) oznacza, że:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.76)$$

□

### 3.3.3. Równanie transportu pędu

Prawo zachowania pędu (3.42) może być zapisane dla objętości kontrolnej  $\Omega(t_0)$ , podobnie jak równanie ciągłości (3.5). Korzystając z twierdzenia transportowego (2.73) i przyjmując, że funkcja  $f$  w równaniu transportowym jest  $f_i = \rho v_i$ , prawo zachowania pędu dla objętości  $\Omega(t)$ , która w chwili  $t = t_0$  pokryła się z objętością poruszającą się z płynem  $\Omega(t_0)$ , można przedstawić następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} (\rho v_i + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} v_i)) dv = \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{f} dv + \int_{\partial\Omega_0} t_i dS \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.77)$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa, równanie (3.77) przekształcamy do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \rho v_i dv + \int_{\partial\Omega_0} \rho v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_0} \rho f_i dv + \int_{\partial\Omega_0} t_i dS \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.78)$$

Równanie (3.78) nazywane jest równaniem transportu pędu. Możemy je zinterpretować następująco: suma szybkości zmiany pędu w objętości kontrolnej oraz strumienia pędu przez powierzchnię ograniczającą  $\partial\Omega_0$  równa się sumie sił zewnętrznych działających na objętość  $\Omega(t_0)$ .

Równanie (3.78) wygodnie jest przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \rho v_i dv = \int_{\Omega_0} \rho f_i dv + \int_{\partial\Omega_0} (t_i - \rho v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.79)$$

Wzór (3.79) w praktyce wykorzystywany jest do wyznaczenia siły, jaką opływający ciało płyn wywiera na to ciało.

Założmy, że siły masowe występujące w przepływie można pominąć, ( $\mathbf{f} \equiv 0$ ) oraz że przepływ jest ustalony ( $\partial(\cdot)/\partial t \equiv 0$ ). Niech  $S_c$  oznacza powierzchnię ciała stałego, które znajduje się wewnątrz objętości kontrolnej  $\Omega$ . Powierzchnia objętości kontrolnej jest sumą powierzchni ciała stałego i zewnętrznej granicy objętości  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ . Ze wzoru (3.79) mamy:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_c} (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (3.80)$$

Siła, z jaką płyn oddziałuje na ciało, określana jest wzorem:

$$\mathbf{F} = - \int_{S_c} \mathbf{t} dS. \quad (3.81)$$

Ponieważ na powierzchni ciała stałego  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , to po uwzględnieniu wzoru (3.80) otrzymujemy:

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.82)$$

W praktyce obszar kontrolny wybiera się w ten sposób, że wektor naprężeń  $\mathbf{t}$  na zewnętrznej powierzchni obszaru kontrolnego  $\partial\Omega$  w pewnej odległości od brzegu ciała stałego ma stałą wartość. Dla  $\mathbf{t} = \mathbf{c}$  zachodzi równość:

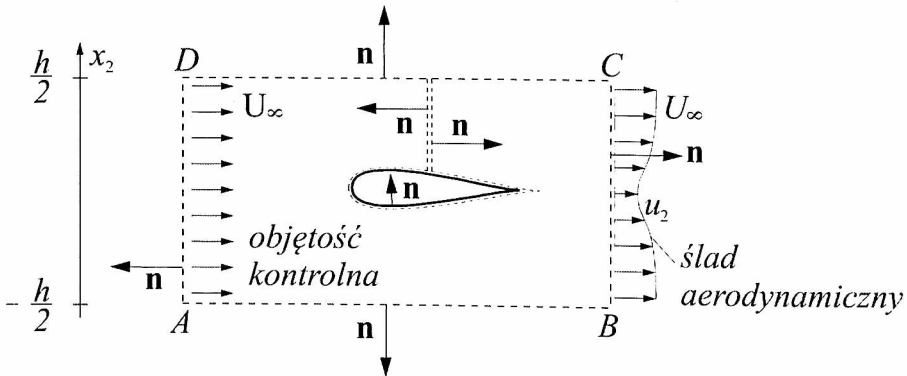
$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{c} dS = 0, \quad (3.83)$$

więc:

$$\mathbf{F} = - \int_{S_c} \mathbf{t} dS = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.84)$$

Siłę oddziaływania płynu na ciało nazywamy reakcją hydrodynamiczną. Wyznaczanie tej siły zostanie przedstawił na kilku przykładach [9], [87], [98].

**Przykład 11.** Obliczyć współczynnik oporu  $C_d = F_D / (0,5 \rho U_\infty^2 c)$  opływającego jednorodnym strumieniem płynu o gęstości  $\rho$  i prędkości  $U_\infty$  na podstawie rozkładu prędkości  $v_1(x_2)$  za opływającym ciałem. Należy przyjąć, że profil prędkości za ciałem można przybliżyć za pomocą funkcji  $v_1(x_2) = U_\infty (1 - 0,5 \cos \frac{\pi x_2}{h})$ . Wysokość obszaru  $h = 0,05c$ , gdzie  $c$  jest długością ciała (rys. 3.16). Zakładamy, że objętość



**Rys. 3.16:** Wyznaczanie siły oporu na podstawie rozkładu prędkości  $u_1(x_2)$  w śladzie aerodynamicznym

kontrolna jest na tyle duża, że wzdłuż krawędzi  $ABCD$  wektor naprężeń jest stały  $t_i = c$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a więc  $\int_{\widehat{ABCD}} \mathbf{t} dS = 0$ . Siła oporu  $F_D$ , która równa się rzutowi siły  $\mathbf{F}$  na kierunek osi  $\mathbf{e}_1$  (równoległa do kierunku  $U_\infty$ ), na podstawie wzoru (3.84) wynosi:

$$F_D = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 = - \int_{\widehat{ABCD}} \rho v_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.85)$$

Całka ze składowej strumienia pędu w kierunku osi  $x_1$  jest równa sumie całek wzdłuż krawędzi  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$ . Na krawędziach  $AB$ ,  $CD$  i  $DA$  składowa  $v_1 = U_\infty$ . Na krawędzi  $BC$  wyrażenie  $v_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = v_1^2$ . Na krawędzi  $DA$  wektor normalny jest skierowany na zewnątrz obszaru kontrolnego, przeciwnie do napływającej prędkości  $U_\infty$ ,  $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ , więc  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -U_\infty$ . Stąd:

$$F_D = \int_{\widehat{DA}} \rho U_\infty^2 dS - U_\infty \left[ \int_{\widehat{AB}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\widehat{CD}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right] + \int_{\widehat{BC}} \rho v_1^2 dS. \quad (3.86)$$

Należy wyznaczyć wartość sumy całek w nawiasie kwadratowym. Można to zrobić, posługując się równaniem ciągłości  $\int_{\widehat{ABCD}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$  (patrz równanie (3.5)). Zakładamy, że ruch jest ustalony. Suma strumieni mas przez krawędzie  $AB$  i  $CD$  musi się równać sumie strumieni przez krawędzie  $DA$  i  $BC$ . Tak więc:

$$\int_{\widehat{AB}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\widehat{CD}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\widehat{DA}} \rho U_\infty dS - \int_{\widehat{BC}} \rho v_1 dS. \quad (3.87)$$

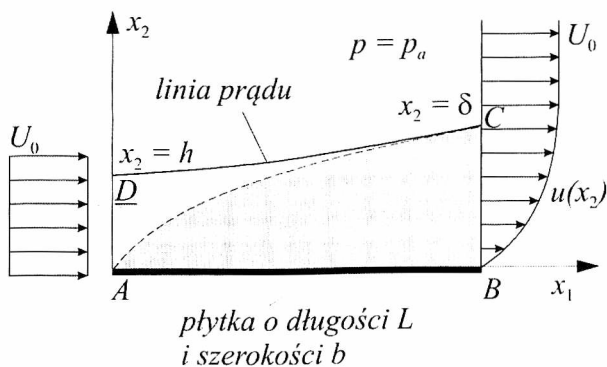
Po wstawieniu prawej strony równości (3.87) do równania (3.86) oraz przyjęciu, że  $dS = 1 \cdot dx_2$ , otrzymujemy:

$$F_D = \rho U_\infty^2 h - \rho U_\infty^2 h + \rho U_\infty \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_1 dx_2 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho v_1^2 dx_2. \quad (3.88)$$

Równanie (3.88) można zapisać jako:

$$F_D = \rho U_\infty^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{v_1}{U_\infty} \left( 1 - \frac{v_1}{U_\infty} \right) dx_2. \quad (3.89)$$

Zwróćmy uwagę, że wyrażenie podcałkowe jest równe zero poza śladem aerodynamicznym. Przedział całkowania można więc rozszerzyć na przedział  $(-\infty, \infty)$ . W teorii warstwy przyściennej [24], [33], [73], [79], [88], [98] wartość całki traktuje się jako miarę defektu pędu spowodowanego lepkością płynu i nazywa się grubością straty pędu. Dla przyjętego w zadaniu profilu prędkości za ciałem wartość całki (3.88)  $F_D = \rho U^2 0,009\,665c$ , a współczynnik oporu  $C_d = 0,019\,33$ .



Rys. 3.17: Wyznaczanie siły tarcia w warstwie przyściennej

**Przykład 12.** Na rysunku 3.17 przedstawiono schematycznie strumień płynu o jednorodnym rozkładzie prędkości  $U_0$ , napływający na poziomą płytę o długości  $L$  i jednostkowej szerokości  $b = 1$  [33], [98]. Lepkość płynu powoduje, że prędkość cząstek na powierzchni płyty jest równa zero. Działanie lepkości ogranicza się do warstwy o grubości  $\delta$ . Warstwę tę, wewnątrz której prędkość płynu zmienia się od zera na ścianie do wartości  $U_0$  na granicy  $y = \delta$ , nazywa się warstwą przyścinną. W przekroju  $AD$  rozkład prędkości jest równomierny i ma wartość  $U_0$ . W przekroju  $BC$  prędkość opisana jest rozkładem  $u(x_2) = U_0 \left( \frac{3}{2} \frac{x_2}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{\delta} \right)^2 \right)$ . Brzeg  $CD$  tworzy linia prądu, co znaczy, że strumień masy przez brzeg  $CD$  jest równy zero. Strumień masy jest różny od zera przez granicę warstwy zaznaczonej na rys. 3.17 linią przerywaną. Wykorzystując równanie transportu pędu należy wyznaczyć siłę tarcia, jaką płyn wywiera na płytę.

### Rozwiązanie

Do rozważań przyjmujemy objętość kontrolną  $ABCD \times b$ . Rozkład prędkości nie zależy od zmiennej  $x_3$ . Reakcja hydrodynamiczna równa sile tarcia wywołana jest defektem (stratą) pędu. Siła tarcia będzie równa:

$$\begin{aligned}
 F_D &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 = - \int_{ABCD} \rho u_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = \\
 &= - \int_0^h \rho U_0 (-U_0) b dx_2 - \rho \int_0^\delta u b dx_2 = \rho U_0^2 b h - \rho b \int_0^\delta u^2 dx_2.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Pozostaje nam jeszcze wyznaczenie zależności wielkości  $h$  od prędkości  $U_0$  i grubości warstwy  $\delta$ . W tym celu, jak w przykładzie wyżej, ponownie skorzystamy z równania ciągłości (3.5). Strumień masy wpływającej do obszaru  $ABCD$  przez krawędź

DA musi się równać strumieniowi masy wypływającej przez krawędź CD:

$$\rho \int_{ABCD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 = \rho \int_0^h (-U_0) b dx_2 + \rho \int_0^\delta u b dx_2. \quad (3.91)$$

Z powyższego równania otrzymujemy:

$$h = \frac{1}{U_0} \int_0^\delta u dx_2. \quad (3.92)$$

Po wstawieniu wyrażenia (3.92) do (3.90) wyrażenie na siłę tarcia wywieraną przez płyn na płytę ma postać ( $b = 1$ ):

$$F_D = \rho \int_0^\delta u(U_0 - u) dx_2 = \rho U_0^2 \int_0^\infty \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dx_2. \quad (3.93)$$

Zwróćmy uwagę na identyczną postać całek we wzorach (3.93) oraz (3.88). Całkę tę nazywa się grubością utraty pędu a jej wartość jest jednym z parametrów charakteryzujących warstwę przyścienną [33], [73]. Będziemy ją oznaczać  $\Theta$ :

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dx_2. \quad (3.94)$$

Siłę tarcia można więc zapisać jako:

$$F_D = \rho b U_0^2 \Theta. \quad (3.95)$$

Jeżeli do wzoru (3.94) za prędkość  $u(x_2)$  podstawimy profil prędkości:

$$u(x_2) \approx U_0 \left[ \frac{3}{2} \frac{x_2}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{\delta} \right)^3 \right], \quad 0 \leq x_2 \leq \delta(x_1) \quad (3.96)$$

to otrzymamy:

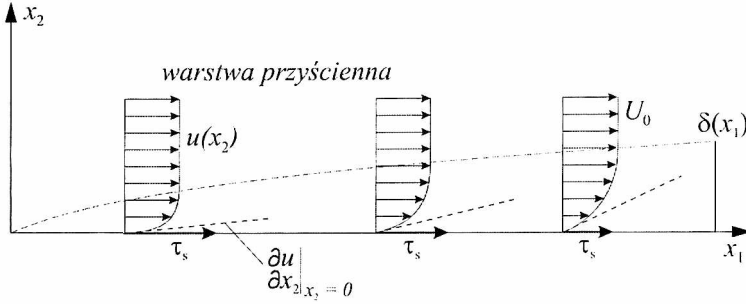
$$\Theta = \delta \int_0^1 \left( \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3 \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \eta + \frac{1}{2} \eta^3 \right) d\eta = \frac{39}{280} \delta(x_1) \approx \frac{1}{7} \delta(x_1), \quad (3.97)$$

gdzie  $\eta = \frac{y}{\delta}$ .

Wzór na siłę tarcia dla założonego profilu prędkości (3.95) wynosi:

$$F_D = \frac{39}{280} \rho b U_0^2 \delta(x_1). \quad (3.98)$$

Należy jeszcze określić grubości warstwy przyściennej na końcu płyty.



**Rys. 3.18:** Formowanie się laminarnej warstwy przyściennej. Zwróćmy uwagę, że grubość warstwy rośnie  $\delta(x_1) \sim x_1^{1/2}$  a naprężenia styczne na ścianie maleją  $\tau_s \sim x_1^{-1/2}$

Newtonowi przypisuje się stwierdzenie, że płyn lepki poruszający się nad płytą wywołuje naprężenia proporcjonalne do szybkości zmian prędkości w kierunku prostopadłym do ściany:

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (3.99)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności  $\mu$  nosi nazwę współczynnika lepkości dynamicznej.

Należy podkreślić, że wzór (3.99) jest słuszny tylko dla przepływów spokojnych nazywanych laminarnymi w odróżnieniu od przepływów burzliwych nazywanych turbulentnymi. Siłę tarcia wzdłuż płyty można wyznaczyć ze wzoru:

$$F_D(x) = b \int_0^L \tau_s(x) dx. \quad (3.100)$$

Jeżeli zrózniczkujemy wzory (3.95) i (3.100) i porównamy je, to otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\rho b U_0^2 \frac{d\Theta}{dx} = b \tau_s. \quad (3.101)$$

Równanie (3.101) podane przez von Karmana nazywane jest całkowym równaniem pędu dla warstwy przyściennej. Formalnie wyprowadza się je na podstawie uproszczonych równań różniczkowych cząstkowych ruchu cieczy w warstwie przyściennej [33], [45], [79], [97]. Równanie (3.101) ważne jest zarówno wtedy, gdy przepływ w warstwie przyściennej jest laminarny, jak również wtedy, gdy jest turbulentny. Dla przepływu turbuletnego należy użyć wzoru empirycznego na naprężenia ścinające na ścianie.

Dla przyjętego rozkładu prędkości (3.96) naprężenia styczne wynoszą:

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_0}{\delta}. \quad (3.102)$$



Po wstawieniu wzorów (3.97) oraz (3.102) do równania (3.101) otrzymujemy równanie dla  $\delta(x)$ :

$$\frac{39}{280} \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{\delta \rho U_0}. \quad (3.103)$$

Dalej wprowadzimy oznaczenie  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Współczynnik ten nazywamy kinematycznym współczynnikiem lepkości. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_0}. \quad (3.104)$$

Całkowanie równania (3.104) wzdłuż płyty daje:

$$\frac{\delta(x)}{x} = 4,64 \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}, \quad (3.105)$$

gdzie  $Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$  jest bezwymiarową liczbą nazywaną liczbą Reynoldsa. Ze wzoru (3.105) wynika, że grubość warstwy przyściennej zmienia się jak  $\delta(x) \sim x^{1/2}$ . Wzór (3.105) pozwala obliczyć grubość warstwy przyściennej na końcu płyty. Stąd ostatecznie wzór dla siły tarcia ma postać:

$$F_D = 0,646b \sqrt{U_0^3 L \rho \mu}. \quad (3.106)$$

Współczynnik 0,646 we wzorze (3.106) dla rozwiązania dokładnego (rozwiązanie Blasiusa [79]) ma wartość 0,664. Błąd względny nie przekracza więc 3%.

Z eksperymentu wiadomo, że przepływ laminarny, dla którego obowiązuje wzór na naprężenia styczne na ścianie (3.102) utrzymuje się aż do chwili, gdy  $Re_x < 10^5 \div 10^6$ . Dla większych liczb Reynoldsa następuje utrata stabilności przepływu w warstwie przyściennej i ruch z laminarnego (warstwowego) przekształca się w turbulentny.

Obliczmy zatem jeszcze grubość warstwy przyściennej na końcu płyty. Liczba Reynoldsa dla płyty o długości  $L = 1\text{ m}$ , która jest opływana przez powietrze o współczynniku lepkości  $\nu = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , z prędkością  $U_0 = 1 \text{ m/s}$  wynosi:

$$Re_L = \frac{1 \cdot 1}{15 \times 10^{-6}} \approx 66\,600.$$

Natomiast grubość warstwy przyściennej obliczona ze wzoru (3.104) dla  $x = 1$  wynosi:

$$\delta(1) = \frac{4,64 \cdot 1}{\sqrt{66\,600}} \approx 0,018 \text{ m} = 1,8 \text{ cm}. \quad (3.107)$$

Dla liczb Reynoldsa  $Re_x > 10^6$ , naprężenia na ścianie określa się ze wzorów empirycznych. Jeden z takich wzorów ma postać [67]:

$$\tau_s = 0,0225 \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{1/4}. \quad (3.108)$$

Dla przepływu turbulentnego uśredniony rozkład prędkości w warstwie przyściennej przyjmuje się również na podstawie badań doświadczalnych. Jedną z bardziej popularnych formuł jest wzór:

$$u(x_2) = U_0 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (3.109)$$

Dla rozkładu prędkości według prawa potęgi jednej-siódmej wzory (3.101) oraz (3.108) określają zmianę grubości turbulენტnej warstwy przyściennej jako [14], [67]:

$$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0,16}{Re_x^{1/7}}. \quad (3.110)$$

### 3.3.4. Równanie transportu energii kinetycznej

Postulat o zachowaniu energii należy do jednych z najważniejszych w fizyce. Interesujące będzie zbadanie, jak energia kinetyczna jest transportowana z przepływem.

**Definicja 3.7.** *Energią kinetyczną ośrodka ciągłego zawartą w poruszającej się objętości  $\Omega(t)$  nazywamy:*

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v}^2 dv, \quad (3.111)$$

gdzie  $\mathbf{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ .

**Twierdzenie 3.8.** *Niech  $K$  oznacza energię kinetyczną cząstek poruszających się wraz z objętością  $\Omega(t)$  a gęstość sił masowych  $\mathbf{f}$ , prędkość  $\mathbf{v}$ , gęstość  $\rho$ , wektor naprężeń  $\mathbf{t}$  spełniają zasadę zachowania masy, zasadę zachowania pędu i momentu pędu. Zmiana energii kinetycznej opisywana jest wtedy równaniem:*

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\Omega(t)} \mathbf{T} : \mathbf{D} dv, \quad (3.112)$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest tensorem prędkości deformacji o elementach  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  (patrz wzór (2.88)),  $\mathbf{T} : \mathbf{D} = T_{ij} D_{ij}$  (skalarny iloczyn tensorowy).

**Dowód:**

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v}^2 dv &= \int_{\Omega(t)} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^2) dv = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \mathbf{v} \cdot \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dv = \int_{\Omega(t)} \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \mathbf{T}) dv \\
 &= \int_{\Omega(t)} (\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \mathbf{T}) dv
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

□

Iloczyn skalarny  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \mathbf{T}$  w konwencji sumacyjnej można przedstawić jako:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \cdot v_j = \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j T_{ij}) - T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Ponieważ tensor  $\mathbf{T}$  jest symetryczny, zachodzi następująca tożsamość:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \mathbf{T} = \mathbf{div} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{T} : \mathbf{D}. \tag{3.114}$$

Po wstawieniu tożsamości (3.114) do równania (3.113) otrzymamy całkę  $\int_{\Omega(t)} \mathbf{div} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) dv$ , którą można przekształcić, korzystając z twierdzenia Gaussa, do postaci:

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{div} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) dv = \int_S n_i T_{ij} v_j dS = \int_S t_j v_j = \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS. \tag{3.115}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy wzór (3.112).

Zgodnie z wzorem (3.112) prędkość zmiany energii kinetycznej poruszającej się objętości płynu równa jest pracy sił zewnętrznych ( $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv$  oraz  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS$ ) oraz rozproszeniu energii wyrażonej członem  $\mathbf{T} : \mathbf{D}$  a wynikającej z interakcji naprężeń i deformacji objętości. Macierz  $\mathbf{D}$ , która pojawiała się w powyższych rachunkach, jest tensorem prędkości deformacji lub krótko tensorem deformacji. Macierz  $\mathbf{D}$  jest symetryczna,  $D_{ij} = D_{ji}$ , a jej ślad  $\text{tr} \mathbf{D}$  (suma elementów na głównej przekątnej) jest równa dywergencji pola prędkości  $\text{tr} \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{v}$ . Wyrażenie  $\Phi = \mathbf{T} : \mathbf{D}$  nazywa się funkcją dysypacji energii [80].

Równanie transportu energii dla cieczy nielepkiej ( $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ ) i potencjalnego pola sił masowych, a więc  $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$ , przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} (K + \Phi) = - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} p \text{div} \mathbf{v} dv_x, \tag{3.116}$$

gdzie  $\Pi = \int_{\Omega} \rho \Phi dv_x$  reprezentuje energią potencjalną. Ostatni człon po prawej stronie wzoru (3.116) opisuje pracę wykonaną przez ciśnienie nad zmianą elementu

objętości. Korzystając z twierdzenia Gaussa, obie całki po prawej stronie wzoru (3.116) można połączyć w jedną całkę po objętości. Prowadzi to do wzoru:

$$\frac{d}{dt}(K + \Phi) = - \int_{\Omega_t} \nabla p \cdot \mathbf{v} dv_x. \quad (3.117)$$

Dla płynu nieściśliwego, jak to pokażemy dalej, całka po prawej stronie wzoru (3.117) jest równa zero (gradient funkcji  $p$  jest ortogonalny do wektorów, dla których  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ). Stąd będzie płynął wniosek, że dla cieczy nielepkiej i nieściśliwej, suma energii kinetycznej i potencjalnej podczas ruchu jest stała.

## Rozdział 4

# Równania ruchu cieczy nielepkiej

Równania ruchu płynu dla cieczy nielepkiej wprowadził Euler w 1751 roku. Podamy najpierw definicję płynu nielepkiego (doskonałego), formułując równanie konstytutywne, czyli określając związek pomiędzy składowymi tensora naprężeń  $T_{ij}$  a wielkościami biorącymi udział w ruchu płynu. Dla płynu nielepkiego jest tylko ciśnienie  $p$ . Następnie, korzystając z prawa zachowania pędu dla ośrodka ciągłego (rozdz. 3.2.4), wprowadzimy równanie ruchu płynu nielepkiego.

### 4.1. Równanie Eulera dla cieczy nielepkiej

W równaniach podanych przez Eulera jedynymi siłami powierzchniowymi występującymi podczas ruchu są siły, które są prostopadłe do powierzchni ograniczającej objętość płynu.

**Definicja 4.1.** *Płynem idealnym nazywamy płyn, w którym nie występują naprężenia styczne (ścinające), czyli wektor naprężeń powierzchniowych ma postać:  $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$  czyli tensor naprężeń przyjmuje postać:*

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

W modelu płynu idealnego pomijany jest efekt lepkości płynu. Składowe tensora naprężeń poza główną przekątną są równe zero, a więc brak jest naprężeń ścinających. Funkcja skalarna  $p(\mathbf{x}, t)$ , która opisuje gęstość (intensywność) siły powierzchniowej  $\text{N/m}^2$ , nazywa się ciśnieniem. W ośrodku płynnym zawsze istnieje ciśnienie, co, podobnie jak gęstość, jest podstawową cechą ośrodka płynnego. Odwołując się do fizycznej natury płynów, należy powiedzieć, że ciśnienie jest wynikiem molekularnej natury materii. Dowolny element powierzchni zanurzonej w ośrodku płynnym wskutek termicznego ruchu molekuł doznaje od otaczającego ośrodka sił spowodowanych zderzeniami molekuł z tą powierzchnią. Na każdy element tej powierzchni, niezależnie od jej orientacji, działa siła  $d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dA$ . Ciśnienia jako

gęstości siły powierzchniowej nie można mierzyć bezpośrednio, ale można dokonać pomiaru jego różnicy. W praktyce inżynierskiej pomiaru różnicy ciśnień dokonuje się względem ciśnienia otoczenia (ciśnienia atmosferycznego). Otrzymane ciśnienie jest nazywane ciśnieniem względnym. Dokonuje się też niekiedy pomiaru różnicy ciśnień względem próżni, gdzie nie ma ośrodka materialnego, a ciśnienie jest równe zeru. Wtedy ciśnienie nazywane jest absolutnym lub bezwzględnym.

Równania ruchu płynu cieczy nielepkiej nazywane są równaniami Eulera. Ze względu na postać tensora naprężeń (4.1) oraz  $\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla p$  równania Cauchy'ego (3.62) przybierają postać:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Po rozwinięciu pochodnej substancjalnej prędkości po lewej stronie równania (4.2) przyjmują postać:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

W równaniach (4.2) jest pięć niewiadomych ( $v_1, v_2, v_3, p, \rho$ ). Do równań (4.2) należy dołączyć równanie wyrażające zasadę zachowania masy (równanie ciągłości) oraz dodatkowo uzupełnić o związki termodynamiczne, równania stanu, określające zależność pomiędzy ciśnieniem i gęstością płynu. Dla stałej temperatury takie równanie może mieć postać  $p/\rho = \text{const}$ . Dalej będziemy zajmowali się tylko płynem nieściśliwym i jednorodnym ( $\rho = \text{const}$ ), w przypadku którego ciśnienie jest zmienną kinematyczną, bez związku ze termodynamicznym związkiem z gęstością czy temperaturą.

Układ równań opisujący ruch płynu wraz z warunkiem początkowym i brzegowym na nieruchomej ścianie stałej ma postać:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla p, \quad (4.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.7)$$

Równania (4.4) i (4.5) wraz z warunkami brzegowymi stanowią kompletny opis ruchu cieczy nieściśliwej, jednorodnej.

Warunek  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  na brzegu ciała stałego fizycznie oznacza brak przepływu przez ścianę.

W przypadku przepływu trójwymiarowego  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  istnienie rozwiązania jest dowiedzione tylko dla krótkiego przedziału czasu.

W przypadku przepływu dwuwymiarowego dowód istnienia dla dostatecznie regularnych warunków początkowych w dowolnym przedziale czasu podał polski matematyk W. Wolibner w 1932 roku [41].

#### 4.1.1. Równanie Gromeki–Lamba

Równanie Eulera (4.4) można przekształcić do innej, bardzo użytecznej postaci. Korzystając z tożsamości wektorowej:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (4.8)$$

równanie Eulera (4.4) można zapisać w formie:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) + \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (4.9)$$

W szczególnym przypadku, gdy zewnętrzna siła masowa ma potencjał  $\Phi$ ,  $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$  a gęstość płynu jest stała  $\rho = \text{const}$ , to powyższe równanie ruchu płynu nielepkiego można dalej przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}\right). \quad (4.10)$$

Jeżeli płyn jest płynem barotropowym równanie ruchu płynu (4.10) można również sformułować dla płynu ściśliwego, barotropowego. Płynem barotropowym nazywamy płyn, którego gęstość zależy od ciśnienia  $\rho = \rho(p)$ . Do rozważań wprowadza się w takim wypadku tzw. funkcję ciśnienia:

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (4.11)$$

Dla tak określonej funkcji ciśnienia zachodzi zależność:

$$\nabla \mathcal{P}(p) = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.12)$$

Dla płynu barotropowego równanie (4.10) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi + \mathcal{P}\right). \quad (4.13)$$

Równania ruchu w postaci (4.10) lub (4.13) nazwa się równaniami Gromeki–Lamba [59].

#### 4.1.2. Równanie Helmholtza (równanie transportu wirowości w płynie nielepkim)

Oznaczmy trójczłon stojący pod znakiem operatora gradientu po prawej stronie równania (4.10) przez  $B = \frac{v^2}{2} + \rho\Phi + \frac{p}{\rho}$ . Wtedy równanie (4.10) przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla B. \quad (4.14)$$

Wielkość skalarna  $B$  nazywa się trójmianem Bernoulliego. Z równania (4.14) wynika, że jego lewa strona, w której występują wielkości kinematyczne, prędkość i wirowość, jest polem potencjalnym z potencjałem  $B$ . Oznacza to, że rotacja lewej strony równania (4.14) jest równa zeru:

$$\mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Stąd:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0. \quad (4.16)$$

Nie każde pole prędkości może więc być zrealizowane w płynie doskonałym z potencjalnym polem sił masowych. Pole prędkości musi spełniać równanie (4.16). Korzystając z następującej tożsamości wektorowej:

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \quad (4.17)$$

oraz z tego, że  $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ , równanie (4.16) można sprowadzić do postaci:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (4.18)$$

Lewa strona równania (4.18) wyraża pochodną substancjalną wirowości. Równanie (4.18) można przedstawić jako:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (4.19)$$

Równanie (4.19), wprowadzone przez A.A. Friedmana<sup>(1)</sup> w 1922 roku, nazywane jest równaniem dynamicznej możliwości ruchu [59]. Pierwszy człon prawej strony równania  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}$  wyraża projekcję gradientu prędkości na kierunek wektora  $\boldsymbol{\omega}$ . Ze względu na to, że  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}$  (patrz wzór (2.85)) oraz  $\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\omega} = 0$ , człon ten można przedstawić jako:

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}, \quad (4.20)$$

<sup>(1)</sup> Uczony rosyjski (1887–1925), zajmował się kosmologią, jak również hydrodynamiką i meteorologią. Jest autorem słynnego równania opisującego ewolucję Wszechświata.



gdzie  $\mathbf{D}$  jest tensorem szybkości deformacji (patrz rozdz. 2.4.1). Człon  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  opisuje deformację pola wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  wywołaną deformacją pola prędkości. Działanie członu  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  na pole wirowości popularnie nazywane jest rozciąganiem pola wirowości. Drugi człon po prawej stronie równania (4.19)  $(-\boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v})$  opisuje efekt wywołany ściślnością płynu.

Z uwagi na fakt, że:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (4.21)$$

równanie (4.19), po podzieleniu obustronnie przez  $\rho$ , można przedstawić w następującej formie:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (4.22)$$

Dla ruchu nieściśliwego ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) i jednorodnego  $\rho = \text{const}$  równanie (4.18) przyjmuje postać:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (4.23)$$

Równanie (4.23) nazywane jest równaniem Helmholtza, a dokładnie równaniem transportu wirowości w płynie nielepkim. Wynika z niego, że wirowość jest unoszona przez pole prędkości. Materialne cząstki płynu, które tworzyły linie pola wirowości w wybranej chwili  $t$ , będą tę linię tworzyły również w chwilach późniejszych. Z równania (4.22) wynika, że również iloraz  $\boldsymbol{\omega}/\rho$  jest unoszony przez pole prędkości.

Należy zauważyć, że człon  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  jest różny od zera tylko dla przepływów trójwymiarowych. Stanowi to bardzo ważną różnicę pomiędzy przepływem trójwymiarowym i dwuwymiarowym. Jak wiemy z rozdziału pierwszego dla dwóch wymiarów wirowość  $\boldsymbol{\omega}$  ma tylko jedną składową różną od zera  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ . Dla płaskiego pola prędkości  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$  człon  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  jest równy tożsamościowo zeru. Równanie (4.23) dla przepływu dwuwymiarowego ma postać:

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0. \quad (4.24)$$

Z równania (4.24) wynika, że wzdłuż trajektorii  $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$  wartość  $\omega_3$  nie ulega zmianie  $\omega_3(\mathbf{x}, t) = \omega_3(\boldsymbol{\alpha}, 0)$ . Dla przepływów trójwymiarowych wektor wirowości ma trzy różne od zera składowe  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  i ulega zmianie wzdłuż trajektorii cząstki na skutek działania tensora  $\mathbf{D}$ .

### 4.1.3. Dekompozycja Hodge'a

W dynamice płynu nieściśliwego ciśnienie  $p(\mathbf{x}, t)$  jest wielkością, która nie ma termodynamicznego związku z innymi parametrami fizycznymi ośrodka, takimi jak

gęstość czy temperatura. Z tego powodu wyznaczenie pola ciśnienia w przypadku numerycznego rozwiązywania równań Eulera (4.4) jest utrudnione. Warunki brzegowe i początkowe stawia się tylko dla pola prędkości. W równaniu (4.4) brak jest członów, które opisywałyby zmianę ciśnienia w czasie. Aby zbadać rolę ciśnienia w ruchu nieściśliwym, wykorzystamy dekompozycję Hodge'a [74].

**Twierdzenie 4.1.** *Dowolne pole wektorowe  $\mathbf{v} \in \mathbb{L}_2$  zadane na jednoczłonym obszarze  $\Omega$  o gładkim (regularnym) brzegu  $\partial\Omega$  można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy ortogonalnych względem siebie pól wektorowych:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \nabla\Phi \quad \text{oraz} \quad \int_{\Omega} \mathbf{v}_d \nabla\Phi dv = 0, \quad (4.25)$$

gdzie  $\operatorname{div} \mathbf{v}_d = 0$  wewnątrz obszaru  $\Omega$ , natomiast na brzegu  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} = 0$ .

**Dowód:** Pokażemy, w jaki sposób można otrzymać pola  $\mathbf{u}_d$  oraz  $\nabla\Phi$ . Działając operatorem dywergencji obustronnie na równanie (4.25), otrzymujemy zagadnienie Neumanna dla funkcji  $\Phi$ :

$$\Delta\Phi = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{na brzegu} \quad \partial\Omega. \quad (4.27)$$

Wiadomo, że dla zagadnienie Neumanna (zob. równania (4.26), (4.27)) istnieje rozwiązanie z dokładnością do stałej [70], [84], ale pod warunkiem, że spełniony jest warunek jego rozwiązywalności, który ma postać (por. wzór (1.107)):

$$\int_{\Omega} \Delta\Phi dv = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.28)$$

Warunek (4.28) jest spełniony jako konsekwencja twierdzenia Gaussa.

Rozwiązując (4.26) i (4.27), otrzymamy funkcję skalarną  $\Phi$ . Pole wektorowe  $\mathbf{v}_d$  można otrzymać jako  $\mathbf{v}_d = \mathbf{v} - \nabla\Phi$ . Łatwo sprawdzić, mając na uwadze warunki (4.26) i (4.27), że tak wyznaczone pole wektorowe spełnia warunki twierdzenia  $\operatorname{div} \mathbf{v}_d = 0$  oraz  $\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} = 0$ . Aby wykazać ortogonalność pól  $\mathbf{v}_d$  oraz  $\nabla\Phi$ , posłużymy się tożsamością:

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{v}_d) = \mathbf{v}_d \cdot \nabla\Phi + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v}_d. \quad (4.29)$$

Ze względu na to, że  $\operatorname{div} \mathbf{v}_d = 0$ , po scałkowaniu powyższej tożsamości stronami, otrzymamy:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\Phi\mathbf{v}_d) dv = \int_{\Omega} \mathbf{v}_d \cdot \nabla\Phi dv = \int_{\partial\Omega} \Phi\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (4.30)$$

ponieważ na brzegu  $\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Aby wykazać jednoznaczność, przyjmijmy tezę przeciwną: założmy, że istnieją dwa różne rozkłady pola  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{1d} + \nabla\Phi_1$  oraz  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{2d} + \nabla\Phi_2$  (4.26) spełniające warunek (4.30). Wtedy różnica tych rozkładów jest równa zeru:

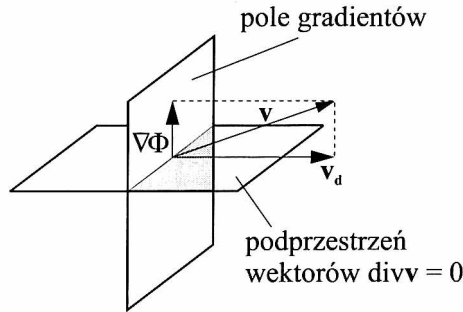
$$0 = \mathbf{v}_{1d} - \mathbf{v}_{2d} + \nabla(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (4.31)$$

Mnożąc równanie (4.31) przez  $\mathbf{v}_{1d} - \mathbf{v}_{2d}$  oraz całkując po obszarze  $\Omega$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left( |\mathbf{v}_{1d} - \mathbf{v}_{2d}|^2 + \nabla(\Phi_1 - \Phi_2) \cdot (\mathbf{v}_{1d} - \mathbf{v}_{2d}) \right) dv = \\ &= \int_{\Omega} |\mathbf{v}_{1d} - \mathbf{v}_{2d}|^2 dv. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Wyrażenie podcałkowe (4.31) jest funkcją dodatnią, a całka z tej funkcji jest równa zeru. Z tego wynika, że  $\mathbf{v}_{1d} = \mathbf{v}_{2d}$  oraz  $\nabla\Phi_1 = \nabla\Phi_2$ . Stąd  $\Phi_1 = \Phi_2 + \text{const}$ .  $\square$

W wektorowej przestrzeni funkcji  $\mathbb{L}^2$ , w której istnieje podprzestrzeń funkcji bezdywergentnych, wektor-funkcję można przedstawić geometrycznie (zob. rys. 4.1).



Rys. 4.1: Rozkład wektora  $\mathbf{v}$  na część gradientową i bezdywergencyjną,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \nabla\Phi$

#### 4.1.4. Wyznaczanie pola ciśnień metodą projekcji

Jednoznaczność rozkładu i ortogonalność pól wektorowych bezdywergentnych i gradientowych pozwala na wprowadzenie operatora rzutowania  $\mathbf{P}$ . Wektor  $\mathbf{v}$ , ze względu na przedstawienie (4.25), można rzutować na podprzestrzeń wektorów bezdywergencyjnych:

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_d. \quad (4.33)$$

Część gradientową wektora  $\mathbf{v}$ ,  $\nabla\Phi$ , można przedstawić jako:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v} = \nabla\Phi. \quad (4.34)$$

Jest to podstawą jednej z bardziej popularnych metod numerycznego rozwiązywania równań ruchu płynu w zmiennych pierwotnych  $(p, \mathbf{v})$ . Metodę została opracowana przez A. Chorina [17], [18]. Może być wykorzystywana do rozwiązywania równań ruchu cieczy nielepkiej [66], jak również równań ruchu płynu lepkiego [12]. Ideę algorytmu obliczeniowego przedstawimy dla równania Eulera płynu nielepkiego.

Jeżeli zadziałamy operatorem rzutowania  $\mathbf{P}$  na obie strony równania (4.4), to otrzymamy:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{P} (-\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4.35)$$

W równaniu (4.35) nie występuje już ciśnienie. Jeżeli czasoprzestrzeń  $(\mathbf{x}, t)$ , w której szukamy rozwiązania, pokryjemy siatką numeryczną  $n\Delta t, ih, jh, kh$ , gdzie  $h = \Delta x_i$ , to można poszukiwać rozwiązania na nowej warstwie czasowej  $(n+1)$  w dwóch krokach: w pierwszym rozwiązać równanie Eulera (4.4) bez ciśnienia, a otrzyma się pomocnicze pole  $\mathbf{v}^*$ , dla którego  $\text{div } \mathbf{v}^* \neq 0$ , w drugim, korzystając z twierdzenia Hodge'a o rozkładzie (rozd. 4.1.3), tak skonstruować część gradientową rozwiązania na warstwie  $(n+1)$ , aby  $\text{div } \mathbf{v}^{n+1} = 0$ .

Dla zaprezentowania idei w możliwie najprostszy sposób posłużymy się jawnym schematem różnicowym. Załóżmy, że znane jest pole prędkości i ciśnienia na warstwie czasowej  $t^n = n\Delta t$ ,  $p^n$ ,  $\mathbf{v}^n$  oraz  $\text{div } \mathbf{v}^n = 0$ . Należy wyznaczyć pole prędkości i pole ciśnień w czasie  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Aproksymacja równania pędu (4.4) na warstwie  $t^{n+1}$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - \Delta t (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \Delta t \nabla p^{n+1} + \Delta t \rho \mathbf{f}, \quad (4.36)$$

gdzie pochodna po czasie z pola prędkości została zastąpiona progresywnym ilorazem różnicowym (ilorazem w przód). Podstawowym problemem w bezpośrednim wykorzystaniu równania (4.36) do obliczenia  $\mathbf{v}^{n+1}$  jest to, że  $\text{div } \mathbf{v}^{n+1} \neq 0$ , a więc zasada zachowania masy nie będzie spełniona, oraz że nie wiadomo, jak obliczyć ciśnienie  $p^{n+1}$  na nowej warstwie czasowej. Teraz można posłużyć się dekompozycją Hodge'a. Najpierw wyznaczmy pomocnicze pole  $\mathbf{v}^*$  z równania:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n - \Delta t (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \Delta t \nabla p^n + \Delta t \rho \mathbf{f}. \quad (4.37)$$

Pole  $\mathbf{v}^*$  nie spełnia równania ciągłości ( $\text{div } \mathbf{v}^* \neq 0$ ). Pole  $\mathbf{v}^*$  można rozłożyć na część bezdywergencyjną i część gradientową z pewnej funkcji  $\Phi$ , a więc

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^{n+1} + \nabla \Phi. \quad (4.38)$$

Żądamy, aby  $\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1} = 0$ . Działając operatorem  $\operatorname{div}$  na obie strony równania (4.38), otrzymamy równanie Poissona dla funkcji  $\Phi$ :

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \mathbf{v}^*, \quad (4.39)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}. \quad (4.40)$$

Wartość prędkości dla chwili  $t^{n+1}$  otrzymujemy z równania (4.38)  $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \nabla \Phi$ . Ciśnienie można wyznaczyć z równania (4.41) po odjęciu stronami równań (4.36) i (4.37) oraz wykorzystaniu (4.38):

$$\nabla \Phi = \Delta t \nabla (p^{n+1} - p^n). \quad (4.41)$$

Stąd otrzymujemy z dokładnością do stałej:

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\Phi}{\Delta t}. \quad (4.42)$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że pole przejściowe  $\mathbf{v}^*$  zawiera w sobie już pełną informację o wirowości pola prędkości. Dodanie do pola  $\mathbf{v}^*$  składowej gradientowej (potencjalnej) nie zmienia jego wirowości. W trakcie obliczeń pole  $\mathbf{v}^*$  musi być wyznaczane w każdym kroku czasowym.

Stosując powyższy algorytm do przepływów lepkich należy z pewną starannością podchodzić do realizacji warunku brzegowego na ścianach dla pola  $\mathbf{v}^*$ . Wynika to z tego, że dla płynu lepkiego żąda się, aby nie tylko składowa normalna pola prędkości na ścianie, ale również składowa styczna były równe zero [12], [72], [74]. Ciekawą realizację metody projekcji dla dwuwymiarowego, nieściśliwego przepływu lepkiego przedstawiono w raporcie [37]. Raport, o dużym walorze dydaktycznym, zawiera również kod obliczeniowy w języku FORTRAN.

## 4.2. Przepływy potencjalne

**Definicja 4.2.** *Przepływem potencjalnym nazywamy przepływ, którego pole prędkości wyraża się za pomocą gradientu z pewnej funkcji skalarnej nazywanej potencjałem:*

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi. \quad (4.43)$$

Przepływy potencjalne są przepływami bezwirowymi, ponieważ  $\mathbf{rot}(\nabla \varphi) \equiv 0$ . W obszarze jednorodnym warunek  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$  implikuje istnienie funkcji skalarnej  $\varphi$  takiej, że zachodzi (4.43). Wyznaczenie stacjonarnego przepływu potencjalnego i nieściśliwego  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a:

$$\Delta \varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0. \quad (4.44)$$

**Twierdzenie 4.2.** Niech  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$  będzie stacjonarnym, nieściśliwym polem prędkości o stałej gęstości, a siły masowe mają potencjał  $\Phi$ ,  $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$ . Wtedy pole prędkości  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  spełnia równanie Eulera (4.5) z funkcją ciśnienia:

$$p = -\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + c, \quad (4.45)$$

gdzie  $\mathbf{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ , a  $c$  jest dowolną stałą.

**Dowód:** Jak wiemy (patrz równanie (4.4)), równanie Eulera wraz z równaniem ciągłości ma postać:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \rho\nabla\Phi, \quad (4.5')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.6')$$

Z założenia, że przepływ jest stacjonarny, wynika, że  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ . Korzystając z tożsamości wektorowej (4.8) oraz z tego, że  $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ , równanie (4.5) można przekształcić do postaci:

$$\rho \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) = -\nabla p - \rho\nabla\Phi. \quad (4.46)$$

Po przeniesieniu wyrażenia z operatorem  $\nabla$  na jedną stronę równania otrzymuje się:

$$\nabla \left( p + \rho \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2) + \rho\Phi \right) = 0. \quad (4.47)$$

Wyrażenie w nawiasie musi więc być stałe. Stąd wynika teza twierdzenia  $p = -\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + c$ .  $\square$

Należy podkreślić, że założenie o ruchu bezwirowym  $\boldsymbol{\omega}$  pozwoliło sprowadzić rozwiązywanie nieliniowego równania Eulera do rozwiązywania liniowego równania Laplace'a.

#### 4.2.1. Energia kinetyczna przepływu potencjalnego i twierdzenie Thomsona

Podamy kilka twierdzeń i wzorów charakteryzujących przepływy potencjalne. Najpierw wyprowadzimy wzór na energię kinetyczną ruchu potencjalnego. Przyjmujemy, że ruch płynu jest nieściśliwy i potencjalny  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ . Potencjał prędkości spełnia równanie Laplace'a  $\Delta\varphi = 0$  a pole prędkości  $\mathbf{v}$  równanie Eulera (4.5).

**Lemat 4.1.** Energia kinetyczna w przepływie potencjalnym wyraża się wzorem:

$$E_k = \frac{1}{2}\rho \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 dv = \frac{1}{2}\rho \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv = \frac{1}{2}\rho \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (4.48)$$

**Dowód:** Skorzystamy z pierwszej tożsamości Greena (rozdz. 1):

$$\int_{\Omega} (\nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\Delta\psi)dv = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS. \quad (4.49)$$

Jeżeli równanie (4.49) pomnożymy stronami przez  $\frac{1}{2}\rho$  oraz przyjmiemy  $\psi = \varphi$  otrzymujemy tezę lematu.  $\square$

Energia kinetyczna przepływu potencjalnego (4.48) wyraża się za pomocą całki powierzchniowej po brzegu obszaru  $\partial\Omega$ . Jeżeli na zamkniętej powierzchni  $\partial\Omega = S$  składowa normalna  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  jest równa zero, czyli  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , to płyn będzie pozostawał w spoczynku  $E_k = 0$ . Mówi się, że przepływ bezwirowy w obszarze jednopójnym, w którym brzeg jest nieruchomy, jest niemożliwy.

Poniżej udowodnimy twierdzenie, że przepływ potencjalny ma najmniejszą energię kinetyczną spośród wszystkich możliwych przepływów nieściśliwych, które spełniają te same warunki brzegowe.

**Twierdzenie 4.3.** Niech  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla\varphi$  będzie polem prędkości przepływu potencjalnego w obszarze ograniczonym  $\Omega$  oraz niech  $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t)$  będzie dowolnym innym polem prędkości, które spełnia te same warunki brzegowe na brzegu  $\partial\Omega$ , co pole potencjalne:

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (4.50)$$

oraz  $\mathbf{v}'$  spełnia równanie ciągłości:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \quad \text{w } \Omega. \quad (4.51)$$

Zachodzi wtedy zależność:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}'^2 dv \geq \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv. \quad (4.52)$$

**Dowód:** Rozważmy różnicę:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|^2 dv = \int_{\Omega} |\mathbf{v}'|^2 dv + \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv - 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}' \cdot \nabla\varphi dv. \quad (4.53)$$

Korzystając z tożsamości (1.108) (rozdz. 1), na mocy lematu (4.48) i warunków (4.50) oraz (4.51), ostatnią całkę w powyższym wyrażeniu można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}' \cdot \nabla\varphi dv &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi\mathbf{v}') dv = \int_{\partial\Omega} \varphi\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Równanie (4.53) przybiera postać:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|^2 dv = \int_{\Omega} |\mathbf{v}'|^2 dv - \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv. \quad (4.55)$$

Ponieważ całka po lewej stronie równania jest zawsze dodatnia, a więc najmniejsza wartość równa zeru będzie osiągnięta wtedy, gdy  $\mathbf{v}' = \nabla\varphi$ . Stąd wynika nierówność (4.52).  $\square$

#### 4.2.2. Równanie Bernoulliego

Jednym z ważnych narzędzi pozwalających badać ruch płynu nielepkiego jest równanie Bernoulliego. Matematycznie równanie to wyraża całkę pierwszą równania Eulera. Całka ta ma popularną, fizyczną interpretację jako równanie zachowania energii.

Równanie ruchu dla płynu nielepkiego dopuszcza istnienie całek pierwszych dla przepływu ustalonego oraz dla przepływu potencjalnego.

W przypadku przepływu ustalonego ( $\frac{\partial v_i}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\rho = \text{const}$ ) równanie Eulera (4.9) ma postać:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla B, \quad (4.56)$$

gdzie  $B = \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} \right)$ . Jak wiemy (patrz rys. 1.55), iloczyn wektorowy  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  jest prostopadły zarówno do wektora  $\mathbf{v}$ , jak i  $\boldsymbol{\omega}$ . Mnożąc skalarnie równanie (4.56) przez jednostkowy wektor styczny do linii prądu  $\mathbf{e}_v$ , otrzymujemy:

$$\mathbf{e}_v \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = -\nabla B \cdot \mathbf{e}_v = 0. \quad (4.57)$$

Iloczyn  $\nabla B \cdot \mathbf{e}_v = \frac{\partial B}{\partial s}$  jest pochodną kierunkową w kierunku linii prądu. Z równania (4.57) wynika, że wzdłuż linii prądu funkcja  $B$  jest stała:

$$B = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} = C_v. \quad (4.58)$$

Równanie (4.58) jest całką ruchu równania Eulera (4.9) dla płynu nielepkiego i nieściśliwego. Równanie jest prawdziwe również dla płynu barotropowego (patrz wzory (4.11) i (4.13)). Nazywa się je równaniem Bernoulliego. Stała  $C_v$  po prawej stronie równania (4.58) może przyjmować różne wartości na różnych liniach prądu.

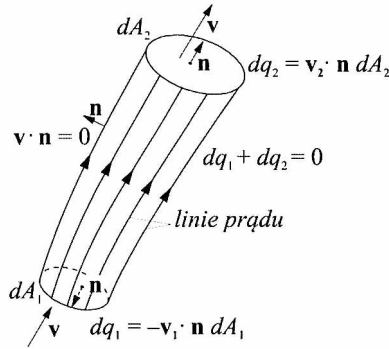
Fizyczna interpretacja równania (4.58) jest taka, że dla ustalonego nieściśliwego przepływu nielepkiego suma przypadająca na jednostkę masy energii kinetycznej, ciśnienia i potencjału siły masowej jest stała wzdłuż linii prądu.

Podobny wniosek można sformułować dla linii wirowych, tj. takich, do których wektory wirowości są styczne w ich każdym punkcie. Po pomnożeniu skalarnym



równania (4.56) przez jednostkowy wektor  $\mathbf{e}_\omega$ , otrzymujemy, że wzdłuż linii wirowych funkcja  $B(x_1, x_2, x_3) = C_\omega$ , gdzie  $C_\omega$  jest stałą, która może przyjmować różne wartości na różnych liniach wirowych.

Do równania Bernoulliego zazwyczaj dołączane jest równanie ciągłości.



Rys. 4.2: Rurka prądu pola prędkości

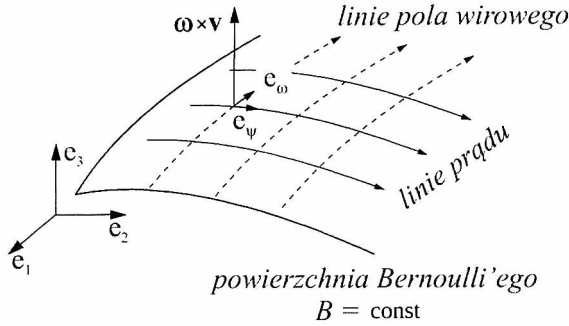
Jeżeli wzdłuż wybranej linii prądu utworzymy rurkę, której ściany boczne utworzone są z linii prądu, to dla płynu nieściśliwego na mocy twierdzenia Gaussa zachodzi zależność:

$$0 = \int_{\Omega_r} \operatorname{div} \mathbf{v} dv = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.59)$$

z której wynika, że strumień objętości w rurce, którą nazywa się rurką prądu, ma wartość stałą  $A_1 V_1 = A_2 V_2$ , gdzie  $V_i$  jest prędkością średnią w przekroju  $A_i$ . Strumień przez powierzchnie boczne rurki jest równy zero, ponieważ  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Interesujące jest również to, że zachowują się wzdłuż rurki prądu strumienie pól wektorowych  $B\mathbf{v}$  oraz  $B\boldsymbol{\omega}$ , ponieważ są one także bezźródłowe, tzn.  $\operatorname{div}(B\mathbf{v}) = 0$  i  $\operatorname{div}(B\boldsymbol{\omega}) = 0$ . Wynika to z tożsamości wektorowej (1.108) oraz z tego, że  $\nabla B = 0$ .

Zwróćmy uwagę, że pole wektorowe  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  jest polem potencjalnym z potencjałem  $B$  (patrz wzór (4.57)). W wybranym punkcie tego pola wektorowego można poprowadzić isopowierzchnię ortogonalną do linii tego pola wektorowego. Płaszczyzna styczna do tej powierzchni będzie utworzona z linii prądu i linii wirowości [59]. Powierzchnia  $B(x_1, x_2, x_3) = C$  jest utworzona z siatki linii prądu oraz linii wirowych i nazywana jest powierzchnią Bernoulliego (rys. 4.3). Jeżeli w całym obszarze przepływu  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \equiv 0$ , to trójmian Bernoulliego  $B$  ma tę samą wartość dla całego obszaru. Sytuacja taka zachodzi, gdy mamy do czynienia z przepływem potencjalnym  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  lub z przepływem, w którym linie prądu są równoległe do linii pola wirowości  $\mathbf{v} = \lambda\boldsymbol{\omega}$  (przepływ Beltramiego).

Duże znaczenie równania Bernoulliego w praktyce wynika z tego, że pokazuje ono prostą relację pomiędzy ciśnieniem a prędkością. Potencjał siły masowej



**Rys. 4.3:** Powierzchnia Bernoulliego  $B(x_1, x_2, x_3) = C$  utworzona przez rodzinę linii prądu i linii pola wirowości

w polu grawitacyjnym ma postać  $\Phi = -zg$  ( $x_3 \equiv z$ ). Dla dwóch różnych punktów w przestrzeni 1 i 2 zachodzi zależność:

$$\frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \text{const.} \quad (4.60)$$

Zmienną  $z$  nazywa się wysokością niwelacyjną. Z równania jasno wynika, że gdy  $z_1 = z_2$ , wzrost prędkości może nastąpić kosztem zmniejszenia się ciśnienia. Jest to podstawowa zależność wykorzystywana w praktyce do konstrukcji przyrządów służących do pomiaru lokalnej wartości prędkości oraz strumienia objętości.

Prawo Bernoulliego jest podstawowym równaniem wykorzystanym w jednowymiarowych obliczeniach hydraulicznych [19], [42]. Jest z nim związane jednowymiarowe równanie ciągłości  $Av = \text{const}$ , gdzie  $A$  jest polem przekroju rurociągu a  $v$  prędkością średnią.

W przypadku przepływu potencjalnego, aby otrzymać całkę ruchu, nie musimy zakładać stacjonarności pola. Równanie Eulera w formie Gromeki–Lamba (4.13) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho \Phi + \frac{p}{\rho} \right). \quad (4.61)$$

Po przeniesieniu wyrazów na jedną stronę otrzymujemy równanie:

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (4.62)$$

z którego wynika, że wyrażenie w nawiasie nie zależy od współrzędnych przestrzennych  $x_i$  i jest zależne od pewnej dowolnej funkcji od czasu;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (4.63)$$

Wyrażenie (4.63) nazywa się całką Cauchy'ego–Lagrange'a [45] lub niestacjonarnym równaniem Bernoulliego [96]. Jak już wiemy, w przypadku przepływu potencjalnego i nieściśliwego, aby wyznaczyć pole prędkości, należy rozwiązać równanie Laplace'a dla potencjału  $\varphi$  (patrz wzór (4.44)), a następnie pole prędkości z równania  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ . Gdy znamy już prędkość  $\mathbf{v}$ , równanie (4.63) może być wykorzystane do wyznaczenia ciśnienia:

$$p = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\Phi + \rho f(t). \quad (4.64)$$

Funkcja  $f(t)$  może być zadana w jakimś wybranym punkcie przestrzeni. Obowiązuje ona dla całego obszaru przepływu i nie zależy od zmiennych przestrzennych.

Potencjał prędkości  $\varphi$  wyznaczany jest z dokładnością do pewnej funkcji zależnej od czasu i dodanie tej funkcji do potencjału  $\varphi - \int f(t)dt$  nie zmienia pola prędkości  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ . Można więc przyjąć, że  $f(t) \equiv 0$ .

Człon  $\frac{1}{2}\rho v^2$  nazywa się ciśnieniem dynamicznym. W przypadku przepływów szybko zmiennych w czasie dominujące znaczenie ma człon  $\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t}$  nazywany niekiedy ciśnieniem przejściowym [39]. Dla potencjalnego przepływu stacjonarnego ciśnienie wyznaczamy ze wzoru (4.45).

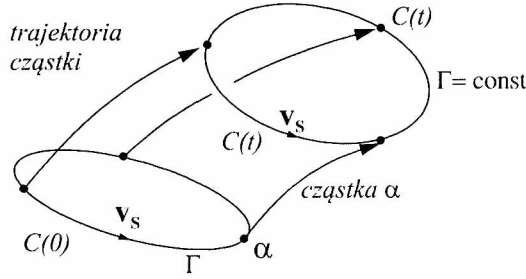
Równanie (4.63) jest wykorzystywane również w badaniach dotyczących ruchu powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki. Powierzchnią rozdziału może być powierzchnia, na której przy przechodzeniu z jednego ośrodka do drugiego prędkość styczna zmienia się skokowo. Ośrodki mogą różnić się również skokowo wartością gęstości. Przy przechodzeniu przez taką granicę rozdziału potencjały prędkości są nieciągłe i doznają skoku  $\mu = \varphi_1 - \varphi_2$ . Skoku doznają również składowe styczne pola prędkości  $\gamma = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{s}$ . Stosując równanie (4.63) dla każdego z ośrodków i uwzględniając ich różnicę, można wyprowadzić równanie opisujące zmianę w czasie skoku potencjału  $\mu$  lub prędkości  $\gamma$  i wyznaczyć równanie ewolucji powierzchni [49].

### 4.2.3. Twierdzenie o cyrkulacji pola prędkości (twierdzenie Kelvina)

Przypomnijmy, że cyrkulacją  $\Gamma$  pola prędkości  $\mathbf{v}$  nazywa się całkę liniową wzdłuż zamkniętej krzywej  $C$ :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \oint_C (v_1 dx + v_2 dx_2 + v_3 dx_3), \quad (4.65)$$

gdzie  $\oint$  oznacza całkę wzdłuż zamkniętej krzywej  $C$  a  $\mathbf{s}^0 ds = (dx_1, dx_2, dx_3)$  jest elementem krzywej, po której odbywa się całkowanie. Dalej będziemy badać cyrkulację wzdłuż krzywej unoszonej jest przepływ, a więc  $C(t) = \Phi(C(0))$ . Krzywa  $C(t)$  utworzona jest z tych samych cząstek. Mówimy, że krzywa  $C$  jest krzywą materialną (rys. 4.4).



**Rys. 4.4:** Na krzywej  $C$  unoszonej przez przepływ  $C_t = \Phi(C(0))$  w płynie nielepkim cyrkulacja jest stała

**Twierdzenie 4.4.** W potencjalnym polu sił  $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$ , w płynie nielepkim o stałej gęstości lub w płynie barotropowym ( $\rho = \rho(p)$ ) cyrkulacja wzdłuż krzywej  $C$  unoszonej przez przepływ nie zależy od czasu, czyli

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Phi(C(t))} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (4.66)$$

**Dowód:** W dowodzie twierdzenia wykorzystamy następujący wzór:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Phi(C(t))} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Phi(C(t))} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.67)$$

Przyjmijmy, że krzywa  $C$  ma przedstawienie parametryczne  $C = \phi(a)$ ,  $0 \leq a \leq 1$ . Wtedy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\Phi(C(t))} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \mathbf{v}(\phi(a), t) \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\phi(a), t) da = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\phi(a), t) + \mathbf{v} \frac{\partial^2}{\partial t \partial a} \Phi(\phi(a), t) \right) da = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\phi(a), t) + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{v}(\Phi(\phi(a), t)) \right) da. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Człon  $\left( \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{v}(\Phi(\phi(a), t)) \right) da = d\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)$ . Całka  $\oint d\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) = 0$  jako całka z różniczki po krzywej zamkniętej. Powracając do zmiennych pierwotnych krzywej  $C$ , otrzymujemy wzór (4.67).

Zwróćmy uwagę, że założenia twierdzenia Kelvina gwarantują, że:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla H,$$

gdzie  $H = \frac{p}{\rho} - \Phi$ , a dla płynu barotropowego  $H = \mathcal{P} - \Phi$ . Tak więc:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Phi(C(t))} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Phi(C(t))} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_{\Phi(C(t))} dH = 0. \quad (4.69)$$

Stąd wynika teza twierdzenia Kelvina o zachowaniu cyrkulacji.  $\square$

Warto zwrócić uwagę, że skoro  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla H$ , to pole przyspieszeń  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  jest bezwirowe,  $\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ .

Wiemy (rozdz. 1), że cyrkulacja pola prędkości wzdłuż krzywej  $C$  wiąże się ze strumieniem pola wirowości przez powierzchnię rozpiętą na tej krzywej (twierdzenie Stokesa (1.83)). Jeżeli powierzchnię rozpiętą na krzywej  $C$  podzielimy na małe prostokątne komórki o brzegach  $C_i$ , to cyrkulacja po krzywej  $C$  jest sumą cyrkulacji po krzywych  $C_i$  (patrz rys. 1.25). Z twierdzenia Kelvina wynika, że dla dowolnego czasu  $t$  mamy:

$$\Gamma = \oint_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_i} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{const}. \quad (4.70)$$

Jeżeli w chwili początkowej ruch płynu był bezwirowy  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , to po każdej krzywej  $C_i$  zamkniętej wewnątrz przepływu cyrkulacja będzie równa zeru. Strumienie wirowości przez powierzchnie rozpięte na tych krzywych też będą równe zeru i muszą takimi pozostawać. Stąd wniosek, że jeżeli w chwili początkowej przepływ płynu był bezwirowy, to takim będzie również w chwilach późniejszych.

Powtarzając powyższe rozumowanie dla przypadku, gdy w chwili początkowej wirowość była różna od zera, można wyprowadzić wniosek, że jeżeli w chwili początkowej ruch płynu był wirowy, to taki pozostanie.

Oczywiście, taki obraz przepływu jest nierealistyczny. Wynika on z założenia braku lepkości płynu. W rzeczywistych przepływach obserwuje się zarówno generację wirowości, jak i jej zanikanie. Przyczyną tego jest obecność w przepływach rzeczywistych tarcia wewnętrznego i naprężeń stycznych. W przypadku przepływów nieściśliwych głównym źródłem wirowości będą obszary wokół ciała stałego (warstwa przyścienna), duże gradienty prędkości na granicy śladu aerodynamicznego za opływającym ciałem, powierzchnia swobodna.

### 4.3. Twierdzenie o rozkładzie pola wektorowego (twierdzenie Helmholtza)

Z jednego z najważniejszych twierdzeń rachunku wektorowego, tj twierdzenia Helmholtza o rozkładzie pola wektorowego, wynika, że znajomość dywergencji  $\Theta = \text{div } \mathbf{v}$  oraz pola wirowości  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$  z pewnymi warunkami brzegowymi pozwala jednoznacznie wyznaczyć pole  $\mathbf{v}$  [45].

**Twierdzenie 4.5.** *Dowolne, różniczkowalne pole wektorowe  $\mathbf{v}$ , takie że jego moduł  $|\mathbf{v}|$ , dywergencja  $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v}$  oraz wirowość  $|\boldsymbol{\omega}|$  maleją do zera dostatecznie szybko<sup>(2)</sup>, gdy  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ , można przedstawić z dokładnością do wektora stałego w postaci sumy pola potencjalnego (bezwirowego)  $\mathbf{v}_1$  oraz pola solenoidalnego (nieściśliwego)  $\mathbf{v}_2$ :*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad (4.71)$$

gdzie

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0. \quad (4.72)$$

**Dowód:** Najpierw skonstruujemy pole potencjalne  $\mathbf{v}_1$ , wykorzystując do tego znajomość dywergencji  $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v}$ . Wiemy, że wirowość dowolnego pola potencjalnego (w obszarze jednopójnym) jest równa zeru, w związku z czym pole  $\mathbf{v}_1$  można przedstawić jako:

$$\mathbf{v}_1 = \nabla\varphi + \mathbf{c}_1, \quad (4.73)$$

gdzie  $\mathbf{c}_1$  jest wektorem stałym,  $\varphi$  jednowartościową funkcją potencjalną. Działając operatorem dywergencji na równanie (4.73), otrzymujemy:

$$\Delta\varphi = \Theta. \quad (4.74)$$

Jest to równanie Poissona. Z rozdziału pierwszego (wzór (1.129)) wiemy, że:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\Theta}{r} dv. \quad (4.75)$$

Pierwsza składowa  $\mathbf{v}_1$  ma więc postać:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_D \frac{\Theta}{r} dv + \mathbf{c}_1. \quad (4.76)$$

Wyznaczamy teraz drugą składową sumy (4.71)  $\mathbf{v}_2$  na podstawie pola wirowości. Wiemy, że dywergencja z dowolnego pola wirowości jest równa zeru  $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ . Ponieważ  $\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$ , to pole może mieć reprezentację:

$$\mathbf{v}_2 = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{c}_2, \quad (4.77)$$

gdzie  $\mathbf{c}_2$  jest dowolną stałą. Pole wektorowe  $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  nazywa się potencjałem wektorowym. Ponieważ wirowość z dowolnego pola potencjalnego  $\phi$  jest równa zeru  $\operatorname{rot} \nabla\phi \equiv 0$ , to potencjał wektorowy wyznaczany jest z dokładnością do gradientu z dowolnej funkcji  $\phi$ . Jeżeli  $\boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{\Psi} + \nabla\phi$ , to:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}' = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} + \operatorname{rot} \nabla\phi = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}. \quad (4.78)$$

<sup>(2)</sup> Oznacza to, że  $\mathbf{v}$  maleje jak  $\frac{1}{r^{1+\epsilon}}$ , gdy  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , a  $\boldsymbol{\omega}$  maleją jak  $\frac{1}{r^{2+\epsilon}}$ , gdy  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Działając obustronnie operatorem rotacji na równanie (4.77), otrzymujemy:

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_2 = \mathbf{rot} \mathbf{rot} \Psi. \quad (4.79)$$

Następnie wykorzystamy tożsamość wektorową:

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \Psi = \nabla(\mathbf{div} \Psi) - \Delta \Psi, \quad (4.80)$$

gdzie  $\Delta \Psi = (\Delta \Psi_1, \Delta \Psi_2, \Delta \Psi_3)$ . Bez utraty ogólności rozważań możemy założyć, że  $\mathbf{div} \Psi = 0$ . Jeżeli równość ta nie zachodziłaby i  $\mathbf{div} \Psi = \Theta' \neq 0$ , to zawsze możemy dobrać pewną funkcję potencjalną  $\varphi'$ , tak aby  $\Psi' = \Psi + \nabla\varphi'$  było już polem nieściśliwym. Potencjał  $\varphi'$  otrzymujemy, rozwiązując równanie Poissona  $\Delta\varphi' = -\Theta'$ . Z równania (4.79) i tożsamości (4.80) wynika, że składowe potencjału wektorowego  $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  stanowią rozwiązania równania Poissona:

$$\Delta \Psi_i = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.81)$$

Rozwiązania równania (4.81), mając na uwadze założenie o dostatecznie szybkim zanikaniu pola  $\mathbf{v}$  w nieskończoności, można przedstawić jako:

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\omega_i(\mathbf{x}')}{r} dv', \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.82)$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}.$$

Stąd pole  $\mathbf{v}_2$  można wyrazić jako:

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{rot} \int_D \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{r} dv' + \mathbf{c}_2. \quad (4.83)$$

Dodając do siebie równania (4.76) oraz (4.83), otrzymujemy szukany rozkład z dokładnością do stałego pola wektorowego:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_D \frac{\Theta(\mathbf{x}')}{r} dv' + \frac{1}{4\pi} \mathbf{rot} \int_D \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{r} dv'. \quad (4.84)$$

Jednoznaczność rozkładu można wykazać, odwołując się do zasady maksimum dla równania Laplace'a (patrz rozdz. 1). A mianowicie, jeżeli dla zadanej dywergencji  $\Theta$  i pola wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  istniałyby dwa różne rozkłady  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  oraz  $\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$ , to różnica tych pól spełniałaby równanie Laplace'a z zerowymi warunkami brzegowymi. Ponieważ wartość minimalna i maksymalna rozwiązania mogą osiągnąć swoją wartość tylko na brzegu, to  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1$  oraz  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2$ .  $\square$

Dla dwóch wymiarów wzór (4.84) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{1}{2\pi} \nabla \int_D \Theta(\mathbf{x}') \ln rdS' + \frac{1}{2\pi} \mathbf{rot} \int_D \omega(\mathbf{x}') \ln rdS', \\ r &= \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Poniżej zostaną przytoczone klasyczne przykłady przepływów potencjalnych trójwymiarowych. Przykłady ruchu potencjalnego dwuwymiarowego zostaną podane w oddzielnym rozdziale.

## 4.4. Przykłady trójwymiarowych przepływów potencjalnych

### 4.4.1. Źródło punktowe

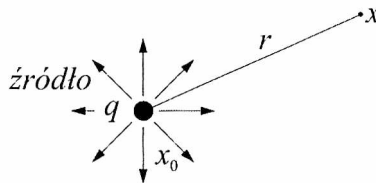
W praktyce użyteczne staje się uogólnienie równania ciągłości przez wstawienie do prawej strony równania (3.3) objętościowego członu źródłowego:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{div} \mathbf{v} = f(\mathbf{x}). \quad (4.86)$$

Dla ruchu płynu nieściśliwego i bezwirowego (potencjalnego, gdzie  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ ) równanie ciągłości przyjmuje postać:

$$\Delta\varphi = f(\mathbf{x}) \quad (4.87)$$

Poszukiwanie pola prędkości wywołanego rozkładem źródeł  $f(\mathbf{x})$  sprowadza się do wyznaczenia potencjału prędkości z równania (4.87). Rozpatrzmy przepływ wywołany umiejscowieniem w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  źródła o jednostkowym strumieniu objętości ( $q = 1$ ), gdy wypływ odbywa się równomiernie we wszystkich kierunkach  $f = q\delta^3(\mathbf{x})$ , gdzie  $\delta^3(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$  jest funkcją Diraca (rys. 4.5).



**Rys. 4.5:** Punkt w przestrzeni wytwarzający strumień objętości  $q$  nazywany jest źródłem

Jeżeli otoczmy ten punkt  $\varepsilon$ -ową sferą, to na mocy twierdzenia Gaussa możemy zapisać:



$$q = \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS} = \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} dv_x = 1. \quad (4.88)$$

Jeżeli przejdziemy z promieniem kuli  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to w granicy otrzymamy źródło. Potencjał takiego przepływu, ze względu na założoną symetrię, powinien zależeć tylko od odległości  $r$  od źródła:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|. \quad (4.89)$$

Przyjmijmy, że układ współrzędnych jest sferyczny (patrz rozdz. 1). Wiemy, że równanie Laplace'a we współrzędnych sferycznych, zależy tylko od promienia  $r$ , ma postać (1.101):

$$\frac{\partial \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0. \quad (4.90)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$\varphi(r) = -\frac{A}{r} + B. \quad (4.91)$$

Aby potencjał w nieskończoności miał wartość równą zero, należy przyjąć, że stała  $B$  jest równa zero. Nie ma ona wpływu na wartość prędkości, ponieważ  $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ . Stałą  $A$  można wyznaczyć z warunku, że strumień objętości płynu przepływającego przez powierzchnię dowolnej kuli, której środek umieszczony jest w źródle, powinien być zawsze równy jedności. Prędkość radialna, prostopadła do powierzchni kuli o promieniu  $R$  jest równa:

$$v_R = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{A}{R^2}. \quad (4.92)$$

Powierzchnia kuli wynosi  $4\pi R^2$ . Z warunku  $v_R 4\pi R^2 = 1$  bezpośrednio wynika, że stała  $A = \frac{1}{4\pi}$ . Prędkość płynu wyraża się wzorem:

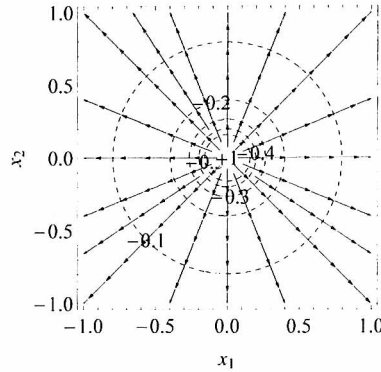
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}, \quad (4.93)$$

a potencjał przyjmuje postać:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (4.94)$$

Linie prądu wywołane źródłem o jednostkowej wydajności przedstawiają promienie wychodzące z punktu położenia źródła (rys. 4.6). Prędkość wzdłuż promieni opisana jest wzorem (4.93). Jeżeli intensywność źródła ma wartość  $q$ , to odpowiadający jej potencjał ma postać:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi r}. \quad (4.95)$$



**Rys. 4.6:** Linie prądu (linie ze strzałkami) i linie stałego potencjału (linie przerywane),  $\varphi = -0,1, -0,2, -0,3, -0,4, -0,5$ , wytworzone przez jednostkowe źródło

Jeżeli  $q$  jest ujemne, to zamiast źródła otrzymujemy upust (ściek).

Funkcja (4.94) ze względu na rolę, jaką odgrywa w teorii równań różniczkowych cząstkowych, nosi nazwę rozwiązania fundamentalnego (inaczej: funkcji Greena dla obszaru nieograniczonego). Zwróćmy uwagę, że różni się ona tylko stałą  $\frac{1}{4\pi}$  od podanych rozwiązań równania Lapalce'a (1.98). Równanie dla rozwiązania fundamentalnego można, stosując funkcję delty Diraca, zapisać jako:

$$\Delta G = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (4.96)$$

przy czym:

$$\int_{\partial B\epsilon(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial G}{\partial n} dS = 1. \quad (4.97)$$

Funkcja  $\delta^3(x_1, x_2, x_3)$  nazywana jest deltą Driaca a w przestrzeni trójwymiarowej i określana jest następująco [54], [71]:

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3) = \delta^3(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0 \\ \infty & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}, \quad (4.98)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^3(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1, \quad (4.99)$$

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3). \quad (4.100)$$

Własności funkcji  $\delta$  zostaną podana w rozdz. 4.4.2.

Funkcja  $G$  jest symetryczną funkcją dwóch argumentów  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , ponieważ  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Można sprawdzić, używając argumentów z rozdz. 1, że:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad \nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.101)$$

Prześledźmy, jak za pomocą funkcji Greena można skonstruować rozwiązanie równanie Poissona w obszarze nieograniczonym [45]. Załóżmy, że w obszarze  $\Omega$  zadana jest funkcja  $\Theta(x_1, x_2, x_3)$ . Potencjał prędkości spełnia równanie Poissona (4.74):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \Theta(x_1, x_2, x_3). \quad (4.102)$$

Podzielmy obszar  $\Omega$  na małe objętości  $\delta v'_i$ . W każdej objętości wybierzmy punkt  $M_i$  o współrzędnych  $x'_{1_i}, x'_{2_i}, x'_{3_i}$  i w każdym punkcie umieśćmy źródło o intensywności  $q_i = \delta v'_i \Theta(x'_{1_i}, x'_{2_i}, x'_{3_i})$ . Przybliżone rozwiązanie w punkcie  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  otrzymujemy, sumując potencjały wszystkich elementarnych źródeł o intensywności  $q_i$ :

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{\Theta(x'_{1_i}, x'_{2_i}, x'_{3_i})}{r_i} \delta v'_i, \quad (4.103)$$

$$r_i = \sqrt{(x'_{1_i} - x_1)^2 + (x'_{2_i} - x_2)^2 + (x'_{3_i} - x_3)^2}. \quad (4.104)$$

Dokonując coraz drobniejszego podziału  $\delta v_i \rightarrow 0$  w granicy, otrzymujemy rozwiązanie, które możemy zapisać jako (patrz wzór (4.75)):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv'. \quad (4.105)$$

Z konstrukcji rozwiązania wynika, dlaczego funkcja Greena nazywana jest również funkcją źródła. Wyraża ona potencjał prędkości płynu w punkcie  $\mathbf{x}$  wywołany jednostkowym źródłem umieszczonym w punkcie  $\mathbf{x}'$ .

Sprawdźmy jeszcze, czy równanie (4.105) spełnia równanie Poissona:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(\mathbf{x}) &= \Delta \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv' = \\ &= \int_{\Omega} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv' = \int_{\Omega} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv' = \Theta(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.106)$$

W równaniu (4.106) laplasian liczony jest po zmiennych nieprimowanych.

Jak można się już zorientować, przy wyznaczaniu funkcji Greena dla całego obszaru (rozwiązania fundamentalnego) istotny jest warunek znikania funkcji w nieskończoności. Funkcja Greena zależy od obszaru, w którym poszukujemy rozwiązania. Można wyznaczyć funkcję Greena dla obszaru skończonego, rozwiązując zagadnienie:

$$\Delta G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.107)$$

$$G|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.108)$$

Wystarczy przyjąć, że  $G = \frac{1}{4\pi r} + F$ , gdzie funkcja  $F$  spełnia równanie Laplace'a z warunkiem brzegowym  $F|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r}$ , czyli:

$$\Delta F = 0, \quad (4.109)$$

$$F|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (4.110)$$

Aby rozwiązać zagadnienie w obszarze ograniczonym:

$$\Delta\varphi = -\Theta \quad \text{na } \Omega, \quad (4.111)$$

$$\varphi = g \quad \text{na brzegu } \partial\Omega, \quad (4.112)$$

należy dodatkowo rozwiązać równanie Laplace'a (4.109) na funkcję  $F$  i rozwiązanie dodać do funkcji Greena w obszarze nieograniczonym. Rozwiązanie wyraża się wzorem (4.75).

Rozwiązanie fundamentalne (funkcja Greena) dla równania Poissona na płaszczyźnie, co można wyprowadzić, stosując postępowanie przytoczone powyżej, ma postać:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}. \quad (4.113)$$

#### 4.4.2. Dipol

W sytuacji, gdy symetria wypływu ze źródła jest zakłócona, wygodniej jest posługiwać się osobliwością nazywaną dipolem.

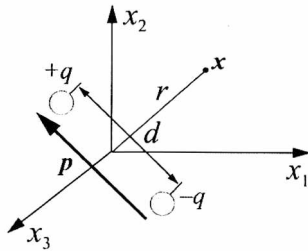
Równanie Laplace'a jest równaniem liniowym i, jak powiedziano w rozdz. 1, rozwiązanie równania Laplace'a  $u(x_1, x_2, x_3)$  posiada wszystkie pochodne. Pochodne względem dowolnej zmiennej  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  też są rozwiązaniami równania Laplace'a, a w szczególności pochodna kierunkowa rozwiązania fundamentalnego w kierunku wektora  $\mathbf{p}$ . Potencjał dipola wyraża się jako:

$$\varphi_d(r) = \mu \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{4\pi r} = -\frac{\mu \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3}, \quad (4.114)$$

gdzie  $\mu$  jest intensywnością dipola,  $\mathbf{p}$  kierunkiem działania dipola. Pole prędkości generowane przez jednostkowy dipol ( $\mu = 1$ ) wyraża się wzorem:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi_d = \frac{1}{4\pi r^3} \left( \mathbf{p} - \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{x}}{r^2} \right). \quad (4.115)$$

Dipol w praktyce możemy zrealizować za pomocą źródła o intensywności  $+q$  i upustu  $-q$  położonych blisko siebie.



Rys. 4.7: Dwa źródła o przeciwnej wydajności  $q$  oraz  $-q$  w odległości  $d$  od siebie, gdzie  $p$  oznacza kierunek działania dipola,  $r \gg d$

Jeżeli umieścimy źródło w odległości  $\frac{1}{2}\mathbf{d}$  od początku układu a upust w odległości  $-\frac{1}{2}\mathbf{d}$ , to potencjał w punkcie  $\mathbf{x}$  jest sumą potencjałów obu źródeł (rys. 4.7) i wyraża się jako:

$$\begin{aligned} \varphi_d(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{d}|} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d/2)^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d/2)^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}} \right). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Zakładając, że  $r \gg d$ , i zachowując w wyrażeniu (4.116) tylko człony pierwszego rzędu względem  $d/r$ , potencjał dwóch źródeł o przeciwnych znakach można przybliżyć jako:

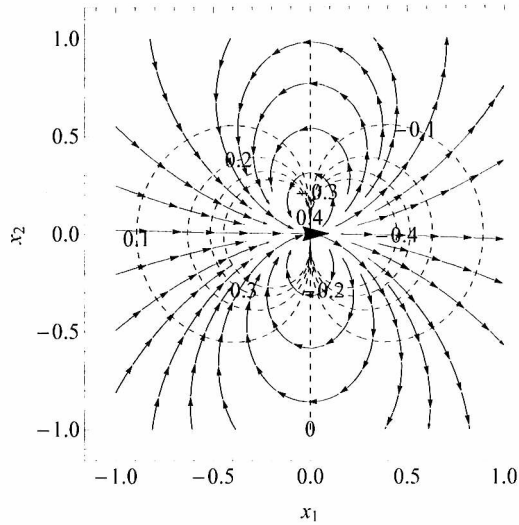
$$\varphi_d(\mathbf{x}) \approx \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{r^2}}} \right). \quad (4.117)$$

Rozwijając w szereg wyrażenia w nawiasie, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi_d(\mathbf{x}) &\approx \frac{q}{4\pi} \left( \left(1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} + \dots\right) - \left(1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} + \dots\right) \right) = \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot (q\mathbf{d})}{4\pi r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{4\pi r^3}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Dokonując przejścia granicznego w taki sposób, że gdy  $d \rightarrow 0$ , to  $q\mathbf{d}$  dąży do skończonej wartości  $\mu\mathbf{p}$ , otrzymujemy dipol o intensywności  $\mu$  i kierunku  $\mathbf{p}$ . Jeżeli kierunek dipola pokrywa się np. z osią  $x_1$ , a dipol umieszczony jest w początku układu współrzędnych  $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$ , wtedy jego potencjał ma postać:

$$\varphi_d(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial \left( \frac{1}{4\pi r} \right)}{\partial x_1} = -\mu \frac{x_1}{4\pi r^3}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (4.119)$$



**Rys. 4.8:** Linie prądu (linie ze strzałkami) oraz linie ekwipotencjalne (linie przerywane),  $\varphi = -0,4, -0,3, -0,2, -0,1, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$ , w płaszczyźnie  $x_3 = 0,01$  generowane przez jednostkowy dipol umieszczony w początku układu wzdłuż osi  $x_1$

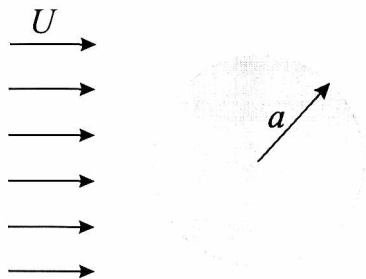
Pole prędkości wyraża się następująco:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi_d = \left( -\frac{\mu}{4\pi r^3} \left( 1 - \frac{3x_1^2}{r^2} \right), -\frac{3x_1x_2}{4\pi r^5}, -\frac{3x_1x_3}{4\pi r^5} \right). \quad (4.120)$$

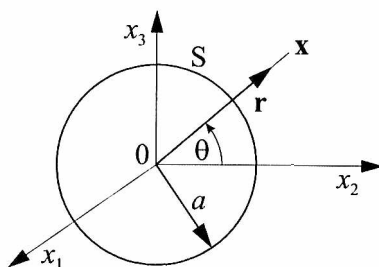
Element linii prądu  $d\mathbf{x}$  jest równoległy do  $\mathbf{v} = \nabla\varphi_d$ , tak więc linie prądu są lokalnie ortogonalne do powierzchni  $\varphi_d(\mathbf{x}) = \text{const}$  (rys. 4.8).

#### 4.4.3. Optyw kuli strumieniem jednorodnym

Rozpatrzmy zagadnienie optywu kuli  $B$  umieszczonej w jednorodnym strumieniu. Potencjał strumienia jednorodnego zadany jest funkcją  $\varphi(x, y, z) = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ , gdzie  $A, B, C$  są stałymi. Można sprawdzić, że  $\Delta\varphi = 0$ . Prędkość  $\mathbf{v} = \nabla\varphi = (A, B, C)$  jest wektorem stałym w każdym punkcie przestrzeni, dlatego taki przepływ nazywa się przepływem jednorodnym. Szczególnym przypadkiem strumienia jednorodnego jest przepływ wzdłuż osi  $x_1$ , którego potencjał wynosi  $\varphi = Ux_1$ , gdzie  $U$  oznacza prędkość strumienia płynu w kierunku osi  $x_1$ . Interesuje nas pole prędkości wynikające z optywu kuli strumieniem jednorodnym



Rys. 4.9: Optyw kuli strumieniem jednorodnym



Rys. 4.10: Układ współrzędnych prostokątnych wraz z układem sferycznym wykorzystywany do badania optywu kuli strumieniem jednorodnym. Przepływ nie zależy od zmiennej azymutalnej  $\phi$

w kierunku osi  $x_1$  (rys. 4.9). Aby wyznaczyć potencjał pola przepływu, należy rozwiązać następujące zagadnienie Neumanna:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \varphi|_{x \rightarrow \infty} = Ux_1. \quad (4.121)$$

Ze względu na geometrię przepływu wygodnie jest przeprowadzić obliczenia we współrzędnych sferycznych  $(r, \theta, \phi)$  (rys. 4.10). Równanie Laplace'a ma postać:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (4.122)$$

gdzie:  $0 < r < a$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \phi < \pi$ ,  $a$  jest promieniem kuli.

Zagadnienie (4.122) jest zewnętrznym zagadnieniem Neumanna (rozwiązania szukamy w obszarze nieograniczonym, na zewnątrz  $B$ ). Założymy, że przepływ jest osiowo symetryczny i nie zależy od współrzędnej azymutalnej  $\phi$ . Poszukiwany potencjał jest funkcją dwóch zmiennych  $r, \theta$ , czyli  $\varphi(r, \theta)$ . Wygodnie jest oś współrzędnych  $x_3$  służącą do opisu położenia punktów na kuli skierować zgodnie z kierunkiem przepływu wzdłuż osi  $x_1$  i w ten sposób mierzyć  $\theta$  od osi  $x_1$ . Zagadnienie brzegowe dla równania Laplace'a przyjmuje postać:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (4.123)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_S = 0, \quad (4.124)$$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow U \cos \theta. \quad (4.125)$$

Do rozwiązania zagadnienia (4.123) można wykorzystać metodę rozdzielania zmiennych. Metodę tę stosuje się z powodzeniem w przypadku zagadnień liniowych

oraz prostych obszarów geometrycznych, takich jak np.: sześcian, kula, prostokąt, koło. Przyjmuje się, że rozwiązanie można przedstawić za pomocą iloczynu dwóch funkcji, z których każda zależy tylko od jednej zmiennej. W tym przypadku:

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta), \quad (4.126)$$

gdzie funkcje  $R(r)$  oraz  $\Theta(\theta)$  są funkcjami tylko jednej zmiennej zależnymi odpowiednio od  $r$  i  $\theta$ . Po podstawieniu funkcji (4.126) do równania (4.123) otrzymujemy:

$$\Theta \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + R \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0. \quad (4.127)$$

Dzieląc równanie (4.127) stronami przez  $R(r)\Theta(\theta)$  i przenosząc funkcje od jednej zmiennej na przeciwne strony, otrzymujemy:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \lambda. \quad (4.128)$$

Lewa strona wyrażenia (4.128) jest funkcją tylko zmiennej  $r$ , a prawa tylko zmiennej  $\theta$ . Zmienne niezależne  $r$  oraz  $\theta$  mogą przyjmować dowolne wartości, co będzie wpływało na wartość funkcji po obu stronach równania. Aby można było zachować równość, każda ze stron powinna równać się tej samej stałej. Stałą tę oznaczono jako  $\lambda$ . Otrzymuje się dwa równania:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0, \quad (4.129a)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta = 0. \quad (4.129b)$$

Równanie (4.129a) względem zmiennej  $r$  jest równaniem Eulera  $r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$ . Rozwiązania poszukuje się w postaci  $R(r) = r^\alpha$ . Po podstawieniu tej postaci rozwiązania do równania (4.129a) otrzymujemy równanie kwadratowe  $\alpha(\alpha+1) - \lambda = 0$ . Przyjmijmy, że stałą  $\lambda$  można wyrazić w postaci  $\lambda = (l+1)l$ , gdzie  $l$  jest jeszcze nieokreśloną liczbą [35]. Pierwiastki tego równania kwadratowego wyrażają się przez  $l$  jako  $\alpha_1 = -(l+1)$  oraz  $\alpha_2 = l$ . Rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniową rozwiązań  $r^{-(l+1)}$  oraz  $r^l$ , czyli:

$$R_l(r) = C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}. \quad (4.130)$$

Rozwiązanie (4.130) jest ważne dla dowolnych wartości  $l$ , dlatego rozwiązanie  $R_l$  i dowolne stałe  $A_l$  oraz  $B_l$  są oznaczone indeksem  $l$  wskazującym, dla której wartości  $l$  są ważne.



Zajmiemy się teraz równaniem (4.129b) względem zmiennej  $\theta$ . Dokonamy teraz zamiany zmiennej i podstawienia:

$$\Theta(\theta) = P(u), \quad \text{gdzie} \quad u = \cos \theta. \quad (4.131)$$

Na mocy reguły różniczkowania funkcji złożonej mamy:

$$\frac{dP}{du} = \frac{dP}{d\theta} \frac{d\theta}{du} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{dP}{d\theta}, \quad \text{więc} \quad \frac{dP}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP}{du}. \quad (4.132)$$

Przyjmując  $\sin^2 \theta = 1 - u^2$  oraz korzystając z równania (4.132), równanie (4.129b) można przekształcić do postaci:

$$\frac{d}{du} \left[ (1 - u^2) \frac{dP}{du} \right] + \lambda P = 0 \quad (4.133)$$

lub dalej:

$$\frac{d^2 u}{du^2} - \frac{2u}{1 - u^2} \frac{dP}{du} + \frac{\lambda}{1 - u^2} P = 0. \quad (4.134)$$

Równanie (4.134) nazywa się równaniem różniczkowym Legendre'a. Rozwiązanie ogólne liniowego równania rzędu drugiego (4.134) wyraża się jako kombinacja liniowa dwóch niezależnych rozwiązań:

$$P_L(u) = c_1 P(u) + c_2 Q(u). \quad (4.135)$$

Dla równania (4.134)  $P(u)$  są wielomianami stopnia  $n$ , które nazywa się wielomianami Legendre'a stopnia  $n$ , natomiast  $Q(u)$  są funkcjami Legendre'a drugiego rodzaju. Rozwiązanie ogólne równania (4.129b) ma postać:

$$\Theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n P_n(u) + B_n Q_n(u)). \quad (4.136)$$

Wielomiany Legendre'a  $P(u)$  są regularne (przyjmują wartości skończone) w całym przedziale  $[-1, 1]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lambda$  w równaniu (4.134) ma postać  $\lambda = n(n+1)$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną. Otrzymuje się je, rozwiązując równanie (4.134) metodą szeregów potęgowych (metoda Frobeniusa) [35]. Poszukuje się rozwiązania w postaci szeregu potęgowego  $P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$  i wyznacza relacje, jakie muszą zachodzić między współczynnikami  $a_n$ , aby spełnione było równanie (4.134). Jeżeli wyznaczymy  $P(u)$ , to drugie rozwiązanie  $Q(u)$  można otrzymać, wykorzystując metodę redukcji rzędu równania. Dalej nie będziemy zajmować się funkcjami  $Q(u)$  ze względu na fakt, że na końcu przedziału  $[-1, 1]$  dążą one do nieskończoności. Żądając, aby rozwiązanie (4.136) było ograniczone, musimy przyjąć, że współczynniki  $B_n$  są równe zeru.

Kilka przykładowych, unormowanych ( $P_n(1) = 1$ ) wielomianów Legendre'a ma postać:

$$P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u, \quad (4.137)$$

$$P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1), \quad P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u), \quad (4.138)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{8}(35u^4 - 30u^2 + 3), \quad P_5(u) = \frac{1}{8}(63u^5 - 70u^3 + 15u). \quad (4.139)$$

Wielomiany Legendre'a są ortogonalne:

$$\int_{-1}^1 P_n(u)P_m(u)du = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m \end{cases}. \quad (4.140)$$

Pozwala to na przedstawienie dowolnej funkcji  $f(u)$  określonej na przedziale  $[-1, 1]$  w postaci uogólnionego szeregu Fouriera:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(u), \quad (4.141)$$

gdzie współczynniki  $a_n$  wyznacza się, wykorzystując ortogonalność wielomianów  $P_n$  (4.140). Po pomnożeniu stronami (4.141) przez  $P_m(u)$  i scałkowaniu w przedziale  $[1, 1]$ , otrzymujemy:

$$\int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(u) \right) P_m(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^1 P_n(u)P_m(u) du = a_m \frac{2}{2m+1}. \quad (4.142)$$

Ze wzoru (4.142) wynika, że:

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(u)P_m(u)du. \quad (4.143)$$

Rozwiązanie ogólne równania Laplace'a (4.121) wyraża się następująco:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n r^n + D_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta), \quad (4.144)$$

gdzie współczynniki  $C_n$  i  $D_n$  należy określić z zadanych warunków brzegowych.

Przypomnijmy, że potencjał prędkości musi spełniać warunek  $\varphi \rightarrow Ux_1$ , gdy  $r \rightarrow \infty$ . Gdy  $r \rightarrow \infty$ , człony zawierające współczynniki  $D_n$  będą malały do zera. Musi więc zachodzić równanie:

$$Ux_1 = UrP_1(\cos \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n = C_1 r P_1(\cos \theta). \quad (4.145)$$

Tak więc  $C_1 = U$ , a pozostałe współczynniki  $C_n$  są równe zeru.

Ponadto żądamy, aby  $\partial\varphi/\partial r$  dla  $r = a$  był równy zeru. W wyniku różniczkowania po  $r$  wyrażenia (4.144) otrzymujemy:

$$UP_1(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \left( (n+1)D_n a^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) \right) = 0. \quad (4.146)$$

Dla  $n = 1$  otrzymujemy:

$$\left( U - 2D_1 \frac{1}{a^3} \right) P_1(\cos\theta) = 0. \quad (4.147)$$

Stąd:

$$D_1 = \frac{Ua^3}{2}.$$

Pozostałe współczynniki  $D_i$  ( $i \neq 1$ ) są równe zeru.

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (4.123) wyraża się wzorem [39]:

$$\varphi = Ur \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos\theta. \quad (4.148)$$

Pole prędkości wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \nabla\varphi = (v_r, v_\theta, v_\phi) &= \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \right) = \\ &= \left( U \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos\theta, -U \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin\theta, 0 \right). \end{aligned} \quad (4.149)$$

W szczególności na powierzchni kuli ( $r = a$ ) mamy:

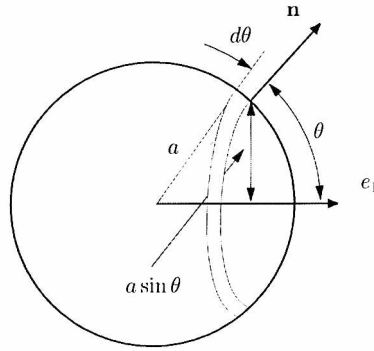
$$v_r = 0, \quad v_\theta = -\frac{3}{2}U \sin\theta, \quad v_\phi = 0. \quad (4.150)$$

Ciśnienie na powierzchni kuli wyznacza się z równania Bernoulliego ((4.45)):

$$p = p_c - \frac{9}{8}\rho U^2 \sin^2\theta, \quad (4.151)$$

gdzie  $p_c = p_\infty + (1/2)\rho U^2$ . Współczynnik ciśnienia  $c_p$ , pojawiający się często w zastosowaniach, równa się:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left( \frac{v_\theta}{U} \right)^2 = 1 - \frac{9}{4} \sin^2\theta. \quad (4.152)$$



**Rys. 4.11:** Wektor normalny  $\mathbf{n}$  do powierzchni sfery wraz z element powierzchni  $dS = (a d\theta) 2\pi a \sin \theta$

Znając rozkład ciśnienia na kuli, możemy wyznaczyć siłę wywieraną przez płyn na kulę (rys. 4.11):

$$\mathbf{F} = \int_S p \mathbf{n} dS, \quad (4.153)$$

gdzie wektor normalny do kuli  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r(\theta)$ .

Składową siły wzdłuż osi  $x_1$  otrzymujemy po pomnożeniu skalarnie siły  $\mathbf{F}$  przez wektor jednostkowy  $\mathbf{e}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 &= \int_S p \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 dS = \int_0^\pi \left( p_c - \frac{9}{8} \rho U^2 \sin^2 \theta \right) \cos \theta 2\pi a \sin \theta (a d\theta) = \\ &= a\pi \int_0^\pi p_c \sin 2\theta d\theta - \frac{9}{8} \rho U^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (4.154)$$

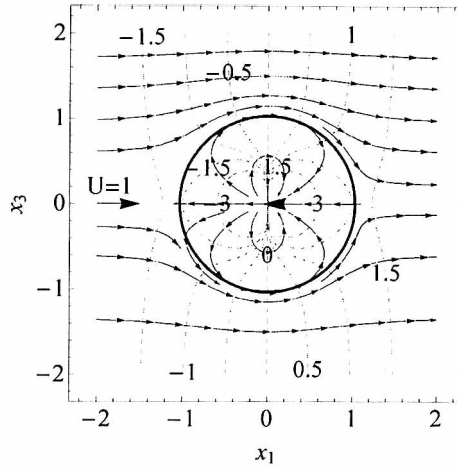
Licząc składową siły działającą w kierunku  $\mathbf{e}_2$ , otrzymamy również, że  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ . Stąd  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ . Fakt ten przeczy rzeczywistemu doświadczeniu i dlatego jest nazywany paradoksem d'Alamberta. Jest to konsekwencją przyjęcia potencjalności ruchu płynu. Kształt ciała w trójwymiarowym opływie potencjalnym nie ma wpływu na wartość siły oddziaływania płynu na ciało.

Linie prądu otrzymane na podstawie pola prędkości wraz z liniami stałego potencjału przedstawiono na rys. 4.12.

Ze wzoru (4.148) wynika, że wypadkowy potencjał prędkości opływu kuli płynem nielepkim jest superpozycją potencjału przepływu równomiernego  $\varphi_J = Ux_1 = Ur \cos \theta$  oraz dipola  $\varphi_d = -\mu x_1 / (4\pi r^3)$ :

$$\varphi_d = \varphi_J + \varphi_d = Ur \cos \theta + \mu \frac{-x_1}{4\pi r^3}, \quad (4.155)$$

gdzie intensywność dipola  $\mu = 4\pi U a^3 / 2$ .



Rys. 4.12: Potencjalny opływ kuli. Linie prądu (linie ze strzałkami) wyznaczone na podstawie pola prędkości (4.149) wraz z liniami stałego potencjału (linie przerywane)

Powyższe wyprowadzenie rozwiązania dla potencjalnego opływu kuli pozwoliło na wyznaczenie kierunku i intensywności momentu dipolowego  $\mu \mathbf{p} = \mu(-1, 0, 0)$ . Zwróćmy uwagę, że dipol skierowany jest przeciwko napływającemu strumieniowi. Jego intensywność i kierunek muszą zapewnić zerowanie się składowej normalnej prędkości na powierzchni kuli.

Linie prądu można wyznaczyć z równania różniczkowego (2.24):

$$\frac{dr}{\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta} = \frac{r d\theta}{-\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \sin \theta} = \frac{d\phi}{0}. \quad (4.156)$$

Równanie (4.156) dla  $\phi = \text{const}$  można przekształcić do postaci:

$$\frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} = \left(\frac{1}{r} - \frac{3r^2}{r^3 - a^3}\right) dr. \quad (4.157)$$

Równanie różniczkowe (4.157) można scałkować:

$$\ln \sin^2 \theta = \ln \frac{r}{r^3 - a^3} + \ln C. \quad (4.158)$$

Z powyższego równania mamy:

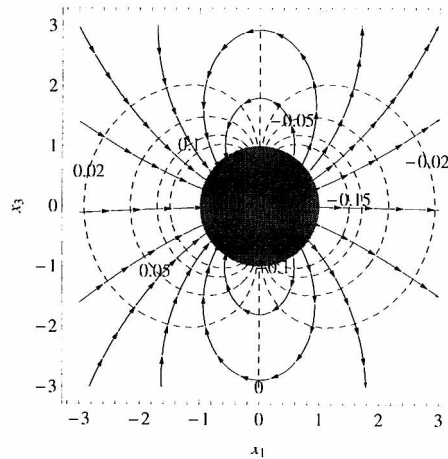
$$C = \left(r^2 - \frac{a^3}{r}\right) \sin^2 \theta. \quad (4.159)$$

Dla  $r = a$  linia prądu leży na powierzchni kuli ( $C = 0$ ).

Oprócz opływu dipola strumieniem jednorodnym praktyczne zastosowanie znajduje opływ strumieniem jednorodnym źródła lub dwóch źródeł o przeciwnych znakach umieszczonych w odległości na osi  $x_1$ . Pierwszy przypadek daje obraz przepływu wokół pół nieskończonego ciała z osią symetrii (pół nieskończone ciało Rankine'a oraz owal Rankine'a).

#### 4.4.4. Zagadnienie potencjalnego opływu kuli poruszającej się ze stałą prędkością

Dysponując rozwiązaniem ogólnym równania Laplace'a (4.144), można otrzymać rozwiązanie dla kuli, która porusza się w nieograniczonej przestrzeni wypełnionej płynem.



**Rys. 4.13:** Potencjalny opływ kuli poruszającej się ze stałą prędkością w płynie doskonałym. Linie prądu (linie ze strzałkami) wyznaczone z potencjału (4.162). Linie stałego potencjału zaznaczono liniami przerywanymi

W przypadku kuli poruszającej się z prędkością  $\mathbf{v}_k = (U, 0, 0)$  żądamy, aby płyn w nieskończoności był w spoczynku. Na powierzchni kuli warunek brzegowy dla prędkości ma postać:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_k) = 0. \quad (4.160)$$

Warunek na potencjał przyjmuje postać:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = \cos \theta. \quad (4.161)$$

Rozwiązanie równania (4.144) z warunkiem (4.161) oraz  $\varphi \rightarrow 0$ , gdy  $r \rightarrow \infty$ , daje:

$$\varphi = -Ur \frac{a^3}{2r^3} \cos \theta. \quad (4.162)$$

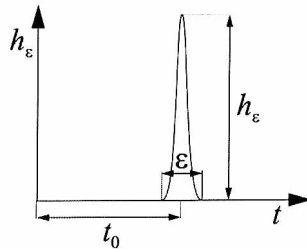
Potencjał (4.162) odpowiada dipolowi o kierunku osi  $x_1$  i intensywności  $\mu = 4\pi U a^3/2$ . Wykresy linii stałego potencjału wraz liniami prądu wyznaczonymi na podstawie pola prędkości przedstawiono na rys. 4.13.

## 4.5. Delta Diraca

Podamy teraz kilka istotnych faktów dotyczących funkcji  $\delta(x)$  nazywanej deltą Diraca. Potrzeba zajmowania się zdarzeniami trwającymi wprawdzie nieskończenie krótko, powodującymi jednak widoczny, całkowalny efekt istniała w fizyce od dawna. Jednak dopiero  $\delta$ -funkcja wprowadzona i użyta w zagadnieniach mechaniki kwantowej przez Diraca w 1927 roku zyskała niebywałą popularność. Jej rachunkowa użyteczność i skuteczność zaowocowała w 1933 roku nagrodą Nobla, którą Dirac otrzymał wraz ze Schrödingerem za odkrycie nowych, płodnych aspektów teorii atomów i ich zastosowanie.

Delta Diraca jest matematycznym modelem nierealizowalnego fizycznie, nieskończenie wąskiego impulsu występującego w chwili  $\tau = 0$ , o nieskończenie dużej amplitudzie i polu równym jedności:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq t_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (4.163)$$



**Rys. 4.14:** Impuls aproksymujący funkcję  $\delta$ . Gdy  $\epsilon \rightarrow 0$  wysokość impulsu  $h_\epsilon \rightarrow \infty$ . Pole pod impulsem jest zawsze równe jedności. W granicy otrzymujemy  $\delta(t - t_0)$

Przedział całkowania  $(-\infty, \infty)$  może być zastąpiony przedziałem  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ , gdzie  $\epsilon > 0$  jest dowolnie małą liczbą (patrz rys. 4.14). Matematycy zauważyli jednak szybko, że taka funkcja w sensie klasycznej analizy matematycznej nie

istnieje. Efektem badań nad  $\delta$ -funkcją była teoria dystrybucji (teoria funkcji uogólnionych) sformułowana przez Schwartza w 1951 roku. Formalnie  $\delta$  jest liniowym funkcjonałem, działającym na przestrzeni funkcji testowych (próbnych)  $\varphi$ , posiadających wszystkie pochodne i zwarty nośnik. Oznacza to, że zbiór, na którym funkcja jest różna od zera, jest ograniczony. Działanie  $\delta$  na funkcję  $\varphi$  oznacza się jako  $(\delta, \varphi)$ . Funkcjonał liniowy przedstawiany jest w postaci całki (iloczynu skalarnego):

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (4.164)$$

Funkcję  $\delta$  można uważać za granicę pewnego ciągu funkcji  $h_\varepsilon$ , dla których  $\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(x)dx = 1$  dla każdego  $\varepsilon$ , a efekt działania na dowolną funkcję  $\varphi$  daje  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi, h_\varepsilon) = \varphi(0)$ . Formalnie można napisać:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x) = \delta(x). \quad (4.165)$$

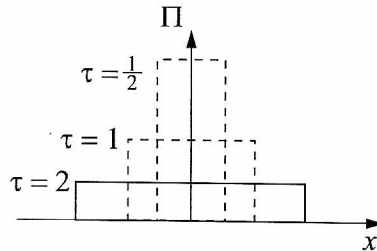
Przykładem takiego ciągu funkcji tworzących  $\delta$ -funkcję jest funkcja prostokątna (rys. 4.15) zdefiniowana jako  $1/\tau \Pi(x/\tau)$ , gdy  $\tau \rightarrow 0$  a funkcja  $\Pi(x)$  zdefiniowana jest następująco:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.166)$$

Innymi, popularnymi funkcjami  $\delta$ -tworzącymi są:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad (4.167)$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}. \quad (4.168)$$



**Rys. 4.15:** Impuls prostokątny  $\delta$ -tworzący. Szerokość każdego impulsu jest równa  $\tau$ , natomiast jego wysokość jest równa  $\frac{1}{\tau}$ . Gdy  $\tau \rightarrow 0$ , wysokość impulsu dąży do nieskończoności. Pole ograniczone impulsem jest równe 1



Świadomość tego, że dopracowano się eleganckiej teorii matematycznej dla  $\delta$ -funkcji jest krzepiąca. W praktyce, w szczególności w naukach inżynierskich, automatyce, teorii sterowania, fizyce ważna jest jednak również pewna sprawność operowania funkcją  $\delta(x)$ . Stąd wynika konieczność poznania pewnych reguł operacyjnych związanych z funkcją  $\delta$ .

### 1. Selektywne działanie funkcji $\delta(x)$

Działanie funkcji  $\delta$  jest określone zachowaniem się funkcji  $\delta(x)$  pod znakiem całki. Mamy więc:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx &= \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\delta(x-x_0)dx \approx \\ &\approx f(x_0) \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0) = f(x_0). \end{aligned} \quad (4.169)$$

Własność ta nazywa się selektywnym działaniem funkcji  $\delta(x)$ , ponieważ ze wszystkich wartości funkcji  $f(x)$  funkcja  $\delta(x-x_0)$  wybiera wartość  $f(x_0)$ . Jest to jedna z najważniejszych własności funkcji  $\delta(x)$ . Wynika z niej, że dowolną funkcję  $f(x)$  można przedstawić jako:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi-x)f(\xi)d\xi \approx \sum_n \delta(\xi_n-x)f(\xi_n)\Delta\xi_n. \quad (4.170)$$

### 2. Funkcja $\delta$ od złożonego argumentu $\delta(g(x))$

Podstawmy  $z = g(x)$ . Wtedy  $dz = g'(x)dx$ , a stąd  $dx = dz/g'(x)$  oraz  $x = g^{-1}(z)$ . Ponadto niech  $g(x_i) = 0$ , czyli  $x_i$  są zerami funkcji  $g(x)$ ,  $x_i = g^{-1}(0)$ . Mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(g^{-1}(z))\delta(z) \frac{dz}{g'(g^{-1}(z))} = \frac{f(g^{-1}(0))}{g'(g^{-1}(0))}. \quad (4.171)$$

Ponieważ  $\delta(-x) = \delta(x)$ , otrzymujemy:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (4.172)$$

w szczególności dla:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad (4.173)$$

oraz dla  $x \neq a$ :

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x+a) + \delta(x-a)). \quad (4.174)$$

**3.  $\delta$ -funkcja na płaszczyźnie  $\delta^2(x_1, x_2)$** 

Naturalnym uogólnieniem funkcji  $\delta(t)$  jednej zmiennej na funkcję dwóch zmiennych  $(x_1, x_2)$  jest  $\delta^2(x_1, x_2)$ :

$$\delta^2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ \infty & x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases} \quad (4.175)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1, \quad (4.176)$$

$$\delta^2(ax_1, bx_2) = \frac{1}{|ab|} \delta(x_1, x_2) = \frac{1}{|ab|} \delta(x_1) \delta(x_2). \quad (4.177)$$

Dokonując zamiany zmiennej  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  w biegunowym układzie współrzędnych  $(r, \theta)$ , funkcję  $\delta^2(x_1, x_2)$  można wyrazić za pomocą  $\delta(r)$ :

$$\delta^2(x_1, x_2) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}. \quad (4.178)$$

Uogólnienie dla przestrzeni trójwymiarowej podane jest we wzorze (4.98).

## Rozdział 5

# Wybrane zagadnienia z analizy zespolonej

Jednym z najważniejszych narzędzi do badania płaskiego, nieściśliwego i bezwirowego ruchu płynu jest teoria funkcji zmiennej zespolonej. W związku z tym warto przypomnieć podstawowe fakty odnoszące się do liczb zespolonych i teorii funkcji zmiennej zespolonej. Bardziej szczegółowe badania nad teorią funkcji analitycznych można znaleźć w [57], [78], [82], [86].

### 5.1. Liczby zespolone

Pojawienie się liczb zespolonych spowodowane było potrzebą rozwiązywania równań algebraicznych, których prototypem jest równanie  $x^2 + 1 = 0$ . Pierwiastkiem tego równania nie może być liczba rzeczywista, ponieważ  $x^2$  nie może być liczbą ujemną. Należało więc rozszerzyć pojęcie liczb na liczby zespolone. Wprowadzono oznaczenie  $i = \sqrt{-1}$ .

**Definicja 5.1.** *Liczbą zespoloną nazywamy wyrażenie:*

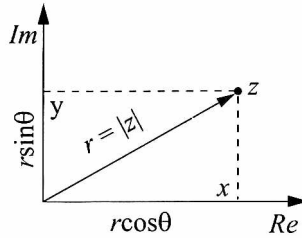
$$z = x + iy, \tag{5.1}$$

gdzie  $x$  oraz  $y$  są liczbami rzeczywistymi. Dwie liczby zespolone  $z_1 = x_1 + iy_1$  oraz  $z_2 = x_2 + iy_2$  są równe  $z_1 = z_2$  wtedy i tylko gdy, jeżeli  $x_1 = x_2$  oraz  $y_1 = y_2$ . Liczba  $x$  stanowi część rzeczywistą liczby zespolonej  $z$  i oznaczana jest jako  $x = \operatorname{Re}(z)$ , natomiast  $y$  stanowi część urojoną liczby  $z$  i oznaczana jest jako  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

W praktyce, jak się przekonamy, wygodnie jest posługiwać się również liczbą zespoloną sprzężoną, którą będziemy oznaczać jako  $z^*$ . Liczbę zespoloną sprzężoną otrzymuje się, zastępując symbol  $i$  symbolem  $-i$ . Tak więc:

$$z^* = (x + iy)^* = x - iy. \tag{5.2}$$

Liczbę zespoloną przedstawia się na płaszczyźnie  $x, y$  oznaczanej jako  $\mathbb{C}$  w postaci punktu lub równoważnie w postaci wektora (rys. 5.1). Na płaszczyźnie  $\mathbb{C}$  zdefinio-



**Rys. 5.1:** Reprezentacja liczby zespolonej na płaszczyźnie

wane są wprawdzie działania arytmetyczne podobnie jak na prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ , należy jednak przyjąć, że  $i^2 = -1$ . Operacje dodawania, odejmowania i mnożenia zdefiniowane są następująco:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (5.3)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_1 + x_2 y_1), \quad (5.4)$$

$$z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (5.5)$$

Pierwiastek kwadratowy z liczby  $z z^*$  nazywa się wartością bezwzględną liczby  $z$  lub modułem i oznacza się jako  $|z| = r$ . Wartość  $|z|$  reprezentuje na płaszczyźnie  $\mathbb{C}$  długość wektora  $(x, y)$  (rys. 5.1). Jak widać z rys. 5.1, liczbę zespoloną można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Współrzędna  $\theta$  nazywa się argumentem liczby zespolonej. Zwróćmy uwagę, że dodanie do argumentu  $\theta$  miary  $2\pi n$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ , nie zmienia liczby zespolonej.

Na szeregach liczb zespolonych można dokonywać podobnych przekształceń jak na szeregach liczb rzeczywistych. Z następujących przekształceń otrzymujemy jeden z najważniejszych związków w działaniach na liczbach zespolonych:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=\text{parzyste}} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n=\text{nieparzyste}} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

gdzie rozbicie pierwszej sumy na sumę po wskaźnikach parzystych i sumę po wskaźnikach nieparzystych odpowiada szeregom cosinusa i sinusa. Wykorzystano

również zależność  $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ . Liczbę zespoloną możemy więc przedstawić również w postaci biegunowej:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (5.8)$$

która jest wyjątkowo przydatna w mnożeniu, dzieleniu i podnoszeniu do potęgi liczb zespolonych:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (5.9)$$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (5.10)$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r(\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (5.11)$$

## 5.2. Funkcje zmiennej zespolonej

Przez funkcję zmiennej zespolonej  $w = f(z)$  rozumie się przepis, który pozwala przyporządkować zmienną płaszczyzny zespolonej  $z$  innej zmiennej zespolonej  $w$ . Przedstawimy to bardziej formalnie:

**Definicja 5.2.** Niech  $D$  będzie dowolnym zbiorem na płaszczyźnie  $D \subset \mathbb{C}$ . Jeżeli każdemu punktowi  $z \in D$  zostanie przyporządkowana pewna liczba zespolona:

$$w = f(z) \in D' \subset \mathbb{C},$$

to można powiedzieć, że w zbiorze  $D$  została określona funkcja zespolona  $f(z)$  zmiennej zespolonej  $z$ .

Zbiór  $D$  nazywa się zbiorem określoności funkcji  $f(z)$ , natomiast zbiór  $D'$  zbiorem wartości funkcji  $f(z)$ . Tak jak w przypadku liczby zespolonej, funkcję można rozdzielić na część rzeczywistą i część urojoną. Możemy zapisać:

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy. \quad (5.12)$$

Aby rozważać zagadnienia ciągłości funkcji zespolonej, wygodnie jest wprowadzić pojęcie otoczenia na płaszczyźnie zespolonej.

**Definicja 5.3.** Otoczeniem punktu  $a$  na płaszczyźnie zespolonej nazywamy zbiór:

$$N_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}. \quad (5.13)$$

Geometrycznie otoczeniem nazywa się zbiór punktów, których odległość od punktu  $a$  na płaszczyźnie jest mniejsza niż  $\varepsilon$ .

### 5.2.1. Ciągłość funkcji zespolonej

Podobnie jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej również dla funkcji zmiennej zespolonej określa się granicę tej funkcji i jej ciągłość na płaszczyźnie zespolonej.

**Definicja 5.4.** *Mówimy, że granicą funkcji zespolonej  $f$  w punkcie  $z_0$  jest  $w_0$ . Oznacza to, że:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (5.14)$$

jeżeli dla dowolnej liczby  $\epsilon > 0$  istnieje dodatnia liczba  $\delta$  taka, że gdy zachodzi  $|z - z_0| < \delta$ , to:

$$|f(z) - w_0| < \epsilon. \quad (5.15)$$

**Definicja 5.5.** *Mówimy, że funkcja  $f(z)$  jest ciągła w punkcie  $z_0$ , jeżeli:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (5.16)$$

Funkcja  $f(z)$  jest ciągła w punkcie  $z_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy jej część rzeczywista  $\phi(x, y)$  oraz część urojona  $\psi(x, y)$  są ciągłe w punkcie  $(x_0, y_0)$ , gdzie  $z_0 = x_0 + iy_0$ , a więc:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (\phi(x, y) + i\psi(x, y)) = \\ &= \phi(x_0, y_0) + i\psi(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (5.17)$$

### 5.2.2. Pochodna zespolona

**Definicja 5.6.** *Niech  $f(z)$  będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu  $z_0$ . Mówimy, że funkcja  $f(z)$  ma pochodną zespoloną, jeżeli istnieje skończona granica:*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0), \quad (5.18)$$

gdzie przyrost  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  dąży do zera przez dowolne wartości zespolone.

Granica określająca pochodną funkcji zespolonej nie może zależeć od sposobu, w jaki przechodzimy do punktu granicznego  $z_0$ . Fakt ten ma poważne konsekwencje.

Rozpatrzmy iloraz różnicowy określający pochodną dla  $\Delta z = \Delta x$ , ( $i\Delta y = 0$ )

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y) - \phi(x, y)}{\Delta x} + \\ &+ i \frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Przyjmując następnie  $\Delta z = i \Delta y$  ( $\Delta x = 0$ ) i budując iloraz różnicowy jak powyżej, otrzymujemy:

$$f'(z) = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (5.20)$$

Ponieważ prawe strony wzorów (5.19) i (5.20) na mocy założenia muszą być sobie równe, to aby funkcja  $f(z)$  miała pochodną, musi zachodzić równanie:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (5.21)$$

Warunek (5.21) można zapisać, używając części rzeczywistej i urojonej funkcji  $f(z)$  jako:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.22)$$

Związki (5.22) nazywają się równaniami Cauchy'ego–Riemanna. Są to warunki konieczne istnienia pochodnej zespolonej. Jeżeli ponadto pochodne  $\phi_x$ ,  $\psi_x$ ,  $\phi_y$ ,  $\psi_y$  istnieją w pewnym otoczeniu  $z_0$ , to są to również warunki wystarczające [57].

Jeżeli funkcja  $f(z)$  spełnia warunki Cauchy'ego–Riemanna, wtedy jej pochodna  $df/dz$  jest określona jednoznacznie. Jeżeli natomiast funkcja  $df/dz$  spełnia warunki Cauchy'ego–Riemanna, wtedy jednoznacznie określona jest  $d^2f/dz^2$  itd. Jeżeli funkcja zmiennej zespolonej  $f(z)$  posiada pochodną w pewnym otwartym zbiorze  $U \subset \mathbb{C}$ , a nie tylko w punkcie  $z_0$ , to jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. O takiej funkcji mówi się, że jest funkcją holomorficzną (inaczej: funkcją analityczną). Istotną własnością funkcji analitycznych jest to, że w otoczeniu punktu  $z_0$  można je przedstawić w postaci szeregu potęgowego:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (5.23)$$

gdzie  $a_0, a_1, a_2, \dots$  są liczbami zespolonymi,  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ .

Szereg (5.23) nazywamy szeregiem Taylora funkcji  $f(z)$  względem punktu  $z_0$ . Funkcja zmiennej zespolonej, analityczna na całej płaszczyźnie zmiennej  $z$  nazywa się funkcją całkowitą. Funkcje całkowite dzielimy na wielomiany, funkcje całkowite wymierne i funkcje całkowite przestępne zależnie od tego, czy w ich rozwinięciu (5.23) liczba współczynników  $a_n$  jest skończona, czy nieskończona. Funkcjami przestępnymi są np.: funkcje  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^z$ .

Jeżeli funkcja  $f(z)$  jest analityczna w obszarze zawierającym punkty  $z$  (spełnia warunki Cauchy'ego–Riemanna), wtedy jej pochodną względem  $z$  można otrzymać, traktując  $z$ , jakby to była funkcja jednej zmiennej rzeczywistej  $x$ , i formalnie różniczkować funkcję  $f(z)$  względem  $z$  jak dla funkcji jednej zmiennej.

Rozważmy funkcję rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych  $f(x, y)$ . Różniczka tej funkcji wyraża się następująco:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (5.24)$$

Jeżeli teraz  $f(x, y)$  zastąpimy funkcją analityczną zmiennej zespolonej  $f(z)$ , wtedy, zgodnie ze wzorem (5.21), mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{df}{dz} \quad (5.25)$$

i różniczka (5.24) wyrazi się jako funkcja jednej zmiennej  $z$ :

$$df = \frac{df}{dz} (dx + i dy) = \frac{df}{dz} dz. \quad (5.26)$$

Pochodne zmiennej zespolonej można obliczać według tych samych reguł, co funkcje zmiennej rzeczywistej. Tak więc mamy:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}, \quad \frac{d}{dz} e^{cz} = c e^{cz}, \quad \frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z. \quad (5.27)$$

Można wykazać [82], że warunki Cauchy'ego–Riemanna (5.22) są równoważne warunkowi:

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0, \quad (5.28)$$

czyli funkcja analityczna nie może zależeć od zmiennej zespolonej sprzężonej  $z^*$ . Wynika to stąd, że funkcję  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  zmiennych  $x, y$  można wyrazić za pomocą zmiennych  $z, z^*$ :

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{-i}{2}(z - z^*). \quad (5.29)$$

Pochodną po zmiennej  $z^*$  można, wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych, przedstawić jako [82]:

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial z^*} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*}. \quad (5.30)$$

Z równań (5.29) mamy:

$$\frac{\partial x}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{i}{2}. \quad (5.31)$$



Równanie (5.30) można więc przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (5.32)$$

Ponieważ zakładaliśmy, że funkcja  $f$  jest funkcją analityczną, na mocy warunków Cauchy'ego–Riemanna wyrażenia w nawiasach są równe zeru. Stąd otrzymujemy równanie (5.28).

Równanie (5.28) pozwala rozstrzygać, czy funkcja zmiennej zespolonej jest funkcją analityczną (holomorficzną). Funkcjami analitycznymi nie są takie funkcje, jak np.:  $f(z) = |z|^2 = zz^*$ ,  $f(z) = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ ,  $f(z) = z^{*2} = x^2 - y^2 - 2ixy$ . Jest natomiast funkcją analityczną funkcja  $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ .

### 5.2.3. Warunki Cauchy'ego–Riemanna we współrzędnych cylindrycznych

W wielu przypadkach wygodnie jest posługiwać się współrzędnymi biegunowymi. Położenie punktu na płaszczyźnie określa się za pomocą zmiennych  $(r, \theta)$ . Ciągłą, różniczkowalną funkcję  $f(x, y)$  można wyrazić we współrzędnych biegunowych  $f(r, \theta)$ , wykorzystując związki:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Korzystając z reguł różniczkowania funkcji złożonej i zamiany zmiennych (5.33) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}, \\ \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Z warunku (5.20) dla funkcji  $f(r, \theta)$  mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -i \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (5.35)$$

Po podstawieniu do wzorów (5.34) kolejno  $\phi$ , a następnie  $\psi$  i wykorzystaniu warunków Cauchy'ego–Riemanna (5.22) warunki Cauchy'ego–Riemanna we współrzędnych cylindrycznych przyjmują postać:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (5.36)$$

Wyprowadzenie równań (5.36) można dokonać, korzystając z definicji pochodnej (por. wzór (5.18)). We współrzędnych biegunowych dla  $z = re^{i\theta}$  mamy:

$$\Delta f = \Delta\phi(r, \theta) + i\Delta\psi(r, \theta), \quad (5.37)$$

$$\Delta z = (r + \Delta r)e^{i(\theta + \Delta\theta)} - re^{i\theta}. \quad (5.38)$$

Jeżeli przyjmiemy, że  $\Delta z \rightarrow 0$ , gdy  $\Delta\theta = 0$ ,  $\Delta z = \Delta r e^{i\theta}$ , z definicji pochodnej otrzymamy:

$$f'(z) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi(r, \theta) + i\Delta\psi(r, \theta)}{\Delta r e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \left( \frac{\partial\phi}{\partial r} + i \frac{\partial\psi}{\partial r} \right). \quad (5.39)$$

Jeżeli przyjmiemy, że  $\Delta r = 0$ , wtedy  $\Delta z = re^{i(\theta + \Delta\theta)} - re^{i\theta}$ . A ponieważ:

$$e^{i(\theta + \Delta\theta)} - e^{i\theta} = \frac{d}{d\theta} e^{i\theta} \Delta\theta, \quad (5.40)$$

to w tym przypadku  $\Delta z = r i e^{i\theta} \Delta\theta$  i pochodna wyrazi się następująco:

$$f'(z) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi(r, \theta) + i\Delta\psi(r, \theta)}{\Delta r i e^{i\theta} \Delta\theta} = \frac{1}{i r} e^{-i\theta} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + i \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right). \quad (5.41)$$

Pochodne wyrażone wzorami (5.39) oraz (5.41) w przypadku funkcji analitycznej muszą być sobie równe. Stąd otrzymujemy równanie Cauchy'ego–Riemanna w postaci (5.36). Pochodna funkcji  $f(z)$  we współrzędnych biegunowych wyraża się więc jako:

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left( \frac{\partial\phi}{\partial r} + i \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{i r} e^{-i\theta} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + i \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right). \quad (5.42)$$

#### 5.2.4. Funkcje zespolone a funkcje harmoniczne

Różniczkując stronami warunki Cauchy'ego–Riemanna (5.22), najpierw pierwsze równanie po  $x$ , a następnie drugie po  $y$ , i dodając do siebie stronami, otrzymamy:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \quad (5.43)$$

Podobny związek można otrzymać dla części urojonej. Część rzeczywista funkcji analitycznej  $\phi(x, y)$ , jak również część urojona  $\psi(x, y)$ , spełniają równanie Laplace'a:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \quad (5.44)$$

Podsumujemy powyższe rozważania twierdzeniem:

**Twierdzenie 5.1.** Dla dowolnej funkcji analitycznej zmiennej zespolonej  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  część rzeczywista  $\phi(x, y)$  oraz część urojona  $\psi(x, y)$  są funkcjami harmonicznymi.

Każda funkcja analityczna zmiennej zespolonej dostarcza, więc dwóch funkcji harmonicznymi. Funkcje te nazywamy funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

Rodzi się pytanie, czy jeżeli znana jest tylko część rzeczywista albo urojona funkcji  $f(z)$ , to można znaleźć jej funkcję zespoloną  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ . Odpowiedź jest twierdząca. Jednym ze sposobów jest użycie równań Cauchy'ego–Riemanna (5.22).

**Przykład 13.** Zadana jest część rzeczywista funkcji zespolonej  $f(z)$ ,  $\phi = xy$ .

1. Wyznaczyć część urojoną  $\psi$ .
2. Sprawdzić, że funkcje  $\phi$  oraz  $\psi$  spełniają warunki Cauchy'ego–Riemanna.
3. Sprawdzić, że  $\phi$  oraz  $\psi$  są funkcjami harmonicznymi.

### Rozwiązanie

Część urojoną funkcji  $f(z)$  można wyznaczyć na kilka sposobów, przy czym w każdym wykorzystuje się równania Cauchy'ego–Riemanna.

Metoda 1

Mamy:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Dalej:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = y - ix = -i(x + iy) = -iz.$$

Stąd, korzystając z tego, że funkcja  $z$  ma funkcję pierwotną  $z^2/2$ , otrzymujemy:

$$f(z) = -i \frac{(x + iy)^2}{2} + C = xy - i \frac{x^2 - y^2}{2} + C.$$

W związku z tym:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C.$$

Metoda 2

Można wyznaczyć  $\psi(x, y)$  z warunku:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = y, \quad \Rightarrow \psi = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + \tilde{C}(x).$$

Następnie:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -x, \quad \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\tilde{C}(x)}{dx} = -x, \quad \Rightarrow \tilde{C}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C'.$$

Stąd:

$$\psi = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C', \quad f(z) = xy + i \frac{y^2 - x^2}{2} + iC.$$

Mając na uwadze, że  $x = \frac{1}{2}(z + z^*)$  oraz  $y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$ , funkcję  $f(z)$  można przedstawić jako  $f(z) = -\frac{1}{2}i z^{*2} + iC$ .

Powyższe metody wyznaczania funkcji analitycznej  $f(z)$  na podstawie tylko części rzeczywistej lub urojonej, z wykorzystaniem równań Cauchy'ego–Riemanna, są dość żmudne. Do wyznaczenia funkcji  $f(z)$  na podstawie znajomości tylko części rzeczywistej lub urojonej można wykorzystać podejście algebraiczne, bez konieczności całkowania i różniczkowania. Część rzeczywistą funkcji  $f(z)$  wyraża się, używając funkcji analitycznej sprzężonej  $f^*(z^*)$ , następująco:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} [f(x + iy) + f^*(x - iy)]. \quad (5.45)$$

Można przyjąć, że równość (5.45) jest także prawdziwa dla  $x, y$  zespolonych. Jeżeli w równości (5.45) w miejsce  $x$  wstawimy  $x = z/2$ , natomiast w miejsce  $y$  wstawimy  $y = z/2i$ , otrzymamy:

$$\phi\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{1}{2} [f(z) + f(0)]. \quad (5.46)$$

Stąd:

$$f(z) = 2\phi\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0). \quad (5.47)$$

Powyższe rozważania zostały zawarte w twierdzeniu [81], [82]:

**Twierdzenie 5.2.** Niech  $f(z)$  będzie funkcją analityczną w otoczeniu punktu  $a$  i niech jej częścią rzeczywistą będzie funkcja  $\phi(x, y)$  a częścią urojoną funkcja  $\psi(x, y)$ . Wtedy zachodzi:

$$f(z) = 2\phi\left(\frac{z + a^*}{2}, \frac{z - a^*}{2i}\right) - f^*(a^*) \quad (5.48)$$

lub

$$f(z) = 2i\psi\left(\frac{z + a^*}{2}, \frac{z - a^*}{2i}\right) + f^*(a^*). \quad (5.49)$$

Najczęściej jako punkt  $a$  przyjmuje się wprawdzie  $a = 0$ , jednak gdy funkcja  $f(z)$  jest w zerze nieokreślona, to za  $a$  można przyjąć  $a = 1$ .

**Przykład 14.** Niech  $\phi = x^2 - y^2$ . Ponieważ  $\phi(0, 0) = 0$ , to  $f(0)$  może mieć tylko wartość urojona, więc  $f(0) = i\beta$ . Po podstawianiu  $z/2 \rightarrow x$  oraz  $z/2i \rightarrow y$  otrzymujemy zgodnie z twierdzeniem:

$$f(z) = 2 \left( \left( \frac{z}{2} \right)^2 - \left( \frac{z}{2i} \right)^2 \right) - f^*(0) = z^2 + i\beta.$$

Warto podkreślić, że zastosowanie wzorów (5.48) sprowadza się do reguły zastępowania  $x \rightarrow (z + a^*)/2$ ,  $y \rightarrow (z - a^*)/2i$  i ma charakter czysto algebraiczny. W takich przekształceniach niedoścignione są programy komputerowe do przekształceń algebraicznych, np. MATHEMATICA. W pracy [81] podano przeznaczone dla programu MATHEMATICA efektywne procedury otrzymywania funkcji analitycznej na podstawie twierdzenia (5.48).

### 5.2.5. Całkowanie funkcji zespolonej

Dwuwymiarowa natura płaszczyzny zespolonej narzuciła dodatkowe warunki na istnienie pochodnej zmiennej zespolonej. Fakt, że wartość pochodnej w punkcie  $z_0$  nie może zależeć od sposobu, w jaki podchodzimy w przejściu granicznym do tego punktu, wymusza równanie Cauchy'ego–Riemanna (5.22). Dwuwymiarowa natura płaszczyzny zespolonej ma swoje konsekwencje również w teorii i w regułach całkowania funkcji zmiennej zespolonej.

Gdy punkt  $z = x + iy$  porusza się na płaszczyźnie  $\mathbb{C}$ , zaznacza na tej płaszczyźnie krzywą, którą nazywa się też konturem. Niech  $f(z)$  będzie analityczną funkcją zmiennej zespolonej  $z$  (przy założeniu, że istnieje ciągła pochodna funkcji  $f(z)$ ) wzdłuż krzywej  $C$  zadanej równaniem:

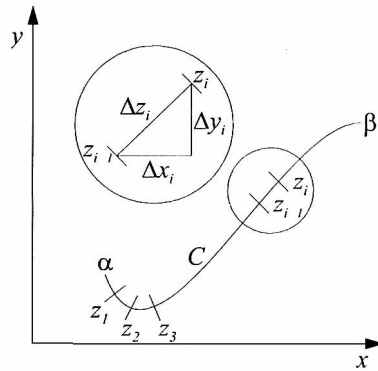
$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{w przedziale} \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (5.50)$$

O funkcjach  $x(t)$  oraz  $y(t)$  zakłada się, że są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami zmiennej  $t$ . Podzielmy kontur  $C$  na  $n$  odcinków punktami  $z_j = z(t_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  (rys. 5.2), gdzie  $\alpha = t_0 < t_1 \dots < t_n = \beta$ , a więc krzywa  $C$  jest zorientowana od  $\alpha$  do  $\beta$ . Utwórzmy sumę:

$$I_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)\Delta z_j, \quad (5.51)$$

gdzie  $\zeta_j$  jest dowolnym punktem odcinka  $(z_{j-1}, z_j)$ , a  $f(\zeta_j)$  wartością funkcji na konturze  $C$ . Jeżeli suma (5.51) dąży do pewnej granicy  $I$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ , a więc gdy  $|\Delta z_j| \rightarrow 0$ , to granicę  $I$  nazywa się całką krzywoliniową funkcji zmiennej zespolonej  $f(z)$ :

$$I = \int_{C(\alpha, \beta)} f(z) dz = \lim_{\Delta z_j \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)\Delta z_j. \quad (5.52)$$



**Rys. 5.2:** Podział krzywej (konturu) całkowania  $C$  na  $n$  odcinków

Ponieważ  $\Delta z_j = \Delta x_j + i \Delta y_j$ , całkę  $I$  można wyrazić za pomocą dwóch całek krzywoliniowych ( $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ):

$$\begin{aligned} I &= \int_{C(\alpha, \beta)} f(z) dz = \int_{C(\alpha, \beta)} (u + iv)(dx + i dy) = \\ &= \int_{C(\alpha, \beta)} [(u dx - v dy) + i(v dx + u dy)] = \\ &= \int_{C(\alpha, \beta)} (u dx - v dy) + i \int_{C(\alpha, \beta)} (v dx + u dy). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Przyjmijmy teraz, że funkcja  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  reprezentuje pewne pole wektorowe  $\mathbf{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ . Niech zadana będzie krzywą  $C(\alpha, \beta) = \gamma(t) = x(t) + i y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Wtedy różniczkową długość elementu krzywej można wyrazić jako:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} dt, \quad (5.54)$$

a wektor styczny  $\boldsymbol{\tau}$  do krzywej  $\gamma$  oraz normalny  $\mathbf{n}$  jako:

$$\boldsymbol{\tau} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) = \left( \frac{x' dt}{ds}, \frac{y' dt}{ds} \right), \quad \mathbf{n} = \left( -\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds} \right) = \left( -\frac{y' dt}{ds}, \frac{x' dt}{ds} \right). \quad (5.55)$$

Całki krzywoliniowe z pola wektorowego ze składowej stycznej i składowej normalnej pola wektorowego  $\mathbf{v} = (u, v)$  wzdłuż krzywej  $C(\alpha, \beta)$  będą miały postać:

$$\begin{aligned} q_V &= \int_{C(\alpha, \beta)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t))(-y'(t)) + v(x(t), y(t))x'(t)) dt = \\ &= \int_{C(\alpha, \beta)} v dx - u dy. \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{C(\alpha, \beta)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t))x'(t) + v(x(t), y(t))y'(t)) dt = \\ &= \int_{C(\alpha, \beta)} u dx + v dy.\end{aligned}\tag{5.57}$$

Całka  $q_V$  we wzorze (5.56) wyraża strumień pola  $\mathbf{v} = (u, v)$  przez krzywą  $C(\alpha, \beta)$ , natomiast całka  $\Gamma$  we wzorze (5.57) cyrkulację pola  $\mathbf{v}$  wzdłuż krzywej  $C(\alpha, \beta)$ .

### 5.2.6. Twierdzenie Cauchy'ego

Niech pole wektorowe  $\mathbf{v} = (u, v)$  będzie polem określonym w obszarze jednospójnym  $D$  i niech  $\gamma$  będzie dodatnio zorientowaną krzywą zamkniętą ograniczającą ten obszar. Jeżeli do pola wektorowego  $\mathbf{v} = (u, v)$  zastosujemy (rozdz. 1.5.5) twierdzenie Greena, to otrzymamy:

$$\int_{\gamma} (u dx + v dy) = \int_D \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.\tag{5.58}$$

Powyższy wynik zastosowany do całki (5.53) daje:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) = \\ &= \int_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}\tag{5.59}$$

Ponieważ zakładaliśmy, że  $f(z)$  jest funkcją analityczną w obszarze  $D$ , to całki we wzorze (5.59) są równe zeru na mocy warunków Cauchy'ego–Riemanna (5.22). Jeżeli więc funkcja  $f(z)$  jest analityczna i ma ciągłą pochodną, to całka krzywoliniowa wzdłuż zamkniętego konturu obejmującego obszar  $D$  jest równa zeru. Jest to treścią jednego z najważniejszych twierdzeń analizy zespolonej nazywanego twierdzeniem Cauchy'ego.

**Twierdzenie 5.3.** *Jeżeli  $f$  jest funkcją analityczną wewnątrz i na brzegu jednospójnego obszaru  $D$  ograniczonego krzywą zamkniętą  $\gamma$ , to*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.\tag{5.60}$$

Przedstawiony dowód twierdzenia Cauchy'ego bazuje na twierdzeniu Greena, które wymaga, aby pochodna  $f(z)'$  była funkcją ciągłą. W teorii funkcji zmiennej zespolonej dowodzi się, że założenie o ciągłości pochodnej  $f(z)'$  jest nadmierne, a wystarczające jest założenie o istnieniu tej pochodnej. Jest to treścią twierdzenia nazywanego twierdzeniem Cauchy'ego–Goursata.

Teoria całki funkcji zmiennej zespolonej pozwala na sformułowanie fundamentalnego twierdzenia rachunku całkowego, analogicznie jak dla zmiennej rzeczywistej. Wprowadza się pojęcie funkcji pierwotnej [57], [78].

**Definicja 5.7.** Każda funkcja  $F(z)$  różniczkowalna w obszarze  $D$ , która spełnia warunek  $F(z)' = f(z)$ , nazywana jest funkcją pierwotną funkcji  $f(z)$ . Funkcja pierwotna określona jest z dokładnością do stałej.

Dowodzi się następującego twierdzenia [57]:

**Twierdzenie 5.4.** Jeżeli funkcja  $f(z)$  jest ciągła i ma funkcję pierwotną  $F(z)$  w obszarze  $D$ , to całka (5.53) wzdłuż dowolnej drogi  $C$  zwartej w  $D$ : o początku  $\alpha$  i końcu  $\beta$  nie zależy od drogi całkowania i wyraża się wzorem:

$$\int_{C(\alpha,\beta)} f(z)dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)). \quad (5.61)$$

W szczególności całka (5.61) równa się zeru, gdy krzywa  $C$  jest zamknięta.

### 5.2.7. Konsekwencje twierdzenia Cauchy'ego

Bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Cauchy'ego (5.60) jest to, że kontur, czyli krzywa nieprzecinająca się sama ze sobą, po którym odbywa się całkowanie, może być dowolnie deformowany. Warunkiem jest, aby pozostawał w obszarze analityczności funkcji  $f(z)$ , a wynik całkowania nie ulegnie zmianie [82]. Skomplikowany kontur całkowania może być zastąpiony kołem. Rozważmy całkowanie po konturze  $C = L \cup \Gamma \cup L' \cup \gamma$  (rys. 5.3). Kontur ten jest zamknięty, więc  $\int_C f(z)dz = 0$ . Możemy jednak całkę rozbić na sumę całek po konturach składających się na kontur  $C$ . Mamy więc:

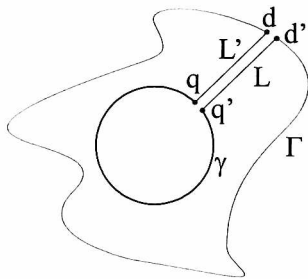
$$\int_C f(z)dz = \int_L f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz + \int_{L'} f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz = 0. \quad (5.62)$$

Całki po konturach  $L$  i  $L'$  wzajemnie się znoszą, gdy kontury  $L$  i  $L'$  zbliżają się do siebie, ponieważ są przeciwnie zorientowane. Orientacja konturu  $\gamma$  jest przeciwna do orientacji konturu  $\Gamma$ . Otrzymujemy:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = 0. \quad (5.63)$$

Całkowanie po złożonym, skomplikowanym co do kształtu konturze można zastąpić całkowaniem po kole. Jeżeli kontur, po którym całkujemy, daje się wyrazić parametrycznie, wtedy całka po kontuarze może być wyrażona jako zwykła całka





**Rys. 5.3:** Zasada deformacji konturu – wynik całkowania nie zależy od kształtu konturu

zależna tylko od jednej niezależnej zmiennej rzeczywistej. Niech  $z = z(t)$ , gdzie  $t$  jest parametrem rzeczywistym,  $A = z(t_A)$ ,  $B = z(t_B)$ . Wtedy:

$$\int_A^B f(z) dz = \int_{t_A}^{t_B} f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt. \quad (5.64)$$

Całkowanie po konturze, który jest okręgiem, zastępujemy całką rzeczywistą, przyjmując, że  $dz(\theta) = i r e^{i\theta} d\theta$ :

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta. \quad (5.65)$$

Obliczmy całkę z funkcji  $(z - z_0)^n$  po okręgu o promieniu  $r$ , którego środek jest w punkcie  $z_0$ ,  $z = z_0 + r e^{i\theta}$ . Mamy:

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (r e^{i\theta})^n i r e^{i\theta} d\theta = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta. \quad (5.66)$$

Dla  $n \neq -1$  powyższa całka jest równa zeru, ponieważ  $e^{i(n+1)\theta}$  jest funkcją okresową. Natomiast dla  $n = -1$  mamy:

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right) i r e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \quad (5.67)$$

Wynik całkowania nie zależy od promienia  $r$ . Mamy więc:

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{dla } n = -1. \end{cases} \quad (5.68)$$

### 5.2.8. Punkty osobliwe i residua

Nie każda funkcja zmiennej zespolonej spełnia warunki Cauchy'ego–Riemanna, a więc nie każda jest funkcją analityczną. Jeżeli funkcja  $f(z)$  nie spełnia tych

warunków w obszarze zawierającym punkt  $z$ , mówimy, że jest w tym punkcie osobliwa.

**Przykład 15.** Niech  $f(z)$  ma postać:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \quad (5.69)$$

Warunki Cauchy'ego–Riemanna (5.21) wyrażone za pomocą funkcji  $f(z)$  mają postać:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{z^2}, \quad -i \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{z^2}. \quad (5.70)$$

Ze wzorów (5.70) wynika, że warunki Cauchy'ego–Riemanna nie są spełnione tylko w punkcie  $z = 0$ , w którym funkcja jest nieokreślona. Dlatego w punkcie  $z = 0$  funkcja ma osobliwość. Mówi się, że funkcja posiada w tym punkcie biegun. W punktach  $z \neq 0$  funkcja jest analityczna.

Punkt  $z_0$ , w otoczeniu którego funkcja jest analityczna, nazywa się punktem regularnym. Jeżeli funkcja  $f(z)$  jest analityczna w otoczeniu pierścieniowym  $|z - z_0| < R$ , z wyjątkiem punktu  $z_0$ , to mówimy, że  $z_0$  jest punktem osobliwym odosobnionym funkcji  $f(z)$ . Każdą funkcję analityczną w otoczeniu pierścieniowym  $r < |z - z_0| < R$  można przedstawić w postaci szeregu Laurenta [57]:

$$\begin{aligned} f(z) &= \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{(n-1)}} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \\ &+ a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n(z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Jeżeli teraz scałkujemy po okręgu wokół punktu  $z_0$  szereg Laurenta (5.71), to otrzymamy:

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n \oint_C (z - z_0)^n = 2\pi i a_{-1}. \quad (5.72)$$

Liczbę zespoloną  $a_{-1}$  nazywamy residuum funkcji  $f(z)$  w punkcie  $z_0$ .

### 5.2.9. Twierdzenie Cauchy'ego o residuach

Niech  $C$  będzie brzegiem obszaru ograniczonego, zawierającego wewnątrz izolowane punkty osobliwe  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Jeżeli każdy punkt osobliwy otoczmy małym okręgiem (rys. 5.4), to funkcja  $f(z)$  będzie analityczna w obszarze wewnątrz

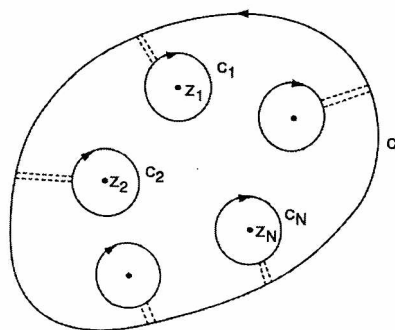
krzywej  $C$  i na zewnątrz tych małych okręgów [90]. Jeżeli wprowadzimy cięcia (rys. 5.4), to całka po konturze  $C$  i małych okręgach będzie równa zero:

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz + \dots + - \oint_{C_n} f(z)dz = 0, \quad (5.73)$$

gdzie znak „-” wynika z tego, że po małych okręgach całkowanie odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku po dużym konturze  $C$ . Stąd mamy wzór:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \dots + \oint_{C_n} f(z)dz. \quad (5.74)$$

Każda całka po prawej stronie jest równa, na mocy wzoru (5.72), residuum funkcji  $f(z)$  w punkcie  $z_i$  pomnożonej przez  $2\pi i$ . Wzór (5.74) stanowi tezę twierdzenia Cauchy’ego o residuach [57].



Rys. 5.4: Odosobnione punkty osobliwe  $z_1, z_2, \dots, z_n$  otoczone okręgami  $C_1, C_2, \dots, C_n$

**Twierdzenie 5.5.** Jeżeli funkcja  $f(z)$  jest analityczna na brzegu i wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą  $C$  z wyjątkiem skończonej ilości punktów  $z_1, z_2, \dots, z_n$  leżących wewnątrz zamkniętej krzywej  $C$ , w której funkcja ma resydua  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , to:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \dots + \oint_{C_n} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n A_i. \quad (5.75)$$

Jeżeli  $f(z)$  ma w punkcie  $z_i$  osobliwość, to dla wielu funkcji istnieje najmniejszy rząd pochodnej  $k$ , dla którego zachodzi równanie:

$$\frac{d^k f(z_i)}{dz^k} = \infty. \quad (5.76)$$

Dla funkcji  $f(z) = 1/z$  wszystkie pochodne są w zerze nieokreślone. Jeżeli istnieje dodatnia liczba  $p$  taka, że:

$$R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p \frac{d^k f}{dz^k} \neq \infty, \quad (5.77)$$

to osobliwość funkcji  $f(z)$  nazywa się usuwalną. W przeciwnym wypadku osobliwość nazywamy nieusuwalną lub istotną. Dla funkcji  $f = 1/z$  czynnikiem usuwającym osobliwość jest  $z$ ,  $p = 1$ . Mówimy, że funkcja  $f(z)$  ma biegun rzędu  $p$ , jeżeli  $R(z_0) \neq 0$ . Jeżeli  $p = 1$ , to biegun jest rzędu pierwszego i nazywa się go biegunem prostym. Funkcja:

$$R(z) = (z - z_0)f(z), \quad (5.78)$$

jest funkcją analityczną wewnątrz obszaru zawierającego  $z_0$ . Dla bieguna prostego residuum funkcji  $f(z)$  można wyznaczyć ze wzoru:

$$\operatorname{res}_{z=z_0}[f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (5.79)$$

**Przykład 16.** Obliczyć wartość całki po konturze  $C$ :

$$\oint_C \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz, \quad (5.80)$$

gdy konturem jest okrąg  $|z| = 2$  a kierunek poruszania się po krzywej jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

### Rozwiązanie

Funkcja posiada dwa bieguny proste w punktach  $z = 0$  oraz  $z = 1$ . Oba punkty leżą wewnątrz koła  $|z| = 2$ . Residuua w punktach  $z = 0$  i  $z = 1$  wynoszą:

$$A_1 = \operatorname{res}_{z=0}[f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{5z - 2}{z(z - 1)} = 2,$$

$$A_2 = \operatorname{res}_{z=1}[f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{5z - 2}{z(z - 1)} = 3.$$

Stąd wartość całki (5.80) jest równa:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i(A_1 + A_2) = 2\pi i(2 + 3) = 10\pi i.$$

Twierdzenie o residuach jest wygodnym narzędziem do obliczania całek po krzywych zamkniętych. Twierdzenie to zostanie wykorzystane w rozdz. 6 do obliczania sił aerodynamicznych w przepływie nielepkiem, które wyrażają się przez całki zmiennej zespolonej po krzywych zamkniętych.

## Rozdział 6

# Dwuwymiarowe przepływy potencjalne

Dwuwymiarowy ruch cieczy nieściśliwej, który jest zarazem bezwirowy, jest dużą idealizacją i uproszczeniem przepływu rzeczywistego. Niemniej jednak takie pola można uważać za pierwsze przybliżenie przepływów rzeczywistych. Rozwinięty aparat matematyczny, który pozwala na rozwiązywanie przepływów potencjalnych, czyni przepływy potencjalne atrakcyjnymi z punktu widzenia badań nad ruchem płynów.

Założmy, że ruch odbywa się w płaszczyźnie  $(x, y)$  i jest jednoznacznie określony za pomocą współrzędnych  $(x, y)$ . Równanie ciągłości dla ruchu nieściśliwego, warunek ruchu bezwirowego oraz równanie Bernoulliego mają postać:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \Phi + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (6.3)$$

Pierwsze dwa równania (6.1) i (6.2) stanowią układ równań różniczkowych, które wraz z warunkami brzegowymi pozwalają określić wektor prędkości  $\mathbf{v}$ , natomiast równanie Bernoulliego wykorzystywane jest to wyznaczania ciśnienia.

### 6.1. Funkcja prądu, potencjał prędkości i potencjał zespolony

Jak wiemy z rozdz. 4.3, warunek  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  gwarantuje istnienie potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$ , takiego że  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ . Składowe pola wektorowego  $\mathbf{A}$  wyznacza się, rozwiązując równanie Poissona  $\Delta A_i = -\omega_i$ , gdzie  $\omega_i$  są składowymi pola wirowości. W dwóch wymiarach (patrz rozdz. 1.5.4), wirowość pola prędkości ma tylko jedną składową różną od zera  $\omega = (0, 0, \omega_3)$ . W takim przypadku potencjał

wektorowy też ma tylko jedną składową różną od zera  $\mathbf{A} = (0, 0, \psi)$ . Ponieważ  $\mathbf{v} = (u, v, 0) = \text{rot } \mathbf{A}$ , mamy:

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.4)$$

Składowa  $\psi$  pola wektorowego jest funkcją prądu, której istnienie wynika z nieściślności i nie zależy od tego, czy przepływ jest nielepkki. Nazwa „funkcja prądu” przyjęła się dlatego, że w przepływie ustalonym, niezależnym od czasu funkcja ta ma stałą wartość wzdłuż linii prądu. Przypomnijmy, że linią prądu nazywamy linię, która w przepływie ustalonym jest w każdym swoim punkcie styczna do pola prędkości. Jeżeli więc elementami różniczkowymi linii prądu są  $ds = (dx, dy)$ , to:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}. \quad (6.5)$$

Pochodna kierunkowa funkcji  $\psi$  w kierunku pola prędkości jest równa zeru:

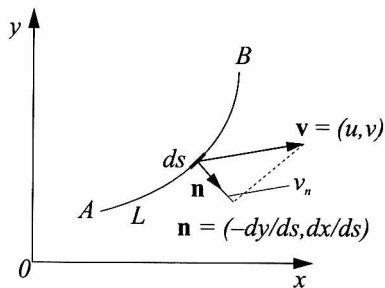
$$\frac{d\psi}{ds} = \nabla\psi \cdot (u, v) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \left( -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.6)$$

Funkcja  $\psi$  jest więc stała wzdłuż linii prądu. W przepływie stacjonarnym linie prądu pokrywają się z trajektoriami ruchu cząstek płynu. Trajektorie nie mogą się przecinać, aby zachować jednoznaczność ruchu i rozróżnialność cząstek płynu. Jeżeli pomiędzy dwoma dowolnymi punktami  $A(x_1, y_1)$  oraz  $B(x_2, y_2)$  rozciągniemy pewną krzywą  $L$ , to strumień płynu przez tę krzywą będzie można wyrazić różnicą wartości funkcji prądu, które funkcja prądu przyjmuje w punktach  $A$  i  $B$  (rys. 6.1):

$$\begin{aligned} q_L &= \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_A^B \left( \frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \left( -\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds} \right) ds = \\ &= - \int_A^B \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = - \int_A^B d\psi = \psi(A) - \psi(B). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Jeżeli więc linie prądu w obszarze przepływu zagęszczają się, to strumień płynu pomiędzy dwoma liniami, które zbliżyły się do siebie, musi być większy. Strumień płynu między liniami równy jest różnicy wartości stałych wyznaczających te linie prądu ( $\psi = C_i$ ).

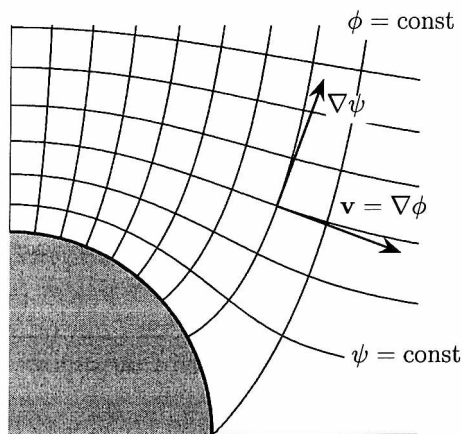
Izolnie funkcji prądu na płaszczyźnie stanowią wygodny sposób wizualizacji przepływów dwuwymiarowych (rys. 6.2). Linie prądu są torami cząstek, a dodatkowo ich zagęszczenie świadczy o tym, że wektor prędkości w tych obszarach jest większy niż w pozostałych. Dla ruchu bezwirowego ( $\omega = 0$ ) funkcja prądu spełnia równanie Laplace'a  $\Delta\psi = 0$ . Jeżeli przepływ jest nieściśliwy, to potencjał prędkości również spełnia równanie Laplace'a  $\Delta\phi = 0$ . Łatwo pokazać, że linie



**Rys. 6.1:** Strumień płynu przez krzywą  $L$ ,  $q_L = \psi(A) - \psi(B)$

stałego potencjału oraz linie stałej wartości funkcji prądu przecinają się ze sobą pod kątem prostym. Wiadomo, że (zob. wzór 1.40) wektor gradientu utworzony z funkcji skalarnej jest prostopadły do linii stałej wartości. Biorąc iloczyn skalarny wektorów  $\nabla\phi$  oraz  $\nabla\psi$  w punkcie przecięcia, otrzymujemy (rys. 6.2):

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = -uv + uv = 0. \quad (6.8)$$



**Rys. 6.2:** Rodzina linii prądu wraz z rodziną linii potencjalnych

Mówi się, że harmoniczne funkcje  $\phi$  oraz  $\psi$  są ze sobą sprzężone. Jeżeli rodzina linii potencjalnych jest znana, to linie prądu można wyznaczyć wyznaczając do nich rodzinę linii ortogonalnych. Na brzegu stałym potencjał prędkości powinien spełniać warunek  $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ , czyli  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , co oznacza nieprzenikliwość ściany stałej. Linie potencjalne muszą więc być prostopadłe do brzegu ciała stałego. Natomiast linie prądu, którymi podążają cząstki płynu, powinny być do brzegu

równolegle. Na brzegu stałym linie prądu powinny przyjmować stałą wartość, ponieważ powierzchnia (linia) ciała stałego musi być linią prądu ( $\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0$ ).

Mając na uwadze związki Cauchy'ego–Riemanna, jakie musi spełniać funkcja analityczna, można powiedzieć, że każda tego rodzaju funkcja reprezentuje pewien przepływ. Jej część rzeczywistą można uważać za potencjał pola prędkości, natomiast część urojona jest funkcją prądu tego przepływu. Poszukiwanie pola prędkości można związać z pewną funkcją zespoloną  $W(z)$  nazywaną potencjałem zespolonym:

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (6.9)$$

a składowe pole prędkości  $(u, v)$  wyznaczać, różniczkując potencjał prędkości:

$$\frac{dW}{dz} = \phi_x + i\psi_x = u - iv = q^*, \quad (6.10)$$

gdzie  $q^*$  jest prędkością zespoloną.

Całką zespoloną z pola prędkości zespolonej  $q^*$  po krzywej rozpiętej między punktami  $z(\alpha)$  i  $z(\beta)$  równa się:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{C(\alpha, \beta)} q^* dz = \int_{C(\alpha, \beta)} u dx + v dy - i \int_{C(\alpha, \beta)} u dy - v dx = \\ &= \int_{C(\alpha, \beta)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds - i \int_{C(\alpha, \beta)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \\ &= \Gamma_{\alpha, \beta} - i q_V, \end{aligned} \quad (6.11)$$

gdzie  $\Gamma_{\alpha, \beta}$  oznacza cyrkulację prędkości na krzywej  $C$ , natomiast  $q_V$  strumień objętości przez tę krzywą. Dla przepływu potencjalnego, w obszarze jednospójnym, gdy krzywa  $C$  jest krzywą zamkniętą,  $z(\alpha) = z(\beta)$ , obie całki  $\Gamma$  oraz  $q_V$  są równe zeru.

Niekiedy w zastosowaniach wygodnie jest posługiwać się polem prędkości wyrażonym we współrzędnych biegunowych  $r, \theta$  z polem prędkości  $(u_r, u_\theta)$ , gdzie  $u_r$  oznacza składową promieniową, a  $u_\theta$  składową obwodową. Związek pomiędzy składowymi we współrzędnych prostokątnych i biegunowych jest następujący:

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad (6.12)$$

$$v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta. \quad (6.13)$$

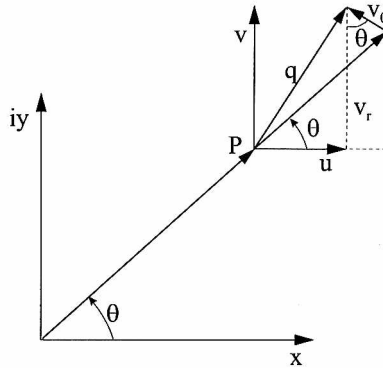
Po podstawieniu powyższych wyrażeń do wzoru (6.10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} q^* &= u - iv = (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) - i(u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) = \\ &= u_r(\cos \theta - i \sin \theta) - i u_\theta(\cos \theta - i \sin \theta). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Pamiętając, że  $\cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$ , otrzymujemy wzór na prędkość zespoloną w zmiennych biegunowych:

$$q^* = (u_r - i u_\theta) e^{-i\theta}. \quad (6.15)$$





**Rys. 6.3:** Przedstawienie wektora prędkości  $q$  we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych

## 6.2. Przepływ jednorodny

Niech  $U$  będzie stałą rzeczywistą. Przepływ, którego potencjał zespolony ma postać:

$$W(z) = Uz = U(x + iy) = Ux + iUy, \quad (6.16)$$

nazywa się przepływem jednorodnym. Potencjał prędkości tego przepływu ma postać  $\phi(x, y) = Ux$ , natomiast funkcja prądu  $\psi(x, y) = Uy$ . Pole prędkości wyraża się jako:

$$\frac{dW}{dz} = U - i0. \quad (6.17)$$

Pole prędkości wzdłuż osi  $x$  ma stałą wartość  $u = U$ . Linie prądu  $\psi = Uy = \text{const}$  są liniami równoległymi do osi  $x$ . Jeżeli  $U$  jest wielkością zespoloną  $U = |U|e^{-i\alpha} = |U|\cos\alpha - i|U|\sin\alpha$ , to linie prądu są nachylone pod kątem  $\alpha$  do osi  $x$  (rys. 6.4b).

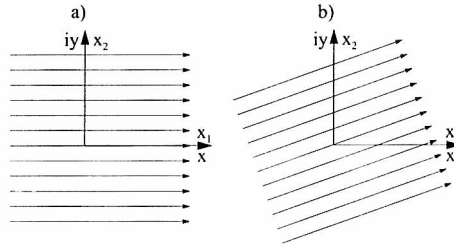
## 6.3. Opływ kąta prostego

Przepływ potencjalny pomiędzy płaszczyznami tworzącymi kąt prosty jest określony potencjałem zespolonym:

$$W(z) = Cz^2. \quad (6.18)$$

Rozkład potencjału zespolonego na część rzeczywistą i urojoną daje potencjał rzeczywisty i funkcję prądu:

$$W(z) = C(x + iy)^2 = C(x^2 - y^2) + i2Cxy. \quad (6.19)$$

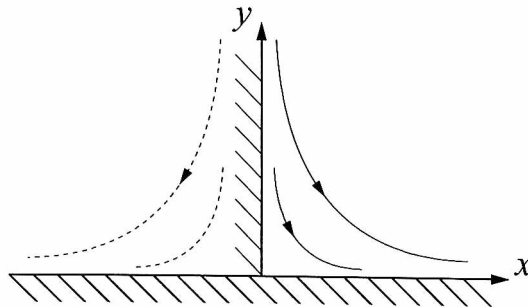


**Rys. 6.4:** Linie prądu przepływu jednorodnego. Linie stałego potencjału są do nich prostopadłe. Strzałki na liniach prądu wskazują kierunek przepływu: a) linie prądu równoległe do osi  $x$  ( $x_1$ ); b) linie prądu nachylone do osi  $x$  ( $x_1$ ) pod kątem  $\alpha$

Tak więc  $\phi(x, y) = C(x^2 - y^2)$ ,  $\psi(x, y) = 2Cxy$ . Pole prędkości określone jest wzorami:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2Cx, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2Cy. \quad (6.20)$$

Linie prądu stanowią rodzinę hiperbol (rys. 6.5). Asymptotami tej rodziny są linie prądu  $y = 0$  oraz  $x = 0$ . Z definicji linii prądu wiadomo, że cząstki płynu poruszają się wzdłuż tych linii (są do tych linii styczne), a więc każdą linię prądu można zastąpić sztywną ścianą (cząstka płynu nie może przenikać przez ścianę stałą). Składowa normalna pola prędkości do linii prądu wyraża się jak  $u_n = \frac{\partial \psi}{\partial s}$ , gdzie  $s$  jest zmienną wzdłuż linii prądu. Wobec stałej wartości funkcji prądu na linii prądu składowa normalna  $u_n$  jest równa zero. W szczególności zastępujemy ścianą linie prądu  $x = 0$  oraz  $y = 0$ .



**Rys. 6.5:** Linie prądu dla opływu kąta prostego. Strzałki na liniach prądu wskazują kierunek przepływu

### 6.4. Przepływ wywołany źródłem

Weźmy pod uwagę potencjał zespolony:

$$W(z) = C \ln z, \quad (6.21)$$

gdzie  $C$  jest stałą rzeczywistą. Przedstawiając zmienną  $z$  w postaci biegunowej  $z = re^{i\theta}$  oraz biorąc pod uwagę fakt, że  $\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta$ , otrzymujemy:

$$W(z) = C \ln r + iC\theta. \quad (6.22)$$

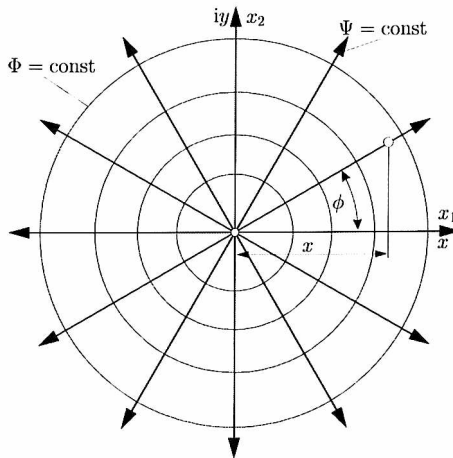
W związku z tym potencjał i funkcja prądu wyrażają się następująco:

$$\phi = C \ln r, \quad \psi = C\theta. \quad (6.23)$$

Linie stałego potencjału są okręgami ( $\phi = C \ln r = \text{const}$ ), natomiast linie prądu wychodzą radialnie z początku układu współrzędnych ( $\psi = C\theta = \text{const}$ ) (rys. 6.6). Pole prędkości  $(v_r, v_\theta)$  we współrzędnych cylindrycznych wyraża się następująco:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C}{r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0. \quad (6.24)$$

Różna od zera jest tylko składowa radialna, która maleje, gdy oddalamy się od początku układu współrzędnych jak  $\frac{1}{r}$ . Składowa radialna dla  $r = 0$  ma wartość nieskończoną. Obraz przepływu przedstawiony jest na rys. 6.6. Stałą  $C$  można



**Rys. 6.6:** Linie potencjalne i prądu przepływu wywołanego źródłem. Linie stałego potencjału są do nich prostopadłe. Strzałki na liniach prądu wskazują kierunek przepływu

powiązać ze strumieniem objętości wytwarzanym przez źródło w jednostce czasu i na jednostkę długości (głębokości prostopadłej do rysunku). Strumień ten na każdym okręgu o promieniu  $r$  powinien być taki sam. Mamy więc:

$$m = \int_K u_r ds = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\varphi = C2\pi. \quad (6.25)$$

Stała  $C = \frac{m}{2\pi}$ . Jeżeli  $m < 0$ , to takie źródło o ujemnej wydajności nazywane jest ściekiem.

Prędkość zespolona  $q^* = m/z$  ma w początku układu biegun. Cyrkulacja po dowolnej krzywej  $C$  niezawierającej początku układu jest, zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego, równa zero:

$$\Gamma = \operatorname{Re} \left[ \oint_C q^* dz \right] = 0. \quad (6.26)$$

Przepływ wywołany źródłem jest więc przepływem bezwirowym (potencjalnym) poza punktem  $z = 0$ .

Gdy źródło lub ściek nie leżą w początku układu współrzędnych, ale w punkcie  $z_0 = x_0 + iy_0$ , to jego potencjał wyraża się wzorem:

$$W(z) = \pm \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (6.27)$$

## 6.5. Złożenie źródła i przepływu jednorodnego

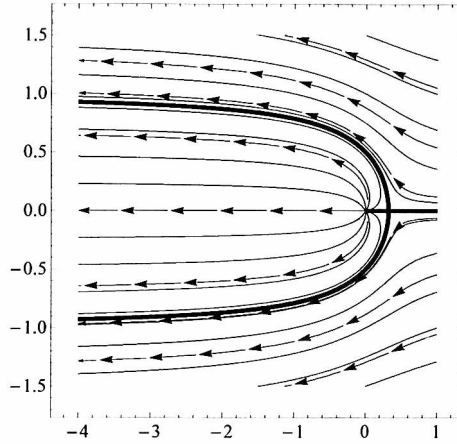
Równanie Laplace'a dla potencjału  $\varphi$  lub funkcji prądu jest równaniem liniowym, dlatego potencjały zespolone różnych przepływów można dodawać do siebie, tworząc tym samym bardziej złożone przepływy. Jeżeli dodamy do siebie potencjał przepływu jednorodnego  $W_1(z) = Uz$  ze źródłem umieszczonym w początku układu  $W_2(z) = m/(2\pi) \ln z$ , to otrzymamy:

$$W(z) = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln z. \quad (6.28)$$

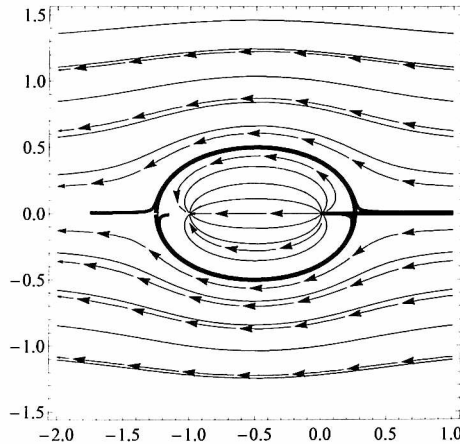
Prędkość zespolona ma postać:

$$q^* = \frac{dW}{dz} = U + \frac{m}{2\pi z} = U + \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{m}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (6.29)$$

Na osi  $x$  ( $y = 0$ ) istnieje punkt stagnacji  $x_s = -m/(U2\pi)$ , w którym prędkość  $q^*$  jest równa zero. Cząstka na osi  $x$  o prędkości  $u = U + m/(2\pi x)$  będzie dążyła do punktu stagnacji nieskończenie długo. Obraz linii prądu  $\psi = \operatorname{Im}[W(z)] = \text{const}$  przedstawiony jest na rys. 6.7. Daleko od punktu stagnacji, gdy  $|z| \rightarrow \infty$ , prędkość  $q^*$  dąży do przepływu równomiernego  $Uz$ . Linie prądu wychodzące



**Rys. 6.7:** Linie prądu wywołane obecnością źródła o intensywności  $m = 2$  w punkcie  $(0, 0)$  w przepływie jednorodnym  $W_1(z) = Uz$ ,  $U = -1$ . Strzałki pokazują kierunek ruchu cząstek płynu. Linia pogrubiona oznacza linię prądu  $\psi = 0$



**Rys. 6.8:** Linie prądu wywołane obecnością źródła o wydajności  $m = 2$  w punkcie  $(0, 0)$  i upustu  $m = -2$  w punkcie  $(-1, 0)$  umieszczonych w przepływie jednorodnym  $W_1(z) = Uz$ ,  $U = -1$ . Strzałki pokazują kierunek ruchu cząstek płynu. Linia pogrubiona oznacza linię prądu  $\psi = 0$

z punktu stagnacji  $(x_s, 0)$  tworzą linię  $\psi = 0$ , która ma zwierciadlaną symetrię względem osi  $x$  i dzieli obszar przepływu płynu wychodzącego ze źródła z punktu  $z = 0$  oraz płynu napływającego z nieskończoności,  $U = -1$ . Daleko od punktu stagnacji w kierunku przepływu równomiernego (w lewo) linia  $\psi = 0$  dąży do

dwóch linii równoległych oddalonych od siebie na pewną odległość  $h$ . Strumień objętości wewnątrz obszaru wyznaczonego linią  $\psi = 0$  jest równy wydajności źródła  $q_v = m$ . Strumień ten równy jest strumieniowi przepływu równomiernego zawartego między liniami prądu oddzielonymi od siebie o wielkość  $h$ , w związku z czym  $m = Uh$  i  $h = m/U$ .

Można zstąpić zerową linię prądu  $\psi = 0$  półnieskończonym ciałem stałym o grubości  $h$ , z zaokrągloną krawędzią natarcia. Ciało takie bywa nazywane półnieskończonym ciałem Rankine'a.

Jeżeli dodamy do przepływu po lewej stronie, np. w punkcie  $x = -1$ , źródło o wydajności ujemnej (upust), to zerowa linia prądu utworzy linię zamkniętą (rys. 6.8). Potencjał zespolony będzie miał postać:

$$W(z) = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln z - \frac{m}{2\pi} \ln(z + z_0). \quad (6.30)$$

Otrzymaną formę utworzoną linią prądu  $\psi = 0$  nazywa się ciałem (owalem) Rankine'a.

## 6.6. Dipol

Potencjał zespolony w postaci równania:

$$W(z) = \frac{\mu}{z} \quad (6.31)$$

reprezentuje obraz przepływu nazywany dipolem, a współczynnik  $\mu$  obraz nazywany momentem dipolowym. Rozdzielenie potencjału zespolonego dipola na część rzeczywistą i urojoną przebiega następująco:

$$W(z) = \frac{\mu}{z} = \frac{\mu}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{\mu(x - iy)}{x^2 + y^2}. \quad (6.32)$$

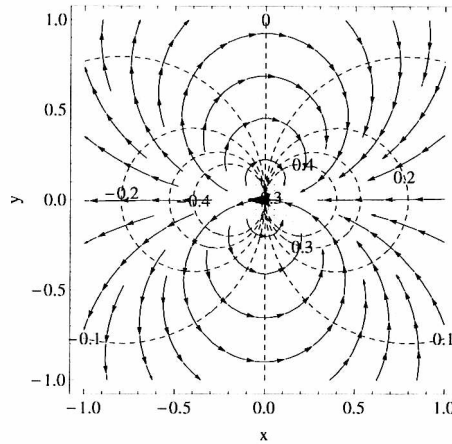
Stąd:

$$\phi(x, y) = \mu \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi(x, y) = -\mu \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (6.33)$$

Potencjał i funkcję prądu można wyrazić we współrzędnych cylindrycznych:

$$\phi(r, \theta) = \mu \frac{\cos \theta}{r}, \quad \psi = -\mu \frac{\sin \theta}{r}. \quad (6.34)$$

Linie prądu wraz z liniami ekwipotencjalnymi przedstawiono na rys. 6.9. Dipol można rozważać jako przypadek graniczny przepływu wywołanego dwoma źródłami o przeciwnych intensywnościach znajdujących się od siebie w niewielkiej odległości  $\varepsilon$ .



**Rys. 6.9:** Wykres linii prądu (linie ciągłe ze strzałkami) i linii stałego potencjału (linie przerywane,  $\phi \in [-0,4, 0,4]$  co 0,1) dla dipola,  $\mu = 1$

Założmy, że mamy dwa źródła o przeciwnych intensywnościach, z których jedno znajduje się w punkcie  $z + \varepsilon$ , natomiast drugie w punkcie  $z - \varepsilon$ . Wypadkowy potencjał zespolony ma postać:

$$W(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z + \varepsilon) - \frac{m}{2\pi} \ln(z - \varepsilon) = \frac{m}{2\pi} \ln \left[ \frac{(z + \varepsilon)}{(z - \varepsilon)} \right]. \quad (6.35)$$

Po zastąpieniu wyrażenia  $\frac{1}{(z - i\varepsilon)}$  rozwinięciem  $1 + \frac{\varepsilon}{z} + \frac{\varepsilon^2}{z^2} + \dots$ , otrzymujemy:

$$W(z) = \frac{m}{2\pi} \ln \left[ \left(1 + \frac{\varepsilon}{z}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{z} + \frac{\varepsilon^2}{z^2} + \dots\right) \right], \quad (6.36)$$

natomiast po pomnożeniu wyrażenia pod logarytmem i zachowaniu tylko członów liniowe mamy:

$$W(z) = \frac{m}{2\pi} \ln \left(1 + 2\frac{\varepsilon}{z}\right). \quad (6.37)$$

Dokonując rozwinięcia  $\ln(1 + x) = x - (1/2)x^2 + x^3/3 - x^4/4 \dots$ , ostatecznie otrzymujemy:

$$W(z) = \frac{m\varepsilon}{\pi z} + O(\varepsilon^2). \quad (6.38)$$

Jeżeli weźmiemy granicę, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ale iloczyn  $m\varepsilon \rightarrow \mu = \text{const}$ , to otrzymamy potencjał zespolony dipola (6.31).

### 6.7. Wir punktowy

Jeżeli w przepływie, który wywołuje źródło punktowe, zamienimy linie potencjalne z liniami prądu, to otrzymamy obraz przepływu wywołany wirami punktowymi. Potencjał zespolony wiru punkowego wyraża się następująco:

$$W(z) = iK \ln z = iK \ln r e^{i\theta} = -K\theta + iK \ln r, \quad K \in \mathbb{R} \quad (6.39)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad v = \frac{iK}{2}.$$

Potencjał i funkcja prądu w zmiennych biegunowych mają postać:

$$\phi = -K\theta, \quad \psi = K \ln r. \quad (6.40)$$

Pole prędkości indukowane przez wir punktowy opisane jest równaniami:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Ky}{r^2}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{Kx}{r^2}, \quad (6.41)$$

a w zmiennych biegunowych  $(r, \theta)$ :

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{K}{r}. \quad (6.42)$$

Linie prądu wiru punkowego są okręgami wokół początku układu współrzędnych ( $K \ln r = \text{const}$ ) (rys. 6.10). Pole prędkości nie zawiera składowej radialnej. Cyrkulacja po dowolnej krzywej zamkniętej  $C$  obejmującej początek układu współrzędnych równa się na mocy twierdzenia o residuach:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C(\alpha, \alpha)} \frac{iK}{z} dz = -2\pi K. \quad (6.43)$$

Stałą  $K$  można wyrazić za pomocą cyrkulacji  $\Gamma$ ,  $K = -\Gamma/2\pi$ . Tak więc potencjał wiru punkowego można zapisać jako:

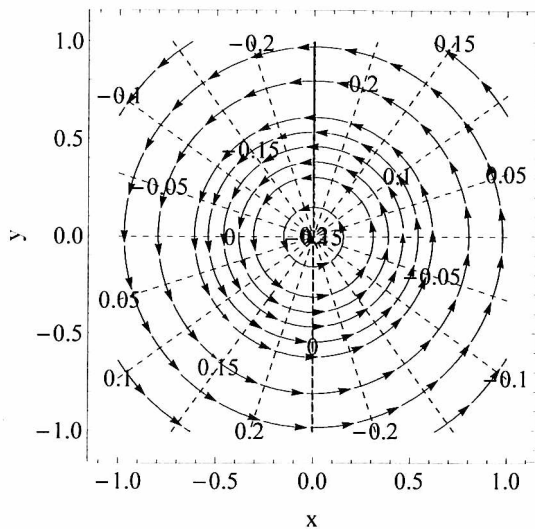
$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (6.44)$$

Cyrkulacja  $\Gamma$  nazywana się intensywnością wiru.

Zwróćmy uwagę, że jeżeli krzywa  $C(\alpha, \beta)$  nie obejmuje początku układu współrzędnych, to całka (6.43) jest równa zero. Pole prędkości wytwarzane przez wir punktowy jest przepływem potencjalnym, bezwirowym z wyjątkiem punktu  $(x, y) = 0$ . Pole prędkości w tym punkcie położenia wiru jest nieskończone ( $|\mathbf{v}| = \Gamma/2\pi r \rightarrow \infty$ , gdy  $r \rightarrow 0$ ). Wirowość pola prędkości można więc zapisać w formie równania:

$$\omega(x, y) = \Gamma \delta(x, y). \quad (6.45)$$





**Rys. 6.10:** Wykres linii prądu (linie ciągłe ze strzałkami) i linii stałego potencjału (linie przerywane,  $\phi = \text{const} \in [-0,2, 0,2]$  co  $0,05$ ) dla wiru punktowego  $\Gamma = 1$

Funkcję prądu odpowiadającą takiemu rozkładowi wirowości można otrzymać z równania:

$$\Delta\psi = \Gamma\delta(x, y). \quad (6.46)$$

Funkcja prądu dla wiru punktowego jest więc funkcją Greena i ma postać (por. równanie (4.113)):

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (6.47)$$

Wszystkie wymienione osobliwości (źródło, wir punktowy, dipol) stanowią cegiełki, z których można zbudować pożądany obraz przepływu. Ze względu na fundamentalne znaczenie wirowości w rzeczywistych przepływach wir punktowy jako nośnik wirowości, odgrywa rolę szczególną.

W zastosowaniach wir punktowy jest niekiedy strukturą zbyt wyidealizowaną. Nieskończona wartość prędkości w środku wiru wyklucza jego fizyczną realizację, w związku z czym niekiedy wir punktowy zastępuje się wirem z rdzeniem o promieniu  $r_0$ . Zakłada się, że w rdzeniu rozkład wirowości jest stały i wynosi  $\omega_0$  (wir Rankine'a). Odpowiada to takiej sytuacji, w której rdzeń wiru stanowił ciało stałe wirujące ze stałą prędkością kątową  $2\omega_0$ . Intensywność rdzenia wirowego wynosi  $\Gamma = 2\omega_0\pi r_0^2$ . Przyjęty rozkład wirowości wewnątrz rdzenia przesądza o rozkładzie

prędkości wewnątrz. Mamy  $\Delta\psi_0 = -\omega_0$ , w związku z czym funkcja prądu  $\psi_0$ , która zależy tylko od promienia  $r$ , musi spełniać równanie:

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_0}{\partial r} = -\omega_0. \quad (6.48)$$

Stąd:

$$\psi_0 = -\omega_0 r^2/4 \quad \text{oraz} \quad v_\theta = \frac{\partial\psi_0}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} r. \quad (6.49)$$

Pole prędkości wiru z rdzeniem o stałej wirowości ma postać:

$$v_\theta = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r} & \text{dla } r > r_0 \\ \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} r & \text{dla } r \leq r_0. \end{cases} \quad (6.50)$$

Zwróćmy uwagę, że teraz prędkość w środku wiru jest równa zero. Dysponując rozkładem prędkości (6.50), można wyznaczyć rozkład ciśnienia za pomocą równania pędu. Równanie Eulera dla płynu nielepkiego, dla składowej radialnej  $r$  i tylko składowej  $v_\theta$  różnej od zera ma postać:

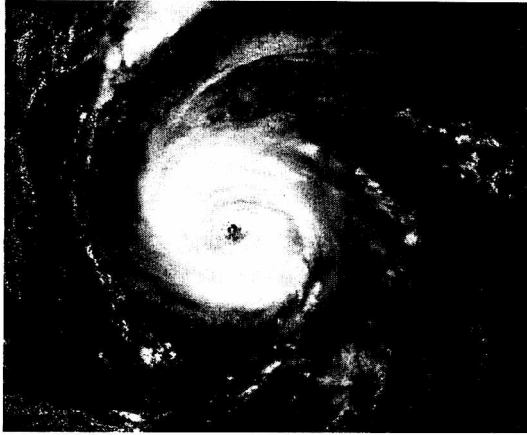
$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6.51)$$

Człon  $v_\theta^2/r$  odpowiada przyspieszeniu dośrodkowemu.

Równanie (6.51) dla rozkładu prędkości (6.50) można scałkować. Otrzymuje się następujący rozkład ciśnienia:

$$p(r) = \begin{cases} p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} & \text{dla } r > r_0 \\ p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} + \frac{\rho\Gamma^2 r^2}{8\pi^2 r_0^4} & \text{dla } r \leq r_0. \end{cases} \quad (6.52)$$

Ciśnienie w rdzeniu wiru jest istotnie mniejsze niż ciśnienie na zewnątrz rdzenia. Szczególnie dotyczy to dużych wartości  $\Gamma/r_0$ . Minimalne ciśnienie w rdzeniu dla  $r = 0$  wynosi  $p(0)_{\min} = p_\infty - \rho\omega_0^2 r_0^2$ . Obszary obniżonego ciśnienia są charakterystyczne dla trąb powietrznych (rys. 6.11), a także innych struktur wirowych powstających np. w wirujących częściach maszyn przepływowych, śmigłach i skrzydłach samolotów. W skomplikowanych polach prędkości obszary o skoncentrowanej wirowości są identyfikowane jako obszary obniżonego ciśnienia. Dla płynu nieściśliwego wzór (6.52) dopuszcza istnienie (niefizycznego) ciśnienia ujemnego. Dla gazów efekt ściśliwości ogranicza minimalne ciśnienie wewnątrz wiru do ciśnienia próżni (do zera).



Rys. 6.11: Wir atmosferyczny huraganu Fran u wybrzeży Florydy (4 sierpnia 1996, zdjęcie satelitarne). Wyraźnie widać rdzeń wiru. Prędkość wiatru wynosiła 185 km/h

Energia kinetyczna generowana przez wir punktowy w przepływie bezwirowym jest nieskończona:

$$\begin{aligned}
 E_w &= \frac{\rho}{2} \int_S |v|^2 r dr d\theta = \\
 &= \frac{\rho}{2} \int_0^R v_\theta dr \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = \frac{\rho\Gamma}{2} \int_0^R d\psi = \\
 &= \frac{\rho\Gamma}{2} \psi|_{r_0}^\infty = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \ln \frac{r}{r_0} = \infty.
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Jeżeli wir punktowy znajduje się w punkcie  $z_0 = x_0 + iy_0$ , to jego potencjał ma postać:

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0). \tag{6.54}$$

Z powodu symetrii pola prędkości płynu wokół wiru punktowego pojedynczy wir punktowy będzie pozostawał w spoczynku. Cząstka płynu  $(x, y)$  będzie podążała po okręgu  $z(t) = x(t) + i(t)$  a jej ruch można wyznaczyć z równań:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\Gamma y}{2\pi r^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma x}{2\pi r^2}. \tag{6.55}$$

Potencjał i pole prędkości wiru, który znajduje się w punkcie  $z_0 = x_0 + i$ , możemy przedstawić w postaci zespolonej następująco:

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0), \quad \frac{dz^*}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0}. \tag{6.56}$$

## 6.8. Pole prędkości dwóch wirów

Pojedynczy wir, ze względu na generowane przez niego symetryczne pole prędkości, będzie pozostawał w spoczynku. Sytuacja ulega zmianie, jeżeli w jego otoczeniu pojawi się drugi wir. Przyjmijmy, że na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $C$  znajdują się dwa wiry o intensywnościach  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , które położone są odpowiednio w punktach  $z_1$  i  $z_2$ . Wir, który znajduje się w punkcie  $z_1$ , będzie poruszał się pod wpływem pola prędkości generowanego przez wir w punkcie  $z_2$ . Wynika to z twierdzenia Helmholtza, o którym będziemy mówili w rozdziale o ruchu wirowym, że w płynie idealnym linie wirowe unoszone są przez przepływ. Zespolony potencjał dwóch wirów ma postać:

$$W(z) = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \ln(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \ln(z - z_2). \quad (6.57)$$

Pierwszy wir będzie się poruszał zgodnie z polem prędkości indukowanym przez drugi wir, który będzie się przemieszczał zgodnie z polem prędkości indukowanym przez wir pierwszy. Równania ruchu wiru pierwszego i drugiego będą miały postać:

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\Gamma_2}{2\pi i(z_1 - z_2)}, \quad \frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i(z_2 - z_1)}. \quad (6.58)$$

Przyrównując do siebie część rzeczywistą i część urojoną lewej i prawej strony równań (6.58), otrzymujemy:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad (6.59)$$

oraz podobnie dla współrzędnych wiru drugiego:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2}. \quad (6.60)$$

Po pomnożeniu równania (6.59) przez  $\Gamma_1$ , równania (6.60) przez  $\Gamma_2$  i dodaniu równań do siebie stronami, otrzymujemy:

$$\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \Gamma_1 \frac{dy_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{dy_2}{dt} = 0 \quad (6.61)$$

a stąd:

$$\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 = \text{const}, \quad \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = \text{const}. \quad (6.62)$$

Dzieląc równania (6.62) przez sumę  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ , otrzymujemy wzory na położenie środka masy wirów, które podczas ruchu jest niezmiennie:

$$x_c = \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_c = \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (6.63)$$

Z równań (6.59) i (6.60) można również wyprowadzić niezmiennik ruchu wirów nazywany wirialem, który będziemy oznaczać literą  $V$ :

$$V = \Gamma_1 \left( x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right) + \Gamma_2 \left( x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt} \right) = \frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \Gamma_2. \quad (6.64)$$

Z równań (6.59) i (6.60) można otrzymać równania:

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r^2}, \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2}. \quad (6.65)$$

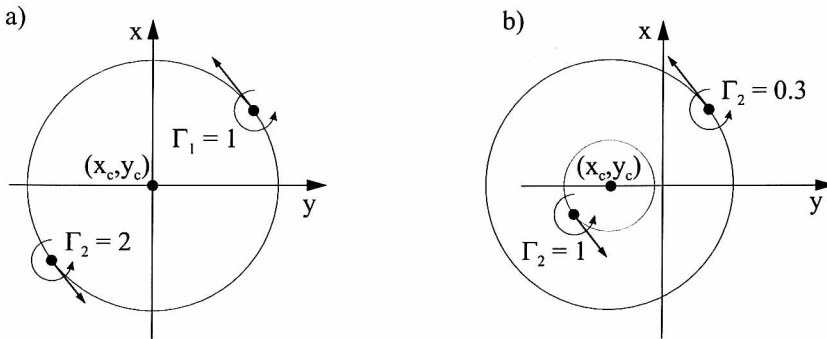
Pomnożmy pierwsze z powyższych równań przez  $(x_1 - x_2)$ , drugie przez  $(y_1 - y_2)$  i dodajmy stronami:

$$(x_1 - x_2) \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (y_1 - y_2) \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0. \quad (6.66)$$

Po scałkowaniu stronami równania (6.66) otrzymujemy:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r_{12}^2 = \text{const}, \quad (6.67)$$

czyli odległość pomiędzy wirami w czasie ruchu pozostaje stała. Jeżeli więc  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ , to na podstawie powyższych rozważań można wywnioskować, że wiry krążą wokół środka ciężkości wirów, zachowując stałą odległość między sobą (rys. 6.12).



**Rys. 6.12:** Ruch dwóch wirów wokół środka masy wirów; a) wiry mają tę samą cyrkulację  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ,  $(x_c, y_c) = (0, 0)$ ; b)  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = 0,3$ ,  $(x_c, y_c) = (-0,5384, 0)$

Z równań (6.65) wynika, że można badać ruch wirów, badając zmianę względnych odległości między położeniem wirów. Oznaczając  $x_{12} = x_1 - x_2$ ,  $y_{12} = y_1 - y_2$ , równania (6.65) można przepisać następująco:

$$\frac{dx_{12}}{dt} = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \frac{y_{12}}{r_{12}^2}, \quad \frac{dy_{12}}{dt} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \frac{x_{12}}{r_{12}^2}. \quad (6.68)$$

Eliminując z pierwszego równania (6.68) zmienną  $y_{12}$  w wyniku zróżniczkowania tego równania po czasie i wykorzystując równanie drugie, otrzymujemy równanie ruchu drgającego prostego:

$$\frac{d^2 x_{12}}{dt^2} + \omega_0^2 x_{12} = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}{4\pi^2 r_{12}^4}. \quad (6.69)$$

Tak więc widać, że prędkość kątową wyraża się przez intensywności wirów następująco:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi r_{12}^2}. \quad (6.70)$$

Wprowadzimy jeszcze dwa ważne niezmienniki ruchu, które mają zastosowanie również dla dowolnego układu  $n$  wirów punktowych. Jeżeli pierwsze z równań (6.59) pomnożymy stronami przez  $x_1\Gamma_1$ , a drugie przez  $y_1\Gamma_1$ , a następnie powtórzymy tę czynność dla równań (6.60), mnożąc je odpowiednio przez  $x_2\Gamma_2$  oraz  $y_2\Gamma_2$ , i wyniki dodamy do siebie stronami, otrzymamy:

$$x_1\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + y_1\Gamma_1 \frac{dy_1}{dt} + x_2\Gamma_2 \frac{dx_2}{dt} + y_2\Gamma_2 \frac{dy_2}{dt} = 0. \quad (6.71)$$

Po scałkowaniu równania (6.71) otrzymamy:

$$\frac{d}{dt} \left[ \Gamma_1(x_1^2 + y_1^2) + \Gamma_2(x_2^2 + y_2^2) \right] = 0. \quad (6.72)$$

Stąd wynika, że:

$$I \equiv \Gamma_1(x_1^2 + y_1^2) + \Gamma_2(x_2^2 + y_2^2) = \text{const.} \quad (6.73)$$

Z równania (6.73) wynika, że moment wirów względem początku układu współrzędnych jest podczas ruchu niezmienny.

Jeżeli pierwsze z równań (6.58) pomnożymy przez  $\Gamma_1 dz_1/dt$ , a drugie przez  $\Gamma_2 dz_2/dt$  i dodamy do siebie, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \frac{dz_1}{dt} \frac{dz_1^*}{ddt} + \Gamma_2 \frac{dz_2}{dt} \frac{dz_2^*}{ddt} &= \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{d(z_1 - z_2)}{dt} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} [\Gamma_1 \Gamma_2 \ln(z_1 - z_2)]. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Zwróćmy teraz uwagę, że wyrażenie po lewej stronie równania (6.74) jest rzeczywiste. Aby równość mogła zachodzić, część urojona po prawej stronie równania musi być równa zeru. Znaczy to, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym musi mieć wartość stałą. Stąd otrzymujemy:

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \ln r_{12} = \text{const.} \quad (6.75)$$

Niezmiennik (6.75) nazywa się energią wzajemnego oddziaływania wirów i może być wykorzystany do formowania funkcji Hamiltona:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\Gamma_1\Gamma_2 \ln r_{12}. \quad (6.76)$$

Za pomocą funkcji Hamiltona równanie ruchu wirów punktowych (6.58) można zapisać jako:

$$\Gamma_\alpha \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2. \quad (6.77)$$

Fakt, że ruch wirów można wyrazić w postaci układu równań Hamiltona, ma duże znaczenie, ponieważ pozwala wykorzystać wypracowane w mechanice analitycznej (hamiltonowskiej) narzędzie do badania ruchu układu wirów.

Gdy  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ , a więc w przypadku, gdy wiry mają taką samą intensywność, lecz przeciwne znaki, środek masy wirów znajduje się w nieskończoności. Wiry poruszają się wtedy ze stałą prędkością wzdłuż prostej prostopadłej do odcinka, który łączy środki obu wirów. Jeżeli położenie jednego wiru będzie w punkcie  $z_0 = x_0 + iy_0$  a drugiego w punkcie  $z_0^* = x_0 - iy_0$ , to potencjał prędkości takiej pary wirów ma postać:

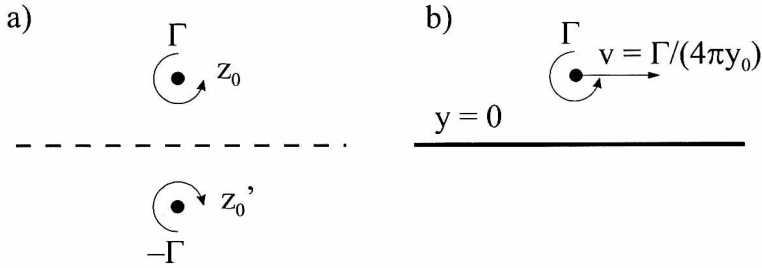
$$W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + z_0) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (6.78)$$

Powyższy potencjał dla  $z = x + i0$ , a więc wtedy, gdy punkt znajduje się na osi  $x$  ( $y = 0$ ), jest sumą dwóch funkcji sprzężonych względem siebie. W związku z tym funkcja prądu  $\psi = \text{Im}W(z) = 0$ . Składowa normalna pola prędkości do osi  $x$  jest równa zero  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ . Oś  $x$  można traktować jak ścianę stałą. W płaszczyźnie  $y > 0$  potencjał (6.78) reprezentuje ruch wiru o intensywności  $\Gamma$  położonego w punkcie  $z_0 = x_0 + iy_0$  nad ścianą. Sytuacja wiru w obecności ściany stałej, na której składowa normalna prędkości musi być równa zero, realizowana jest umiejscowieniem obrazu wiru (zwierciadlanego odbicia) z cyrkulacją przeciwną względem ściany (rys. 6.13). Wir i jego obraz przesuwać się ze stałą prędkością  $u = \frac{\Gamma}{4\pi y_0}$ . Układ dwóch wirów o przeciwnych cyrkulacjach i tej samej intensywności nazywa się parą wirów.

Zbadajmy obraz linii prądu pary wirów. Przyjmijmy, że położenie wirów  $z_0 = i\varepsilon$ . Wtedy część urojona potencjału (6.78) ma postać:

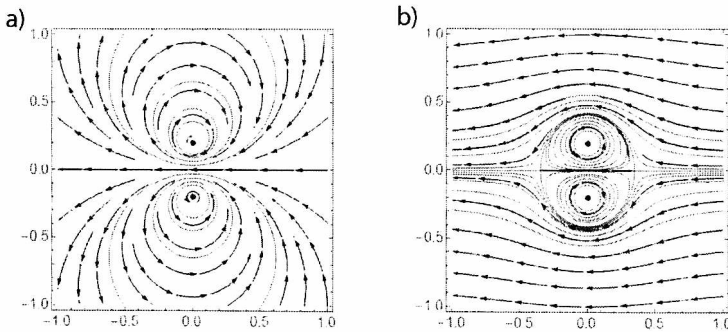
$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left| \frac{x^2 + (y + \varepsilon)^2}{x^2 + (y - \varepsilon)^2} \right|. \quad (6.79)$$

Na rysunku 6.14a przedstawiono linie prądu pary wirów poruszających się w prawo z prędkością  $v = \Gamma/(4\pi y_0)$ .



**Rys. 6.13:** a) Dwa wiry o przeciwnych cyrkulacjach, symetrycznie położone względem osi  $x$ ; b) wir o cyrkulacji  $\Gamma$  w obecności ściany stałej

Jeżeli na przepływ wywołany parą wirów nałożymy przepływ równomierny, skierowany przeciwnie do ruchu pary wirów, tak aby parę wirów unieruchomić, to obraz linii prądu będzie taki jak na rys. 6.14b. Widać, że oba wiry zamknięte są wewnątrz zerowej linii prądu. Obszar zamknięty wokół pary wirów nazywa się atmosferą wirów. Para wirów może wytworzyć przepływ odpowiadający opływowi owalnego ciała stałego, ponieważ zamkniętą linię prądu można byłoby zastąpić ścianą stałą.



**Rys. 6.14:** a) Linie prądu poruszającej się w prawo pary wirów,  $\Gamma = 2$ , odległość między wirami  $\varepsilon = 0,2$ ; b) obraz linii prądu pary wirów unieruchomionych przez dodanie przepływu równomiernego skierowanego w lewo  $\psi = -Uy$ ,  $U = \Gamma/4\pi\varepsilon$

Rozpatrzmy jeszcze przypadek graniczny, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  a intensywność wiru  $\Gamma \rightarrow \infty$  w taki sposób, że iloczyn tych wielkości dąży do pewnej skończonej granicy. Podobnie jak dla dipola utworzonego ze źródła i upustu (rozd. 6.6)



mamy:

$$\begin{aligned} W(z) &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[ \ln(z + i\varepsilon) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - i\varepsilon) \right] = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \frac{(z + i\varepsilon)}{(z - i\varepsilon)} \right] \\ &= \frac{\Gamma\varepsilon}{\pi z} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Przyjmując, że  $\Gamma\varepsilon/\pi \rightarrow \mu$ , otrzymujemy potencjał dipola:

$$W(z) = \frac{\mu}{z}. \quad (6.81)$$

Z dotychczasowych rozważań wynika, że złożenie pewnych osobliwości typu źródło, pary wirów, dipol z przepływem równomiernym może dawać potencjalny obraz przepływu wokół ciała stałego. Jednak dobór tych osobliwości i takie położenie, które umożliwi otrzymanie pożądanego opływu, może nastęrczać pewnych kłopotów. W rozdziale 6.15 podamy ważne twierdzenie, które pozwala skonstruować potencjał zespolony przepływu, gdy w w istniejący przepływ potencjalny zanurzymy koło.

## 6.9. Układ $n$ wirów na płaszczyźnie

Uogólnijmy równania ruchu dla układu dwóch wirów na ruch układu  $n$  wirów punktowych. Przyjmijmy, że na płaszczyźnie znajduje się  $n$  wirów punktowych położonych w punktach  $z_1, z_2, \dots, z_\alpha, \dots, z_n$  z intensywnościami  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\alpha, \dots, \Gamma_n$ ,  $z_k = x_k + iy_k$ . Zespolony potencjał prędkości ma postać:

$$W(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_k). \quad (6.82)$$

Zespolona prędkość  $q^* = u(x, y) - iv(x, y)$  przez  $n$  wirów dana jest wzorem:

$$u(x, y) - iv(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_k} \quad (6.83)$$

lub inaczej

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \frac{y - y_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}, \quad (6.84)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}. \quad (6.85)$$

Równania ruchu układu  $n$  wirów mają postać:

$$\frac{dz_\alpha^*}{dt} = \sum_{k=1, k \neq \alpha}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{z_\alpha - z_k} \quad (6.86)$$

lub rozdzielając części rzeczywiste i urojone w równaniach (6.86), postać układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu  $2n$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{\Gamma_k (y_k - y_j)}{r_{jk}^2}, \\ \frac{dy_j}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{\Gamma_k (x_k - x_j)}{r_{jk}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych do równań różniczkowych zwyczajnych (6.87) należy dobrać odpowiednie warunki początkowe, które w tym wypadku wiążą się z położeniem początkowym wirów, oraz ich intensywności.

Dla układu równań różniczkowych (6.86) można wyprowadzić, podobnie jak dla układu dwóch wirów, takie same niezmienniki ruchu, tj. zachowanie impulsu wirowości (momentu statycznego)  $(M_x, M_y)$  wiriału  $V$ , momentu bezwładności wirowości  $I$  i energii oddziaływania wirów  $\mathcal{H}$ :

$$M_x = \sum_{j=1}^n \Gamma_j x_j = \text{const}, \quad M_y = \sum_{j=1}^n \Gamma_j y_j = \text{const}, \quad (6.88)$$

$$V = \sum_{j=1}^n \Gamma_j (x_i \dot{y}_j - y_j \dot{x}_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \sum_{j, i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j, \quad (6.89)$$

$$I = \sum_{j=1}^n \Gamma_j (x_j^2 + y_j^2) = \text{const}, \quad (6.90)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_j \sum_{k, k \neq j}^n \Gamma_j \Gamma_k \ln |z_j - z_k| = \text{const}. \quad (6.91)$$

Jeżeli  $\sum_{j=1}^n \Gamma_j \neq 0$ , to niezmienniki  $(M_x, M_y)$  można wyrazić za pomocą środka masy wirowości:

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{j=1}^n \Gamma_j x_j}{\sum_{j=1}^n \Gamma_j} = \text{const}, \quad \bar{y}_c = \frac{\sum_{j=1}^n \Gamma_j y_j}{\sum_{j=1}^n \Gamma_j} = \text{const}. \quad (6.92)$$

Równanie ruchu (6.86) wirów można zapisać jako równania Hamiltona:

$$\Gamma_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (6.93)$$

### 6.9.1. Uwagi o hamiltonowskich układach dynamicznych

W mechanice klasycznej, nazywanej hamiltonowską, wprowadza się pojęcie współrzędnych uogólnionych  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , gdzie współrzędne wektora  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  nazywane są uogólnionymi współrzędnymi położeń a składowe wektora  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  uogólnionymi pędami. Przestrzeń  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  nazywa się przestrzenią stanów lub przestrzenią fazową o  $n$  stopniach swobody. Stan układu  $n$  punktów materialnych określony jest jednoznacznie w przestrzeni stanów za pomocą punktu  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Mówi się, że układ  $n$  punktów materialnych ma  $n$  stopni swobody a wymiar przestrzeni fazowej wynosi  $2n$ . Ewolucja układu w czasie odpowiada przemieszczaniu się punktu  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  w przestrzeni fazowej  $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ . Układ, w którym ewolucja w przestrzeni stanów opisana jest zbiorem reguł, nazywa się układem dynamicznym. Jeżeli reguły przemieszczania się w przestrzeni stanów określone są równaniami różniczkowymi, to operator  $\Phi$ , który przemieszcza punkty z pewnego położenia początkowego w inne, nazywa się potokiem  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \Phi(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ . Krzywa (zbiór punktów) przestrzeni fazowej odpowiadająca przemieszczaniu się punktu ze stanu początkowego  $\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)$  do stanu  $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$  nazywa się trajekcją. Zbiór trajektorii reprezentuje portret fazowy.

Załóżmy, że zadana jest funkcja Hamiltona:

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t).$$

Ruch punktu  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  w przestrzeni stanów opisują równania:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.94)$$

Pochodna substancjalna (całkowita) hamiltonianu wynosi [13]:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \left( \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \left( \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (6.95)$$

Jeżeli więc hamiltonian  $\mathcal{H}$  nie zależy w sposób jawny od czasu, to energia układu (funkcja Hamiltona) w przypadku ruchu punktu w przestrzeni fazowej ma wartość stałą, a więc  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$ . Funkcja  $F(p, q) = \text{const}$ , która jest stała podczas ruchu, nazywa się całką pierwszą.

Przestrzeń fazowa dla wirów punktowych pokrywa się z ich płaszczyzną położeń. Współrzędnymi uogólnionymi są  $q_i = x_i$  oraz  $p_i = \Gamma_i y_i$ <sup>(3)</sup>.

<sup>(3)</sup> Porównując równania (6.77) oraz (6.94), można zauważyć, że układ równań (6.77) jest prawie hamiltonowski. Układ (6.77) można sprowadzić do pełnego układu równań hamiltonowskich, dokonując zamiany zmiennych  $q_i = \sqrt{\Gamma_i} x_i, p_i = \sqrt{\Gamma_i} y_k$  [16].

### 6.9.2. Nawiasy Poissona

Załóżmy, że na przestrzeni stanów zadana jest pewna funkcja  $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$  zależna od współrzędnych uogólnionych i czasu. Jak to już wiemy (patrz wzór (6.95)), pochodna substancjalna funkcji  $\Psi$  względem czasu wynosi:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial q_i} \left( \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial\Psi}{\partial p_i} \left( \frac{dp_i}{dt} \right). \quad (6.96)$$

Jeżeli do równania (6.96) wstawiamy równania ruchu (6.94), to otrzymamy:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial q_i} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial\Psi}{\partial p_i} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (6.97)$$

Wyrażenie:

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \frac{\partial\Psi}{\partial q_i} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial\Psi}{\partial p_i} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (6.98)$$

nazywa się nawiasem Poissona hamiltonianu  $\mathcal{H}$  z funkcją  $\Psi$ . Jeżeli  $\Psi$  jest całką ruchu w przestrzeni stanów, tzn.  $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ , wtedy równanie ewolucyjne dla  $\Psi$  ma postać:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + [H, \Psi] = 0. \quad (6.99)$$

Jeżeli ponadto całka ruchu  $\Psi$  nie zależy w sposób jawny od czasu, to:

$$[H, \Psi] = 0, \quad (6.100)$$

czyli nawias Poissona całki ruchu i hamiltonianu jest równy zeru.

Podamy teraz formalną definicję i podstawowe własności nawiasów Poissona [7], [13], [47].

**Definicja 6.1.** *Nawiasem Poissona dowolnych dwóch funkcji  $f(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$  i  $g(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$  nazywamy wyrażenie:*

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (6.101)$$

przy czym nawias Poissona spełnia następujące tożsamości:

1. Nawias Poissona jest skośnie symetryczny, czyli:

$$[f, g] = -[g, f]. \quad (6.102)$$

2. Zachodzą następujące działania:

$$[f, c] = 0, \quad \text{gdzie } c \text{ jest stałą,} \quad (6.103)$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g], \quad (6.104)$$

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]. \quad (6.105)$$

3. Pochodna cząstkowa względem czasu nawiasu Poissona jest równa:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]. \quad (6.106)$$

Jeżeli jedną z funkcji w nawiasie Poissona jest współrzędna uogólniona  $q_i$  lub  $p_i$ , to nawias Poissona redukuje się do pochodnej cząstkowej:

$$[f, q_i] = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad [f, p_i] = -\frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (6.107)$$

4. Dla dowolnych trzech funkcji  $f, g, h$  zachodzi tożsamość Jacobiego:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (6.108)$$

5. Jeżeli  $[f, g] = 0$  dla wszystkich funkcji  $g$ , to  $f = 0$ .

Przytoczymy jeszcze ważne twierdzenie Poissona, które wynika z tożsamości Jacobiego (6.108).

**Twierdzenie 6.1.** Jeżeli  $\Psi$  oraz  $\Phi$  są dwiema całkami ruchu układu hamiltonowskiego, to nawias Poissona tych całek wyznacza również całkę ruchu  $\Theta$ :

$$[\Psi, \Phi] = \Theta. \quad (6.109)$$

**Dowód:** W celu dowiedzenia twierdzenia posłużymy się powyższymi własnościami nawiasu Poissona. Po położeniu w tożsamości Jacobiego (6.108)  $h = \mathcal{H}$  otrzymujemy równanie:

$$[\Psi, [\Phi, \mathcal{H}]] + [\Phi, [\mathcal{H}, \Psi]] + [\mathcal{H}, [\Psi, \Phi]] = 0. \quad (6.110)$$

Ponieważ jednak z równania (6.100) wiemy, że  $[\Phi, \mathcal{H}] = 0$  oraz  $[\mathcal{H}, \Psi] = 0$ , to tożsamość (6.110) przekształca się do postaci:

$$[\mathcal{H}, [\Psi, \Phi]] = [\mathcal{H}, \Theta] = 0. \quad (6.111)$$

Stąd wynika, że  $\Theta$  jest całką ruchu. □

Równania hamiltonowskie z użyciem nawiasów Poissona wyrażają się następująco:

$$\frac{dq_i}{dt} = [q_i, \mathcal{H}], \quad \frac{dp_i}{dt} = [p_i, \mathcal{H}], \quad 1 \leq i \leq n. \quad (6.112)$$

Mówi się, że jeżeli  $[f, g] = 0$ , to funkcje  $f$  i  $g$  są w inwolucji. Przytoczymy ważne twierdzenie Liouville'a z 1855 roku o zupełnej całkowalności układu hamiltonowskiego (6.112) [47]:

**Twierdzenie 6.2.** *Jeżeli istnieje  $n$  niezależnych całek ruchu  $F_1(q, p, t), \dots, F_n(q, p, t)$ , które są parami w inwolucji:  $[F_i, F_j] = 0$ , to układ (6.112) jest całkowny w kwadraturach.*

Całkowanie w kwadraturach oznacza możliwość wyznaczenia pełnego rozwiązania układu równań za pomocą operacji algebraicznych z uwzględnieniem odwracania funkcji i obliczania całek funkcji jednej zmiennej.

## 6.10. Ruch trzech wirów

O ile badanie dużych liczb wirów na płaszczyźnie pozwala zrozumieć statystyczne własności pól prędkości, o tyle dzięki dynamice badanie ruchu niewielkiej liczby wirów pozwala określić, jaka jest najmniejsza liczba wirów, która pozwoliłaby uchwycić charakterystyczne zjawiska hydrodynamiczne, np. powstawanie chaosu.

Układ dwóch wirów ( $n = 2$ ) jest całkowny (zob. rozdz. 6.8). W mechanice hamiltonowskiej z twierdzenia Liouville'a wynika, że układ trzech wirów ( $n = 3$ ) jest również całkowny. Nawias Poissona dla równań wirów punktowych definiujemy jako [2]:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \quad (6.113)$$

W takim przypadku zachodzą tożsamości:

$$[x_i, \Gamma_i y_i] = 1 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \quad (6.114)$$

$$[x_i, y_j] = 0, \quad \text{jeżeli } i \neq j \quad (6.115)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}]. \quad (6.116)$$

Wiemy, że jeżeli  $\mathcal{H}$  jest całką ruchu, to  $[f, \mathcal{H}] = 0$ .

Badanie nawiasów Poissona całek  $M_x, M_y, I$  oraz  $\mathcal{H}$  względem siebie daje zależności:

$$[M_x, \mathcal{H}] = 0, \quad [M_y, \mathcal{H}] = 0, \quad [I, \mathcal{H}] = 0, \quad (6.117)$$

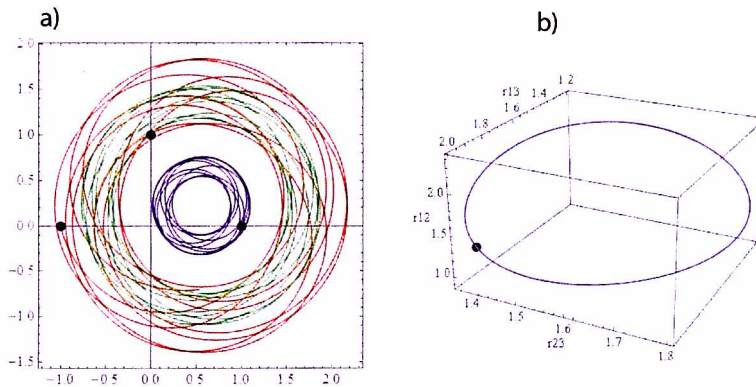
$$[M_x, M_y] = \sum_{i=1}^n \Gamma_i, \quad [M_x, M_y] = 2M_x, \quad [M_x, I] = -2M_y, \quad (6.118)$$

$$[M_x^2 + M_y^2, I] = 2M_y[M_y, I] + 2M_x[M_x, I] = 0. \quad (6.119)$$

Tak więc co najmniej trzy niezależne całki ruchu  $H, I$  oraz  $M_x^2 + M_y^2$  są w inwolucji. Układ hamiltonowski dla trzech wirów spełnia warunki twierdzenia Liouville'a

o całkowalności układu (zob. twierdzenie 6.2). Całkowalność trzech wirów pierwszy raz wykazał Gröbli już w 1877 roku [4], ale jego praca została całkowicie zapomniana. Ponownie zagadnieniem trzech wirów o identycznej cyrkulacji zainteresował się w 1975 roku Novikov [69]. Wiry o dowolnej cyrkulacji zbadał natomiast, zupełnie niezależnie, Aref w 1978 roku [1].

Przykładowe trajektorie ruchu na płaszczyźnie  $(x, y)$  przedstawiono na rys. 6.15a. Obraz trajektorii wydaje się złożony, jednak niezmienniki ruchu powodują, że ruch odbywa się w obszarze ograniczonym. Jeżeli wprowadzimy do rozważań przestrzeń stanów, której punktami są wzajemne odległości pomiędzy wirami  $(r_{13}, r_{23}, r_{12})$ , to okazuje się, że ruch w przestrzeni stanów  $(r_{13}, r_{23}, r_{12})$  dla przyjętych wartości cyrkulacji ( $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 1, \Gamma_3 = 3$ ) odbywa się po elipsie (rys. 6.15b). Ogólnie, gdy  $\sum_{j=1}^3 \Gamma_j \neq 0$ , krzywa może być elipsą, hiperbolą lub parabolą. Badanie ruchu wirów za pomocą ich wzajemnych odległości było decydującym krokiem w analizie i scałkowaniu układu trzech wirów.



**Rys. 6.15:** a) Trajektorie trzech wirów na płaszczyźnie  $(x, y)$ . Początkowe położenia wirów zaznaczono czarnymi punktami; b) trajektoria wirów w przestrzeni  $(r_{13}, r_{23}, r_{12})$ . Początkowe położenie wzajemnych odległości wirów zaznaczona pogrubionym punktem

## 6.11. Kolaps trzech wirów

Interesującym zjawiskiem jest ruch trzech wirów, który kończy się ich zderzeniem (kolapsem) w skończonym czasie. Żeby lepiej zrozumieć zapadanie się wirów do jednego punktu, powtórzmy za Arefem [3] analizę tego zagadnienia.

Już Gröbli wykazał, że układ równań opisujący absolutne położenia wirów w czasie można wyrazić za pomocą ich względnego położenia opisywanego ich

wzajemną odległością od siebie  $r_{ij}$ . Równania ruchu  $n$  wirów wyrażone względem ich wzajemnych odległości mają postać:

$$\frac{d}{dt}r_{ij}^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k \\ k \neq i, k \neq j}} \Gamma_k \sigma_{ijk} |\Delta_{ijk}| \left( \frac{1}{r_{jk}^2} - \frac{1}{r_{ik}^2} \right), \quad (6.120)$$

gdzie  $|\Delta_{ijk}|$  oznacza pole trójkąta rozpiętego przez wiry:  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_j$ ,  $\Gamma_k$ . Pole tego trójkąta można wyrazić za pomocą długości jego boków (wzór Herona) następująco:

$$\Delta_{ijk} = \frac{1}{4} \left[ 2(r_{ij}^2 r_{ik}^2 + r_{jk}^2 r_{ij}^2 + l_{ik}^2 r_{jk}^2) - r_{kj}^4 - r_{ik}^4 - r_{ij}^4 \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0. \quad (6.121)$$

Symbol  $\sigma_{ijk}$  określa orientację trójkąta, czyli sposób uporządkowania (numeracji) wierzchołków:  $\sigma_{ijk} = 1$ , gdy numeracja  $ijk$  jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara i  $\sigma_{ijk} = -1$ , gdy jest zgodna z ruchem wskazówek zegara. Równania (6.120) stanowią zamknięty układ równań dla  $n(n-1)/2$  zmiennych, w których tylko  $(2n-3)$  zmiennych jest niezależnych.

Dla trzech wirów ( $n=3$ ) mamy trzy równania niezależne. Zadając początkowe położenia wirów  $z_i(0)$ ,  $i=1,2,3$ , a więc ich wzajemne odległości  $r_{ij}$ , mamy tyle równań, ile jest niewiadomych. Aby sformułować równania ruchu trzech wirów, wygodnie jest wprowadzić następujące oznaczenia:  $s_1 = r_{23} = |z_2 - z_3|$ ,  $s_2 = r_{13} = |z_3 - z_1|$  oraz  $s_3 = r_{12} = |z_1 - z_2|$ , czyli  $s_j$  jest długością boku leżącego naprzeciwko  $j$ -tego wiru (rys. 6.16). Dla tak określonych długości równania ruchu mają postać:

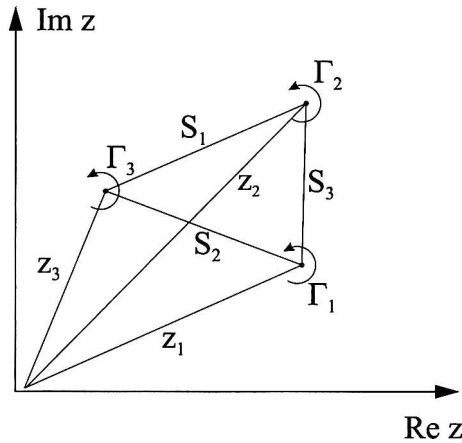
$$\begin{aligned} \frac{ds_1^2}{dt} &= \frac{2\Gamma_1}{\pi} |\Delta| \frac{s_3^2 - s_2^2}{s_2^2 s_3^2}, \\ \frac{ds_2^2}{dt} &= \frac{2\Gamma_2}{\pi} |\Delta| \frac{s_1^2 - s_3^2}{s_3^2 s_1^2}, \\ \frac{ds_3^2}{dt} &= \frac{2\Gamma_3}{\pi} |\Delta| \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Intuicyjnie wydaje się, że kolaps wirów ze względu na niezmienniki ruchu  $\mathcal{H}, I$  jest niemożliwy, ponieważ odległość między dwoma wirami nie powinna być mniejsza niż ich odległość początkowa. Jednak dla pewnych określonych warunków początkowych i rodzaju ruchu, który nazywany jest samopodobnym, kolaps wirów jest możliwy.

**Definicja 6.2.** *Ruch wirów nazywamy samopodobnym, jeżeli:*

$$s_i(t) = \lambda(t) s_i(0) \quad \text{dla każdego } i = 1, 2, 3, \quad \lambda(0) = 1. \quad (6.123)$$





Rys. 6.16: Trójkąt wyznaczony położeniem trzech wirów:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  wraz z zaznaczonymi  $s_i, i = 1, 2, 3$

Jeżeli podstawimy (6.123) do równań (6.122), to z pierwszego równania otrzymamy:

$$\frac{ds_1^2}{dt} = \frac{d\lambda^2}{dt} s_1^2(0) = \frac{2\Gamma_1}{\pi} |\Delta(0)| \frac{s_3^2(0) - s_2^2(0)}{s_2^2(0)s_3^2(0)}. \quad (6.124)$$

Ponieważ prawa strona równania (6.124) jest stała, określona warunkami początkowymi, to:

$$\frac{d\lambda^2}{dt} = \frac{2\Gamma_1}{\pi} |\Delta(0)| \frac{s_3^2(0) - s_2^2(0)}{s_1^2(0)s_2^2(0)s_3^2(0)} = A. \quad (6.125)$$

Aby ruch samopodobny wirów był możliwy  $\lambda^2(t)$ , musi się zmieniać liniowo. Stąd:

$$\lambda(t) = \sqrt{At + 1}. \quad (6.126)$$

Równanie (6.126) można zapisać w postaci:

$$s_i(t) = \lambda(t)s_i(0) = s_i(0)\sqrt{1 - t/T^*}. \quad (6.127)$$

Stałą  $T^*$  będziemy nazywać czasem kolizji. Będzie on określony wartościami położeń początkowych wirów oraz ich cyrkulacjami  $\Gamma_i$ . Aby stała  $A$  była wspólna dla wszystkich równań (6.122) oraz aby zachowywała się ta sama szybkość zmiany  $\lambda^2$ , we wszystkich równaniach (6.122) należy zażądać, aby:

$$\Gamma_1(s_3^2 - s_2^2) = \Gamma_2(s_1^2 - s_3^2) = \Gamma_3(s_2^2 - s_1^2). \quad (6.128)$$

Funkcja Hamiltona w zmiennych  $s_i$  ma postać:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\pi}(\Gamma_2\Gamma_3 \ln s_1 + \Gamma_1\Gamma_3 \ln s_2 + \Gamma_1\Gamma_2 \ln s_3). \quad (6.129)$$

Wprowadzamy dodatkowe wielkości związane z intensywnością (cyrkulacją) wirów:

$$K_\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad (6.130)$$

$$\gamma = \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_1\Gamma_3. \quad (6.131)$$

Z niezmienników  $I$ ,  $M_x$  i  $M_y$  można utworzyć niezmiennik  $L$  będący ich kombinacją liniową, zależny od wzajemnych odległości między wirami. Niezmiennik ten będzie niezwykle przydatny w dalszej analizie względnego ruchu wirów:

$$L = K_\Gamma I - (M_x^2 + M_y^2) = \Gamma_2\Gamma_3 s_1^2 + \Gamma_1\Gamma_3 s_2^2 + \Gamma_1\Gamma_2 s_3^2. \quad (6.132)$$

Prześledźmy, jakie konsekwencje ma przyjęcie założenia o ruchu samopodobnym dla hamiltonianu. Jeżeli podstawimy zależność (6.123) do funkcji Hamiltona (6.129), to otrzymamy:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(0) - \frac{\gamma}{2\pi} \ln \lambda(t). \quad (6.133)$$

Warunkiem zachowania funkcji Hamiltona jest, aby  $\gamma = 0$ , czyli wiriał (6.90)  $V = 0$ . Możliwe jest to jednak tylko wtedy, gdy intensywność jednego z wirów jest przeciwnego znaku niż dwóch pozostałych.

Jeżeli podstawimy (6.123) do utworzonego niezmiennika  $L$ , to otrzymamy  $L = f^2 L(0)$ . Drugim niezbędnym warunkiem, aby odbywał się ruch samopodobny, jest  $L = 0$ . Pozostają nam jeszcze do wyznaczenia warunki początkowe układu wirów, który będzie się zapadał. Przyjmijmy układ współrzędnych  $(x, y)$  i to, że dwa pierwsze wiry o intensywności  $\Gamma_1$  oraz  $\Gamma_2$  leżą na osi  $x$  w odległości  $d$  od siebie, a środek ciężkości tych dwóch wirów znajduje się w początku układu:

$$x_1 = -\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}d, \quad x_2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}d. \quad (6.134)$$

Z warunku  $L = 0$  (6.132) otrzymujemy:

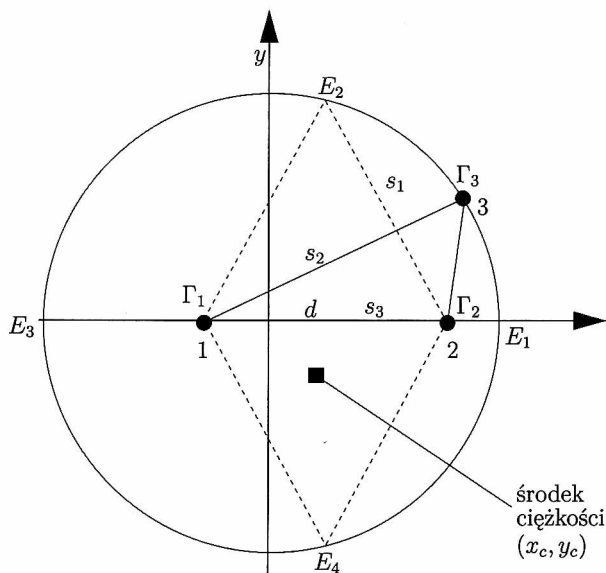
$$\Gamma_1\Gamma_2 d^2 + \Gamma_2\Gamma_3 \left[ (x_2 - x_3)^2 + y_3^2 \right] + \Gamma_1\Gamma_3 \left[ (x_1 - x_3)^2 + y_3^2 \right] = 0. \quad (6.135)$$

Po drobnych przekształceniach równania (6.135) otrzymujemy:

$$x_3^2 + y_3^2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2} d^2. \quad (6.136)$$

Z konstrukcji wynika, że współrzędne trzeciego wiru leżą na kole o promieniu  $R^2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2} d^2$ . Jeżeli poprowadzimy prostą prostopadłą, dzielącą odcinek pomiędzy wirami  $x_1$  i  $x_2$  na pół,  $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ , to prosta ta przetnie okrąg w punkcie  $y_3 = \pm\sqrt{3}/2$  (rys. 6.17, punkt  $E_2$  i  $E_4$ ).

Punkty  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$  i leżący na okręgu (patrz wzór (6.136)) punkt  $(x_3, y_3)$  będą się zapadały lub rozbiegały w zależności od znaku czasu krytycznego  $T^*$ . Wyjątek stanowią punkty  $(E_1, E_2, E_3, E_4)$ .



**Rys. 6.17:** Konstrukcja początkowych położenia trzech wirów  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  ( $L = 0, V = 0$ ), które prowadzą do kolapsu lub ekspansji, współliniowego obrotu (punkty  $E_1$  i  $E_3$ ) i obrotu trójkąta jako ciała stałego (punkty  $E_2$  i  $E_4$ )

W punktach  $E_2$  lub  $E_4$  współrzędne wirów:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  utworzą trójkąt równoboczny o boku  $d$ . Z równań (6.122) wynika, że wzajemne odległości pomiędzy wirami nie będą ulegały zmianie. Wiry będą się obracać wokół środka masy jak ciało stałe z częstością  $\omega = K_\Gamma / (2\pi d)$ . Z równania (6.129) wynika, że wartość hamiltonianu  $\mathcal{H}$  jest równa zeru ( $V = 0$ ).

Należy wyróżnić punkty przecięcia okręgu z osią  $x$  (rys. 6.17, punkty  $E_1$  i  $E_3$ ). W tych punktach wiry leżą na jednej prostej, a więc  $\Delta = 0$ . Będą one pozostawały na tej prostej podczas całego ruchu. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby wiry pozostały współliniowe podczas ruchu, jest, oprócz  $\Delta = 0$  (pole trójkąta rozpiętego na położeniach wirów), aby pochodna  $d/dt(\Delta(l_{12}, l_{23}, l_{13})) = 0$  [68].

Położenia wirów w wierzchołkach trójkąta równobocznego oraz położenie współliniowe nazywają się położeniem równowagi względnej [68]. Dla trzech wirów

równowaga względna jest możliwa tylko dla trójkąta równobocznego lub wirów leżących na jednej prostej.

Na koniec należy zauważyć, że zapadanie się wirów do jednego punktu świadczy o osobliwej naturze rozwiązań (istnienie rozwiązania tylko w skończonym czasie) oraz o utracie jednoznaczności rozwiązań równań Eulera. Jest to konsekwencją osobliwych warunków początkowych zadanych w postaci delt Diraca. Wiadomo, że w przypadku równań Eulera w przestrzeni dwuwymiarowej dla regularnych, dostatecznie gładkich warunków początkowych rozwiązania istnieją w całym przedziale czasu.

Wartość parametru  $T^*$  i jego znak można wyznaczyć z warunków początkowych położenia wirów, posługując się równaniem dla  $s_3^2$  (6.122), oraz na podstawie samopodobieństwa ruchu (patrz wzór (6.127))  $s_3^2 = s_3(0)(1 - t/T^*)$ . Otrzymujemy:

$$\frac{ds_3^2}{dt} = \frac{2\Gamma_3}{\pi} |\Delta(0)| \frac{s_2^2(0) - s_1^2(0)}{s_1^2(0)s_2^2(0)} = -\frac{s_3^2(0)}{T^*}. \quad (6.137)$$

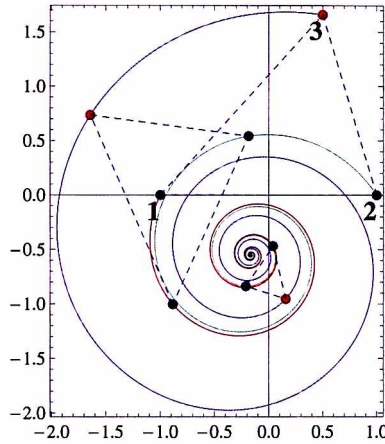
Ze wzoru (6.137) wynika, że czas krytyczny  $T^*$  wyraża się następująco:

$$T^* = -\frac{\pi s_1^2(0)s_2^2(0)s_3^2(0)}{2\Gamma_3 |\Delta(0)| (s_2^2(0) - s_1^2(0))}. \quad (6.138)$$

Dla wiru o numerze 3 (zob. rys. 6.17, łuk  $E_1E_2$ ) zachodzi  $s_2 > s_1$ , a numery wierzchołków trójkąta 123 są uporządkowane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a więc  $\Delta(0) > 0$ . Ponieważ trzeci wir  $\Gamma_3 < 0$ , to  $T^*$  będzie miało wartość dodatnią,  $T^* > 0$ , i wiry będą się zapadały. Pole trójkąta rozpiętego przez położenia wirów będzie dążyło do zera. Na łuku  $E_2E_3$  mamy  $s_2 < s_1$ , a uporządkowanie wierzchołków nie uległo zmianie (od wiru 2 do 3 poruszamy się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) i wiry ruchem samopodobnym będą się rozbiegały do nieskończoności. Jeżeli wierzchołek wiru trzeciego znajdzie się na łuku  $E_3E_4$ , to uporządkowanie wirów będzie zgodne z ruchem wskazówek zegara,  $\Delta < 0$ , ale  $s_2 < s_1$  i wiry również będą się zapadały. Położenie wiru na łuku  $E_4E_1$  będzie powodowało rozbieganie się wirów.

Na rysunku 6.18 przedstawiono przykładowe rozwiązanie numeryczne układu równań różniczkowych (6.87) dla  $\Gamma_1 = 2$ ,  $\Gamma_2 = 2$  i  $\Gamma_3 = -1$  oraz  $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (0.5, 0.5\sqrt{11})$ . Punkt  $y_3$  wyznaczony jest prostą równoległą do osi  $y$ , która przecina okrąg (6.136) w punkcie  $y_3$ . Można policzyć, że dla  $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ , wartości  $s_1(0)$ ,  $s_2(0)$  i  $s_3(0)$  wynoszą  $s_1(0) = \sqrt{3}$ ,  $s_2(0) = \sqrt{5}$ ,  $s_3 = 2$ . Pole trójkąta rozpiętego na położeniach wirów można policzyć ze wzoru Herona:

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\sqrt{11}. \quad (6.139)$$



**Rys. 6.18:** Numeryczne rozwiązanie kolapsu trzech wirów;  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2, \Gamma_3 = -1$ . Położenia początkowe dla wirów:  $(x_1, y_1) = (-1, 0), (x_2, y_2) = (1, 0), (x_3, y_3) = (1/2, 1/2\sqrt{11})$ . Krytyczny czas kolapsu  $T^* = 30\pi/\sqrt{11}$

Krytyczny czas zapadania (kolapsu) wyznaczony ze wzoru (6.138) wynosi:

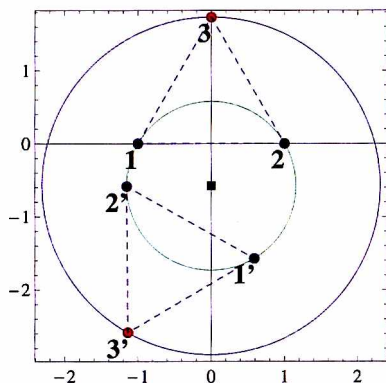
$$T^* = -\frac{\pi s_1^2(0)s_2^2(0)s_3^2(0)}{2\Gamma_3|\Delta(0)|(s_2^2(0) - s_1^2(0))} = \frac{30\pi}{\sqrt{11}} \approx 28,4168. \quad (6.140)$$

Zwróćmy uwagę, że środek masy dla układu wirów nie leży w początku układu, ale ma współrzędne  $x_c = -1/6, y_c = -\sqrt{11}/6$ . Ponieważ środek masy jest niezmiennikiem ruchu, wiry muszą zapadać się do środka masy. Wartość hamiltonianu  $\mathcal{H}(0) \approx -0,005136$ . Zauważmy, że w punkcie krytycznym cyrkulacja będąca sumą intensywności poszczególnych wirów nie jest równa zero. W punkcie krytycznym wypadkowa cyrkulacja większa od cyrkulacji każdego wiru z osobna. Wynika to z tego, że jednym z warunków kolapsu jest zerowanie się wiriału  $V = 0$ , który to warunek możemy zapisać jako:

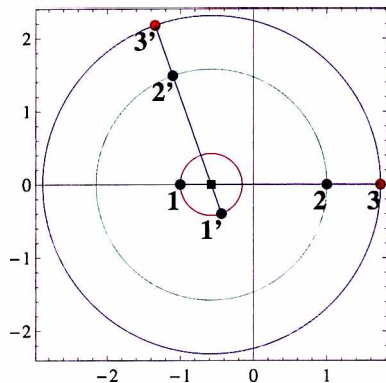
$$V = \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_1\Gamma_3 = K_\Gamma^2 - \sum_{i=1}^3 (\Gamma_i)^2 = 0. \quad (6.141)$$

W punkcie krytycznym wypadkowa cyrkulacja wynosi  $\Gamma_w = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \Gamma_i^2}$ .

Jeżeli współrzędne trzeciego wiru będziemy przemieszczać po okręgu (6.136), to wartość hamiltonianu  $\mathcal{H}$  będzie ulegała zmianie. W punkcie  $(x_3, y_3) = E_2 = (0, \sqrt{3})$  wiry tworzą trójkąt równoboczny,  $\mathcal{H}(0) = 0$ . Rozwiązanie numeryczne odpowiadające położeniu wiru trzeciego w punkcie  $E_2$  (lub  $E_4$ ), gdy wiry tworzą trójkąt równoboczny i są w równowadze względnej, przedstawiono na rys. 6.19.



**Rys. 6.19:** Równowaga względna trzech wirów  $\Gamma_1 = 2$ ,  $\Gamma_2 = 2$ ,  $\Gamma_3 = -1$  ( $L = 0$ ,  $V = 0$ ). Położenia początkowe wirów  $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (0, \sqrt{3})$ . Wiry obracają się wokół środka masy, zachowując odległości między sobą

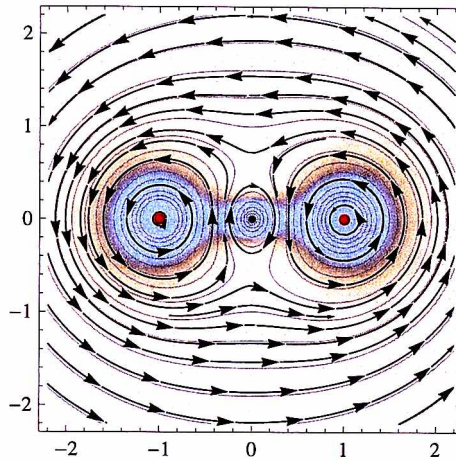


**Rys. 6.20:** Równowaga względna trzech wirów leżących na jednej prostej  $\Gamma_1 = 2$ ,  $\Gamma_2 = 2$ ,  $\Gamma_3 = -1$ , ( $L = 0$ ,  $V = 0$ ). Okres obrotu  $T = (2\pi d^2)/(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = 4\pi/3$ ,  $\mathcal{H} \approx -0,110\ 318$

Na rysunku 6.20 przedstawiono ruch wirów w równowadze względnej, gdy leżą one na jednej prostej. Trójkąt równoboczny i położenie wirów na prostej są jednymi konfiguracjami wirów punktowych, dla których możliwa jest równowaga względna [68].

Warto wspomnieć, że wiry mogą znajdować się w równowadze absolutnej. Równowagę absolutną mamy wtedy, gdy wszystkie wiry pozostają w spoczynku, czyli prędkość w położeniach wirów jest równa zero. Dla trzech wirów warunkiem koniecznym i dostatecznym jest to, aby leżały na jednej prostej ( $y = 0$ ) a między współrzędnymi zachodziła relacja  $(x_2 - x_1) = (\Gamma_2/\Gamma_3)(x_1 - x_3)$  przy założeniu, że  $(x_3, y_3) = (0, 0)$  [68]. Na rysunku 6.21 przedstawiono obraz linii prądu generowany przez wiry będące w równowadze absolutnej. Na tle linii prądu pokazano kolorem pole ciśnienia: kolor niebieski odpowiada niskiemu ciśnieniu (podciśnieniu), a kolor szary ciśnieniu otoczenia, które zgodnie z założeniem jest równe zero. Jak już wspomniano, ze względu na to, że prędkość w otoczeniu wiru jest duża, a ciśnienie wyraża się zależnością  $p = -(u^2 + v^2)/2 + C$ , to wokół wiru zawsze będzie powstawało niskie ciśnienie.

Kolaps wirów może zachodzić, gdy liczba wirów  $n > 3$ . W pracach [50], [51] przedstawiono numeryczny algorytm wyznaczania położenia wirów, które zapadają się do punktu dla dowolnej liczby wirów. Podano rozwiązanie analityczne dla zapadających się wirów, jeżeli zostały wyznaczone położenia wirów spełniające



**Rys. 6.21:** Linie prądu wytworzone przez układ trzech wirów w równowadze absolutnej  $\Gamma_1 = 2$ ,  $\Gamma_2 = 2$ ,  $\Gamma_3 = -1$  ( $L = 0$ ,  $V = 0$ ). Położenia wirów  $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (0, 0)$ . Kolorem zaznaczono pole ciśnienia: kolor szary odpowiada ciśnieniu otoczenia, kolor niebieski obrazuje obniżenie ciśnienia

kryteria potrzebne do kolapsu. Przedstawiono również numeryczne rozwiązania dla zapadających się wirów dla różnych  $n > 3$ .

## 6.12. Ewolucja wirowości zadana układem wirów punktowych

Wirowość związana z układem  $n$  wirów punktowych można przedstawić, wykorzystując twierdzenie o rozkładzie, (patrz wzór (4.170)), następująco:

$$\omega(x, y) = \sum_{\alpha}^n \Gamma_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha}) \delta(y - y_{\alpha}). \quad (6.142)$$

Równanie Poissona na funkcję prądu układów wirów ma postać:

$$\Delta\psi = - \sum_{\alpha}^n \Gamma_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha}) \delta(y - y_{\alpha}). \quad (6.143)$$

Ze względu na to, że operator Laplace'a jest liniowy, funkcja prądu będzie wyrażała się jako suma funkcji prądu od każdego wiru punktowego. Tak więc:

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^n \psi_j, \quad \text{gdzie} \quad \psi_j = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}. \quad (6.144)$$

Równanie ruchu cząstek płynu w polu prędkości wirów punktowych można wyrazić za pomocą funkcji prądu w formie hamiltonowskiej następująco:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.145)$$

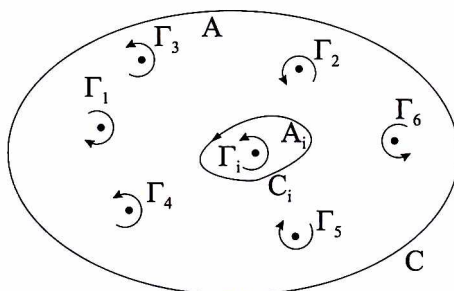
Równania ruchu oddziaływujących ze sobą wirów punktowych (6.86) podał po raz pierwszy Helmholtz w 1858 roku. Helmholtz traktował wiry punktowe jako nośniki wirowości poruszające się w płynie idealnym, które nie mogą się wytworzyć ani ulec destrukcji. W ruchu na płaszczyźnie nie mogą przekazać swojego ładunku (cyrkulacji) innym cząstkom. Ładunek tych cząstek, czyli ich intensywność, jest niezmiennikiem ruchu. Warto zauważyć, że linie wirowe w płynie idealnym są unoszone przez przepływ, a więc poruszają się jak materialne cząstki płynu. Cząstki wirowe mają zerową prędkość względem cząstek płynu.

Równania (6.86) stanowią podstawę metod numerycznych nazywanych metodami dyskretnych wirów. Są one punktem wyjścia do badań nad dwuwymiarową turbulencją, dynamiką geofizycznych przepływów i niezliczonej ilości zastosowań inżynierskich. Równanie (6.86) może być uważane za aproksymację ciągłych równań ruchu Eulera. Przypomnijmy że, zagadnienie początkowe dla ewolucji wirowości w przestrzeni dwuwymiarowej ma postać:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = 0, \quad (6.146)$$

$$\omega(x, y, 0) = \text{rot } \mathbf{v}(x, y, 0). \quad (6.147)$$

Z równania 6.146 wynika, że wirowość na danej trajektorii ruchu ma wartość stałą. Z twierdzenia Kelvina wiemy, że strumień wirowości przez zamknięty kontur jest niezmienny w czasie.



**Rys. 6.22:** Wirowość na płaszczyźnie związana z dyskretnym rozkładem wirów w obszarze A. Intensywność pojedynczego wiru odpowiada całce z wirowości po krzywej  $C_i$  obejmującej dany wir punktowy



Jeżeli podzielimy obszar, na którym zadany jest warunek początkowy  $\omega(x, y, 0)$  na niezachodzące na siebie podobozzary  $A_i$  z brzegiem  $\partial A_i = C_i$  (rys. 6.22) i każdy obszar zastąpimy wirem punktowym o intensywności:

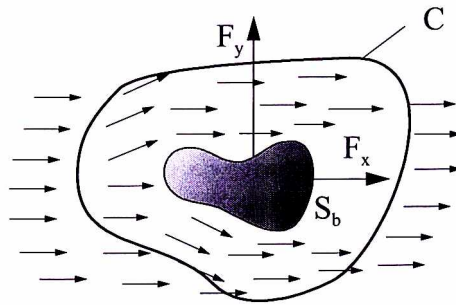
$$\Gamma_i = \int_{A_i} \omega(x, y) dA = \oint_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad (6.148)$$

to równania (6.87) będą opisywały w przybliżeniu ewolucję pola wirowości równania Eulera (4.4).

### 6.13. Twierdzenie Blasiusa

W rozdziale 2 pokazaliśmy, że można wyznaczyć siłę oddziaływania płynu na ciało na podstawie rozkładu prędkości w pewnej odległości od ciała, korzystając z zasady zachowania pędu, a prawo zachowania pędu dla przepływu stacjonarnego można w postaci całkowej zapisać jako:

$$\int_C \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_{S_b} \mathbf{t} dS - \oint_C \mathbf{t} dS. \quad (6.149)$$



**Rys. 6.23:** Dowolny kształt ciała z brzegiem  $S_b$  objęty dowolnym konturem  $C$ . Zaznaczono składowe siły  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$

Siłę zdefiniowaliśmy jako:

$$\mathbf{F} = - \int_{S_b} \mathbf{t} dS, \quad (6.150)$$

gdzie  $\mathbf{t}$  oznacza wektor naprężeń na powierzchni ciała,  $dS = b ds$  różniczkowy element powierzchni,  $b$  szerokość ciała w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Dalej będziemy przyjmować, że  $b = 1$ . Wiemy, że dla płynu nielepkiego

zachodzi  $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = (dy/ds, -dx/ds)$ , a więc siła wywierana przez płyn na ciało wyraża się jako:

$$\mathbf{F} = \int_{S_b} p\mathbf{n}ds. \quad (6.151)$$

Składowe siły  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  mają postać:

$$F_x = \int_{S_b} p \frac{dy}{ds} ds = \int_{S_b} p dy, \quad F_y = - \int_{S_b} p dx. \quad (6.152)$$

Równanie wektorowe (6.149) wyrażające zasadę zachowania pędu można rozpisać na jego składowe jako (por. wzór (5.57)):

$$\oint_C \rho u(udy - vdx) = -F_x - \oint_C p dy, \quad (6.153)$$

$$\oint_C \rho v(udy - vdx) = -F_y + \oint_C p dx. \quad (6.154)$$

Składowe siły oddziaływania płynu na ciało wyrażają się więc następująco:

$$F_x = \oint_C (-p dy - \rho u^2 dy + \rho v dx), \quad (6.155)$$

$$F_y = \oint_C (p dx - \rho v dy + \rho v^2 dx). \quad (6.156)$$

Możemy teraz wyeliminować z równań (6.155) ciśnienie, które dla przepływu potencjalnego i nieściśliwego wyraża się jak  $p = -\rho(u^2 + v^2)/2 + c$ , gdzie  $\rho$  jest stałą gęstością,  $c$  dowolną stałą. Po wstawieniu wyrażenia na  $p$  do wzoru (6.155) otrzymujemy:

$$F_x = \rho \oint_C u v dx - \frac{1}{2} (u^2 - v^2) dy, \quad (6.157)$$

$$F_y = -\rho \oint_C u v dy + \frac{1}{2} (u^2 - v^2) dx. \quad (6.158)$$

Wykorzystano przy tym zależność  $\oint_{S_b} \mathbf{c} \mathbf{n} ds = 0$ . Udowodnimy teraz twierdzenie Blasiusa:

**Twierdzenie 6.3.** [20], [41]

Niech kontur  $C$  będzie zwykłą gładką, krzywą zamkniętą na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  oraz niech pole prędkości  $\mathbf{v} = (u, v)$  będzie stacjonarnym, dwuwymiarowym, potencjalnym i nieściśliwym polem prędkości. Zachodzi wtedy zależność:

$$F_x - i F_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C q^{*2} dz, \quad (6.159)$$

gdzie  $q^* = u - i v$  jest prędkością zespoloną.

**Dowód:** Przekształcimy prawą stronę równania (6.159). Mamy:

$$\begin{aligned}
 \frac{i\rho}{2} \oint_C q^{*2} dz &= \frac{i\rho}{2} \oint_C (u - iv)^2 (dx + iy) = \\
 &= \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( [(u^2 - v^2)dx + 2uvdy] + i[(u^2 - v^2)dy - 2uvdx] \right) = \\
 &= \frac{\rho}{2} \oint_C \left( \left[ uvdx - \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right] dy + i \left[ uvdy + \frac{1}{2}(u^2 - v^2)dx \right] \right) \\
 &= F_x - iF_y.
 \end{aligned} \tag{6.160}$$

Ostatnia równość wynika z porównania wyrażeń przedostatniej równości (6.160) z równaniami (6.157) i (6.158).  $\square$

Jeżeli znana jest prędkość zespolona, wtedy z twierdzenia Blasiusa wynika, że siłę działającą na ciało można przedstawić jako całkę krzywoliniową zmiennej zespolonej po dowolnym konturze obejmującym opływane ciało. Siły  $F_x$  oraz  $F_y$  są określone jako siły działające przez środek ciężkości ciała. Całkę krzywoliniową z kwadratu prędkości zespolonej  $q^{*2}$  oblicza się, korzystając z twierdzenia Cauchy’ego o residuach.

## 6.14. Twierdzenie Kutty–Żukowskiego

Twierdzenie Kutty–Żukowskiego wynika bezpośrednio z twierdzenia Blasiusa. W twierdzeniu Blasiusa nie ma mowy o tym, w jaki sposób płyn napływa na ciało. Jeżeli założymy, że pole prędkości płynu napływającego na ciało w nieskończoności jest jednorodne i równoległe do osi  $x$ , wtedy okazuje się, że siła oddziaływania płynu na ciało w kierunku osi  $x$  jest równa zeru, a siła prostopadła do niej wyraża się jako  $F_L = \rho U \Gamma$ , gdzie  $U$  jest prędkością płynu w nieskończoności,  $\rho$  gęstością płynu,  $\Gamma$  cyrkulacją prędkości po krzywej obejmującej ciało. Wprowadźmy pojęcia siły nośnej i siły oporu.

**Definicja 6.3.** *Składowa siły wywierana na ciało przez opływający płyn, która jest prostopadła do kierunku prędkości płynu, jest siłą nośną, natomiast siła równoległa do kierunku prędkości napływającego na ciało płynu i skierowana przeciwnie jest siłą oporu.*

**Twierdzenie 6.4.** *Niech kontur ciała stanowi gładka, zamknięta krzywa zwykła na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  oraz niech pole prędkości  $\mathbf{v} = (u, v)$  będzie stacjonarnym, dwuwymiarowym, potencjalnym i nieściśliwym polem prędkości, takim że w nie-*

skończoności jest polem równomiernym, to znaczy  $u = U$ ,  $v = 0$ , a na konturze  $C$  spełniony jest warunek  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Wtedy:

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho U \Gamma. \quad (6.161)$$

**Dowód:** Ze wzoru (6.11) wiemy, że całka  $\int_C q^* dz$  wyraża się jako suma dwóch całek rzeczywistych  $\int_C q^* dz = \Gamma - i q_V$ . Dla dowolnej krzywej w obszarze jednospójnym i w przepływie potencjalnym obie całki są równe zeru. Obecność ciała stałego powoduje, że obszar jest wielospójny. Ponieważ krzywa  $C$  obejmuje ciało stałe dowolnie blisko, to strumień objętości przez tę krzywą musi być równy zeru. Cyrkulacja po krzywej obejmującej ciało stałe może być różna od zera. Pole prędkości  $q(z)$  poza ciałem stałym jest analityczne, więc można je przedstawić w postaci szeregu Laurenta:

$$q^*(z) = \dots + a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots \quad (6.162)$$

Z warunków brzegowych, które zostały narzucone na pole prędkości w nieskończoności  $(u, v) = (U, 0)$ , wynika, że  $a_0 = U$ , a pozostałe współczynniki o dodatnich wskaźnikach  $n$  muszą być równe zeru,  $a_n \equiv 0$ . Z twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy:

$$\int_C q^* dz = 2\pi i a_{-1} = \Gamma. \quad (6.163)$$

Tak więc  $a_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}$  i szereg Laurenta dla pola prędkości  $q(z)$  przyjmuje postać:

$$q(z) = U + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \quad (6.164)$$

Aby skorzystać ze wzoru Blasiusa, musimy wyznaczyć residuum funkcji  $q^{*2}$ . Kwadrat funkcji  $q^{*2}$  obliczamy, dokonując mnożenia wyraz po wyrazie. Otrzymujemy:

$$q^{*2} = U^2 + \frac{U\Gamma}{\pi i z} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi i z}\right)^2 + \frac{2a_{-2}U}{z^2} + \dots \quad (6.165)$$

Residuum jest równe  $\frac{U\Gamma}{\pi i}$  i siła wywierania przez płyn na ciało stałe równa się:

$$F_x - i F_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C q^{*2} dz = i\rho U \Gamma. \quad (6.166)$$

Tak więc  $F_x = 0$ ,  $F_y = \rho U \Gamma$ , co należało wykazać.  $\square$

Z twierdzenia wynika, że aby w przepływie potencjalnym mogła pojawić się siła nośna, cyrkulacja pola prędkości wokół ciała musi być różna od zera.

### 6.15. Twierdzenie o kole

Twierdzenie o kole zostało sformułowane przez Milne-Thomsona w 1940 roku [65]. Jest ono jednym z ważniejszych twierdzeń wykorzystywanych do badania dwuwymiarowych przepływów potencjalnych.

**Twierdzenie 6.5.** *Niech  $f(z)$  będzie zespolonym potencjałem pola prędkości, w obszarze który nie zawiera ścian stałych a osobliwości funkcji  $f(z)$  leżą na zewnątrz obszaru  $|z| \leq a$ . Jeżeli do tego przepływu zostanie włożone koło  $|z| = a$ , to nowy potencjał zespolony będzie miał postać:*

$$W(z) = f(z) + f^*\left(\frac{a^2}{z}\right). \quad (6.167)$$

**Dowód:** Jeżeli do przepływu włożone jest koło o brzegu  $C$ , to brzeg kola musi być linią prądu,  $\psi = \text{const}$ , ponieważ przez brzeg stały strumień objętości musi być równy zeru. Brzeg kola określa równanie  $|z|^2 = zz^* = a^2$ . Potencjał  $W(z)$  na brzegu cylindra ma postać:

$$W(z) = f(z) + f^*(z^*). \quad (6.168)$$

Z równania (6.168) wynika, że  $W(z)$  jest na brzegu sumą dwóch funkcji zespolonych sprzężonych. Oznacza to, że część urojona  $W(z)$ , która odpowiada funkcji prądu, na brzegu jest równa zeru. Z założenia funkcja  $f(z)$  jest analityczna wewnątrz  $|z| \leq a$  natomiast funkcja  $f^*(a^2/z)$  jest analityczna poza kołem  $|z| > a$ , więc nie ma osobliwości w nieskończoności (punkt  $(a^2/z)$  jest punktem inwersyjnym dla punktu  $z$ ). Potencjał wypadkowy  $W(z)$  ma w obszarze  $|z| \geq a$  te same osobliwości, co funkcja  $f(z)$ . Stąd  $W(z) \sim f(z)$  gdy  $z \rightarrow \infty$ . Wszystkie warunki brzegowe są dla pola prędkości spełnione. To kończy dowód twierdzenia.  $\square$

Warto przyswoić sobie i rozróżnić następujące oznaczenia operacji dokonywanych na funkcji zmiennej zespolonej  $f(z)$ :

1. Funkcję  $f(z^*)$  tworzymy, zamieniając  $z$  na  $z^*$ , czyli w zmiennej  $z$  zamieniamy  $i$  na  $-i$ .
2. Funkcję zmiennej zespolonej  $f^*(z^*)$  tworzymy, dokonując zamiany  $i$  na  $-i$  we wzorze na funkcję  $f(z)$  oraz zmieniając  $z$  na  $z^*$ .
3. Funkcję  $f^*(z)$  tworzymy, zamieniając  $i$  na  $-i$  tylko we wzorze na funkcję  $f$  i pozostawiając zmienną  $z$  niezmienną.

W twierdzeniu o kole, konstruując potencjał wypadkowy do potencjał zespolonego niezaburzonego obecnością koła, dodajemy  $f^*\left(\frac{a^2}{z}\right)$ , czyli zamieniamy  $i$  na  $-i$  w  $f(z)$  a za zmienną  $z$  podstawiamy  $\frac{a^2}{z}$ .

### 6.16. Opływ walca

Zastosujemy twierdzenie o kole do zbadania opływu walca strumieniem jednorodnym. Jak wiemy, strumień jednorodny ma potencjał  $W(z) = Uz$ . Jeżeli w strumień jednorodny włożony zostanie walec o przekroju kołowym, to wypadkowy potencjał, zgodnie z twierdzeniem o kole (6.167), będzie miał postać:

$$W(z) = Uz + U \frac{a^2}{z} = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right). \quad (6.169)$$

Ze wzoru (6.169) widać, że potencjał zespolony opływu walca jest superpozycją przepływu jednorodnego i przepływu wywołanego dipolem o momencie dipolowym  $\mu = Ua^2$ . Wewnątrz walca znalazła się osobliwość (dipol), która zapewnia zerowanie się składowej normalnej pola prędkości na powierzchni walca:  $u_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ .

Aby zbadać pole prędkości opływu walca bardziej szczegółowo, wyrazimy potencjał zespolony w zmiennych biegunowych  $(r, \theta)$ . Potencjał zespolony dla opływu walca ma postać:

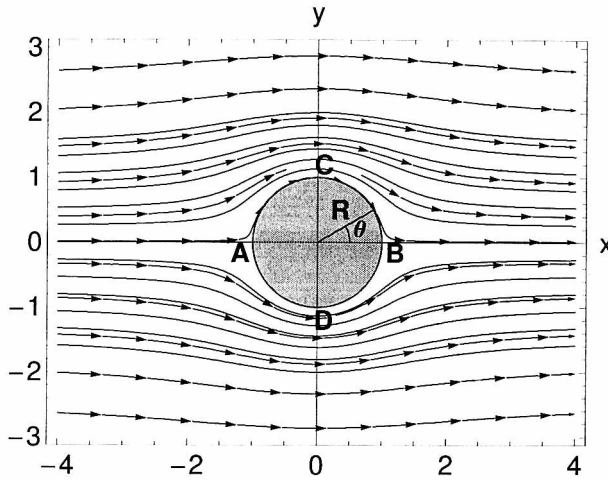
$$\begin{aligned} W(z) &= Uz + \frac{Ua^2}{z} = U \left( re^{i\theta} + \frac{a^2}{re^{i\theta}} \right) = \\ &= U \left( r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \right) = \\ &= U \left( \left( r \cos \theta + \frac{a^2}{r} \cos \theta \right) + i \left( r \sin \theta - \frac{a^2}{r} \sin \theta \right) \right) = \\ &= Ur \left( \cos \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + i \sin \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.170)$$

A więc:

$$\phi(r, \theta) = Ur \cos \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \psi(r, \theta) = Ur \sin \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (6.171)$$

Ściana stała powinna pokrywać się z linią prądu, ponieważ cząstki płynu nie mogą przenikać przez ścianę. Widać, że dla  $r = a$  mamy  $\psi = 0$ , a więc funkcja prądu jest stała na powierzchni walca. Wykres linii prądu przedstawiono na rysunku 6.24.

Rozkład linii prądu jest symetryczny względem osi  $x$ , która przechodzi przez środek walca. Linia prądu  $\psi = 0$  składa się z osi  $x$  oraz z powierzchni walca. Linie prądu tuż nad walcem  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  są ułożone gęściej, ponieważ w tych obszarach prędkość obwodowa (kątowna) jest dwa razy większa od tej, która napływa na



Rys. 6.24: Linie prądu potencjalnego optywu walca bez cyrkulacji

walec. Gdy mamy wyznaczony potencjał zespolony, to prędkość zespolona wyraża się jako:

$$q^*(z) = \frac{dW}{dz} = U \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right). \quad (6.172)$$

Powyższą równość można przekształcić do postaci w zmiennych biegunowych  $q^*(r, \theta) = u - iv = (u_r - v_\theta) e^{-i\theta}$ , która pozwala bezpośrednio określić składową promieniową pola prędkości  $u_r$  oraz kątową (obwodową). Przekształcamy dalej wzór (6.172):

$$q^*(z) = U \left( e^{i\theta} - \frac{a^2}{r^2} e^{-i\theta} \right) e^{-i\theta} = \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta - i \left( -U + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] e^{-i\theta}. \quad (6.173)$$

Ze wzoru (6.173) wynika, że:

$$u_r = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (6.174)$$

Na powierzchni walca  $r = a$  składowa promieniowa jest równa zero  $u_r = 0$ , natomiast składowa obwodowa jest różna od zera (lepkość cieczy jest równa zero) i wynosi:

$$v_\theta = -2U \sin \theta, \quad r = a. \quad (6.175)$$

Dla kąta  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $u_\theta = -2U$ ,  $\theta = 0$  oraz  $\theta = \pi$   $u_\theta = 0$ . Są to punkty stagnacji.

Rozkład ciśnienia na walcu wyznacza się z równania Bernoulliego (pomijamy siły masowe):

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho |q^*|^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta). \quad (6.176)$$

Siła działająca na walec wyraża się zgodnie ze wzorem Blasiusa (6.159) jako:

$$F_x - i F_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C q^{*2}(z) = i \frac{\rho}{2} \left( 2\pi i \sum \text{res}(q^{*2}(z)) \right), \quad (6.177)$$

gdzie  $q^* = u - iv$ . Wyrażenie na  $q^{*2}$  ma postać:

$$q^{*2} = \left( Uz - \frac{a^2}{z^2} \right)^2 = U^2 - \frac{2U^2 a^2}{z^2} + \frac{U^2 a^4}{z^4}. \quad (6.178)$$

Powyższe wyrażenie ma postać szeregu Lauranta. Widać, że brak jest członu  $1/z$ , a więc residuum funkcji  $q^{*2}$  jest równe zero. Siła wyrażona wzorem (6.177) jest więc równa zero. Opływ potencjalny walca daje zerową siłę działającą na walec. W takim wypadku mamy do czynienia z paradoksem d'Alamberta.

### 6.17. Opływ walca z cyrkulacją

Jak wiemy z twierdzenia Kutty-Żukowskiego, aby siła działająca na walec była różna od zera, musimy wytworzyć przepływ cyrkulacyjny wokół ciała. Dodanie do potencjału (6.169) funkcji, która wprowadzi do  $q^{*2}$  osobliwość  $1/z$ , nie zepsuje warunków brzegowych na walcu i w nieskończoności umożliwi wyznaczenie zagadnienia Neumanna dla potencjału prędkości z dokładnością do stałej. Jedyną taką funkcją jest potencjał wiru punktowego  $\chi(z) = i/2\pi \ln(z)$ . Niech potencjał prędkości ma teraz postać [24]:

$$W(z) = Uz + U \frac{a^2}{z} = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z + Ci. \quad (6.179)$$

Stałą  $C$  dobierzemy w taki sposób, aby na powierzchni walca  $zz^* = a^2$  funkcja prądu  $\psi = 0$ . Równanie (6.179) zapisane we współrzędnych biegunowych ma postać:

$$W(z) = U \left[ r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(r e^{i\theta}) \right] + Ci. \quad (6.180)$$

Wykorzystując zależność  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , potencjał zespolony (6.180) można wyrazić następująco:

$$W(z) = U \left[ \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + i \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \right] - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + Ci. \quad (6.181)$$



Funkcja prądu jako część urojona wyrażenia (6.181) przyjmuje postać:

$$\psi(r, \theta) = U \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C. \quad (6.182)$$

Aby funkcja  $\psi(r, \theta)$  była równa zeru na powierzchni walca, czyli dla  $r = a$  oraz dla dowolnego  $\theta$ , wartość stałej  $C$  musi być równa  $C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln a$ . Ostatecznie potencjał zespolony opływu walca z wirem o cyrkulacji  $\Gamma$  umieszczonym w środku walca ma postać:

$$W(z) = Uz + U \frac{a^2}{z} = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a}. \quad (6.183)$$

Prędkość zespolona wyraża się następująco:

$$q^*(z) = \frac{dW}{dz} = U \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z}. \quad (6.184)$$

Kwadrat prędkości zespolonej występujący pod całką we wzorze Blasiusa jest równy:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 &= \left( U \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} \right)^2 = \\ &= U^2 \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^2 + U \frac{\Gamma}{\pi i} \cdot \frac{1}{z} - \frac{U\Gamma a^2}{\pi i z^3} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2}. \end{aligned} \quad (6.185)$$

Residuum funkcji  $q^{*2}$ , czyli wyrażenie przy  $\frac{1}{z}$ , jest równe  $\frac{U\Gamma}{\pi i}$ , a siła działająca na walec, zgodnie ze wzorem Blasiusa, wyraża się następująco:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C q^{*2} dz = \frac{i\rho}{2} 2\pi i \frac{U\Gamma}{\pi i} = i\rho U\Gamma. \quad (6.186)$$

Sprawdźmy jeszcze, jakie skutki wywołało wprowadzenie wiru na rozkład linii prądu. Najpierw wyznaczamy punkty stagnacji pola prędkości, czyli punkty, w których  $u = 0$ ,  $v = 0$ . Z równania  $dW/dz$  mamy:

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i U} z - a^2 = 0. \quad (6.187)$$

Równanie (6.187) jest równaniem kwadratowym ze względu na zmienną  $z$  i do wyznaczenia pierwiastków tego równania można zastosować wzory jak dla zmiennej rzeczywistej. Otrzymujemy wówczas:

$$z_{1,2} = -\frac{\Gamma}{2\pi i U} \pm 2a \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 U^2}}. \quad (6.188)$$

Analiza wzoru (6.188) pozwala wyróżnić następujące przypadki [44]:

1.  $\frac{\Gamma}{4\pi U} < 1$  – mamy dwa punkty stagnacji na walcu położone symetrycznie względem osi  $y$  w taki sposób, że  $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$  a  $\text{Re}(z_1) = -\text{Re}(z_2)$ . Przykładowy rozkład linii prądu dla tego przypadku pokazany jest na rys. 6.25a. Punktami stagnacji są punkty  $A$  i  $B$ . Można zauważyć, że w stosunku do przepływu bezcyrkulacyjnego (rys. 6.25) nastąpiła utrata symetrii względem osi  $x$ . Linie prądu zagęszczone są na górnej powierzchni walca, a w dolnej linii prądu są rozrzedzone. Ciśnienie na górnej powierzchni walca jest mniejsze niż na dolnej. Występuje siła nośna skierowana do góry,
2.  $\frac{\Gamma}{4\pi U} = 1$  – mamy jeden punkt stagnacji w punkcie położony na osi urojonej  $z_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi U} i$ ,  $|z_{1,2}| = a$ , punkt (A,B),
3.  $\frac{\Gamma}{4\pi U} > 1$  – oba zera wielomianu (6.187) są urojone  $|z_1| < a$  oraz  $|z_2| > a$ . Punkt stagnacji leży wewnątrz przepływu. W takim przypadku cząstki płynu są uwięzione pomiędzy zamkniętą linią prądu tworzącą punkt siodłowy a powierzchnią walca i cyrkulującą wokół walca.

Składową promieniową  $u_r$  oraz składową obwodową  $u_\theta$  można otrzymać ze wzoru (6.182):

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \\ u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (6.189)$$

Dla  $\Gamma = 0$  wzory (6.189) pokrywają się ze wzorami dla opływu bezcyrkulacyjnego (6.174). Składowa radialna  $u_r$  na powierzchni walca jest równa zero, natomiast składowa obwodowa ma wartość:

$$u_\theta = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}. \quad (6.190)$$

Położenie punktów stagnacji na walcu,  $u_{\theta_s} = 0$ , można wyliczyć ze wzoru:

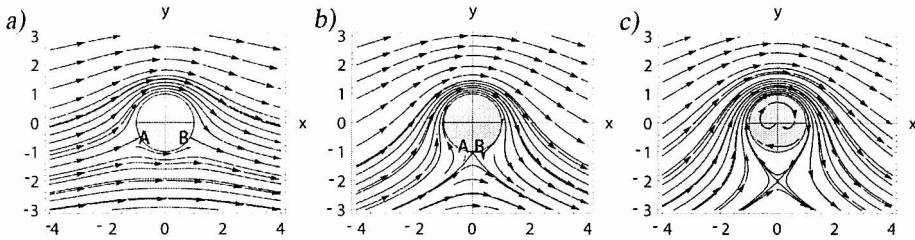
$$\sin \theta_s = \frac{\Gamma}{4\pi U a}. \quad (6.191)$$

Widać, że wartość cyrkulacji ma decydujące znaczenie w przypadku rozkładu prędkości i tym samym rozkładu cieniienia wokół walca. W zastosowaniach wyznaczenie realnej wartości cyrkulacji ma pierwszorzędne znaczenie.

## 6.18. Opływ walca w obecności wiru punktowego

Niech wir punktowy znajduje się na osi  $x$  w punkcie  $z_0 = d$ . Przypomnijmy, że potencjał wiru punktowego ma postać (patrz wzór (6.54)):

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0). \quad (*)$$



Rys. 6.25: Optyw walca z z cyrkulacją wytworzoną przez wir punktowy w środku walca: a)  $\frac{\Gamma}{4\pi U} < 1$ ; b)  $\frac{\Gamma}{4\pi U} = 1$ ; c)  $\frac{\Gamma}{4\pi U} > 1$

Jeżeli w początek układu współrzędnych wstawiamy walec (koło), to na mocy twierdzenia o kole wypadkowy potencjał będzie miał postać:

$$\widetilde{W}(z) = W(z) + W^* \left( \frac{a^2}{z} \right) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left( \frac{a^2}{z} - z_0^* \right). \quad (6.192)$$

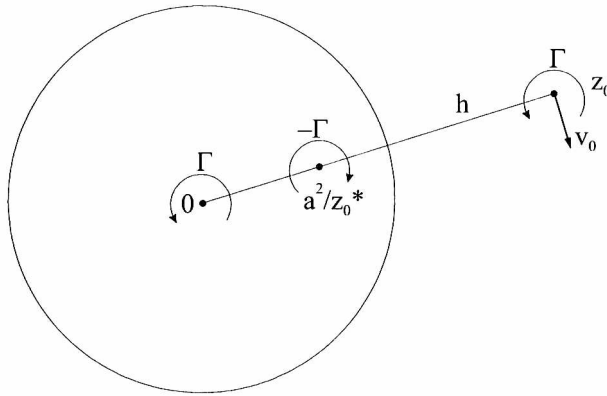
Aby lepiej zinterpretować wzór (6.192), przekształcimy go do postaci:

$$\widetilde{W}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left( z - \frac{a^2}{z_0^*} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(-z_0^*). \quad (6.193)$$

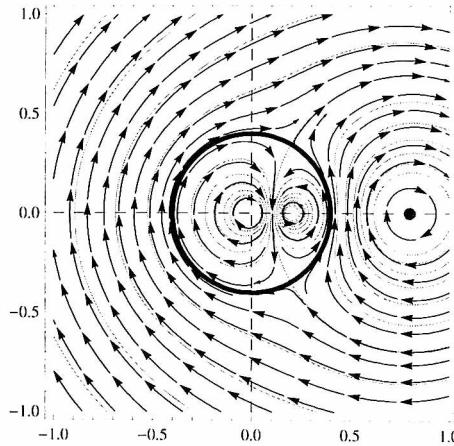
Pierwszy człon sumy po prawej stronie opisuje potencjał wiru  $\Gamma$  znajdującego się w punkcie  $z_0$  na zewnątrz walca, drugi natomiast potencjał wiru  $-\Gamma$  w punkcie inwersyjnym  $a^2/z_0^*$  wewnątrz walca, leżącym na promieniu przechodzącym przez środek walca i wir w punkcie  $z_0$ . Przedostatni człon odpowiada potencjałowi wiru  $\Gamma$  położonego w środku walca. Prędkość indukowana przez wiry ze środka walca ma kierunek prostopadły do linii łączącej wir  $z_0$  i środek walca (rys. 6.26). Wir będzie się poruszał wokół walca po kole o promieniu  $|z_0| = h$  z prędkością:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi(h - a^2/h)} - \frac{\Gamma}{2\pi h}. \quad (6.194)$$

Potencjał zespolony (6.192) pozwala już na wyznaczenie funkcji prądu  $\psi = \text{Im}(\widetilde{W})$  i pola prędkości  $d\widetilde{W}/dz = q^* = u - iv$  wywołanego przez wir w pobliżu walca. Posługując się programem MATHEMATICA, można narysować linie prądu i pole prędkości. Na rysunku 6.27 przedstawiono przykładowe linie prądu dla  $a = 0,4$ ,  $z_0 = 0,8 + i0$  i  $\Gamma = 0,4$ . Z rysunku widać, że na powierzchni walca występują dwa punkty stagnacji.



**Rys. 6.26:** Wir punktowy  $\Gamma$  w punkcie  $z_0$  w pobliżu walca i obrazy wytworzone przez ten wir wewnątrz walca



**Rys. 6.27:** Linie prądu wytworzone przez wir w w obecności walca; promień walca  $a = 0,4$ , położenie wiru  $z_0 = 0,8 + i0$ ,  $\Gamma = 0,4$

Wyznaczamy jeszcze siłę oddziaływania płynu na walec ze wzoru Blasiusa (patrz wzór (6.159)). Pole prędkości dane jest wzorem:

$$\frac{d\tilde{W}}{dz} = q^* = u(x, y) - i v(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left( \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \frac{a^2}{z_0}} + \frac{1}{z} \right). \quad (6.195)$$

Aby wyznaczyć siły ze wzoru Blasiusa, potrzebna jest znajomość  $q^{*2}$ . Dla  $z_0 = h + i0$  mamy:

$$\begin{aligned} q^{*2} &= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{z-h} - \frac{1}{z-\frac{a^2}{h}} + \frac{1}{z} \right]^2 = \\ &= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left( -\frac{2}{z\left(z-\frac{a^2}{h}\right)} - \frac{2}{(z-h)\left(z-\frac{a^2}{h}\right)} + \frac{1}{\left(z-\frac{a^2}{h}\right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{z(z-h)} + \frac{1}{(z-h)^2} + \frac{1}{z^2} \right). \end{aligned} \quad (6.196)$$

Oznaczamy  $q^{*2} = f(z)$  i wartość całki  $\int_C f(z) dz$  obliczamy, korzystając z twierdzenia o residuach:

$$\int_C f dz = 2\pi i \sum_k \text{res}(f, z_k), \quad (6.197)$$

gdzie  $\text{res}(f, z_k)$  leżą wewnątrz krzywej  $C$ . Residua wygodnie jest obliczać według wzoru:

$$\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)], \quad (6.198)$$

gdzie  $n$  w powyższym wzorze oznacza rząd bieguna.

Przykładowo residuum pierwszego członu w drugiej linii wzoru (6.196) w punkcie  $z = 0$  i  $z = a^2/h$  wynosi:

$$\text{res} \left( -\frac{2}{z\left(z-\frac{a^2}{h}\right)} \right) \Big|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \left( -\frac{2}{z-\frac{a^2}{h}} \right) = \frac{2h}{a^2}, \quad (6.199)$$

$$\text{res} \left( -\frac{2}{z\left(z-\frac{a^2}{h}\right)} \right) \Big|_{z=\frac{a^2}{h}} = \lim_{z \rightarrow \frac{a^2}{h}} \left( -\frac{2}{z} \right) = -\frac{2h}{a^2}. \quad (6.200)$$

Dalej podobnie:

$$\text{res} \left( -\frac{2}{(z-h)\left(z-\frac{a^2}{h}\right)} \right) \Big|_{z=\frac{a^2}{h}} = -\frac{2h}{a^2-h^2}, \quad (6.201)$$

$$\text{res} \left( -\frac{2}{(z-h)z} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{2}{h}. \quad (6.202)$$

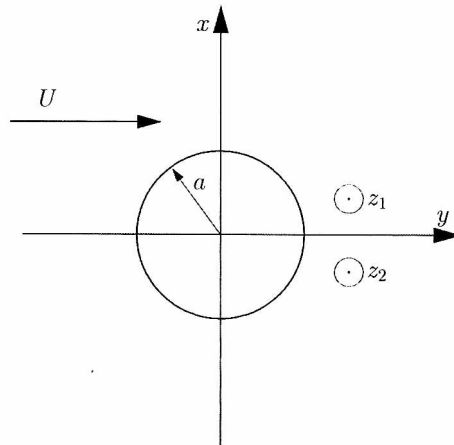
Residua funkcji  $1/z^2$  oraz  $1/(z - a^2/h)^2$  są równe zero. Siła działająca na walec wynosi:

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= i \frac{\rho}{2} \oint_C q^{*2} dz = i \frac{\rho}{2} \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} 2\pi i \left( -\frac{2h}{a^2 - h^2} - \frac{2}{h} + \frac{2h}{a^2} - \frac{2h}{a^2} \right) = \\ &= \frac{\rho\Gamma^2}{2\pi} \frac{a^2}{h(h^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (6.203)$$

Składowa urojona siły  $F_y$  jest równa zero. Siła działa wzdłuż dodatniego kierunku osi  $x$  w kierunku położenia wiru.

### 6.19. Opływ walca w obecności stacjonarnej pary wirów

Wykorzystamy teraz twierdzenie o kole do wyznaczenia potencjału zespolonego dla opływu walca strumieniem jednorodnym w obecności pary wirów (rys. 6.28).

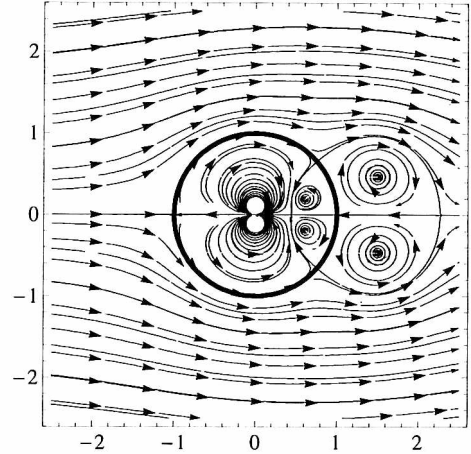


**Rys. 6.28:** Schemat opływu walca strumieniem jednorodnym w obecności pary wirów

Przypadek ten ma odniesienie do opływu walca płynem rzeczywistym (lepkim), gdy wartość współczynnika lepkości jest duża lub, inaczej, gdy liczba Reynoldsa jest mała ( $Re = UD/\nu$ ). Jak wiadomo z badań eksperymentalnych w przypadku małych liczb Reynoldsa  $10 < Re < 30$  za walcem tworzą się dwa, stacjonarne pęcherze wirowe (rys. 6.29). Wraz ze zwiększaniem liczby Reynoldsa pęcherze te tracą swoje stacjonarne położenia i odrywają się naprzemiennie od walca, tworząc ścieżkę wirową Karmana.



**Rys. 6.29:** Wizualizacja opływu walca strumieniem jednorodnym, gdy liczba Reynoldsa  $Re = 26$  [25]



**Rys. 6.30:** Linie prądu wokół walca opływanego strumieniem jednorodnym w obecności pary wirów umieszczonych za walcem; promień walca  $a = 1$ ,  $U = 1$ , położenia wirów  $z_1 = 1,5 + i0,4673$ ,  $z_2 = 1,5a - i0,4673$ ,  $\Gamma = 5$

Suma potencjału strumienia jednorodnego i pary wirów o cyrkulacjach  $-\Gamma$  i  $\Gamma$  znajdujących się w położeniach  $z_0$  i  $z_0^*$  (6.78) wyraża się jako:

$$W(z) = Uz - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - z_0}{z - z_0^*}. \quad (6.204)$$

Jeżeli w taki przepływ włożony zostanie walec o promieniu  $a$ , to zgodnie z twierdzeniem o kole (6.167) wypadkowy potencjał będzie miał postać:

$$W(z) = Uz - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - z_0}{z - z_0^*} + U \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\frac{a^2}{z} - z_0^*}{\frac{a^2}{z} - z_0}. \quad (6.205)$$

Na wypadkowy potencjał składają się potencjały równomiernego przepływu  $Uz$ , dipola  $Ua^2/z$  znajdującego się w początku układu współrzędnych, potencjał pary wirów  $-\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-z_0}{z-z_0^*}$  oraz pary wirów, które znajdują się w punktach inwersyjnych wewnątrz walca  $z_1 = a^2/z_0$  oraz  $z_1^* = a^2/z_0^*$ . Przykładowe linie prądu  $\psi = \text{Re}(W(z))$  przedstawiono na rys. 6.30. Można dobrać cyrkulację wirów  $\Gamma$  oraz położenie  $z_0, z_0^*$  tak, aby wiry pozostały w spoczynku. Pierwszy taką analizę przeprowadził Föppl w 1913 roku [30]. Wiry te na jego cześć zostały nazwane wirami Föppla. Szczegółowe wyprowadzenie warunków, jakie muszą być spełnione, aby wiry były w równowadze, można znaleźć w [45]. Pomimo pominięcia lepkości

wyniki są jakościowo zgodne z przepływem rzeczywistym. Rozwiązanie Föppla może być punktem wyjścia do badania zachowania się obszarów wirowych za walcem.



## Rozdział 7

# Ruch płynu lepkiego

### 7.1. Wprowadzenie

W rozdziałach 4 i 6 zajmowaliśmy się przepływami płynu nielepkiego, czyli takiego, dla którego związek naprężeń i deformacji elementu płynu miał postać:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}. \quad (7.1)$$

Z równania wynika, że siły działające na powierzchnię wewnątrz płynu są do tej powierzchni zawsze prostopadłe. Podstawienie zależności (7.1) do równania (3.63) prowadzi do równania ruchu cieczy nielepkiej (4.3). Okazało się jednak, że równania prowadzą do paradoksów, np. paradoksu d'Alamberta. Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład, który świadczy o ograniczeniach modelu płynu nielepkiego [16].

**Przykład 17.** Rozważmy jednowymiarowy przepływ w kanale płynu jednorodnego i nieściśliwego  $\rho = 1$  przy zadanej różnicy ciśnień pomiędzy przekrojami  $x_1 = 0$  i  $x_1 = L$ ,  $p_1 - p_2 = \Delta p_{12} > 0$ . Szukamy rozwiązania równania Eulera:

$$\mathbf{u} = (u(x_1, t), 0), \quad p(x_1, x_2) = p(x_1) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 = 0.$$

Równania ruchu cieczy mają postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (7.2)$$

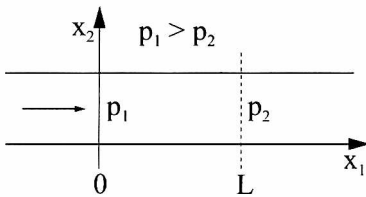
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0. \quad (7.3)$$

Z pierwszego równania wynika, że  $\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} = 0$ , a więc:

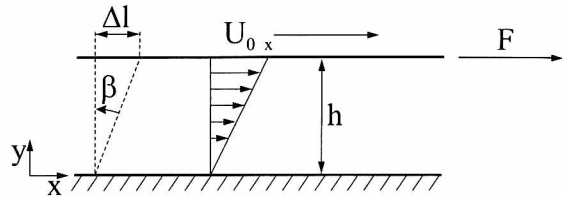
$$p(x_1) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{L} x_1. \quad (7.4)$$

Po podstawieniu wyrażenia (7.4) do równania (7.2) i scałkowaniu otrzymujemy:

$$u(x_1, t) = \frac{p_1 - p_2}{L} t. \quad (7.5)$$



**Rys. 7.1:** Schematyczny rysunek kanału, w którym przepływa ciecz nielepka i nieściśliwa. Przepływ wywołany jest różnicą ciśnień  $p_1 - p_2$



**Rys. 7.2:** Przepływ płynu lepkiego w kanale wywołany ruchem górnej ściany

Z rozwiązania (7.5) wynika, że prędkość w kanale pod wpływem różnicy ciśnień będzie nieograniczenie rosła z upływem czasu. Jest to efekt nierzeczywisty i wyraźnie wskazuje na defekt równań ruchu płynu nielepkiego.

Jedną z cech gazów i cieczy jest lepkość. Rozpatrzmy elementarny przykład przepływu przedstawiony na rys. 7.2.

Pomiędzy dwoma równoległymi ścianami, oddalonymi od siebie na odległość  $h$  znajduje się warstwa cieczy. Dolna ściana jest nieruchoma, natomiast górna przemieszcza się ze stałą prędkością  $U$ . Warstwa cieczy przylegająca do dolnej ściany będzie pozostawała w spoczynku, natomiast warstwa przylegająca do górnej ściany przyjmie prędkość ściany  $U$ . Gdy odległość  $h$  między ścianami jest niewielka, można przyjąć, że zmiana prędkości pomiędzy dolną i górną ścianą będzie liniowa:

$$v = U \frac{y}{h}. \quad (7.6)$$

Taki obraz przepływu podyktowany jest faktem doświadczalnym: ciecz rzeczywista zawsze zwilża ciało stałe i dlatego przyjmuje prędkość ściany, do której przylega. Zarówno do górnej, jak i do dolnej ściany muszą być przyłożone siły: do górnej siła równoległa do osi  $x$  nadająca ścianie prędkość  $U$ , do dolnej siła o tej samej wartości, lecz przeciwnie skierowana. Naprężenia styczne nazywane ścinającymi, wywołane działającymi siłami są proporcjonalne do prędkości  $U$  i odwrotnie proporcjonalne do  $h$ :

$$\tau = \mu \frac{U}{h}. \quad (7.7)$$

Współczynnik proporcjonalności  $\mu$  we wzorze (7.7) nazywa się współczynnikiem lepkości dynamicznej. Można przyjąć, że warstwy płynu odległe od siebie o  $dy$ , dla których różnica prędkości wynosi  $dv$ , doznają naprężenia stycznego (ścinającego):

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}. \quad (7.8)$$

Z przedstawionego obrazu przepływu wynika, że oprócz sił powierzchniowych ściskających, prostopadłych do powierzchni ograniczającej płyn w płynach rzeczywistych występują siły styczne (ścinające). Naprężenia ścinające w płynach są efektem działania lepkości i nawet te najmniejsze zawsze wywołują ruch płynu. Ta własność jest podstawową cechą, która różni płyny od ciała stałego. Ciała stałe są sprężyste i mogą przenosić naprężenia ścinające, natomiast płyny nie. W płynie nieruchomym naprężenia ścinające nie występują.

Lepkość płynu można wytłumaczyć, odwołując się do molekularnej budowy materii. Cząstki materii znajdują się w stałym ruchu termicznym, a tym samym przenoszą z jednego miejsca w drugie pewne porcje masy, pędu i energii. Prowadzi to do uśrednionych wartości prędkości, gęstości, temperatury. Mówi się, że procesowi wyrównywania parametrów ośrodka materialnego zbudowanego z molekuł towarzyszy dyfuzja, która odpowiada za wyrównywanie się prędkości w dwóch sąsiednich warstwach płynu. Bazując na metodach fizyki statystycznej można wyprowadzić wartości współczynnika dyfuzji w zależności od parametrów ośrodka. Metodami fizyki statystycznej można również wyprowadzić równania ruchu płynu [40]. W niniejszych rozważaniach przyjmiemy jednak inne podejście. Na podstawie obserwacji doświadczalnych i pewnych racjonalnych przesłanek zostanie postawiona hipoteza odnośnie do postaci tensora naprężeń  $\mathbf{T}$ , który występuje w równaniu ośrodka ciągłego (3.62). Istnienie współczynnika lepkości będzie zapostulowane a z otrzymanych równań ruchu wyniknie, jak taki współczynnik można wyznaczyć doświadczalnie.

Związek tensora  $\mathbf{T}$  z innymi zmiennymi wielkościami uwikłanymi w przepływ, takimi jak np.: prędkość  $\mathbf{v}$ , gradient wektora prędkości  $\delta \mathbf{v}$ , gęstość  $\rho$ , nazywa się równaniem konstytutywnym. Teoria równań konstytutywnych jest obecnie gałęzią mechaniki ośrodka ciągłego, w ramach której poszukuje się równań konstytutywnych, opierając się na postulatach obiektywności i niezmienniczości oraz na zasadach mechaniki, ale bez uwzględnienia molekularnej budowy materii [27], [80], [95].

W rozdziale 7.2 sformułujemy równania konstytutywne dla płynu lepkiego i wprowadzimy równania ruchu tego płynu.

## 7.2. Płyn Stokesa

Z doświadczenia wiadomo, że swoją lepką naturę płyn ujawnia wtedy, gdy dwie warstwy płynu poruszają się względem siebie z różnymi prędkościami. Naprężenie lepkie pojawiają się tylko wtedy, gdy istnieje różnica prędkości pomiędzy sąsiednimi elementami płynu. Różnica prędkości między warstwami płynu jest równa zeru w przypadku sztywnego obrotu. Przypomnijmy, że tensor gradientu prędkości  $\nabla \mathbf{v}$

można rozłożyć na symetryczny tensor prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  i antysymetryczny tensor obrotu  $\mathbf{\Omega}$ . W 1843 roku Stokes opublikował pracę, w której stwierdził, że tensor naprężeń  $\mathbf{T}$  powinien zależeć tylko od tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  i że właśnie taka zależność będzie dobrze oddawała płynność ośrodka rozumianą jako niezdolność do przenoszenia naprężeń stycznych [80]. Stokes przyjął następujące postulaty [5], [80]:

1.  $\mathbf{T}$  jest ciągłą funkcją tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  i nie zależy od innych kinematycznych zmiennych.
2.  $\mathbf{T}$  nie zależy od zmiennej przestrzennej  $\mathbf{x}$  (warunek przestrzennej jednorodności).
3. Płyn jest izotropowy, czyli w płynie nie ma wyróżnionych kierunków. Dla wszystkich ortogonalnych macierzy  $\mathbf{S}$  zachodzi więc:

$$\mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}. \quad (7.9)$$

4. Gdy płyn jest w spoczynku, to tensor deformacji przyjmuje postać tensora płynu nielepkiego  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ .

Płyn, do którego odnoszą się powyższe postulaty, nazywa się płynem Stokesa.

Pierwszy i drugi postulat oznaczają, że relacja pomiędzy naprężeniami  $T_{ij}$  i elementami  $D_{ij}$  nie zależy od elementów tensora antysymetrycznego  $\Omega_{ij}$ , czyli sztywnego obrotu elementu płynu, oraz że przestrzenna zależność tensora  $\mathbf{T}$  jest realizowana tylko za pomocą tensora  $\mathbf{D}$ . Z trzeciego postulatu wynika, że kierunki charakterystyczne, związane z kierunkami wektorów własnych tensorów  $\mathbf{T}$  oraz  $\mathbf{D}$  muszą być takie same [5]. Transformacja  $\mathbf{S}$ , która sprowadza tensor  $\mathbf{D}$  do postaci diagonalnej, do takiej samej postaci sprowadza również tensor  $\mathbf{T}$ . Zatem, jeżeli tensor  $\mathbf{D}$  jest w postaci diagonalnej o elementach  $d_1, d_2, d_3$ , to  $t_i = f_i(d_1, d_2, d_3)$ , gdzie  $t_i$  są elementami diagonalnymi przekształconej macierzy  $\mathbf{T}$ , a  $f_i$  funkcjami symetrycznymi zmiennych  $(d_1, d_2, d_3)$ .

**Twierdzenie 7.1.** *Jeżeli postulaty Stokesa są spełnione, to tensor naprężeń  $\mathbf{T}$  ma postać:*

$$\mathbf{T} = -p(t, \mathbf{x})\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{D}(t, \mathbf{x})), \quad (7.10)$$

gdzie tensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  jest wielomianem rzędu drugiego względem tensora  $\mathbf{D}$ :

$$\tilde{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2, \quad \mathbf{T}(\mathbf{0}) = 0, \quad (7.11)$$

a współczynniki  $\alpha, \beta, \gamma$  są funkcjami skalarnymi zależnymi od niezmienników tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  (patrz rozdz. 2.4.1), to znaczy  $\alpha = \alpha(I_1, I_2, I_3)$ ,  $\beta = \beta(I_1, I_2, I_3)$ ,  $\gamma = \gamma(I_1, I_2, I_3)$  oraz  $\alpha = 0$ , jeżeli  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ .

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w pracach [5], [80].

Można przytoczyć pewne argumenty przemawiające za tezą powyższego twierdzenia, uzasadniająca zależność wielomianową  $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{D})$  w równaniu (7.11). W algebrze liniowej [89] znane jest twierdzenie Caley'a–Hamiltona mówiące o tym, że macierz  $\mathbf{D}$  jest pierwiastkiem swojego równania charakterystycznego (patrz wzór (2.91)):

$$\mathbf{D}^3 - I_1\mathbf{D}^2 + I_2\mathbf{D} - I_3\mathbf{I} = 0. \quad (7.12)$$

Z postaci równania (7.12) wynika, że człon  $\mathbf{D}^3$  można wyrazić za pomocą  $\mathbf{D}^2$  i  $\mathbf{D}$  oraz  $\mathbf{I}$ . Można więc wnioskować, że w równaniu (7.11) nie powinny występować potęgi tensora  $\mathbf{D}$  wyższego rzędu niż 2.

Współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\gamma$  mogą zależeć tylko od niezmienników tensora  $\mathbf{D}$ , ponieważ tylko one są niezmiennicze pod wpływem działania macierzy  $\mathbf{S}$  w równaniu (7.9). Współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\gamma$  mogą wyrażać się przez złożone, nieliniowe funkcje. Zależność w postaci wielomianu stopnia drugiego w równaniu (7.11) wynika z tego, że przestrzeń rozpięta przez wektory własne tensora  $\mathbf{D}$  jest trójwymiarowa. Należy więc założyć, że wszystkie wartości własne macierzy  $\mathbf{D}$  są różne. Pozwala to na wyznaczenie wartości trzech współczynników  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Jeżeli tylko dwie wartości własne ( $d_1 \neq d_2$ ), są różne, to tensor lepki ma postać  $\tilde{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D}$ . Jeżeli wszystkie wartości własne są takie same, to  $\tilde{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I}$  [80].

Skutki nieliniowej zależności tensora  $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{D})$  prześledzimy na prostym przykładzie.

**Przykład 18.** Rozpatrzmy nieściśliwy przepływ ścinający:  $v_1 = kx_2$ ,  $v_2 = 0$ ,  $v_3 = 0$ , gdzie  $k$  jest stałym współczynnikiem. Tensor deformacji  $\mathbf{D}$  oraz jego kwadrat  $\mathbf{D}^2$  mają postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} \frac{k^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Tensor naprężeń  $\mathbf{T}$  przedstawia się następująco:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \beta\frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\frac{k^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

Niezmienniki macierzy  $\mathbf{D}$  wynoszą  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = -(1/4)k^2$ ,  $I_3 = 0$ , a więc  $\beta = \beta(I_1, I_2, I_3)$  i  $\gamma$  zależą tylko od niezmiennika  $I_2$ , który dla zadanego przepływu

jest stały. Jeżeli podstawimy powyższy tensor naprężeń do równania ruchu (3.62), to otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{4} \gamma k^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{2} \beta k \right) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} \beta k \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{4} \gamma k^2 \right). \end{aligned}$$

Widać, że człony bezwładnościowe, lewa strona równania (3.62), są równe zeru. Rozwiązaniem powyższego układu równań jest  $p = \text{const}$ .

Wektor naprężeń dla wektora normalnego  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$  równa się:

$$\mathbf{t} = (0, 1, 0) \cdot \mathbf{T} = (1/2)k\beta\mathbf{e}_1 + (-p + (1/4)k^2\gamma)\mathbf{e}_2.$$

Naprężenia w kierunku  $\mathbf{e}_1$  wynoszą  $T_{12} = (1/2)\beta k$ , natomiast w kierunku  $\mathbf{e}_2$  mają wartość  $T_{22} = -p + (1/4)k^2\gamma$ . Człon  $(1/4)k^2\gamma$ , który pojawił się przy ciśnieniu  $p$ , wynika z nieliniowej (kwadratowej) postaci równania (7.11). Dla nieściśliwego płynu newtonowskiego (liniowego), o którym będziemy mówili poniżej, naprężenia normalne wywoływane są tylko przez ciśnienie  $p$  [11]. Pojawienie się w naprężeniu normalnym dodatkowego członu wynikającego z nieliniowej zależności (7.11) nazywa się efektem Poyntinga. [80].

### 7.3. Równanie Naviera–Stokesa

W klasycznej hydrodynamice postulaty Stokesa uzupełnia się dodatkowym warunkiem: zależność pomiędzy składowymi tensora naprężeń  $\tilde{\mathbf{T}}$  i składowymi tensora deformacji powinna być liniowa. Wtedy współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  w równaniu (7.11) muszą mieć postać  $\alpha = \lambda \text{tr } \mathbf{D}$ , gdzie  $\lambda = \text{const}$ ,  $\beta = 2\mu$ , gdzie  $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = 0$ . Równanie konstytutywne dla części lepkiej tensora naprężeń przybiera postać:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \lambda \text{div } \mathbf{v} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (7.15)$$

Współczynnik  $\mu$  jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, natomiast  $\lambda$  współczynnikiem lepkości objętościowej (masowej). Dalej będziemy zakładać, że ruch płynu jest nieściśliwy  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

Należy podkreślić, że liniowa zależność tensora naprężeń od tensora deformacji jest hipotezą mającą na celu uproszczenie równań ruchu. Jej prawdziwość weryfikujemy eksperymentalnie i dla zwykłych płynów, takich jak powietrze czy woda, hipoteza ta się potwierdza.

Tensor deformacji ruchu płynu lepkiego we współrzędnych kartezjańskich ma postać:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & -p + 2\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & -p + 2\mu\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

Przypomnijmy, że równanie ruchu ośrodka ciągłego, wyrażające zasadę zachowania pędu ma postać (3.62):

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \mathbf{div} \mathbf{T}|_i \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \quad (7.17)$$

Obliczmy przykładowo pierwszą składową wektora  $\mathbf{div} \mathbf{T}|_1$ , podstawiając za tensor  $\mathbf{T}$  wyrażenie (7.16). Mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{T}|_1 &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\Delta v_1. \end{aligned} \quad (7.18)$$

W powyższym wzorze wykorzystano, to że  $\mathbf{div} \mathbf{v} = 0$ . Zmieniając indeks 1 na 2 i 3 po lewej stronie równania (7.18), otrzymamy wzory na składowe  $\mathbf{div} \mathbf{T}|_2$  oraz  $\mathbf{div} \mathbf{T}|_3$ . Tak więc równania ruchu dla płynu lepkiego nieściśliwego mają postać:

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\Delta v_i \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \quad (7.19)$$

gdzie  $\nu$  oznacza współczynnik lepkości kinematycznej:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]. \quad (7.20)$$

Równania (7.19) należy uzupełnić warunkami początkowymi i brzegowymi. Jako warunek początkowy przyjmuje się pole prędkości w chwili  $t = 0$ . Jako warunek brzegowy przyjmuje się, że prędkość płynu na brzegu stałym  $\partial\Omega$  jest równa prędkości brzegu stałego. Warunek taki wyraża brak poślizgu płynu na ścianie. Jeżeli brzeg jest nieruchomy, to prędkość płynu na ścianie jest równa

zeru. Równania ruchu płynu nieściśliwego w formie wektorowej, wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi, mają postać:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (7.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (7.22)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (7.23)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.24)$$

gdzie  $\Delta \mathbf{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$ .

Warunek (7.24) nie wyczerpuje wszystkich możliwych typów warunków brzegowych stosowanych w praktyce. W badaniach teoretycznych i w obliczeniach numerycznych dla obszarów nieograniczonych często przyjmuje się warunki okresowe, w których zakłada się, że badany obszar przepływu  $\Omega$  jest okresowy:

$$\Omega = \left( -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2} \right) \times \left( -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2} \right) \times \left( -\frac{L_3}{2}, \frac{L_3}{2} \right). \quad (7.25)$$

Zakłada się również, że okresowe są pola prędkości  $\mathbf{v}$ , sił masowych  $\mathbf{f}$  i ciśnienia  $p$  w każdym kierunku  $x_1, x_2, x_3$  z okresem  $L_1, L_2, L_3$ .

Dla powierzchni swobodnej  $\gamma$  przyjmuje się warunek wyrażający nieprzenikanie płynu przez powierzchnię swobodną i zerowe naprężenia styczne na tej powierzchni (pominięte jest działanie napięcia powierzchniowego):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_s = 0 \quad \text{na } \gamma, \quad (7.26)$$

gdzie indeks  $s$  odnosi się do składowej stycznej do brzegu  $\gamma$ . Dalej będziemy zakładać warunek (7.22).

Zauważmy, że nie stawia się warunków brzegowych ani początkowych na ciśnienie. Ciśnienie można bowiem wyznaczyć z dokładnością do stałej, korzystając z tego, że  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

Równania Naviera–Stokesa (7.21) zajmują centralne miejsce we współczesnych badaniach fizyki matematycznej. Są powszechnie uznawane i akceptowane jako konsekwencja prawa zachowania pędu. Matematyczna teoria równań Naviera–Stokesa odnosi się do takich zagadnień, jak istnienie i jednoznaczność rozwiązań, regularności i stabilności rozwiązań, turbulencji. Równania Naviera–Stokesa są prototypem nieliniowych równań fizyki matematycznej. Charakterystyczna dla tych równań nieliniowość, objawiająca się obecnością członów bezwładnościowych  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ , jest konsekwencją reguł matematycznego różniczkowania funkcji złożonej, a nie założonego modelu fizycznego.

Zagadnienia (7.21)–(7.24) stanowią kompletny opis ruchu płynu nieściśliwego. Mamy cztery niewiadome  $(v_1, v_2, v_3), p$  i cztery równania. Dla płynów, z którymi



mamy do czynienia na co dzień, tj. dla powietrza i wody, nie stwierdzono faktów, które przeczyłyby wymienionym równaniom. Równania te, co należy pokreślić raz jeszcze, są konsekwencją założenia o tym, że płyn jest newtonowski (liniowy). Obecnie istnieje duży obszar praktycznych zastosowań płynów nieliniowych (nie-newtonowskich), dla których założenie liniowości pomiędzy składowymi tensora deformacji i naprężeniami jest nieuzasadnione [11].

Do spektrum dziedzin praktyki inżynierskiej, w których wykorzystuje się równania Naviera–Stokesa, należą: astrofizyka, lotnictwo, medycyna, przemysł samochodowy, biologia, klimatyzacja, teoria spalania, prognozowanie pogody. Ze względu na nieliniową naturę równań (7.21) na ogół nie potrafimy ich rozwiązać dokładnie. W praktyce zagadnienia (7.21)–(7.24) rozwiązywane są numerycznie. Rozwój technologii komputerowej przyczynił się do gwałtownego rozwoju technik obliczeniowych, metod numerycznych i programów komercyjnych służących do rozwiązywania równań Naviera–Stokesa.

Dokładnych rozwiązań równań Naviera–Stokesa jest stosunkowo niewiele i mają charakter szczególny [23]. Ich szczególność polega na tym, że przyjmuje się specyficzne obszary przepływu, zakłada się, że pola prędkości mają określoną postać, np. są jednokierunkowe. Niemniej przypadki, dla których udaje się znaleźć rozwiązania dokładne, są ważne, ponieważ pozwalają zweryfikować bezpośrednio słuszność przyjętych założeń, które uczyniliśmy przy wyprowadzaniu równań ruchu płynu. Poniżej przytoczone są dwa rozwiązania najbardziej znanych przykładów laminarnego przepływu, tj. przepływu w rurze oraz przepływu między obracającymi się cylindrami.

### 7.3.1. Laminarny przepływ w rurze

Będziemy zakładać, że przepływ jest ustalony i jednokierunkowy. Znaczy to, że pochodne cząstkowe względem czasu są równe zeru oraz że tylko jedna składowa pola prędkości, tj. ta wzdłuż osi  $x_3$ , jest różna od zera  $\mathbf{v} = (0, 0, v_3(x_1, x_2, x_3))$ . Na ściance rury  $R = r = \sqrt{x^2 + y^2}$  prędkość płynu jest równa zeru (rys. 7.3). Z równania ciągłości  $\text{div } \mathbf{v} = \partial v_3 / \partial x_3 = 0$  wynika, że składowa prędkości  $v_3$  nie zależy od zmiennej  $x_3$ . Lewa strona równania (7.21) jest równa zeru. Składowe równania pędu wzdłuż  $x_1$  i  $x_2$  degenerują się do postaci  $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$  oraz  $\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$ . Wynika z tego, że ciśnienie zależy tylko od zmiennej  $x_3$ . Równania (7.21) dla składowej wzdłuż osi  $x_3$  przyjmuje postać:

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \mu \Delta v_3, \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \quad (7.28)$$

Ponieważ ciśnienie jest funkcją tylko zmiennej  $x_3$ , a z równania ciągłości (7.28) wynika, że  $v_3(x_1, x_2)$ , to lewa i prawa strona równania (7.27) muszą równać się tej samej stałej. Stąd wynika, że gradient ciśnienia wzdłuż kierunku przepływu jest również stały:

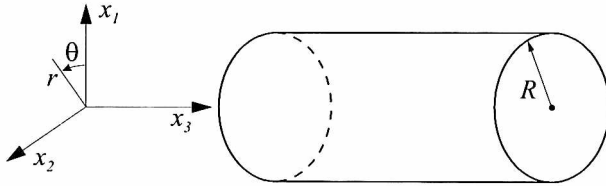
$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = C. \quad (7.29)$$

Zagadnienie wyznaczenia jednokierunkowego rozkładu prędkości sprowadza się do rozwiązania równania Poissona:

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \quad (7.30)$$

gdzie prawa strona równania (7.30) jest stała a warunek brzegowy na ścianie jest równy zero:

$$v_3|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.31)$$



**Rys. 7.3:** Układ współrzędnych kartezjańskich dla przepływu w rurze

Ze względu na to, że przepływ odbywa się w rurze, wygodnie jest przyjąć współrzędne cylindryczne  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (r, \theta, z)$ . Załóżmy, że  $v_{x_3} = v_z = v(r, \theta, z)$  a składowe  $v_r$  oraz  $v_\theta$  są równe zero. Równanie pędu w kierunku osi  $r$  i  $\theta$  redukuje się do postaci  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$  oraz  $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ . Wynika stąd, że ciśnienie  $p$  zależy tylko od zmiennej  $z$ , a  $v_3 = v$  tylko od zmiennych  $(r, \theta)$ . Równanie Poissona (7.30) we współrzędnych cylindrycznych przyjmuje postać:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = C. \quad (7.32)$$

Załóżmy dodatkowo, że prędkość  $v$  zależy tylko od promienia  $r$ ,  $v = v(r)$ . W takim przypadku można rozwiązać równanie (7.32), które można zapisać jako:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} Cr. \quad (7.33)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy:

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} Cr^2 + A \ln r + B. \quad (7.34)$$

Stałe  $A$ ,  $B$  należy określić z warunku brzegowego na ścianie rury:

$$v = 0 \quad \text{dla} \quad r = R. \quad (7.35)$$

Od rozwiązania rzeczywistego żądamy, aby w obszarze, w którym poszukujemy rozwiązania, było ono ograniczone. Stąd wynika, że dla  $r = 0$  rozwiązanie będzie skończone, jeżeli przyjmiemy  $A = 0$ . Stała  $B$ , ze względu na to, że  $v(R) = 0$ , wynosi:

$$B = -\frac{1}{4\mu}R^2C. \quad (7.36)$$

Rozwiązanie równania (7.32) z warunkiem (7.35) przyjmuje postać:

$$v(r) = \frac{1}{4\mu}C(r^2 - R^2). \quad (7.37)$$

Innych rozwiązań nie ma. Jeżeli bowiem przyjmiemy jeszcze inne rozwiązanie zależne od  $r$  i  $\theta$ , to musi być ono dodane do rozwiązania (7.37) ze względu na to, że równanie (7.32) jest liniowym równaniem różniczkowym. Nowe rozwiązanie będzie miało postać:

$$v_1 = \frac{1}{4\mu}C(r^2 - R^2) + u(r, \theta). \quad (7.38)$$

Nowe rozwiązanie  $u(r, \theta)$  na ściankach musi przyjmować wartość równą zeru i spełniać równanie Laplace'a:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \quad (7.39)$$

Z zasady maksimum (patrz rozdz. 1.6.3) wiadomo, że rozwiązanie równania Laplace'a przyjmuje maksymalne i minimalne wartości na brzegu. Ponieważ na brzegu  $u(R, \theta) = 0$ , to  $u \equiv 0$ .

Stałą  $C$  można wyznaczyć z równania (7.29). Jeżeli przyjmiemy, że długości rury jest równa  $z_2 - z_1 = l$  oraz że  $p(z_1) - p(z_2) = -\Delta p$ , otrzymamy:

$$C = \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p_1 - p_2}{l} = -\frac{\Delta p}{l}. \quad (7.40)$$

Rozwiązanie (7.37) przyjmuje postać:

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} (r^2 - R^2). \quad (7.41)$$

Mówi się, że przepływ (7.41) wywołany jest stałym gradientem ciśnienia  $-\frac{\Delta p}{l}$ . Zauważmy, że stałą  $C$  można również wyznaczyć, mierząc prędkość maksymalną

w osi przewodu  $r = 0$  lub strumień objętości płynu  $q_v$ . Prędkość maksymalna  $V_{\max}$  w osi rury ( $r = 0$ ) wynosi:

$$V_{\max} = C \frac{R^2}{4\mu} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4V_{\max}\mu}{R^2}. \quad (7.42)$$

Pozwala wyrazić rozkład prędkości w rurze jako:

$$v(r) = V_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right). \quad (7.43)$$

Strumień objętości płynu oblicza się, całkując rozkład prędkości po przekroju poprzecznym rury. Mamy więc:

$$q_v = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = C \frac{\pi R^4}{8\mu} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{q_v 8\mu}{\pi R^4}. \quad (7.44)$$

Ze wzorów (7.40), (7.42) oraz (7.44) wynika, że zarówno prędkość maksymalna, jak i strumień objętości są jednoznacznie wyznaczone przez  $\Delta p/l$  i zależą od tego ilorazu w sposób liniowy. Mamy:

$$q_v = - \frac{\Delta p \pi R^4}{l 8\mu}. \quad (7.45)$$

Prędkość średnia  $V_s$  wynosi:

$$V_s = \frac{q_v}{\pi R^2} = - \frac{\Delta p R^2}{l 8\mu} = \frac{1}{2} V_{\max}. \quad (7.46)$$

Rozkład prędkości wyrażony wzorem (7.41) nazywa się przepływem Hagen-Poiseuille'a.

Wzór (7.44) został wyznaczony doświadczalnie przez Hagen w 1839 roku i przez Poiseuille'a w 1840 roku [98]. W 1845 roku Stokes otrzymał wzór Hagen-Poiseuille'a, rozwiązując równania Naviera-Stokesa. Było to wspaniałe potwierdzenie słuszności teorii równań Naviera-Stokesa. Wzór (7.44) nazywany jest prawem Hagen-Poiseuille'a, które można podsumować następująco:

1. Strumień objętości płynu  $q_v$  w przepływie laminarnym w rurze jest proporcjonalny do czwartej potęgi promienia  $R^4$ .
2. Strumień objętości płynu  $q_v$  liniowo zależy od różnicy ciśnień  $\Delta p = p_1 - p_2$  mierzonej wzdłuż długości przewodu.
3. Strumień objętości płynu  $q_v$  zależy odwrotnie proporcjonalnie od długości rury  $l$  i współczynnika lepkości dynamicznej  $\mu$ .

Wyznamy jeszcze tensor naprężeń dla tego przepływu. Tensor deformacji  $\mathbf{D}$  we współrzędnych cylindrycznych  $(r, \theta, z)$  dla pola prędkości  $(v_r, v_\theta, v_z)$  ma postać [45]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} = \\ &= \begin{bmatrix} -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} & \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \\ \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) & -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right) & -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Dla naszego przypadku przepływu w rurze, gdzie  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = 0$  oraz  $v_z = v(r)$ , tensor naprężeń przyjmuje postać:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu\frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu\frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & -p \end{bmatrix}. \quad (7.48)$$

Można obliczyć szybkość dysypacji energii. Z twierdzenia o przenoszeniu energii kinetycznej (rozdz. 3.3.4) wiemy, że szybkość dysypacji przypadającej na jednostkę objętości wynosi  $\Phi = 2\mu D : D$ . Tak więc:

$$\begin{aligned} E_{dys} &= \int_{\Omega} 2\mu D : D dv_x = \mu \int_0^{\Delta z} \int_0^R \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 2\pi r dr dz = \\ &= \Delta z \frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 R^4 = q_v \Delta p, \end{aligned} \quad (7.49)$$

gdzie  $\frac{dv}{dr}$  obliczono ze wzoru (7.41), a różniczkę  $dp$  zastąpiono różnicą  $\Delta p$ . Iloczyn spadku ciśnienia oraz strumienia objętości wyraża moc pompy, która jest potrzebna do pokonania oporów ruchu. Różnica ciśnień  $\Delta p$  powodująca przepływ  $q_v$  wywołuje dysypację energii mechanicznej, która jest zamieniana w ciepło. Jest ona proporcjonalna do strumienia objętości i różnicy ciśnień. Należy nadmienić, że paraboliczny rozkład prędkości w rurze (7.41) można zaobserwować tylko w przypadku odpowiednio małych prędkości przepływu  $V_s$ , dużej lepkości i rurek o małych średnicach. Parametry te można powiązać w bezwymiarową liczbę nazywaną liczbą Reynoldsa  $Re = V_s D / \nu$ . Aby móc obserwować przepływ Hagen–Poiseuille’a, liczba  $Re$  musi być mniejsza od 2000. Tę formę ruchu płynu nazywamy laminarnym. Przepływ powyżej liczby Reynoldsa, tj. gdy  $Re > 2000$ , nazywamy turbulentnym.

### 7.3.2. Przepływ wewnątrz obracających się cylindrów

Rozpatrzmy ustalony ruch płynu pomiędzy dwoma, nieskończenie długimi cylindrami. Będziemy rozpatrywać stacjonarny, nieściśliwy przepływ, przyjmując cylindryczny układ współrzędnych. Równania Naviera–Stokesa we współrzędnych cylindrycznych  $(r, \theta, z)$ , z pominięciem sił masowych mają postać [45], [83]:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (7.50)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \quad (7.51)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (7.53)$$

gdzie  $\Delta$  oznacza laplasian wyrażony we współrzędnych cylindrycznych:

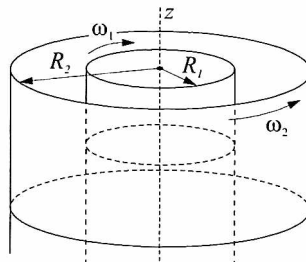
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (7.54)$$

Założmy, że cząstki płynu poruszają się po okręgach o wspólnym środku, a więc:

$$v_r = 0, \quad v_z = 0. \quad (7.55)$$

Równanie ciągłości (7.53) zredukuję się do postaci:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (7.56)$$



Rys. 7.4: Schemat przepływu między dwoma cylindrami

Z równania (7.56) wynika, że prędkość kątowna  $v_\theta$  cząstek płynu na wybranym okręgu o promieniu  $r$  nie będzie ulegała zmianie. Biorąc pod uwagę (7.55), układ równań różniczkowych (7.50)–(7.52) sprowadza się do układu równań liniowych:

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (7.57)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \quad (7.58)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (7.59)$$

Ciśnienie nie zależy więc od zmiennej  $z$ . Jeżeli zrózniczkujemy równanie (7.57) po  $z$ , to otrzymamy:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0. \quad (7.60)$$

Równanie (7.60) gwarantuje, że ruch cząstek płynu będzie odbywał się po okręgach w jednej płaszczyźnie.

W równaniu (7.58) możemy rozseparować człony zależne od zmiennej  $r$  i  $\theta$ , przenosząc je na różne strony równania. Ponieważ jedna strona równania, będzie zależała od  $r$  (wyrażenie w nawisie jest składową  $v_\theta(r)$ ), natomiast druga od  $\theta$  (ciśnienie  $p(\theta)$ ), to obie strony muszą się równać wspólnej stałej  $C$ . Stąd:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = C. \quad (7.61)$$

Równanie (7.58) przyjmie postać:

$$\left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) = \frac{C}{r\rho\nu}. \quad (7.62)$$

Po scałkowaniu równania (7.61) względem  $\theta$  otrzymujemy  $p = C\theta + \tilde{C}$ . Aby zachować jednoznaczność funkcji  $p$  przy zmianie kąta  $\theta$  o  $2\pi$  należy przyjąć, że stała  $C$  jest równa zeru. Równanie (7.62) można przekształcić do postaci, a następnie scałkować:

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) \right) = 0. \quad (7.63)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu (7.63) otrzymujemy:

$$v_\theta = A r + \frac{B}{r}, \quad (7.64)$$

gdzie  $A, B$  są stałymi, które określimy z warunków brzegowych. Zauważmy, że równanie (7.63), z którego wyznaczyliśmy profil prędkości (7.64), nie zawiera współczynnika lepkości. Paradoksalnie profil prędkości (7.64) spełnia również równanie ruchu dla płynu nielepkiego ( $\mu = 0$ ). Niech cylinder wewnętrzny ma promień  $R_1$  i obraca się z prędkością kątową  $\omega_1$ , natomiast zewnętrzny promień  $R_2$  i prędkość kątową  $\omega_2$ . Stałe  $A, B$  wyznaczamy z warunków:

$$AR_1 + \frac{B}{R_1} = \omega_1 R_1, \quad AR_2 + \frac{B}{R_2} = \omega_2 R_2. \quad (7.65)$$

Stąd:

$$A = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{R_2 - R_1}, \quad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (7.66)$$

Po podstawieniu tych stałych do równania (7.64) otrzymujemy:

$$v_\theta = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ (\omega_2 R_1^2 - \omega_1 R_2^2) r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{r} \right]. \quad (7.67)$$

Rozkład ciśnienia można obliczyć, całkując równanie (7.57):

$$p(r) = \rho \int \frac{v_\theta^2}{r} dr = \rho \left( \frac{1}{2} A^2 r^2 + 2AB \ln r - \frac{B^2}{2r^2} \right) + c. \quad (7.68)$$

Stałą całkowania  $c$  można wyznaczyć, wybierając wartość ciśnienia w jakimś punkcie, np. z warunku  $p(r = R_1) = p_1$ . Macierz tensora naprężeń (7.47) ma postać:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p & \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & 0 \\ \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \quad (7.69)$$

Składowa obwodowa wektora naprężeń  $t_\theta$  w kierunku  $\mathbf{e}_r$  wyraża się następująco:

$$t_\theta = (1, 0, 0) \cdot \left( \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), -p, 0 \right) = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{2\mu B}{r^2}. \quad (7.70)$$

Można teraz policzyć moment sił wywierany na walec o jednostkowej długości wzdłuż osi  $z$  i dowolnym promieniu  $r$ . Na element powierzchni  $r d\theta$  elementarna siła  $t_\theta r d\theta$  wywołuje elementarny moment względem osi cylindrów równy  $t_\theta r^2 d\theta$ . Wypadkowy moment siły wywołany działaniem lepkości na cylinder o promieniu  $r$  wynosi:

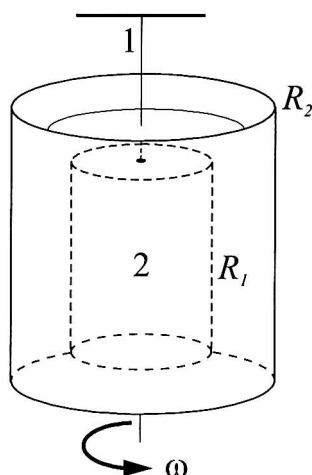
$$M = \int_0^{2\pi} t_\theta r^2 d\theta = -\frac{4\pi\mu(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (7.71)$$



Ze wzoru (7.71) wynika, że moment sił spowodowany lepkością płynu na dowolnym walcu o jednostkowej wysokości i promieniu  $r$  nie zależy od promienia  $r$ . Na ściany cylindrów będą działały przeciwnie skierowane momenty wyrażone wzorem (7.71).

Przepływ między obracającymi się cylindrami ma duże znaczenie w reologii. W XIX wieku rozwiązanie (7.65) było wykorzystywane do weryfikacji modelu Stokesa naprężeń występujących przy ruchu płynów.

Na podstawie wzoru (7.71) można skontrować przyrząd do pomiaru lepkości (rys. 7.5). Cylinder wewnętrzny (2) zawieszony jest na sprężystej nici (1). Jeśli będzie się obracać tylko cylinder zewnętrzny, to nić będzie skręcana momentem sił wyrażonym wzorem (7.71). Skręcenie nici, wykrywane np. odchyleniem promienia świetlnego odbitego od lusterka zamocowanego na nici, pozwoli na określenie lepkości nieznaney cieczy.



Rys. 7.5: Schemat pomiaru lepkości

Dla przypadku, gdy  $R_2 = \infty$  a prędkość kątowa  $\omega_2$  jest równa zero  $\omega_2 = 0$ , prędkość  $v_\theta$  ma wartość:

$$v_\theta = \frac{\omega_1 R_1^2}{r}. \quad (7.72)$$

Jak wiemy (patrz wzór (6.41)), taki rozkład prędkości jest potencjalny. Wywołuje go wir punktowy o cyrkulacji  $\Gamma = 2\pi R_1^2 \omega_1$ .

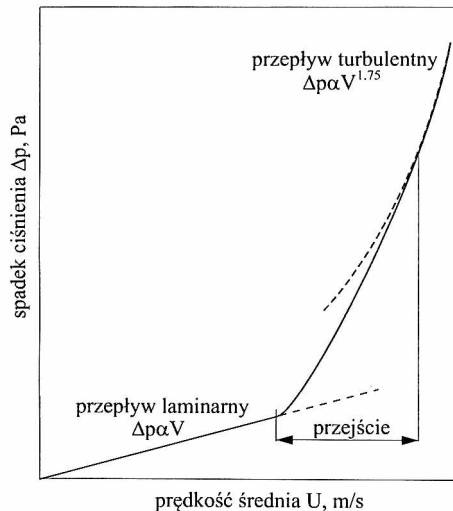
### 7.3.3. Doświadczenie Reynoldsa i podobieństwo przepływów

O tym, że ruch płynu może być burzliwy (turbulentny), wiedzano od wieków. W przeważającej liczbie przypadków ruch płynu występujący w przyrodzie ma

właśnie taki charakter. Już w XV wieku Leonardo da Vinci przedstawiał w swoich grafikach wyniki obserwacji ruchu wody jako mieszaniny małych i dużych struktur wirowych. Należy jednak przyjąć, że dopiero Hagen w 1839 roku wskazywał, stosując metodę właściwą dla metod badawczych mechaniki płynów, na możliwość istnienia dwóch rodzajów ruchu, dokonując pomiaru spadku ciśnienia w zależności od strumienia płynu (rys. 7.6) i proponując wzór:

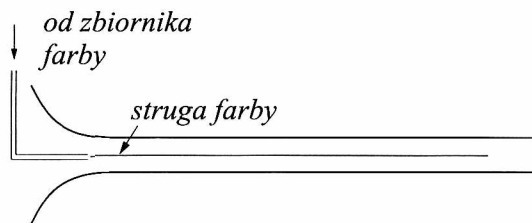
$$\Delta p = C_H \frac{q_v^l}{R^4} + \Delta h_{wej}, \quad (7.73)$$

gdzie  $C_H$  jest pewną stałą, której wartość Hagen potrafił jednak powiązać z lepkością płynu,  $\Delta h_{wej}$  reprezentowała straty wejściowe formowania się profilu prędkości. Jego formuła przestawała być słuszna po przekroczeniu pewnej wartości prędkości  $V_s = q/A$ . Stan ten Hagen charakteryzował jako „drugi rodzaj przepływu, w którym spadek ciśnienia jest proporcjonalny do drugiej potęgi wartości strumienia” [98, s. 329]. Wyniki Hagen przedstawione są na rys. 7.6.



**Rys. 7.6:** Wyznaczona doświadczalnie zależność spadku ciśnienia od prędkości średniej wody w rurze otrzymana przez Hagen, wskazująca na zjawisko przejścia z ruchu laminarnego do turbulentnego [98, s. 329]

W 1883 roku Reynolds opublikował wyniki swoich badań [75], które przeprowadził w celu wyznaczenia oporów ruchu wody w rurach i określenia, kiedy zabarwiona strużka wody porusza się prostoliniowo, a kiedy „sinusoidalnie”. Stnowisko badawcze składało się ze szklanej rurki, do której prowadził konfuzor w kształcie trąbki. Do środka rurki wprowadzona była kapilara podłączona do



Rys. 7.7: Schemat eksperymentu Reynoldsa

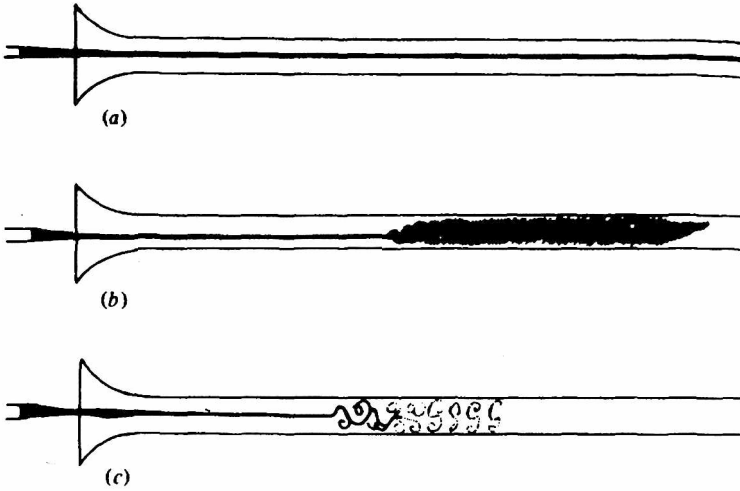
zbiornika z farbą (rys. 7.7). Przez szklaną rurkę przepływała woda, której strumień mógł być regulowany. Farba wypływająca grawitacyjnie przez kapilarę tworzyła, zabarwioną strugę. Wyniki eksperymentu Reynolds przedstawił następująco [75]:

1. Gdy prędkość przepływu w rurce była dostatecznie mała, farba wypływająca z kapilary tworzyła prostoliniową strugę (rys. 7.8a). Wartość, o jaką obniżyło się ciśnienie, była proporcjonalna do wartości prędkości średniej  $\Delta p \sim V_s$ .
2. Gdy woda w zbiorniku doprowadzającym wodę do rurki nie była dostatecznie uspokojona, a prędkość przepływu niezbyt duża, to smużka mogła przesunąć się w rurce, ale nie był obserwowany sinusoidalny ruch zabarwionej strugi.
3. Gdy prędkość zwiększana była stopniowo, w pewnym miejscu rurki, zawsze w znaczącej odległości od wejścia, zabarwiona strużka nagle sposób mogła się mieszać z otaczającą wodą i zabarwić pozostałą wodę w rurce. Dodatkowy wzrost prędkości w rurce powodował, że punkt nagłego zabarwienia wody przesuwał się bliżej trąbkowego wejścia. W czasie oglądania rurki w świetle iskry elektrycznej, w masie zabarwionej wody ujawniały się zawirowania i wiry (rys. 7.8c).

W eksperymencie wykorzystano trzy rurki, z których każda miała inną średnicę. Na podstawie obserwacji zabarwionej strużki w szerokim zakresie prędkości i w rurkach o różnej średnicy  $D$ , Reynolds zauważył, że przejście z ruchu uporządkowanego, prostoliniowego (laminarnego) do burzliwego, chaotycznego (turbulentnego) względem czasu i położenia zachodzi w przybliżeniu dla tej samej wartości bezwymiarowej liczby. Dzisiaj liczba ta nosi nazwę liczby Reynoldsa:

$$Re = \frac{V_s D}{\nu}. \quad (7.74)$$

W sformułowaniu liczby kryterialnej (7.74) pomogło Reynoldsowi spostrzeżenie, że przy wzroście temperatury rosła również tendencja wody do tworzenia wirów. Wzrost temperatury wody powodował zmniejszenie jej lepkości i tym samym zwiększenie podatności na tworzenie się wirów. Analizując równania ruchu Naviera–Stokesa, Reynolds doszedł do wniosku, że w zjawisko uwikłane są dwa rodzaje sił,



**Rys. 7.8:** Rysunki przedstawiające wyniki eksperymentu przeprowadzonego przez Reynoldsa: a) przepływ laminarny; b) przepływ turbulentny; c) przepływ przejściowy

tj. siły lepkościowe i siły bezwładności. Rząd wielkości tych sił można oszacować jako:

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sim \nu \frac{V_s}{D^2}, \quad v \frac{\partial v}{\partial r} \sim V_s \frac{V_s}{D}. \quad (7.75)$$

Iloraz sił lepkości do sił bezwładności  $(\nu V_s/D^2)/(V_s(V_s/D))$  określa liczbę Reynoldsa (7.74).

Przytoczmy twierdzenie nazywane też twierdzeniem Reynoldsa [41], które uzasadnia rolę, jaką odgrywa liczba Reynoldsa w badaniach doświadczalnych. Z twierdzenia wynika również, dlaczego w badaniach dla rurek o różnej średnicy krytyczna liczba Reynoldsa pozostawała taka sama.

**Twierdzenie 7.2.** *Rozpatrzmy dwa obszary, w których odbywa się przepływ. Załóżmy, że siły masowe są równe zeru  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , a gęstość płynu w obu obszarach jest taka sama  $\rho = \rho' = \text{const}$ . Niech  $V$  i  $L$  będą charakterystyczną prędkością płynu i charakterystyczną długością w obszarze pierwszym i niech  $V'$  i  $L'$  znaczą to samo w obszarze drugim. Niech dla obu obszarów zachodzą następujące związki:*

$$\frac{v_i}{V} = \frac{v'_i}{V'} \quad (\text{podobieństwo prędkości}), \quad (7.76)$$

$$\frac{x_i}{L} = \frac{x'_i}{L'} \quad (\text{podobieństwo geometryczne}). \quad (7.77)$$

Określona jest skala czasu  $T = L/V$ ,  $T' = L'/V'$  i zachodzi związek  $t/T = t'/T'$ . Jeżeli liczba Reynoldsa  $Re = \frac{VL}{\nu}$  określona dla obszaru pierwszego jest równa liczbie Reynoldsa dla układu drugiego  $Re' = \frac{V'L'}{\nu'}$ , to jeżeli w układzie pierwszym  $\mathbf{v}$  spełnia równanie ruchu:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (7.78)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (7.79)$$

to prędkość  $\mathbf{v}'$  spełnia identyczne równanie w obszarze drugim:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \nabla') \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla' p' + \nu' \Delta' \mathbf{v}', \quad (7.80)$$

$$\operatorname{div}' \mathbf{v}' = 0, \quad (7.81)$$

gdzie ciśnienia  $p' = (V'/V)^2 p$ .

**Dowód:** Z zależności (7.76) wynika, że  $v_i = \frac{V}{V'} v'_i$ , a z zależności (7.77)  $x' = \frac{L'}{L} x$ , że  $t' = \frac{T'}{T} t$ . Stąd mamy:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{V}{V'} \frac{\partial v'_i}{\partial t'} \frac{dt'}{dt} = \frac{V}{V'} \frac{\partial v'_i}{\partial t'} \frac{T'}{T} = \left(\frac{V}{V'}\right)^2 \left(\frac{L'}{L}\right) \frac{\partial v'_i}{\partial t'}. \quad (7.82)$$

Dalej:

$$v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \left(\frac{V}{V'}\right)^2 \left(\frac{L'}{L}\right) v_i \frac{\partial v'_k}{\partial x'_i},$$

$$\nu \Delta v_i = \nu \left(\frac{V}{V'}\right)^2 \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x'^2_i},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \left(\frac{V}{V'}\right)^2 \frac{L'}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'_i}.$$

Z założenia mamy  $Re = Re'$ , a więc  $\nu = \nu' \frac{VL}{V'L'}$ . Po podstawieniu powyższych wyrażeń do równania (7.78) otrzymamy równanie (7.80).  $\square$

W późniejszych pracach Reynolds podjął próbę wyznaczenia wartości krytycznej liczby Reynoldsa. Był świadomy istnienia dolnej liczby Reynoldsa, poniżej której występuje już tylko ruch laminarny, oraz górnej liczby Reynoldsa, powyżej której nie obserwuje się ruchu turbulentnego. Wartość dolnej liczby  $Re$  Reynolds określił jako  $Re_{kr} = 2060 - 2010$ . Zdawał sobie jednak sprawę, że wartość krytycznej liczby Reynoldsa zależy od amplitudy zaburzeń prędkości. Minimalizując wpływ zaburzeń prędkości wejściowej do rury, Reynolds wyznaczył wartość górnej liczby

$Re_G \sim 13000$ . We współczesnej literaturze przedmiotu można znaleźć doniesienia o górnej liczbie Reynoldsa rzędu  $Re_G \sim 10^5$  [26]. Obecnie uważa się, że przejście do turbulencji dla przepływu w rurze ma miejsce wtedy, gdy amplituda zaburzeń przekroczy pewną wartość krytyczną. Dlatego różne wartości liczb Reynoldsa otrzymane przez badaczy dla przejścia do turbulencji wiążą się z poziomem tła fluktuacji i amplitudy zaburzeń, które mogą występować w eksperymencie. Amplituda krytycznego zaburzenia powodująca przejście do turbulencji zależy od liczby Reynoldsa.

Wciąż niejasna pozostaje wartość dolnej liczby Reynoldsa, poniżej której niezależnie od wielkości amplitudy zaburzeń przejście do turbulencji nie następuje. Uważa się, że dla podtrzymania i inicjacji nagłego przejścia do turbulencji istotne znaczenie odgrywają nieliniowe człony równań Naviera–Stokesa. To one są przyczyną niemożności określenia dolnej liczby Reynoldsa i mogą doprowadzić go powstania i podtrzymania turbulencji już dla  $R_D = 773$  [26].

Doświadczenie przeprowadzone przez Reynoldsa zainicjowało wiele tematów rozwijanych i badanych do dnia dzisiejszego. Dały impuls do rozwoju liniowej teorii stabilności [22], z której wynika, że paraboliczny rozkład prędkości Hagen–Poiseuille’a w rurze pozostaje rozwiązaniem stabilnym dla dowolnej liczby Reynoldsa. Oczywiście jest to sprzeczne z doświadczeniem. Istnieją mocne przesłanki świadczące o tym, że jest to wynikiem linearyzacji równań ruchu, której dokonuje się w liniowej teorii stabilności. W ogólnym planie liniowa teoria stabilności ma umożliwić określenie zakresu liczb Reynoldsa, w jakim dane rozwiązanie powinno być obserwowalne, lub krytycznej liczby Reynoldsa, kiedy pojawia się inne rozwiązanie. Mimo niewątpliwych osiągnięć liniowa teoria stabilności w odniesieniu do przepływu parabolicznego w rurze jak dotychczas nie dostarczyła zadawalających odpowiedzi [26], [99].

Przejściu z ruchu laminarnego do turbulentnego tuż po przekroczeniu krytycznej liczby Reynoldsa towarzyszy zjawisko intermitencji. Obserwuje się nagłe pojawienie się turbulentnego obłoku wirowego a nieco później nagły jego zanik i laminaryzację przepływu [99]. Zjawisko intermitencji zwróciło uwagę badaczy na ważną rolę nieliniowych członów równań Naviera–Stokesa i potrzebę zbadania zależności amplitudy zaburzeń od liczby Reynoldsa na zjawiska przejścia.

## Rozdział 8

# Ruch wirowy płynu

Jak wynika ze wzoru (1.52), wirowość pola prędkości definiowana jest za pomocą operatora różniczkowego  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ . Jest wielkością charakteryzującą pole prędkości, a więc w swojej naturze kinematyczną. Najważniejsze twierdzenia odnoszące się do wirowości mają charakter kinematyczny.

Wprowadzenie wirowości do analizy zjawisk hydrodynamicznych istotnie rozszerza system pojęć i możliwość analizy skomplikowanych przepływów. Wirowość jest jednak wielkością dość trudną do zmierzenia. O ile do pomiaru prędkości są takie przyrządy, jak dopplerowskie anemometry laserowe, anemometry, w których wykorzystywane są: technika gorącego drucika (*ang. hot wire anemometr*), metoda cząstek znaczonych (*ang. particle image velocimeter – PIV*), rurki piętujące, o tyle brak jest przyrządów do bezpośredniego pomiaru wirowości. Wyznaczenie wirowości wymaga precyzyjnego pomiaru lokalnego pola prędkości w punktach przestrzennych leżących blisko siebie i obliczenia pochodnych cząstkowych przestrzennych. W ostatnich latach nastąpił znaczący postęp w zakresie możliwości wykorzystania bezpośrednich pomiarów rozkładu wirowości z użyciem techniki laserowej oraz PIV i należy oczekiwać, że to podejście, obecnie bardzo drogie, z czasem będzie łatwiej dostępne.

### 8.1. Wirowość w płynie nielepkiem

Zgodnie z twierdzeniem Helmholtza dowolne pole prędkości można rozłożyć na część bezdywergencyjną (wirową) i dywergencyjną (bezwirową). Część bezdywergencyjna wyraża się jako (patrz wzór (4.83)):

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{r} dv' + \mathbf{c}_2. \quad (8.1)$$

Równanie (8.1) można przekształcić, włączając operator rotacji pod znak całki. Korzystając z tożsamości wektorowej:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{r} \boldsymbol{\omega} \right) = \frac{1}{r} \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \boldsymbol{\omega}, \quad (8.2)$$

wzór (8.1) przekształcamy do postaci:

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla \times \boldsymbol{\omega} dv' + \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \boldsymbol{\omega} dv'. \quad (8.3)$$

Dla gradientu z funkcji  $1/r$  zachodzi zależność:

$$\nabla_x \left( \frac{1}{r} \right) = - \nabla_{x'} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (8.4)$$

gdzie:

$$\mathbf{r} = (x_1 - x'_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - x'_2)\mathbf{e}_2 + (x_3 - x'_3)\mathbf{e}_3. \quad (8.5)$$

Jeżeli zastosujemy tożsamość (4.80) do pola prędkości  $\mathbf{v}$ , to otrzymamy:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}. \quad (8.6)$$

Z równania (8.6) wynika, że w przepływie nieściśliwym  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  rotacja z wirowości jest równa laplasianowi z pola prędkości:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\omega} == -\Delta \mathbf{v}. \quad (8.7)$$

Zwrócimy uwagę, że dla przepływu potencjalnego, gdy  $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ , pole prędkości spełnia równanie Laplace'a.

Wzór (8.3) można zapisać jako:

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta \mathbf{v}}{r} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dv'. \quad (8.8)$$

Po uwzględnieniu  $\Delta(1/r) = 0$  oraz drugiej tożsamości Greena (równanie (1.115)), zgodnie z którą pierwsza całka jest równa zeru, ostatecznie otrzymujemy wzór:

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dv'. \quad (8.9)$$

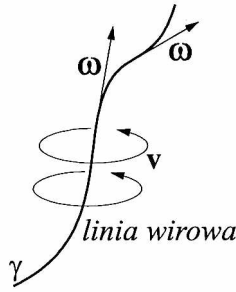
### 8.1.1. Linia wirowa i rurka wirowa

W dyskusji nad zachowaniem się wirowości wprowadza się pojęcia linii wirowej i rurki wirowej.

**Definicja 8.1.** Niech krzywa  $C = \boldsymbol{\gamma}(s) \in \mathbb{R}^3, 0 < s < 1$ . Mówimy, że  $\boldsymbol{\gamma}$  jest linią wirową w ustalonym czasie  $t$ , jeżeli w każdym punkcie przestrzeni  $\mathbf{x}$  jest ona styczna do wektora wirowości  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  (rys. 8.1). Równanie linii wirowej ma postać:

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}(s)}{ds} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\gamma}(s), t_0). \quad (8.10)$$

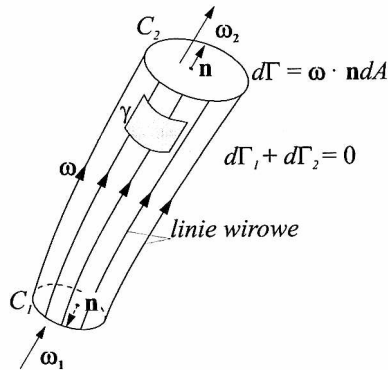




Rys. 8.1: Linia wirowa

Z definicji wynika, że linia wirowa odgrywa taką samą rolę, jak linia prądu dla pola prędkości. Jeżeli prawa strona równania (8.10) jest różniczkowalna lub spełnia warunek Lipschitza  $|\omega(\mathbf{x}') - \omega(\mathbf{x})| \leq L|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ , czyli  $\omega(\mathbf{x})$  nie rośnie zbyt szybko wzdłuż linii, to z ogólnej teorii równań różniczkowych wiemy, że rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne. Przy tych założeniach linie wirowe nie mogą się przecinać. Należy zwrócić uwagę, że pole wirowości może mieć punkt równowagi  $\omega = 0$ . Wtedy punkt na linii wirowej, która zbliża się do tego punktu asymptotycznie, nigdy go nie osiągnie.

**Definicja 8.2.** Rurką wirową nazywamy zbiór wszystkich linii wirowych, które przeszły przez gładką, zorientowaną, zamkniętą krzywą  $C$  (rys. 8.2).

Rys. 8.2: Rurka wirowa utworzona z linii wirowych przechodzących przez kontur  $C$ 

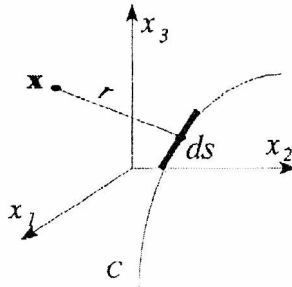
Zwróćmy uwagę na łatę ograniczoną krzywą  $\gamma$  rozłożoną na powierzchni bocznej rurki wirowej (rys. 8.2). Ponieważ na powierzchni bocznej rurki  $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ , to strumień wirowości przez łatę leżącą na rurce jest równy zero i cyrkulacja wokół krzywej  $\gamma$  też jest równa zero. Z twierdzenia Kelvina wynika, że cyrkulacja wokół

krzywej  $\gamma$  zawsze będzie równa zero i będzie pozostawała na powierzchni bocznej rurki wirowej.

Jeżeli w przepływie rzeczywistym (lepkiem) na ścianie prędkość jest równa zero, to cyrkulacja po dowolnej krzywej leżącej na tej ścianie też jest równa zero. Stąd na mocy twierdzenia Stokes'a wynika, że składowa normalna wirowości do ściany jest równa zero  $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ .

### 8.1.2. Wzór Biota–Savarta

Zastosujemy wzór (8.9) do nici wirowej, czyli do wyidealizowanego tworzywa utworzonego z rurki wirowej. Oznaczmy przekrój poprzeczny rurki przez  $\sigma$ . Gdy poprzeczny przekrój rurki będzie dążył do zera w ten sposób, że iloczyn jej pola przekroju i wirowości dążył będzie do skończonej granicy  $\Gamma$ , to w granicy otrzymamy nić wirową o intensywności  $\Gamma$ . Element objętości  $dv'$  zastąpimy iloczynem pola



Rys. 8.3: Nić wirowa  $C$  o intensywności  $\Gamma$

przekroju rurki  $\sigma$  i różniczkowym elementem długości rurki  $ds = (dx_1, dx_2, dx_3, dv') = \sigma \cdot \mathbf{n} ds$ . Składowe pola wirowości będą się wtedy wyrażały wzorem:

$$\omega_i = |\omega| \frac{\partial x_i}{\partial s}. \quad (8.11)$$

Tak więc:

$$\omega_i dv = \Gamma \frac{\partial x_i}{\partial s}. \quad (8.12)$$

Wzór (8.9) można przekształcić do postaci:

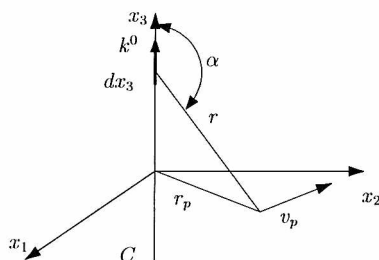
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (8.13)$$

Wzór (8.13) opisuje pole prędkości indukowanej przez nić wirową o intensywności  $\Gamma$  (rys. 8.3). Ze względu na analogię istniejącą pomiędzy wzorem (8.13) a stosowanym

w elektrodynamice wzorem opisującym indukcję magnetyczną wytworzoną wokół przewodu przewodzącego prąd o natężeniu  $\Gamma$  nazywanym wzorem Biota–Savarta, w hydrodynamice wzór (8.13) nosi również nazwę wzoru Biota–Savarta. Stanowi on punkt wyjścia w bezpośrednich, trójwymiarowych metodach wirowych [32]. Pole prędkości indukowane przez skończony zbiór nici wirowych, np. zawierających się w pierścieniu toroidalnym, wyraża się wzorem:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_k \frac{\Gamma_k}{4\pi} \int_{C_k} \frac{d\mathbf{s}' \times \mathbf{r}'}{r'^3}, \quad (8.14)$$

gdzie  $k$  jest numerem sieci wirowej.



**Rys. 8.4:** Nieskończona, prostoliniowa nić wirowa  $C$  o intensywności  $\Gamma$

Rozpatrzmy nieskończoną, prostoliniową nić wirową. Prosta geometria nici wirowej powoduje, że obliczenia pola prędkości z prawa Biota–Savarta (8.13) są zdecydowanie prostsze. Przyjmijmy, że nić wirowa pokrywa się z osią układu współrzędnych  $x_3$ . Z prawa Biota–Savarta (8.13) otrzymujemy:

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}^0 \times \mathbf{r}}{r^3} dx_3, \quad (8.15)$$

gdzie  $r_p^2 = x_1^2 + x_2^2$ , natomiast  $\alpha$  jest kątem zawartym pomiędzy wektorem  $\mathbf{k}^0$  a promieniem  $\mathbf{r}$  (rys. 8.4). Całkę we wzorze (8.15) można obliczyć, podstawiając  $x_3 = -r_p \operatorname{ctg} \alpha$ . Dla takiego podstawiania mamy:

$$dx_3 = r_p \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad r_p^2 + x_3^2 = \frac{r_p^2}{\sin^2 \alpha}, \quad (8.16)$$

a całka (8.15) wyrazi się wzorem:

$$|\mathbf{v}| = \frac{\Gamma}{4\pi r_p} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi r_p}. \quad (8.17)$$

Rzuty wektora  $\mathbf{v} = (u, v)$  na osie  $x_1, x_2$  mają postać:

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi r_p} \frac{x_2}{r_p}, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi r_p} \frac{x_1}{r_p}. \quad (8.18)$$

Składowe pola prędkości  $(u, v)$  nie zależą od współrzędnej  $x_3$  i dla wszystkich płaszczyzn  $x_3 = \text{const}$  są takie same. Dlatego wystarczy rozpatrywać ruch na jednej płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$ , a zamiast nici wirowej rozpatrywać tylko punkt przecięcia płaszczyzny  $Oxy$  z nicią wirową. Ten punkt nazywa się wirem punktowym.

Wir punktowy został już wprowadzony w rozdz. 6.7. Otrzymany w wyniku całkowania wzdłuż nieskończonej nici wirowej uzmysławia dobitnie to, że jest on reprezentowany przez nieskończoną nić wirową w przestrzeni trójwymiarowej i tylko ze względu na swoją specyficzną geometrię pozwala na rozważanie jego ruchu na płaszczyźnie. Należy pamiętać, że wirowość jest polem bezźródłowym. Nić wirowa powinna być linią zamkniętą lub rozciągać się do nieskończoności.

Rozważmy jeszcze obszar  $D$  położony wokół początku układu współrzędnych, na którym wirowość jest różna od zera  $\omega \neq 0$ .

Z rozdziału 4.3 wiemy, że jeżeli pole prędkości  $\mathbf{v}$  jest nieściśliwe, to warunek  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  gwarantuje istnienie potencjału wektorowego  $\Psi$  takiego, że  $\mathbf{v} = \nabla \times \Psi$ . Dla dwóch wymiarów pole wektorowe  $\Psi$  ma tylko jedną składową różną od zera  $\Psi = (0, 0, \psi)$ , a wirowość  $\omega = (0, 0, \omega)$ . Funkcja  $\psi$  jest rozwiązaniem równania Poissona:

$$\Delta\psi = -\omega(x, y) \quad (8.19)$$

i na płaszczyźnie  $(x, y)$  wyraża się następująco:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_D \ln r \omega(x', y') dx' dy', \quad (8.20)$$

gdzie  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .

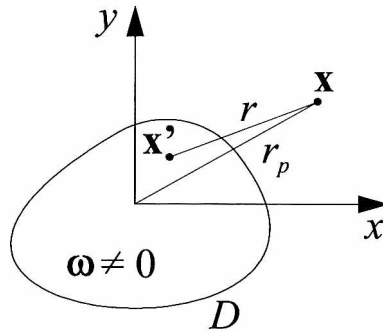
Stąd:

$$u(x, y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{(y - y')\omega(x', y')}{r^2} dx' dy', \quad (8.21)$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_D \frac{(x - x')\omega(x', y')}{r^2} dx' dy'. \quad (8.22)$$

Załóżmy, że wirowość jest różna od zera w ograniczonym obszarze  $D$  wokół początku układu współrzędnych (rys. 8.5). Interesuje nas prędkość indukowana przez wirowość zawartą w tym obszarze  $D$ , w punktach daleko odległych od początku układu współrzędnych. Całkę (8.20) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_D \ln\left(r_p \frac{r}{r_p}\right) \omega(x', y') dx' dy' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln r_p \int_D \omega(x', y') dx' dy' + 0(r_p^{-1}). \end{aligned} \quad (8.23)$$



Rys. 8.5: Dwuwymiarowa łała wirowości

Ze wzoru (8.23) wynika, że funkcja prądu z dokładnością do  $O(r_p^{-1})$  zachowuje się tak, jakby cała wirowość była skupiona w początku układu współrzędnych, a funkcja prądu wytwarzana była przez wir punktowy o intensywności:

$$\Gamma = \int_D \omega(x', y') dx' dy'. \quad (8.24)$$

### 8.1.3. Twierdzenia o transporcie wirowości w płynie nielepkiem i nieściśliwym

Udowodnimy wzór Cauchy'ego odnoszący się do transportu (unoszenia) wirowości w zmiennych Lagrange'a [16], [62]. Wiąże on bezpośrednio zmianę wirowości z upływem czasu z deformacją elementu płynu. Deformacja reprezentowana jest przez gradient odwzorowania przepływowego  $\nabla\Phi$ . O wzorze Cauchy'ego mówi się, że jest rozwiązaniem równania Helmholtza [64]. Jest to jednak tylko przedstawianie ewolucji wirowości za pomocą jacobianu i trudno mówić o rozwiązaniu, ponieważ elementy gradientu deformacji  $\nabla\Phi$  pozostają nieznanne.

Przyjmijmy, że równania transportu wirowości w zmiennych Eulera opisywane są równaniami (4.23) oraz (4.24), które dla wygody przytaczamy tutaj jeszcze raz:

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad \text{dla } n = 3, \quad (8.25)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0 \quad \text{dla } n = 2. \quad (8.26)$$

**Twierdzenie 8.1.** Niech  $\Phi(\alpha, t)$  będzie odwzorowaniem przepływowym pola prędkości  $\mathbf{v}$  oraz niech pole prędkości spełnia równanie Helmholtza transportu wirowości dla płynu nielepkiego i nieściśliwego (8.25), a dla przepływu dwuwymiarowego równanie (8.26). Pole wirowości transportowane jest w takim przypadku przez przepływ, czyli zachodzą następujące równości:

- dla przepływu trójwymiarowego:

$$\omega(t, \Phi(\alpha, t)) = \nabla\Phi(\alpha, t) \cdot \omega(\alpha, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}^3; \quad (8.27)$$

- dla przepływu dwuwymiarowego:

$$\omega(\Phi(\alpha, t), t) = \omega_0(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^2. \quad (8.28)$$

**Dowód:** Oznaczmy lewą stronę równania (8.27) jako  $\mathbf{F}(t, \alpha) = \omega(\Phi(\alpha), t)$ , a prawą jako  $\mathbf{G}(\alpha, t) = \nabla\Phi(\alpha, t) \cdot \omega(\alpha, 0)$ . Pamiętajmy, że  $\mathbf{x} = \Phi(\alpha, t)$ . Zauważmy, że oba wyrażenia, tj. dla  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{G}$  oraz dla czasu  $t = 0$ , mają tę samą wartość równą  $\omega(\alpha, 0)$ , ponieważ  $\nabla\Phi(\alpha, 0) = I$ . Wektor  $\mathbf{F}(\alpha, t)$  równa się wektorowi  $\omega(\mathbf{x}, t)$ . Pochodna po czasie dla  $\mathbf{F}$  równa się:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (8.29)$$

W powyższym równaniu, w drugiej równości wykorzystano równanie Helmholtza transportu wirowości dla cieczy nielepkiej. W efekcie różniczkowania po czasie wyrażenie dla  $\mathbf{G}$  oraz wykorzystania reguł różniczkowania funkcji złożonej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} &= \nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\alpha, t)\right) \cdot \omega(\alpha, 0) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \omega(\alpha, 0), \\ &= \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\Phi \cdot \omega(\alpha, 0) = \nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{G} = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Porównując ze sobą oba wyrażenia na pochodne, widzimy, że  $\mathbf{F}$  oraz  $\mathbf{G}$  spełniają równania różniczkowe dokładnie tej samej postaci z tym samym warunkiem początkowym (oba wyrażenia w chwili  $t = 0$  się sobie równe). Ponieważ rozwiązania tych równań są takie same, musi zachodzić teza twierdzenia (8.27).

Wzór (8.28) wynika z równania (8.26) i oznacza, że wirowość  $\omega(\alpha, 0)$ , którą posiada cząstka w chwili początkowej, jest zachowywana podczas unoszenia przez przepływ.  $\square$

#### 8.1.4. Twierdzenia Helmholtza

Helmholtz zapoczątkował badania nad wirowością już w 1858 roku, a więc w połowie XIX wieku. W celu zobrazowania swoich idei zastosował linię wirową i rurkę wirową. Twierdzenie Helmholtza stanowią geometryczną interpretację twierdzenia Kelvina.

**Twierdzenie 8.2.** *Niech płyn będzie płynem nielepkim, nieściśliwym o stałej gęstości lub ściśliwym barotropowym  $\rho(p)$ . Wtedy:*

1. Jeżeli krzywe  $C_1$  oraz  $C_2$  obejmują rurkę wirową, to cyrkulacja po tych krzywych jest taka sama i zachodzi (8.35). Jeżeli w chwili początkowej płyn był bezwirowy,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = 0$ , to ruch płynu pozostanie bezwirowy.
2. Intensywność rurki  $\Gamma$  nie ulega zmianie w czasie.
3. Linie wirowe są liniami materialnymi, co oznacza, że są unoszone przez przepływ.

**Dowód:**

Ad 1. Jest to treścią twierdzenia Kelvina (patrz rozdz. 4.2.3).

Ad 2. Wirowość jest bezdywergencyjna (beźródłowa), czyli:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (8.31)$$

Po scałkowaniu równania (8.31) po objętości rurki wirowej zawartej pomiędzy krzywymi  $C_1$  i  $C_2$  (rys. 8.2) oraz skorzystaniu z twierdzenia Gaussa otrzymujemy:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dv = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_b} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (8.32)$$

Ponieważ na powierzchni bocznej rurki wirowej  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ , to:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (8.33)$$

Strumień wirowości wiąże się z cyrkulacją pola prędkości (rozdz. 1, twierdzenie Stokes'a):

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{v} \cdot ds. \quad (8.34)$$

Z twierdzenia Kelvina (rozdz. 4.2.3) wiemy, że cyrkulacja po dowolnej krzywej unoszonej przez przepływ zachowuje się. Dla rurki wirowej przedstawionej na rys. 8.2 mamy:

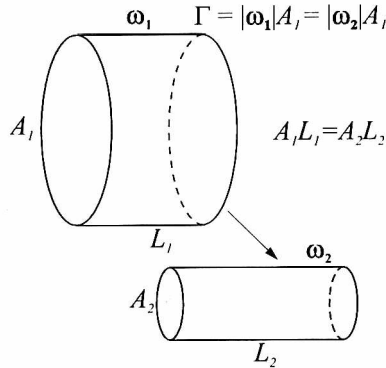
$$-\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot ds + \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot ds = 0. \quad (8.35)$$

Znak minus jest konsekwencją przeciwnej orientacji krzywych  $C_1$  i  $C_2$  względem wnętrza obszaru. Z (8.35) wynika, że:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \Gamma, \quad (8.36)$$

gdzie  $\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS$  jest intensywnością rurki niezależną od jej kształtu i jest stałą  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ .

Ad 3. Wynika z twierdzenia 8.1. □



**Rys. 8.6:** Deformacja rurek wirowych w przepływie

Zwróćmy uwagę, że równanie (8.36) jest konsekwencją bezźródłowego charakteru wirowości (wzór (8.31)) i nie zależy od tego, czy płyn jest nieściśliwy, czy ściśliwy. Na rysunku 8.6 pokazano dwie małe rurki wirowe, które deformują się pod wpływem przepływu [15]. Rurka o przekroju  $A_1$  i długości  $L_1$  zostaje zdeformowana do rurki o przekroju  $A_2$  i długości  $L_2$ . Jeżeli przepływ jest nieściśliwy ( $\rho = \text{const}$ ), to objętość rurek będzie taka sama  $A_1L_1 = A_2L_2$ . Na mocy twierdzenia Helmholtza wiemy, że intensywności rurek muszą się zachować  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Gdy przekrój rurek jest niezbyt duży, można przyjąć, że zachodzą związki  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = |\boldsymbol{\omega}|$  oraz  $|\boldsymbol{\omega}_1|A_1 = |\boldsymbol{\omega}_2|A_2$ . Stąd:

$$\frac{|\boldsymbol{\omega}_2|}{|\boldsymbol{\omega}_1|} = \frac{L_2}{L_1}. \quad (8.37)$$

Możemy stwierdzić, że dla płynu nielepkiego i nieściśliwego moduł wirowości jest proporcjonalny do długości linii wirowej  $|\boldsymbol{\omega}_2| = |\boldsymbol{\omega}_1| \frac{L_2}{L_1}$ . Rozciąganie linii wirowej wywołują zmianę wirowości. W przepływie nielepkim i nieściśliwym wirowość nie może jednak być wytworzona wewnątrz przepływu.

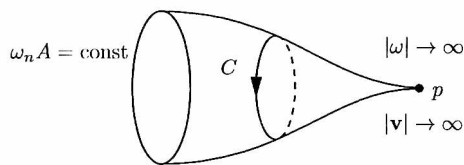
Dla płynu barotropowego, ponieważ  $\rho_1 A_1 L_1 = \rho_2 A_2 L_2$ , wzór (8.37) przyjmuje postać:

$$\frac{(|\boldsymbol{\omega}_2|/\rho_2)}{(|\boldsymbol{\omega}_1|/\rho_1)} = \frac{L_2}{L_1}. \quad (8.38)$$

Ze wzoru (8.38) wynika, że moduł wirowości może ulec zmianie wskutek zmiany gęstości przy stałej długości rurki.

Helmholtz z twierdzenia o stałości strumienia wirowości wzdłuż rurki wywnioskował również, że rurka wirowa (włókno wirowe) musi być rurką zamkniętą, może rozciągać się do nieskończoności lub kończyć na brzegu ograniczającym płyn. Uzasadnienie tego wniosku było takie, że gdyby rurka kończyła się gdzieś





**Rys. 8.7:** Hipotetyczna generacja osobliwości w przepływie [41]

wewnątrz płynu na powierzchni  $S$ , strumień wirowości przez tę powierzchnię musiałby być równy zeru, a więc cyrkulacja wokół krzywej obejmującej  $S$  musiałaby być równa zeru. Jest to w sprzeczności ze stałością intensywności  $\Gamma$  rurki. W literaturze wskazuje się jednak na niekompletność tego rozumowania jako dowodu matematycznego [16], [29], [62]. Polega to na tym, że nie bierze się pod uwagę, że linia wirowa tworząca rurkę wirową może mieć punkt równowagi  $\omega(\mathbf{x}) = 0$ . Linia wirowa może więc kończyć się wewnątrz płynu. Rurka wirowa w punkcie równowagi może się rozdwajać [16] w taki sposób, że suma cyrkulacji mniejszych rurek równa się cyrkulacji przed osiągnięciem punktu równowagi. Ponadto linie wirowe mogą wchodzić do rurki i wypełniać ją gęsto, tak jak linie na powierzchni torusa leżące blisko siebie i nigdy się niezamykające. Przykład takiego rozwiązania, nazywanego przepływem ABC, podał Arnold dla równania Eulera<sup>(4)</sup>. W skończonej objętości rurki wirowe mogą być nieskończenie długie i nigdy się nie zamykają. Sposób ten, z analitycznymi przykładami i odpowiednim komentarzem i wykresami, zaprezentowano w [29].

Badanie dynamiki rurek wirowych jest jedną z intensywniej rozwijających się gałęzi teoretycznej i numerycznej mechaniki płynów [51], [53]. Olbrzymie zainteresowanie dynamiką rurek wirowych wiąże się z tym, że być może badania te dadzą odpowiedź na pytanie o istnienie osobliwych rozwiązań równań Eulera czy Naviera–Stokesa [43]. Chodzi o rozstrzygnięcie, czy w skończonym czasie, w gładkich (regularnych) warunkach początkowych, w skończonym obszarze i ograniczonej energii kinetycznej możliwe jest rozwiązanie dążące do nieskończoności. Pewną geometryczną ilustracją problemu przedstawiono na rys. 8.7. Cyrkulacja po krzywej  $C$  obejmującej rurkę i strumień wirowości w rurce powinny być stałe. Gdyby doszło do kolapsu rurki wirowej, to prędkość i wirowość będą w punkcie  $p$  dążyły do nieskończoności. Istnieją tylko numeryczne przesłanki, przemawiające za możliwością takiego scenariusza. W 2000 roku na Kongresie w Paryżu ogłoszono siedem problemów milenijnych za rozwiązanie jednego z nich zaferowano nagrodę w wysokości jednego miliona dolarów. Jednym z problemów jest dowód rozstrzy-

<sup>(4)</sup> Nazwa ABC utworzona jest z pierwszych liter nazwisk badaczy zajmujących się tym przepływem: Arnold, Bletami, Childress i została wprowadzona w pracy [21]

gający o istnieniu pola prędkości i cieniienia, które będzie globalnym rozwiązaniem równań Naviera–Stokesa. Powstaje pytanie, czy w równaniu Naviera–Stokesa dla regularnych, ograniczonych warunków początkowych może w skończonym czasie powstać osobliwość? Przypuszcza się, że jeżeli rozwiązania równań Eulera pozostawałyby regularne, to również byłyby regularne rozwiązania równań Naviera–Stokesa ponieważ lepkości płynu jest dodatkowym parametrem wyłudzającym rozwiązania. Osobliwości rozwiązań mogłyby się generować w wyniku interakcji rurek wirowych [43].

## 8.2. Uogólnione równanie transportu wirowości Helmholtza dla płynu lepkiego

Równanie Naviera–Stokesa, po skorzystaniu z Eulera w formie Gromeki–Lamba i ze wzoru (8.7), doprowadzimy do postaci:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla H - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (8.39)$$

W wyniku działania w równaniu (8.39) obustronnie operatorem rotacji otrzymujemy:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = -\nu \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (8.40)$$

Wykorzystując tożsamości (4.17) i (8.6), można sprawdzić, że zachodzą zależności:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (8.41)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (8.42)$$

Równanie (8.40) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (8.43)$$

Zauważmy, że  $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ . Ostatecznie otrzymujemy więc:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (8.44)$$

Równanie (8.44) stanowi uogólnione równanie Helmholtza transportu wirowości dla płynu lepkiego. Zauważmy, że dla  $\nu = 0$  otrzymujemy równanie wyprowadzone przez Helmholtza dla płynu nielepkiego (8.25). Dla płynu lepkiego operator Laplace’a występujący po prawej stronie równania (8.44) będzie wygładzał pole wirowości w ten sposób, że jeżeli w jakimś punkcie lokalnie nastąpi wzrost

wirowości, to operator będzie działał w kierunku pomniejszenia tej wirowości, sprowadzając ją lokalnie do średniej wartości wirowości z otoczenia tego punktu. Równanie stanowi alternatywny sposób opisu ruchu płynu. Zaletą równania (8.44) jest brak w nim członu ciśnienia. Do równania (8.44) należy dołączyć warunki początkowe i brzegowe. Warunek początkowy wynika z warunku początkowego dla pola prędkości i ma postać:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0). \quad (8.45)$$

Nieznana jest jednak wartość wirowości na ścianie stałej. Warunkiem brzegowym, jaki powinien być zrealizowany dla prędkości, jest brak poślizgu na ścianie, a więc sytuacja, gdy ściana się nie porusza  $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$ . Aby związać pole prędkości z rozkładem wirowości, do równania (8.44) dołącza się równanie na potencjał wektorowy  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ :

$$\Delta A_i = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.46)$$

Pole prędkości wyraża się przez potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$  następująco:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (8.47)$$

Warunek na zerowanie się składowej normalnej prędkości na ścianie ma postać:

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8.48)$$

zerowanie się na ścianie składowej stycznej pola prędkości zapewnia warunek:

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A})|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8.49)$$

Niech  $\mathbf{t}_1$  oraz  $\mathbf{t}_2$  będą dwoma wektorami stycznymi do powierzchni ściany. Warunek (8.49) będzie automatycznie spełniony, gdy:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{t}_1|_{\partial\Omega} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{t}_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8.50)$$

Zgodnie z wcześniejszym założeniem potencjał wektorowy jest wektorem bezdywergencyjnym  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Aby ten warunek był spełniony, w obszarze na ścianie składowa normalna potencjału wektorowego musi być równa zeru. Stąd warunki brzegowe dla potencjału wektorowego ostatecznie przyjmują postać:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8.51)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{t}_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8.52)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{t}_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8.53)$$

$$(8.54)$$

W pracy [74] przedstawiono twierdzenie, że równania (8.44) i (8.46) z warunkami (8.45) i (8.49) są równoważne zagadnieniu początkowo-brzegowemu dla równania Naviera–Stokesa (7.21)–(7.24).

### 8.2.1. Równania Helmholtza dla przepływu dwuwymiarowego

Dla przepływu płaskiego (dwuwymiarowego)  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$ , a wirowość  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ . Wektor wirowości jest więc ortogonalny do pola prędkości  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = 0$  i człon  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} \equiv 0$ . Równanie Helmholtza wraz z równaniem ciągłości przyjmuje postać:

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega, \quad (8.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8.56)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0. \quad (8.57)$$

Rozwijając pochodną substancjalną po lewej stronie, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \nu \Delta \omega. \quad (8.58)$$

Wiemy (patrz rozdz. 4.3), że warunek  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  zapewnia istnienie funkcji prądu  $\psi$ , która pozwala związać wirowość z polem prędkości:

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (8.59)$$

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (8.60)$$

Z rozdziału 1.6.3 wiemy, że rozwiązanie równania Poissona (8.59) dla nieograniczonej płaszczyzny wyraża się następująco:

$$\psi(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\mathbf{x}') \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| dS'. \quad (8.61)$$

Korzystając ze wzorów (8.60) i różniczkując pod znakiem całki, można prędkość płynu wyrazić przez wirowość:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}') dS', \quad (8.62)$$

gdzie  $\mathbf{K}$  wyraża się następująco:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-x_2}{|\mathbf{x}|}, \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} \right). \quad (8.63)$$

W pracy [62] udowodnione jest twierdzenie, że dla dwuwymiarowych przepływów równania Naviera–Stokesa są równoważne równaniom (8.55), (8.62) i (8.63).

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że przyjmując w równaniu (8.58)  $\nu = 0$ , jego prawą stronę można zapisać za pomocą wyznacznika Jacobiego:

$$J(\psi, \nabla\omega) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial x} & \frac{\partial\omega}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.64)$$

następująco:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\psi, \nabla\omega) = 0. \quad (8.65)$$

Jeżeli funkcje w wyznaczniku Jacobiego ( $\omega, \psi$ ) są zależne, np.  $\omega(\psi)$ , to wyznaczniki będzie równy zeru. Dzieje się tak w przypadku, gdy rozkład wirowości będzie zależał tylko od promienia  $r$ . Funkcja prądu jest wtedy zależna tylko od promienia  $r$ . Równanie Poissona (8.59) we współrzędnych cylindrycznych ma wówczas postać:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = -\omega(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8.66)$$

Pochodne  $\frac{\partial\omega}{\partial x}$  i  $\frac{\partial\psi}{\partial x}$  wyrażają się jako  $\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial r} \frac{x}{r}$  i  $\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial r} \frac{y}{r}$  a dla funkcji  $\psi$  analogicznie jako  $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{x}{r}$ ,  $\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{y}{r}$ . Po podstawieniu tych wyrażeń do wyznacznika (8.64) otrzymamy  $J = 0$ . Z równania (8.65) wynika, że rozkład wirowości w postaci kołowej łąty wirowej o promieniu  $r$ , wewnątrz której wirowość rozłożona jest w sposób zależny tylko od  $r$ , będzie pozostawała w spoczynku  $\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0$ .

### 8.2.2. Wirowość w dwuwymiarowym przepływie ze ścianami stałymi

Zgodnie z opisem w rozdz. 4.2.3 przepływ nielepki pozostanie bezwirowy, jeżeli taki był w chwili początkowej. Podobne stwierdzenie można sformułować dla płynu lepkiego. O wirowości w przepływach lepkich mówi się, że wirowość powstaje na brzegu stałym.

**Twierdzenie 8.3.** Niech w obszarze  $\Omega$  będzie zadane następujące dwuwymiarowe zagadnienie początkowe dla równania ruchu cieczy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\omega &= \nu\Delta\omega, \\ \Delta\psi &= -\omega, \\ u &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \omega(x, y) &= \nabla \times \mathbf{v}|_{t=0}, \end{aligned} \quad (8.67)$$

gdzie  $\mathbf{v} = (u, v)$ . Jeżeli warunek początkowy jest bezwirowy  $\nabla \times \mathbf{v}_0 = \omega(x, y, 0) = 0$  i wartość wirowości na brzegu obszaru jest również równa zero  $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ , to wirowość pozostanie tożsamościowo równa zero u dla wszystkich czasów  $t \in (0, \infty)$ .

**Dowód:** Pomnóżmy równanie Helmholtza przez  $\omega$  i scałkujmy stronami w obszarze  $\Omega \times (0, T)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega \right) dS dt &= \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \omega^2}{\partial t} + \omega \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \omega \Delta \omega \right) dS dt, \end{aligned} \quad (8.68)$$

gdzie  $dS = dx dy$  oznacza różniczkowy element powierzchni. Wykorzystując, że  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , wyrażenie  $\omega \mathbf{v} \cdot \nabla \omega$  można przekształcić następująco:

$$\omega \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \omega u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\omega^2 \mathbf{v}).$$

Całka z powyższego wyrażenia po obszarze  $\Omega$ , na mocy twierdzenia o dywergencji i warunku, że na brzegu stałym  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , też jest równa zero:

$$\int_{\Omega} \omega \mathbf{v} \cdot \nabla \omega dS = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega^2 \mathbf{v}) dS = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \omega^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = 0.$$

Całkę z iloczynu  $\omega \Delta \omega$ , korzystając z pierwszej tożsamości Greena (patrz rozdz. 1), oraz z założenia, że  $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ , możemy przekształcić następująco:

$$\int_{\Omega} \omega \Delta \omega dS = \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\partial \omega}{\partial n} dl - \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dS = - \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dS.$$

Po uwzględnieniu powyższych równań wzór (8.68) będzie miał postać:

$$\int_0^t \left( \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \omega^2}{\partial t} + \nu |\nabla \omega|^2 \right) dS \right) dt = 0. \quad (8.69)$$

Zmieniając kolejność całkowania i pamiętając, że całka z pochodnej równa się różnicy wartości brzegowych, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\omega^2|_{t=T} - \omega^2|_{t=0}) dS + \nu \int_0^T dt \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dS = 0.$$

Z założenia w chwili początkowej  $\omega(x, y, 0) = 0$  otrzymujemy więc ostatecznie:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega^2|_{t=T} + \nu \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dS = 0. \quad (8.70)$$

Ponieważ oba wyrażenia podcałkowe są zawsze dodatnie, z równania (8.70) wynika, że  $\omega = 0$  w obszarze  $\Omega$  dla wszystkich czasów  $t$ .  $\square$

Inną tożsamość całkową, która pokazuje rolę brzegu w narodzinach nowej wirowości, można otrzymać w sposób opisany poniżej.

Niech  $\Gamma(t)$  wyraża całkowitą wirowość zawartą w obszarze  $\Omega$  w chwili  $t$ :

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \omega(x, y, t) dS. \quad (8.71)$$

Korzystając z tożsamości  $\nabla \cdot (\omega \mathbf{v}) = \nabla \omega \cdot \mathbf{v} + \omega \nabla \cdot \mathbf{v}$  oraz z tego, że  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , równanie Helmholtza można zapisać w postaci:

$$\omega_t + \nabla \cdot (\omega \mathbf{v} - \nu \nabla \omega) = 0. \quad (8.72)$$

Po scałkowaniu stronami równania (8.72) i uwzględnieniu wzoru (8.71), otrzymujemy:

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega \mathbf{v} - \nu \nabla \omega) dS. \quad (8.73)$$

Wykorzystując twierdzenie Gaussa o dywergencji, równanie (8.73) można przekształcić do postaci:

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \int_{\partial\Omega} (\omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \nu \nabla \omega \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (8.74)$$

Na brzegu stałym mamy  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Jeżeli obszar jest zamknięty ścianami sztywnymi lub na brzegach ograniczających obszar  $\Omega$  wirowość jest równa zero, to całkowita zmiana wirowości w obszarze zachodzi na skutek strumienia wirowości z brzegu:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial n} dS. \quad (8.75)$$

Zmiana wirowości w obszarze  $\omega$  wynika ze strumienia wirowości z brzegu obszaru. Z przedstawionych wyżej rozważań można wysnuć wniosek, że w przepływie nieściśliwym, w obszarze ograniczonym ścianami wirowość powstaje tylko na brzegu stałym.

Duże znaczenie wirowości w praktyce, np. generacja siły nośnej, powstawanie wirów na łopatkach turbin i śrub okrętowych, przyczyniło się do olbrzymiego zainteresowania metodami numerycznymi, w których wykorzystuje się cząstki będące nośnikami wirowości. Zmiany w rozkładzie wirowości można zaobserwować, śledząc położenie cząstek wirowych. W równaniu ruchu płynu można wyróżnić część konwekcyjną, opisywaną za pomocą równania Eulera dla płynu nielepkiego oraz część dyfuzyjną związaną z lepkością. Rozbicie procesu rozwiązywania równania ruchu na część nielepką i dyfuzyjną (lepką) nazywa się dekompozycją lepkościową [38]. Korzystając z algorytmu dekompozycji lepkościowej, równania ruchu płynu lepkiego rozwiązuje się w dwóch krokach. Najpierw rozwiązuje się

równania dla płynu nielepkiego. Zgodnie z twierdzeniem Helmholtza cząstki wirowe są unoszone przez przepływ, a więc poruszają się jak cząstki płynu. Następnie uwzględnia się lepkość płynu, rozwiązując równanie dyfuzji dla pola wirowości otrzymanego w kroku pierwszym. Metoda ta wyjątkowo dobrze nadaje się do modelowania zjawisk zdominowanych przez ewolucję dużych struktur wirowych. Odnosi się to do ewolucji powierzchni nieciągłości pomiędzy dwoma ośrodkami (niestabilność Rayleigha–Taylor) [49], jak również do dwuwymiarowych przepływów w kanałach [49], [52], w obszarach nieograniczonych (aerodynamika ruchu owadów) [48] i ewolucji trójwymiarowych struktur wirowych [46], [53].



# Literatura

- [1] Aref H., *Motion of three vortices*, Phys. Fluids, 22, 3, 1979, 393–400.
- [2] Aref H., *Point vortex dynamics: A classical mathematics playground*, Journal of Math. Phys., 48, 2007.
- [3] Aref H., *Self-similar motion of three point vortices*, Phys. Fluids, 22, 2010.
- [4] Aref H., Rott N., Thomann H., *Grobli's solution of the three-vortex problem*, Ann. Rev. Fluid Mech., 24, 1992, 1–20.
- [5] Aris R., *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1962.
- [6] Arnold V.I., *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa, 1975.
- [7] Arnold V.I., *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa, 1981.
- [8] Arnold V.I., *Lectures on partial differential equations*, Springer, PWN, Warszawa, 2000.
- [9] Bertin J.J., Cummings R.M., *Aerodynamics for engineers*, vol. 1, Pearson Education Limited, 2014.
- [10] Bird R., Stewart W., Lightfoot E., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [11] Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O., *Dynamics of Polymeric liquids, Fluid Mechanics*, vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [12] Brown D.L., Cortez R., Minion M., *Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comp. Phys., 168, 2001, 464–499.
- [13] Cantwell B.J., *Introduction to Symmetry Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [14] Cengel Y.A., Cimbala J.M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, Higher Education, 2006.
- [15] Childress S., *An introduction to theoretical fluid mechanics*, vol. 19, American Mathematical Soc., 2009.
- [16] Chorin A., Marsden J.E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, 1990.
- [17] Chorin A.J., *Numerical solution of the Navier–Stokes equations*, Math. Comput., 22, 1968, 745.
- [18] Chorin A.J., *On the convergence of discrete approximations to the Navier–Stokes equations*, Math. Comput., 23, 1969, 341.
- [19] Ciałkowski M., *Mechanika płynów*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2015.

- [20] Currie I.G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.
- [21] Dombre T., Firish U., Greene J.M., Hennon M., Mehr A., Soward A.M., *Chaotic streamlines in three abc flows*, J. Fluid Mech., 167, 1986, 353–391.
- [22] Drazin P., Reid W.H., *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [23] Drazin P., Riley N., *The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [24] Drust F., *Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, 2008.
- [25] Dyke M.V., *An album of fluid motion*, The Parabolic Press, Stanford, 1982.
- [26] Eckhardt B., *Introduction: Turbulence transition in pipe flow: 125th anniversary of the publication of Reynolds' paper*, Phil. Trans. R. Soc. Lond., 367, 2009, 449–455.
- [27] Eringen A., *Mechanics of Continua*, John Wiley & Sons, Inc., 1980.
- [28] Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 3, PWN, Warszawa, 1995.
- [29] Fuentes O.U.V., *On the topology of the vortex lines and tubes*, J. Fluid Mech., 584, 2007, 147–156.
- [30] Föppl L., *Wirbelbewegung hinter einem kreiszylinder*, Sitzb. d. k. Bayer. Akad. d. Wiss., 1, 1, 1913.
- [31] Gonzalez O., Stuart A.M., *A first course in continuum mechanics*, Cambridge University Press, 2008.
- [32] Green S.I., (red.), *Fluid Vortices, Fluid Mechanics and its Applications*, vol. 30, Kluwer Academic Pub., 1995.
- [33] Gryboś R., *Podstawy mechaniki płynów*, PWN, Warszawa, 1989.
- [34] Hartman S., Mikusiński J., *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, Warszawa, 1957.
- [35] Hassani S., *Mathematical methods for students of physics and related fields*, Springer, 2009.
- [36] Hirsch M.W., Smale S., Devaney R.L., *Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, 2004.
- [37] Hirt C.W., Nichols B.D., Romero N., *SOLA – A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows*, La-5852, Los Alamos Scientific Laboratory, 1975.
- [38] Holden H., *Splitting methods for partial differential equations with rough solutions: Analysis and MATLAB programs*, European Mathematical Society, 2010.
- [39] Howe M.S., *Hydrodynamics and Sound*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [40] Huang K., *Mechanika statystyczna*, PWN, Warszawa, 1978.
- [41] Hughes T.J.R., Marsden J.E., *A short course in fluid mechanics*, Publish or Perish Inc., Boston, 1976.
- [42] Jeżowiecka-Kabsch K.J., Szewczyk H., *Mechanika płynów*, Oficyna Wydawnicza PWr, 2001.
- [43] Kerr R., *Vortex collapse and turbulence*, Fluid Dynamics Research, 36, 2005, 249–260.
- [44] Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V., Fomin V.M., *Foundations of Fluid Mechanics with Applications. Problem Solving Using Mathematica*, Birkhauser Boston, 1999.
- [45] Kocin N.E., Kibel I.A., Roze N.V., *Teoretičeskaja gidromechanika*, tom 1, 2, Gosudar. Izdatel. Fiz.-Mat. Literatury, Moskva, 1963.

- [46] Kosior A., Kudela H., *The 3d vortex particle method in parallel computations on many GPUs*, Computers and Fluids, 92, 2014, 274–280.
- [47] Kozlov V.V., *Obščaja terija wichrej (ros.)*, Izdatelskij Dom – Udmurtskij Uniwersitet, Izewsk, 1998.
- [48] Kozłowski T., Kudela H., *Transitions in the vortex wake behind the plunging profile*, Fluid Dynamics Research, 46, 6, 2014, 1–15.
- [49] Kudela H., *Modelowanie zjawisk hydrodynamicznych metodami dyskretnych wirów*, Oficyna Wydawicza PWR, Wrocław, 1995.
- [50] Kudela H., *Collapse of  $n$ -point vortices in self-similar motion*, Fluid Dynamics Research, 46, 2014, 031414.
- [51] Kudela H., *Self-similar collapse of  $n$  point vortices*, Journal of Nonlinear Science, 25, 5, 2014, 913–933.
- [52] Kudela H., Malecha Z.M., *Eruption of a boundary layer induced by a 2D vortex patch*, Fluid Dynamics Research, 41, 2009, 055502.
- [53] Kudela H., Regucki P., *The vortex-in-cell method for the study of three-dimensional vortex structures*, Tubes, sheets and singularities in fluid dynamics, 71, 2002, 49–54.
- [54] Kythe P.K., Puri P., Schafekotter M.R., *Partial Differential Equations and Mathematics*, CRC Press, Inc., 1996.
- [55] Lai W.M., Rubin D., Krempf E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1978.
- [56] Leja F., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1969.
- [57] Leja F., *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa, 1973.
- [58] Lin C.C., Segel L., *Mathematical Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, Macmillan Publishing Co., Inc., 1974.
- [59] Locjanskij L.G., *Mechanika zhidkosti i gaza*, Nauka, Moskwa, 1978.
- [60] Logan J.D., *Applied mathematics*, Wiley-Interscience, Inc., 1997.
- [61] Logan J.D., *An introduction to nonlinear partial differential equations*, Wiley-Interscience, Inc., 2008.
- [62] Majda A.J., Bertozzi A.L., *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [63] Marsden J.E., Tromba A.J., *Vector calculus*, W.H. Freeman Company, 2003.
- [64] Marshall J.S., *Invicid Incompressible Flow*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [65] Milne-Thomson L.M., *Theoretical Aerodynamics*, Dover Publications, Inc., 1966.
- [66] Minion M.L., *A projection method for locally refined grid*, J. Comp. Phys., 127, 1996, 158–178.
- [67] Munson B.R., Young D.F., Okiishi T.H., *Fundamentals of fluid mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [68] Newton P.K., *The  $N$  vortex problem*, Springer, 2001.
- [69] Novikov E.A., *Dynamics and statistics of a system of vortices*, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 68, 1975, 1868–1882.
- [70] Pietrowski I., *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa, 1955.
- [71] Pinchover Y., Rubinstein J., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [72] Pozrikidis C., *Fluid Dynamics: theory, computation, and numerical simulation*, Kulver Academic Publishers, 2001.

- [73] Prosnak W.J., *Mechanika płynów*, tom 1, PWN, Warszawa, 1970.
- [74] Quartapelle L., *Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations*, Birkhauser Verlag, 1993.
- [75] Reynolds O., *An experimental investigation of the circumstances which determine wheter the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Phil. Trans. R. Soc. Lond., 174, 1883, 935–982.
- [76] Romano A., Lancellotta R., Marasco A., *Continuum Mechanics using Mathematica*, Birkhauser, Boston, 2006.
- [77] Rudin W., *Podstway analizy matematycznej*, PWN, Warszawa, 1976.
- [78] Saff E.B., Snider A.D., *Fundamentals of complex analysis*, Printice-Hall Inc., 2004.
- [79] Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1979.
- [80] Serrin J., *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, *Encyclopedia of Physics, Fluid Dynamics I*, 8, Springer-Verlag, 1959.
- [81] Shaw W.T., *Recovering holomorphic functions from their real or imaginary part without the Cauchy–Riemann equations*, SIAM Review, 46, 4, 2004, 717–728.
- [82] Shaw W.T., *Complex analysis with Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [83] Slezkin N.A., *Dinamika viazkoj nesżimaemoj żidkosti*, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Tehniko-Teoretičeskoj Literatury, 1955.
- [84] Smirnow W.I., *Matematyka wyższa. Równania o pochodnych cząstkowych. Zagadnienia brzegowe*, tom 4, PWN, Warszawa, 1962.
- [85] Smirnow W.I., *Matematyka wyższa*, tom 2, PWN, Warszawa, 1966.
- [86] Smirnow W.I., *Matematyka wyższa. Funkcje zmiennej zespolonej. Równania różniczkowe liniowe. Funkcje specjalne*, tom 3, PWN, Warszawa, 1967.
- [87] Spurk J.H., *Fluid Mechanics. Porblems and Solutions*, Springer, 1997.
- [88] Spurk J.H., Aksel N., *Fluid Mechanics*, Springer, 2008.
- [89] Strang G., *Linear algebra and its applicationse*, Thomson Learning, Inc., 1988.
- [90] Tang K.T., *Mathematical methods for enginners and scientists 1. Complex Analysis, Determinats and Matrices*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [91] Tang K.T., *Mathematical methods for enginners and scientists 2. Vector Analysis, Ordinary Differential Equations and Laplace Transforms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [92] Temam R.M., Miranville A.M., *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [93] Tichonow A.N., Samarski A.A., *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1963.
- [94] Trajdos-Wróbel T., *Wstęp do analizy wektorowej*, PWN, Warszawa, 1959.
- [95] Trusdell C.A., *A first course in rational coninuum mechancis*, vol. 1, Academic Press Inc., San Diego, 1991.
- [96] Warsi Z.U.A., *Fluid Dynamics: theoretical and compuataional approaches*, CRC Press, 1999.
- [97] White F.M., *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, 1991.
- [98] White F.M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1999.

- [99] Willis A.P., Peixinho J., Kerswell R., Mullin T., *Experimental and theoretical progress in pipe flow transition*, Phil. Trans. of the Royal Society A, 366, 2008, 2671–2684.
- [100] Woyczyński W.A., *Burgers-KPZ turbulence*, Springer-Verlag, 1998.









Politechnika  
Wroclawska

Centrum Wiedzy  
i Informacji Naukowo-Technicznej

386911L/A

**W książce *Matematyczne wprowadzenie do mechaniki płynów* przedstawione są podstawowe idee fizyczne i aparat matematyczny analizy matematycznej, rachunku wektorowego i tensorowego służące do opisu ruchu ośrodka płynnego. Płyn traktowany jest jako ośrodek ciągły (continuum), dlatego do jego opisu autor wykorzystał pojęcia wypracowane w mechanice ośrodka ciągłego. Rozróżnienia pomiędzy ciałem stałym a płynem zostały dokonane za pomocą równań konstytutywnych, których postać przesądza o własnościach ośrodka i jego reakcji na działające w nim siły. Ograniczono się do płynów nieściśliwych. Dynamika płynów nieściśliwych opiera się na prawie zachowania masy i prawach dynamiki Newtona. Najpierw zostały wyprowadzone równania ruchu ośrodka ciągłego, a dopiero później sformułowane równania konstytutywne dla płynu nielepkiego i lepkiego. Pozwoliło to na wyprowadzenie równań Eulera ruchu płynu nielepkiego, a dla płynu lepkiego równań Naviera–Stokesa. Oprócz przykładów rozwiązań dla ruchu płynu nielepkiego i lepkiego książka zawiera także szereg twierdzeń wiążących się z dynamiką wirowości i jej elementarnych nośników, jakimi są wiry punktowe.**

Książka adresowana jest to doktorantów, studentów wyższych lat studiów i pracowników nauki. Może również być przydatna dla każdego, kto interesuje się mechaniką płynów.



Wydawnictwa Politechniki Wroclawskiej są do nabycia w księgarni,  
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław, budynek D-1 PWr., tel. 71 320 29 35  
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową: [zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl](mailto:zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl)

ISBN 978-83-7493-953-9