Na prawach rękopisu

INSTYTUT KONSTRUKCJI I EKSPLOATACJI MASZYN
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport Serii PREPRINTY Nr 096(696)/80

P r a c a   d o k t o r s k a

WYDAJNOŚĆ POMP ZĘBATYCH I WSPÓŁCZYNNIK JEJ NIERÓWNOMIERNOŚCI

Jarosław Stryczek

Promotor: doc. dr hab. inż. Wacław Kollek

Słowa kluczowe:
pompa zębata,
wydajność,
nierównomierność wydajności

Wrocław 1980

SPIS RZECZY

Spis oznaczeń

a_o, a_r - teoretyczna i rzeczywista odległość osi kół zębatych
b - szerokość koła zębatego
e_1, e_2 - odległości punktu przyporu od środków O_1, O_2 kół zębatych czynnego i biernego
g - odległość ekwidystanty od hipocykloidy zasadniczej
k_1, k_2 - współczynniki skrócenia głowy względnie stopy zęba hipocykloidalnego
m - moduł koła zębatego
M_1, M_2 - momenty obrotowe kół zębatych czynnego i biernego
M - moduł hipocykloidy
n - prędkość obrotowa wałka napędowego pompy zębatej
p - ciśnienie tłocznia pompy zębatej
q - wydajność właściwa pompy
q_z - objętość czynnika wyparta przez koła zębate pompy przy obrocie o kąt odpowiadający jednej podziałce
Q_u, $Q_{u_{min}}$, $Q_{u_{max}}$, $Q_{u_{śr}}$ - wydajność chwilowa; wartość minimalna, maksymalna, średnia
r_w, r_s, r_p, r_z, r_t - promienie charakterystyczne koła zębatego; promień koła wierzchołkowego, stóp, podziałowego, zasadniczego, tocznego
R_1 - współczynnik kształtu zęba
t - czas
t_z - podziałka zasadnicza

u, u_{min}, u_{max}	- odległość punktu przyporu od bieguna zazębienia C; wartość minimalna, maksymalna
v	- współczynnik odległości ekwidystanty
x_1, x_2	- współczynnik korekcji koła zębatego czynnego i biernego
y_1, y_2	- współczynnik wysokości zęba koła zębatego czynnego i biernego
z_1, z_2	- liczba zębów koła zębatego czynnego i biernego
z_{zast}	- zastępcza liczba zębów
α_o wzgl. α	- nominalny kąt przyporu
α_t	- toczny kąt przyporu
α_z	- kąt środkowy zęba koła zębatego odpowiadający podziałce t_z
γ	- kąt konchoidy
δ	- współczynnik nierównomierności wydajności pompy zębatej
φ	- kąt obrotu łuków hipocykloidy zasadniczej
φ_1, φ_2	- kąty obrotu koła zębatego czynnego i biernego
ω_1, ω_2	- prędkość kątowa koła zębatego czynnego i biernego
ρ_1, ρ_2	- promienie kół odtaczających koła czynnego i biernego

1. WPROWADZENIE

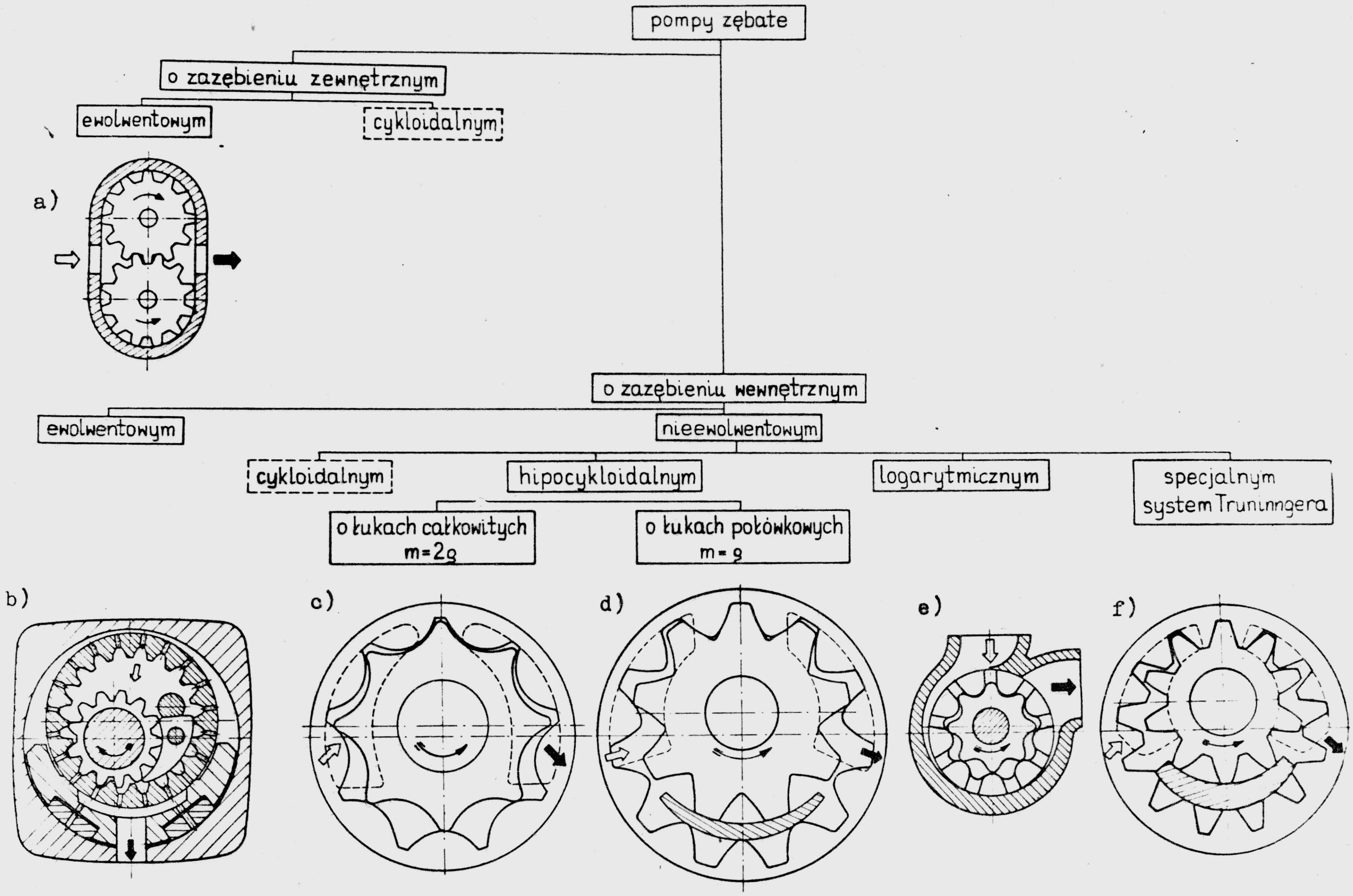
1.1. Określenia i podział pomp zębatych

W literaturze przedmiotu pompy zębate dzieli się tradycyjnie na pompy o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym. O ile termin pompa zębata o zazębieniu zewnętrznym określa jednoznacznie zarówno zasadę działania jak i ogólny kształt konstrukcyjny pompy, to nazwa pompa zębata o zazębieniu wewnętrznym jest wieloznaczna i nie opisuje ani konstrukcji ani też wzajemnego usytuowania głównych elementów pompy a także sposobu ich współpracy. Równie nieprecyzyjny wydaje się być, stosowany często w literaturze w odniesieniu do pomp zębatych o zazębieniu wewnętrznym termin pompy gerotorowe. Powstał on jako dosłowne tłumaczenie nazwy angielskiej "gerotor pumps". Słowo gerotor jest typowym dla Anglosasów zestawem dwóch słów generated rotor i znaczy dosłownie wirnik generujący. Nazwą tą określano początkowo konstrukcję pompy o zazębieniu wewnętrznym i specjalnym nieewolwentowym zarysie zęba. Później pojęcie to rozciągnięte zostało na wszystkie pompy o zazębieniu wewnętrznym niezależnie od rodzaju zarysu zęba, w tym również w odniesieniu do zarysów ewolwentowych, a więc utraciło swój pierwotny sens jako wyróżnik pomp o nieewolwentowym zarysie zębów.

W ostatnich latach pojawiło się na rynku szereg nowych konstrukcji pomp zębatych o zazębieniu wewnętrznym. Różnią się one między sobą nie tylko rodzajem zarysu zęba, lecz także wynikającym z niego ukształtowaniem pozostałych elementów pompy. Pojawiła się zatem potrzeba rozróżniania tych konstrukcji. Niektórzy autorzy a także producenci zaczęli stosować nazwy związane z rodzajem zarysu zazębienia przyjętego w konstrukcji pomp. I tak na przykład Eisenmann [6] stosuje termin pompy trochoidalne a Gőselle [12] mówi o pompach hipocykloidalnych dystansowych. Inni jak np. Schőller [32] odchodzą od definiowania pompy wg rodzaju zarysu zęba i uwypuklają kształt konstrukcyjny wirnika mówiąc o "Ring-Rotor-Pumpe" a więc pompie z wirnikiem pierścieniowym. Niezależnie od tego w literaturze spotyka się często po prostu nazwy firm produkujących dany typ pompy. I tak np. spotyka się nazwy pompa typu Pigott, Marrel - Hydro, Z.F (Zahnradfabrik Fridrichshafen) lub wreszcie firmy Bucher systemu Truninngera. Nazwy te mogą być i są niestety nie wiele mówiące a często nawet mogą być źródłem nieporozumień, ponieważ nie tylko nie definiują zasady działania i typu konstrukcji, lecz nie mówią nawet o tym, że w ogóle odnoszą się do pomp zębatych.

W celu uporządkowania tego nazewnictwa zdecydowano się przyjąć w ramach niniejszej pracy układ systematyczny pomp zębatych wg rys.1, na którym obok nazwy podano także schemat konstrukcji pompy. Jak widać z rysunku podział zasadniczy opiera się na wyróżnieniu pomp o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym. Dalszą cechą wyróżniającą poszczególne konstrukcje jest rodzaj zarysu zęba. Pompy zębate mogą być rozróżniane wg rodzaju zarysu zęba, który może być ewolwentowy i nieewolwentowy. W grupie zarysów nieewolwentowych wyróżnia się zarysy cykloidalne, hipocykloidalne, logarytmiczne oraz specjalne do których zaliczono zarys Truninngera.

Pompy zębate o zazębieniu wewnętrznym dzieli się często w literaturze na pompy z oddzieleniem przestrzeni ssawnej od tłocznej za pomocą wstawki sierpowej lub bez niej. Do pierwszej grupy należą kon-



Rys.1. Systematyka konstrukcji pomp zębatych

strukcje wg rys.b, d, f do drugiej rozwiązania wg c, e. Podział ten także orzeka o zasadzie współpracy kół zębatych, lecz nie określa jednoznacznie zarysu zęba. Na użytek tej pracy jest nieprzydatny i z tego powodu nie został wprowadzony do systematyki na rys.1.

1.2. Stan i tendencje rozwojowe w budowie pomp zębatych

Wśród pomp wyporowych, stosowanych w układach napędowych jako generatory energii ciśnienia oraz jako silniki hydrauliczne, nie ma takich typów pomp, które miałyby zdecydowaną przewagę nad innymi pod każdym względem i mogły je w pełni zastąpić [39]. Każdy typ pompy posiada swoiste zalety, które sprawiają, że jest on w określonych dziedzinach budowy maszyn stosowany częściej niż inne. Pompa zębata której wynalezienie przypisuje się Keplerowi w 1604 r. wyróżnia się prostotą i zwartością konstrukcji oraz dużą trwałością przy bardzo niskiej cenie. Tym też tłumaczyć należy dominującą rolę pomp zębatych w hydraulicznych układach napędowych maszyn i urządzeń [16]. W budowie obrabiarek ich udział oceniany jest na ok. 60% [10] wszystkich stosowanych typów pomp wyporowych. W budowie maszyn i ciągników rolniczych udział ten jest jeszcze większy. Podobnie można ocenić udział pomp zębatych w budowie samojezdnych maszyn roboczych o mocy do 100 kW. Biorąc pod uwagę, że 30-40% produkowanych aktualnie w świecie elementów hydrauliki znajduje zastosowanie w budowie samojezdnych maszyn roboczych [35, 40] można wnosić, że pozycja jaką zajmują pompy zębate w najbliższej przyszłości nie będzie zagrożona.

Tak duże rozpowszechnienie stosowania pomp zębatych w hydraulicznych układach napędowych jest uzasadnione wysokimi ciśnieniami roboczymi, jakie pozwalają osiągnąć. W przypadku pomp najprostrzej konstrukcji, tzn. bez kompensacji luzów, ciśnienia robocze osiągają wartość do 17,5 MPa, zaś w pompach z kompensacją do 25 MPa. Obserwując postęp w tej dziedzinie można zaryzykować twierdzenie, że możliwości osiągania wyższych ciśnień roboczych nie zostały jeszcze wyczerpane.

Duże, nie wykorzystane jak dotąd możliwości pomp zębatych, związane są z tym, że mogą pracować z bardzo dużymi nawet prędkościami obrotowymi i przewyższają pod tym względem wszystkie pozostałe, stosowane w układach napędowych, typy pomp wyporowych [35]. Zwiększając prędkości obrotowe można uzyskać znaczne zwiększenie gęstości strumienia generowanej energii ciśnienia, nie zwiększając osiąganych współcześnie ciśnień roboczych. Tendencja ta obserwowana jest w układach napędowych samojezdnych maszyn roboczych. Barierę postępu stanowią maksymalne możliwe współcześnie do osiągnięcia prędkości obrotowe wysokoprężnych silników spalinowych nie przekraczające jak dotąd 3000 obr/min.

Wśród pomp zębatych przeważają współcześnie pompy o zazębieniu zewnętrznym [10, 35, 40], chociaż ostatnio coraz większą uwagę zwraca się na pompy o zazębieniu wewnętrznym [6, 14, 27, 32, 41, 43]. Przyczyn obserwowanego wzrostu zainteresowania pompami o zazębieniu wewnętrznym należy doszukiwać się przede wszystkim w tym, że odznaczają się znacznie niższym (nawet o 10 dB) od pomp o zazębieniu zewnętrznym poziomem generowanych hałasów. Jest to zaleta niezwykle istotna dlatego, że ocena pomp wyporowych w coraz większym stopniu uwzględnia poziom emitowanych przez nie hałasów. Odnosi się to przede wszystkim do maszyn z napędem hydraulicznym przeznaczonych do pracy w pomieszczeniach zamkniętych. W odniesieniu do pomp o zazębieniu wewnętrznym podnosi się także dodatkową zaletę, jaką jest większa w porównaniu z pompami o zazębieniu zewnętrznym zwartości konstrukcji, a tym samym mniejszy ciężar na jednostkę generowanej przez pompę energii ciśnienia.

Wbrew obiegowym opiniom pompy zębate o zazębieniach śrubowych, mimo iż są mniej hałaśliwe od pomp o zębach prostych, nie mają szans rozwoju, przynajmniej na tyle, aby móc zastąpić pompy o zazębieniu zewnętrznym i zębach prostych. Ich możliwości funkcjonalne, w p rów-naniu z pompami o zębach prostych są mniejsze [41]. Wydajność właściwa pompy ze wzrostem kąta pochylenia linii zęba maleje, a równocześnie wzrasta współczynnik nierównomierności wydajności. Siła poosiowa wynikająca z pochylenia linii zęba dodatkowo komplikuje konstrukcję węzłów łożyskowych oraz przyśpiesza zużycie powierzchni czołowych kół i płytek łożyskowych. Maksymalne ciśnienia robocze, jakie mogą pompy te osiągać, nie przekraczają 10 MPa. Ogranicza to możliwość stosowania ich w hydraulicznych układach napędowych.

Główne przyczyny hałaśliwości pracy pomp zębatych związane są z drganiami dźwiękotwórczymi wywołanymi błędami wykonania części, a także ich montażu, rodzajem łożyskowania zespołu wirnikowego oraz wynikającymi z zasady współpracy kół zębatych stanowiących zespół wirnikowy. Błędów wykonania w toku produkcji wielkoseryjnej pomp uniknąć nie można. Można tylko dążyć do ich zminimalizowania doskonaląc technologię wykonania części oraz zwiększając dokładność metod kontroli produkcji. Możliwość zmniejszenia drgań dźwiękotwórczych spowodowanych błędami wykonawstwa i montażu jest zatem, ograniczona. Podobnie ma się sprawa z łożyskowaniem. Zastępując łożyska toczne ślizgowymi, co ma miejsce coraz częściej, osiąga się także poziom emitowanych przez węzły łożyskowe hałasów, poniżej którego trudno zejść. Najbardziej istotnym czynnikiem z punktu widzenia hałaśliwości pompy jest zgodnie z panującymi poglądami [6, 15, 16, 17, 29, 33, 36, 37, 41, 42] ukształtowanie zespołu wirnikowego określające charakter współpracy kół zębatych. Zależy on od liczby zębów kół czynnego i biernego, rodzaju zarysu i kształtu zęba (współczynnik wysokości zęba), a przede wszystkim od rodzaju zazębienia (zewnętrzne, wewnętrzne) [11, 16 33, 36, 37]. Czynniki te decydują o wartości współczynnika nierównomierności wydajności pompy δ definiowanego najczęściej wzorem (14), a tym samym o pulsacji ciśnienia, a więc o częstości i amplitudzie siły wymuszającej okresowo drgania pompy, które mogą być przekazywane dalej na pozostałe elementy układu napędowego. Wyższość pomp o zazębieniu wewnętrznym nad pompami o zazębieniu zewnętrznym oraz związane z tym tendencje ich rozwoju i szerszego stosowania w hydraulicznych układach napędowych znajduje usadanienie [4, 35] w tym że:

- pozwalają zdecydowanie zmniejszyć współczynnik nierównomierności wydajności δ,
- koła czynne mogą mieć mniejszą liczbę zębów, przez co można zasadniczo obniżyć podstawowe częstotliwości drgań decydujące o uciążliwości hałasu,
- uzyskuje się zmniejszenie przestrzeni martwych między współpracującymi zębami, z czym wiąże się mniejszy wpływ oddziaływania jej na amplitudę obciążeń zębów,
- kąty środkowe odpowiadające obszarowi napełniania wrębów w obszarze ssawnym mogą być większe, przez co uzyskuje się mniejsze prędkości ich wypełniania czynnikiem, a więc eliminuje możliwości występowania lokalnie zjawiska kawitacji.

Przykłady typowych rozwiązań pomp o zazębieniu wewnętrznym przedstawiają rys.1b oraz 1f. Rys.1b podaje konstrukcję pompy firmy Eckerle, produkowanej także na licencji przez firmę Voith. Zastosowano tu zazębienie ewolwentowe oraz niskie zęby, co wraz z kompensacją luzów osiowych i promieniowych pozwala osiągnąć współpracę kół niemal bez luzów. Zmiany objętości międzyzębnej w obszarze współpracy zębów są w porównaniu do uzębienia normalnego sprowadzone do minimum. Wszystkie te czynniki przy minimalnej nierównomierności wydajności - właściwej dla pomp o zazębieniu wewnętrznym - sprawiają, że pompy te osiągają cichobieżność porównywalną z najlepszymi pod tym względem pompami śrubowymi.

Podobny układ pompy z oddzieleniem przestrzeni ssawnej od tłocznej, za pomocą wkładki sierpowej przedstawia rys.1f. Pompy te produkowane są przez firmy Bucher (Szwajcaria) oraz Keelavit (Anglia). Dla kół zespołu wirnikowego przyjęto specjalne zazębienie Truninngera odznaczające się bardzo małą krzywizną zarysu zęba. Uzyskuje się przez to praktycznie całkowitą likwidację międzyzębnej przestrzeni zasklepionej w obszarze współpracy zębów na długości odcinka przyporu. Naciski powierzchniowe współpracujących zębów są przy tym znacznie mniejsze niż dla zębów o zarysie ewolwentowym. Są to dodatkowe czynniki, które - przy prawie stałej wydajności w czasie - pozwalają osiągnąć poziom ciśnienia akustycznego nie większy od 70 dB.

W ostatnich latach pojawiły się na rynku dwie konstrukcje pomp o zazębieniu wewnętrznym i hipocykloidalnym zarysie zębów [6, 32] wg rys.1c oraz 1d. Cechą wspólną obu tych konstrukcji jest bardzo mała różnica zębów współpracujących kół, która - co widać z rys.1c - daje się sprowadzić nawet do jedności. Różnica obu konstrukcji polega na tym, że w pompie firmy Heller (rys.1c) zarys zębów opisany jest hipocykloidą o łukach całkowitych czyli, że moduł zęba jest równy średnicy koła odtaczającego się, zaś w pompie firmy Zollern (rys.1d) zarys opisany jest hipocykloidą o łukach połówkowych, czyli, że moduł zęba jest równy promieniowi koła odtaczającego. W rozwiązaniu pierwszym współpracują wszystkie zęby równocześnie. Oddzielenie przestrzeni ssawnej od tłocznej zapewniają współpracujące koła, a więc nie ma potrzeby stosowania wkładki sierpowej. W rozwiązaniu firmy Zollern różnica liczba zębów wynosi dwa. Nie wszystkie zęby współpracują równocześnie, a więc konstrukcja wymaga wkładki sierpowej. W pompach tych stosuje się duże moduły, wskutek czego osiąga się duże wydajności właściwe. Znamienną cechą tych konstrukcji jest duża cichobieżność, między innymi dlatego, że współczynnik nierównomierności wydajności daje się maksymalnie zmniejszyć. Pompy te umożliwiają osiągnięcie dużej zwartości konstrukcji, a przez to znaczne zmniejszenie ciężaru na jednostkę generowanej mocy. Wszystko to sprawia, że konstrukcje tego typu będą w najbliższej przyszłości intensywnie rozwijane.

1.3. Cel pracy

Z systematyki, podanej w punkcie 1.1 oraz z przeglądu stanu obecnego i tendencji rozwojowych w budowie pomp zębatych dokonanego w punkcie 1.2 wynika duża różnorodność ich konstrukcji. Obiegowe przekonania o wyższości poszczególnych rozwiązań nad innymi nie są w pełni przekonujące, a nawet mogą niekiedy budzić wątpliwości. Odczuwa się zatem potrzebę dokonania rzeczowej i pełnej analizy, z której można by wysunąć właściwe wnioski odnośnie oceny poszczególnych rozwiązań oraz ich możliwości. Można tego dokonać jedynie po przyjęciu jednolitych kryteriów porównawczych. Podstawowymi wielkościami kryterialnymi, które można i należy przyjąć do oceny są jednostkowa wydajność właściwa oraz nierównomierność wydajności pomp charakteryzowana współczynnikiem nierównomierności wydajności. Pierwsza wielkość kryterialna umożliwia ocenę poszczególnych typów pomp pod względem zwartości konstrukcji, wyrażającej się ciężarem na jednostkę generowanej energii ciśnienia. Pozwala także ustalić i ocenić wpływ poszczególnych wielkości określających geometrię zazębienia na wydajność właściwą. Druga wielkość kryterialna umożliwia dokonanie porównania poszczególnych rozwiązań konstrukcyjnych pod względem pulsacji ciśnienia uznawanej za główne źródło drgań dzwiękotwórczych zarówno pompy, jak i pozostałych elementów zasilanego przez nią układu napędowego.

W literaturze przedmiotu występuje duża różnorodność wzorów na wydajność pomp zębatych oraz na współczynnik jej nierównomierności [11, 19, 23]. Wszystkie odnoszą się jednak tylko do pomp o ewolwentowym zarysie zęba. Niektóre tylko [11] zestawione zostały w taki sposób, że można je stosować uniwersalnie do pomp o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym. Większość źródeł [19, 23] podaje odmienne postacie dla obu rodzajów zazębień. Gutbrod [11] stwierdza, że z jego wzorów można z dużym przybliżeniem korzystać także w odniesieniu do zazębień o nieewolwentowym zarysie. Stwierdzenie to może budzić wątpliwości, ponieważ nie można ocenić zazębień o zarysie nieewolwentowym za pomocą wielkości geometrycznych właściwych dla zarysów ewolwentowych.
W odniesieniu do pomp zębatych o zazębieniu wewnętrznym i zarysie cykloidalnym lub wywodzącym się od cykloidy można znaleźć w literaturze [27, 30] wzory przybliżone na wydajność. Są one jednak nieprzydatne do analiz i porównań, ponieważ nie podają zależności wydajności chwilowej od kąta obrotu kół, a tym samym od podstawowych wielkości geometrycznych opisujących zarys zęba, a więc i objętości przestrzeni

międzyzębnych. Wzory podane przez Gőselego [12, 13] trudno ocenić, ponieważ nie podano ich wyprowadzeń, a także ich forma jest do analiz i porównań mało przydatna. Przedstawiona w pracy [28] metoda wyznaczania wydajności pomp o zazębieniu cykloidalnym jest ze względu na zawartość i nieprzejrzystość wzorów mało przydatna. Odnosi się ponadto do układu, w którym koło o uzębieniu zewnętrznym oprócz ruchu obrotowego dokonuje ruchu orbitalnego wokół osi uzębionego wewnętrznie wirnika, a więc dotyczy tylko silników pracujących wg systemu Orbitrol produkowanych przez firmę Danfoss [3, 25, 27]. Podsumowując można więc stwierdzić, że w dostępnej literaturze nie ma uniwersalnych zależności pozwalających wyznaczyć wydajność i współczynnik jej nierównomierności dla wszystkich typów i odmian konstrukcyjnych pomp zębatych, na podstawie których można by dokonać pełnej analizy i porównania ich możliwości oraz ocenić wpływ rodzaju, podstawowych wielkości geometrycznych zazębienia, a także rodzaju zarysu zęba na założone główne wielkości kryterialne.

W tej sytuacji za cel pracy obrano:

- Wyprowadzenie jednolitych, uniwersalnie obowiązujących wzorów na wydajność i współczynnik jej nierównomierności dla wszystkich typów pomp zębatych, a więc o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym oraz zarysie zębów wywodzących się z krzywych kołowych, tzn. ewolwentowym, cykloidalnym oraz hipocykloidalnym, zarówno o łukach pełnych jak i połówkowych,
- Określenie wpływu rodzaju zazębienia, kształtu zarysu zęba i podstawowych parametrów geometrycznych zazębienia pomp zębatych na ich wydajność i współczynnik jej nierównomierności.
- Dokonanie porównania poszczególnych typów pomp i ich odmian konstrukcyjnych oraz oceny ich możliwości, przyjmując jako wielkości kryterialne wydajność oraz współczynnik jej nierównomierności.

Aby cele te osiągnąć, należało ustalić podstawowe związki i zależności geometryczne oraz kinematyczne współpracujących kół zespołu wirnikowego. Dotyczy to przede wszystkim kół o zarysie hipocykloidalnym, dla którego w dostępnej literaturze związków takich dotąd nie opublikowano.

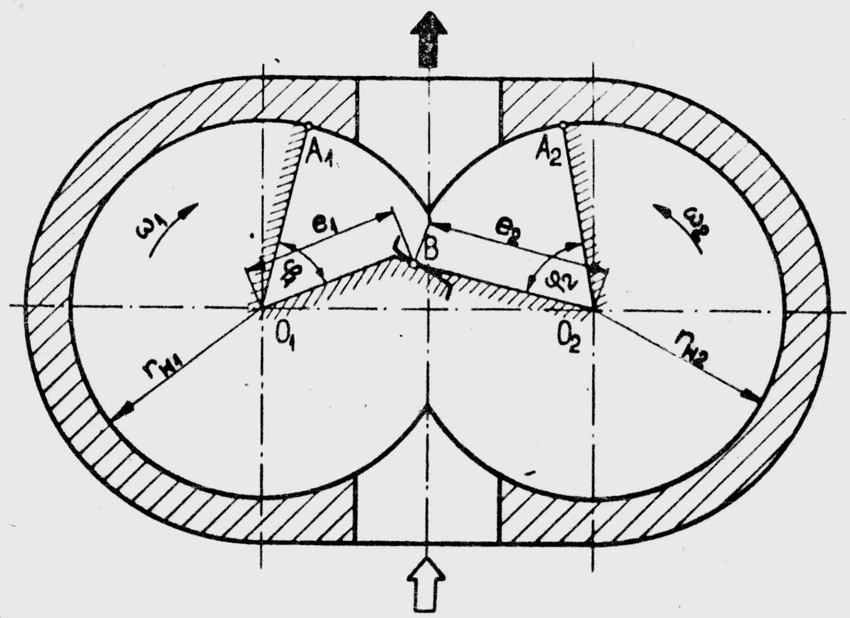
Wydajność pomp zębatych oraz współczynnik jej nierównomierności można wyznaczyć w dwojaki sposób. Pierwszy wykorzystany w pracach [19, 23, 31] przyjmuje za punkt wyjścia pole powierzchni wrębów kół zębatych, drugi przyjęto w pracy [11] wzorującej się na pracy [1] wychodzi z równoważności energii ciśnienia i pracy mechanicznej niezbędnej do jej wytworzenia. Drugi sposób jako mniej żmudny, przyjęto także w ramach tej pracy przy wyprowadzeniu wzorów dla wszystkich rodzajów zazębień. W analizie wyprowadzonych wzorów przyjmuje się znacznie szersze zakresy zmienności wszystkich rozpatrywanych zmiennych niezależnych od tych, jakie znajduje zastosowanie w praktyce konstrukcyjnej, a to w tym celu, aby ustalić prawidłowości, jakie między nimi występują. Z tego względu korzystając z przytoczonych w pracy wykresów zawsze należy sprawdzić czy poszczególne wielkości traktowane jako parametry (np. liczby zębów kół) są w danej konstrukcji w rzeczywistości możliwe do osiągnięcia.

Z systematyki pomp podanej na rys.1 mogłoby wynikać, że cykloidalne zarysy zębów są w pompach zębatych czymś normalnym. Aktualnie pomp tego typu nie produkuje się. W pracy ujęto jednak ten typ zarysu ze względu na zalety, szczególnie w przypadku zazębień wewnętrznych, a przede wszystkim dlatego, że stanowią one ogniwo pośrednie między zarysem ewolwentowym a hipocykloidalnym, szczególnie ostatnio preferowanym w budowie pomp o zazębieniu wewnętrznym. Nie analizuje się także pomp o zarysie logarytnicznym stosowanym raczej na zasadach rozwiązań wyjątkowych. Nie rozpatruje się także zarysu Truninngera chronionego patentem i dlatego pod względem kształtu bliżej nieokreślonego.

2. WYDAJNOŚĆ POMP ZĘBATYCH I WSPÓŁCZYNNIK JEJ NIERÓWNOMIERNOŚCI

2.1. Wydajność chwilowa

Z zasady działania idealnej pompy zębatej, niezależnie od rodzaju zazębienia (zewnętrzne lub wewnętrzne) oraz zarysu zęba wynika, że przenoszenie cieczy z przestrzeni ssawnej do tłocznej realizowane jest w każdej chwili tylko przez jedną parę zębów. Zakładając pełną szczelność na obwodzie i powierzchniach czołowych kół, można przyjąć, że oddzielenie przestrzeni tłocznej od ssawnej następuje (rys.2) wzdłuż linii $A_1 O_1 BO_2 A_2$. Punkt przyporu B współpracujących zębów porusza się, przy obrocie kół, wzdłuż linii przyporu. Zakładając ponadto, że pompa tłoczy bez strat tarcia czynnik nieściśliwy, można przyjąć w każdej chwili równoważność energii ciśnienia i pracy mechanicznej, a więc:



Rys.2. Ideowy model pompy zębatej

$$dq_u \cdot p = M_1 d\varphi_1 + M_2 d\varphi_2 \tag{1}$$

gdzie:

dq_u - elementarna objętość wytłoczona przy obrocie kół o kąt $d\varphi_1$ oraz $d\varphi_2$,

p - ciśnienie tłoczenia,

M_1 i M_2 - momenty na kołach zębatych czynnym i biernym

Jeśli założyć, że oba koła w przestrzeni ograniczonej obrysem $A_1O_1BO_2A_2$ obciążone są jednakowo ciśnieniem tłoczenia, to przy szerokości kół b momenty na kołach będą miały wartość:

$$M_1 = \frac{pb}{2}(r_{w_1}^2 - e_1^2) \; ; \quad M_2 = \frac{pb}{2}(r_{w_2}^2 - e_2^2) \tag{2}$$

gdzie:

p - ciśnienie tłoczenia,

b - szerokość koła zębatego,

r_{w_1}, r_{w_2} - promienie kół wierzchołkowych,

e_1, e_2 - odległości punktu przyporu od środków O_1 i O_2 kół zębatych

Podstawiając równania (2) do wyrażenia (1) otrzymuje się:

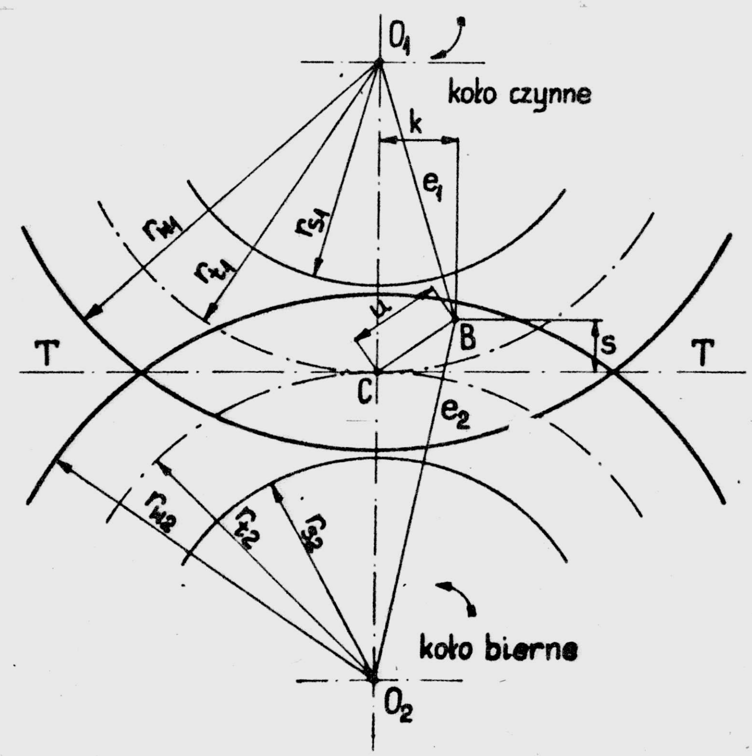
$$dq_u \cdot p = \frac{pb}{2}\left[(r_{w_1}^2 - e_1^2)d\varphi_1 + (r_{w_2}^2 - e_2^2)d\varphi_2\right] \tag{3}$$

Ponieważ $d\varphi_1 = \omega_1 dt$ oraz $d\varphi_2 = \omega_2 dt = \omega_1 \dfrac{r_{t_1}}{r_{t_2}} dt$, gdzie r_{t_1} i r_{t_2} są promieniami kół tocznych, to zależność (3) można zapisać jako:

$$dq_u \cdot p = \frac{pb}{2}\,\omega_1 \left[(r_{w_1}^2 - e_1^2) + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} (r_{w_2}^2 - e_2^2) \right] dt \qquad (4)$$

Odcinki e_1 i e_2 dają się wyznaczyć z warunków zazębienia (rys.3) jako:

$$\left.\begin{aligned} e_1^2 &= (r_{t_1} - s)^2 + k^2 = r_{t_1}^2 - 2r_{t_1} s + u^2 \\ e_2^2 &= (r_{t_2} + s)^2 + k^2 = r_{t_2}^2 + 2r_{t_2} s + u^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$



Rys.3. Schemat współpracy kół zębatych o dowolnym zarysie zęba

Po podstawieniu tych zależności do równania (4) otrzymuje się:

$$dq_u = \frac{b\omega_1}{2} \left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1} (r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) u^2 \right] dt \qquad (6)$$

skąd po podzieleniu przez dt dochodzi się do wzoru na chwilową wydajność pompy zębatej o postaci:

$$Q_u = \frac{dq_u}{dt} = \frac{b\omega_1}{2}\left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right)u^2\right] \tag{7}$$

Parametr u w tym wzorze wyraża chwilową odległość punktu przyporu B współpracującej pary zębów od bieguna zazębienia C. Wzór (7) jest zatem ważny tylko w obszarze współpracy zębów określonym długością odcinka przyporu, niezależnie od rodzaju zazębienia (zewnętrzne czy wewnętrzne) i rodzaju krzywej opisującej zarys zęba. Przy rozpatrywaniu dowolnego zarysu i rodzaju zazębienia należy uwzględnić odpowiednią wartość chwilową odciętej u oraz promienie kół tocznych r_t i wierzchołkowych r_w, ze znakiem plus dla kół uzębionych zewnętrznie lub minus dla kół uzębionych wewnętrznie.

Zależność (7) opisująca wydajność chwilową jako funkcję odciętej u pozwala wyznaczyć maksymalną i minimalną wartość wydajności chwilowej pompy zębatej.

Maksymalna wartość wydajności wystąpi wówczas, gdy u będzie najmniejsze, a więc $u = 0$ i wynosić będzie:

$$Q_{u_{max}} = Q_u \, f(u)_{u=0} \tag{8}$$

Minimalna wartość wydajności wystąpi wówczas, gdy u będzie największe a więc $u = u_{max}$ i wyniesie:

$$Q_{u_{min}} = Q_u \, f(u)_{u=u_{max}} \tag{9}$$

2.2. Wydajność właściwa, teoretyczna i średnia

Całkując wyrażenie (6) w granicach od $u = -u_{max}$ do $u = +u_{max}$ otrzymuje się objętość cieczy q_z wypartą przez koła przy obrocie o kąt odpowiadający jednej podziałce:

$$q_z = \int_{-u_{max}}^{+u_{max}} dq_u(u) \tag{10}$$

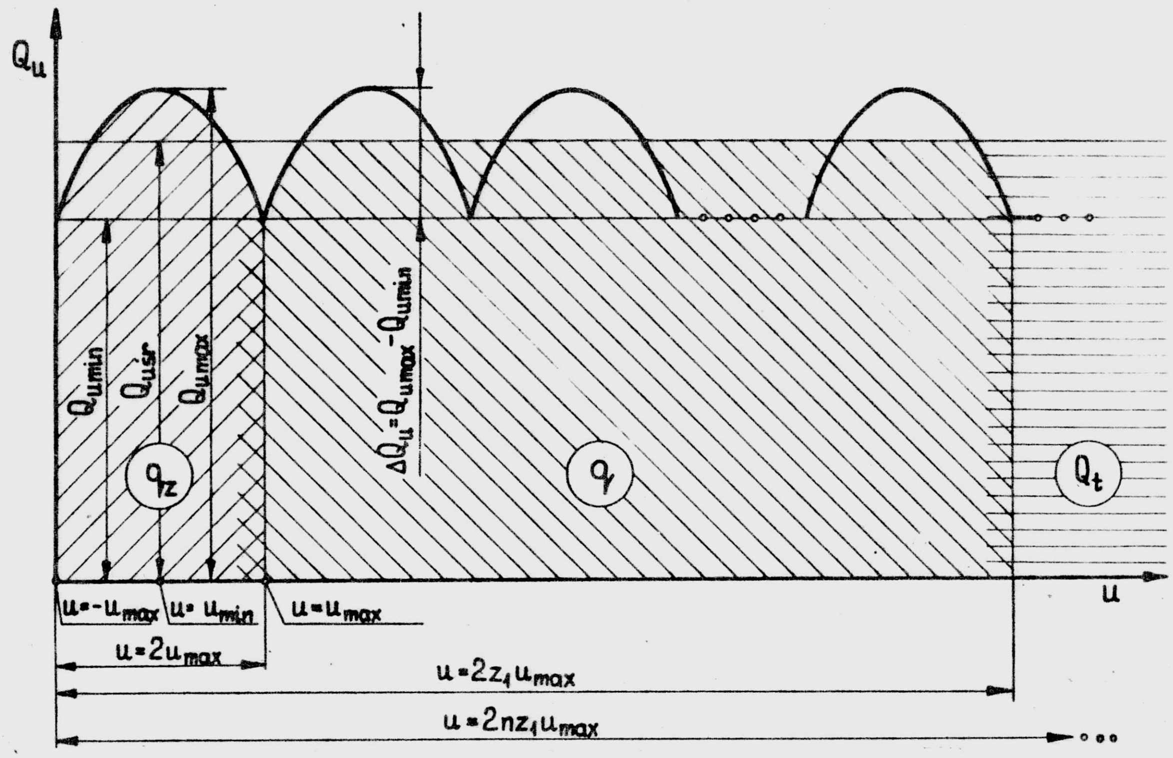
Mnożąc tę zależność przez liczbę zębów koła czynnego otrzymuje się tzw. wydajność właściwą pompy q, tzn. wydajność na jeden obrót wałka koła czynnego:

$$q = q_z \cdot z_1 = z_1 \int_{-u_{max}}^{+u_{max}} dq_u(u) \qquad (11)$$

Mnożąc zależność (11) przez prędkość obrotową wałka pompy otrzymuje się wydajność teoretyczną Q_t (bez uwzględnienia strat objętościowych) równą wydajności średniej $Q_{u_{śr}}$:

$$Q_t = Q_{u_{śr}} = q \cdot n = z_1 \cdot n \int_{-u_{max}}^{+u_{max}} dq_u(u) \qquad (12)$$

Poszczególne wielkości Q_u, $Q_{u_{max}}$, $Q_{u_{min}}$, q_z, q, Q_t oraz ich wzajemne zależności przedstawiono na rys.4.



Rys.4. Przebieg zależności $Q_u = f(u)$

Wielkości te są ważne dla wszystkich rodzajów pomp zębatych bez względu na rodzaj zazębienia i zarys zęba. Wzory te wyprowadzono przy założeniu, że liczba przyporu jest równa jedności, $\varepsilon = 1$. W rzeczywistości w pompach zębatych liczba przyporu jest nieco większa, lecz różnica ta nie ma praktycznie wpływu na ich wydajność.

2.3. Jednostkowa wydajność właściwa

W dalszej części pracy wykazano, że wydajność właściwa q określona wzorem (11) jest oprócz parametrów charakterystycznych dla danego rodzaju i zarysu zazębienia funkcją iloczynu πbm^2. Dieląc więc wyrażenie (11) stronami przez ten iloczyn otrzymuje się wzór na wydajność właściwą w postaci bezwymiarowej czyli tzw. jednostkową wydajność właściwą:

$$\frac{q}{\pi bm^2} = \frac{z_1}{\pi bm^2} \int_{-u_{max}}^{+u_{max}} dq_u(u) \qquad (13)$$

Jednostkowa wydajność właściwa jest wielkością charakterystyczną dla pompy zębatej. Mówi ona ile cieczy można przetłoczyć w danej pompie przy założeniu konkretnego rodzaju zazębienia zarysu zęba i parametrów zazębienia. Takie ujęcie wydajności ma tę dogodność, że pozwala łatwo przeanalizować wpływ głównych parametrów zazębienia na jednostkową wydajność właściwą pompy.

2.4. Współczynnik nierównomierności wydajności

Jak wynika z rys.' będącego graficzną interpretacją zależności (7), wydajność chwilowa pomp zębatych jest funkcją odległości u punktu przyporu od bieguna zazębienia lub inaczej kąta obrotu kół zębatych. Przebieg jej ma charakter pulsujący, a miarą tej pulsacji jest tzw. współczynnik nierównomierności wydajności definiowany przez większość autorów [1, 31, 41] jako:

$$\delta = \frac{Qu_{max} - Qu_{min}}{Qu_{śr}} \qquad (14)$$

Współczynnik nierównomierności wydajności jest podstawowym parametrem kryterialnym orzekającym o pracy pomp wyporowych, a więc także pomp zębatych. Określa on stopień nierównomierności wytłaczanego przez pompę do układu hydraulicznego strumienia cieczy. Nierównomierność wydajności pomp wyporowych nazywana również pulsacją wydajności jest również jedną z głównych przyczyn powstawania drgań dzwiękotwórczych elementów i układu. Ogólnie, im mniejsza jest wartość współczynnika nierównomierności wydajności pompy, tym jest ona lepsza.

Biorąc za podstawę wzory (7-14) można wyprowadzić szczegółowe zależności określające jednostkową wydajność właściwą $q/(\pi bm^2)$ oraz współczynnik nierównomierności wydajności δ pomp zębatych o różnym rodzaju zazębienia i zarysie zęba. Wzory te, zgodnie z założonymi celami pracy, stanowią podstawę do analizy wpływu rodzaju zazębienia, zarysu zęba i parametrów geometrycznych zazębienia na wydajność pomp zębatych i jej nierównomierność, oraz do wzajemnych porównań i oceny różnych typów i odmian konstrukcyjnych.

3. POMPY O ZAZĘBIENIU EWOLWENTOWYM

3.1. Wartości chwilowe wydajności: maksymalna, minimalna, średnia oraz jednostkowa właściwa

Na rys.5 przedstawiono schematycznie zazębienie ewolwentowe. Linia przyporu jest prostą przechodzącą przez biegun zazębienia i nachylona jest pod kątem α_t do stycznej TT poprowadzonej w tym punkcie do kół tocznych. Punkt przyporu B porusza się wzdłuż linii przyporu, wzór (7) zachowuje w związku z tym ważność na długości odcinka przyporu, a więc wówczas, gdy:

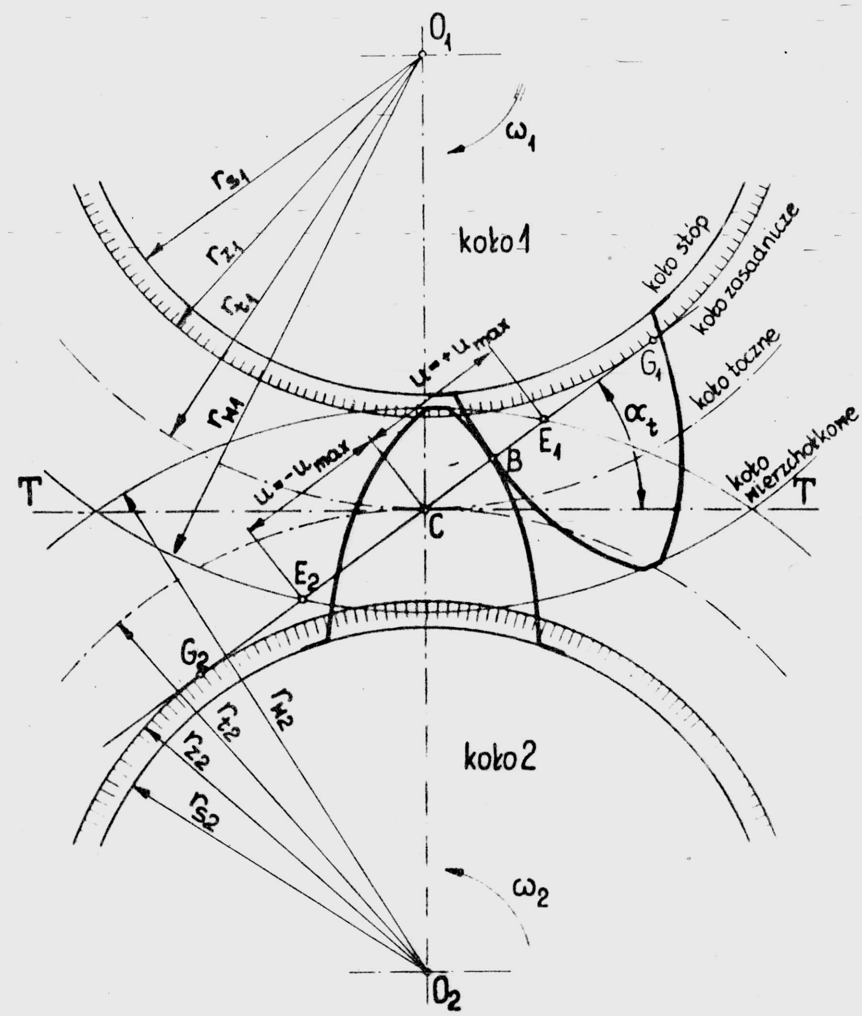
$$-\frac{t_z}{2} \leqslant u \leqslant +\frac{t_z}{2}.$$

Maksymalna wartość wydajności chwilowej wystąpi, gdy w równaniu (7) podstawi się $u = 0$, tzn. gdy punkt przyporu B znajduje się w punkcie centralnym zazębienia C i wynosi:

$$Qu_{max} = \frac{b\omega_1}{2}\left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2})\right] \qquad (15)$$

Minimalna wartość wystąpi wówczas, gdy u przybierze wartość maksymalną, tzn. gdy para zębów będzie wchodzić względnie wychodzić z zazębienia czyli, gdy $u = \pm t_z/2$. Z równania (7) otrzymuje się wtedy:

$$Qu_{min} = \frac{b\omega_1}{2}\left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right)\frac{t_z^2}{4}\right] \qquad (16)$$



Rys.5. Zazębienie ewolwentowe

Całkując wyrażenie (6) w granicach $u = \pm t_z/2$, pamiętając jednocześnie, że punkt przyporu porusza się wzdłuż linii przyporu ze stałą prędkością $r_{z1} \cdot \omega_1 = du/dt$, skąd $dt = du/r_{z1} \cdot \omega_1$, otrzymuje się objętość cieczy q_z wypartą przez koła przy obrocie o kąt odpowiadający jednej podziałce (pole pod krzywą $Q_u = f(u)$, rys.4):

$$q_z = \frac{\pi b}{z_1} \left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1} (r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \frac{t_z^2}{12} \right] \quad (17)$$

Mnożąc tę zależność przez liczbę zębów koła pędzącego otrzymuje się wydajność właściwą pompy:

$$q = q_z \cdot z_1 = \pi b \left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1} (r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \frac{t_z^2}{12} \right]$$

(18)

Teoretyczna wydajność równą wydajności średniej otrzymuje się mnożąc zależności (18) przez prędkość obrotową wałka koła czynnego:

$$Q_t = Qu_{śr} = \pi bn \left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right)\frac{t_z^2}{12}\right] \tag{19}$$

Wzór (18) można przedstawić uwzględniając znane związki dla zazębienia ewolwentowego: $r_p = mz/2$; $r_t = r_p \cos\alpha_o / \cos\alpha_t$; $r_{p_1} + r_{p_2} = a_o$; $r_{t_1} + r_{t_2} = a_r$; $a_r = a_o \cos\alpha_o / \cos\alpha_t$.
Otrzymuje się wówczas:

$$q = \pi b \left[r_{w_1}^2 + \frac{z_1}{z_2} r_{w_2}^2 - r_{p_1} \frac{a_r^2}{a_o} - (1 + \frac{z_1}{z_2}) \frac{t_z^2}{12}\right] \tag{20}$$

W najogólniejszym przypadku kół o zębach korygowanych i dowolnym współczynniku wysokości głowy zęba, a więc jeśli podstawić:

$$r_{w_1} = m\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1\right); \qquad r_{w_2} = m\left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2\right)$$

oraz $t_z = m\pi \cos\alpha_o$ otrzymuje się:

$$q = \pi bm^2 \left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1\right)^2 + \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2\right)^2 - \frac{z_1}{4}(z_1 + z_2) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{\cos^2\alpha_o}{\cos^2\alpha_t} - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\pi^2 \cos^2\alpha_o}{12}\right] \tag{21}$$

Dieląc stronami przez πbm^2 otrzymuje się wzór na wydajność właściwą w postaci bezwymiarowej, czyli tzw. jednostkową wydajność właściwą:

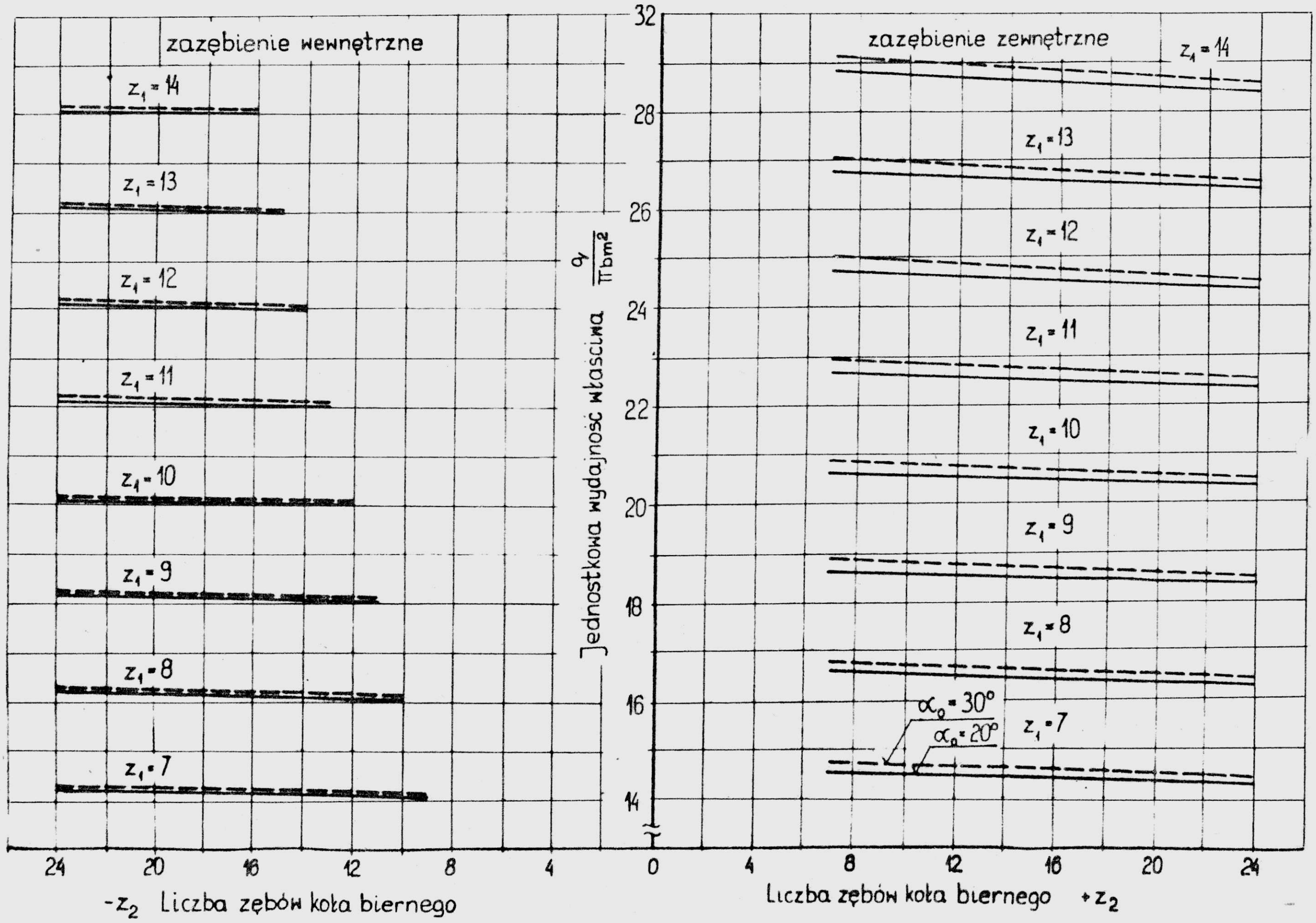
$$\frac{q}{\pi bm^2} = \left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1\right)^2 + \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2\right)^2 - \frac{z_1}{4}(z_1 + z_2) \cdot$$
$$\cdot \frac{\cos^2\alpha_o}{\cos^2\alpha_t} - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\pi^2 \cos^2\alpha_o}{12} \tag{22}$$

Wzory te są ogólnie ważne zarówno dla pomp o zazębieniu zewnętrznym jak i wewnętrznym. W przypadku zazębienia wewnętrznego należy przyjmować, ze znakiem minus wartości z_2, r_{w_2} oraz centrale a_r i a_o.

3.2. Zależność wydajności od podstawowych wielkości geometrycznych kół

Z analizy wzoru (22) wynika, że na wydajność mają wpływ:
- liczby zębów koła czynnego i biernego (z_1, z_2),
- nominalny kąt przyporu (α_0),
- współczynniki wysokości zębów koła czynnego i biernego (y_1, y_2),
- współczynniki korekcji zębów koła czynnego i biernego (x_1, x_2).

Wykresy ilustrujące wpływ tych parametrów na jednostkową wydajność właściwą pokazano na rysunkach 6–8.

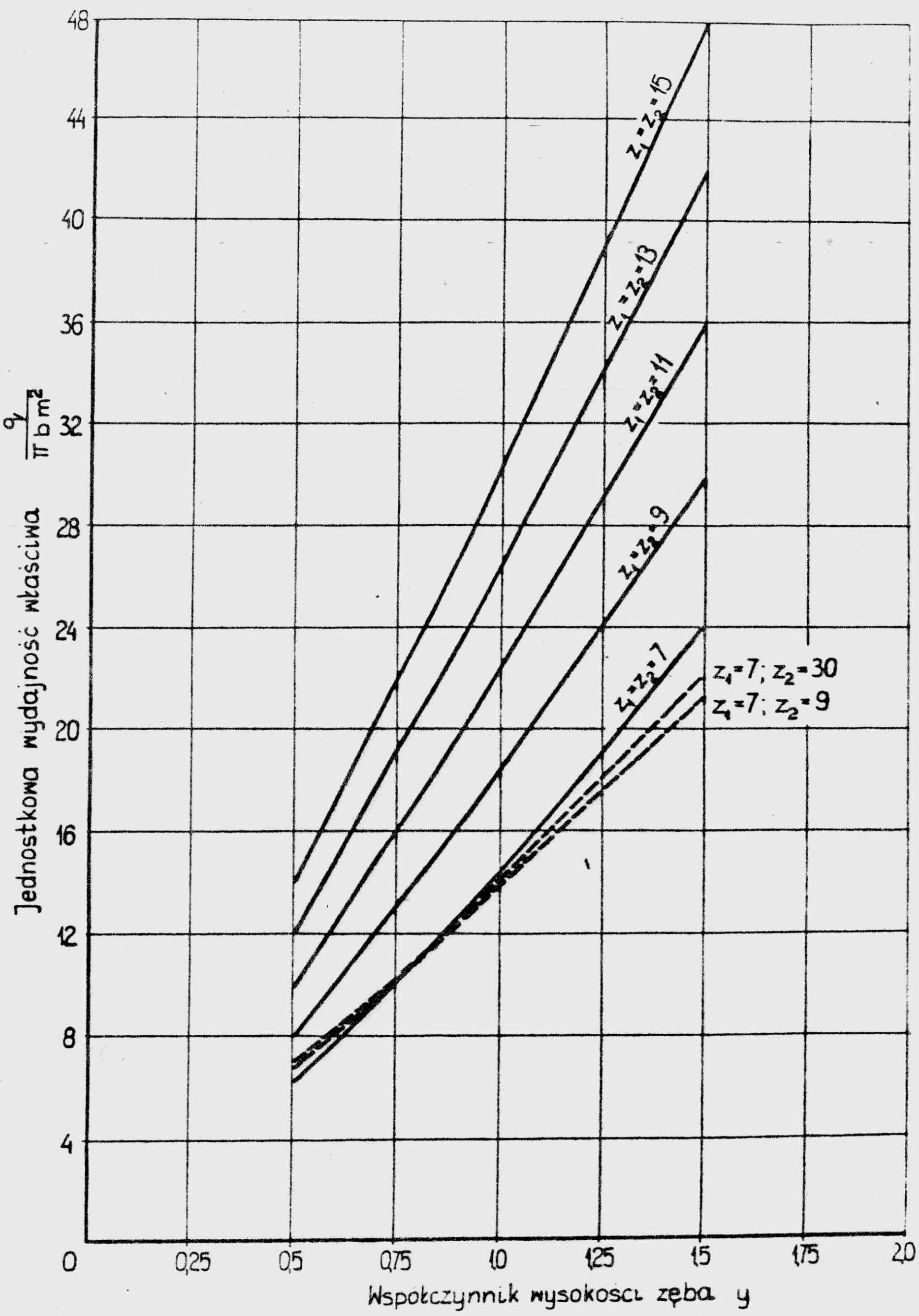


Rys.6. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1, jako parametru

Na rys.6 przedstawiono przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(z_2)$ dla z_1 jako parametru, przyjmując współczynniki wysokości zęba $y_1 = y_2 = 1$. Linie ciągłe odnoszą się do kąta przyporu $\alpha_o = 20^o$, a kreskowe do $\alpha_o = 30^o$. Z rysunku widać, że wpływ liczby zębów koła czynnego (z_1) jest wielokrotnie większy niż liczby koła biernego (z_2). Przykładowo, dla zazębienia zewnętrznego wzrost liczby zębów koła czynnego (z_1) z 10 do 14 przy ustalonej liczbie zębów koła biernego (z_2) wynoszącej 10 powoduje wzrost jednostkowej wydajności właściwej o ok. 40% w stosunku do wartości początkowej, podczas gdy taki sam wzrost liczby zębów (z_2) przy ustalonej liczbie zębów (z_1) wynoszącej 10 praktycznie nie wywołuje zmian jednostkowej wydajności właściwej. Z rysunku widać także, że zwiększenie kąta przyporu wpływa nieznacznie na wzrost wydajności właściwej oraz to, że wzrost ten jest dla pomp o zazębieniu zewnętrznym nieco większy niż dla pomp o zazębieniu wewnętrznym.

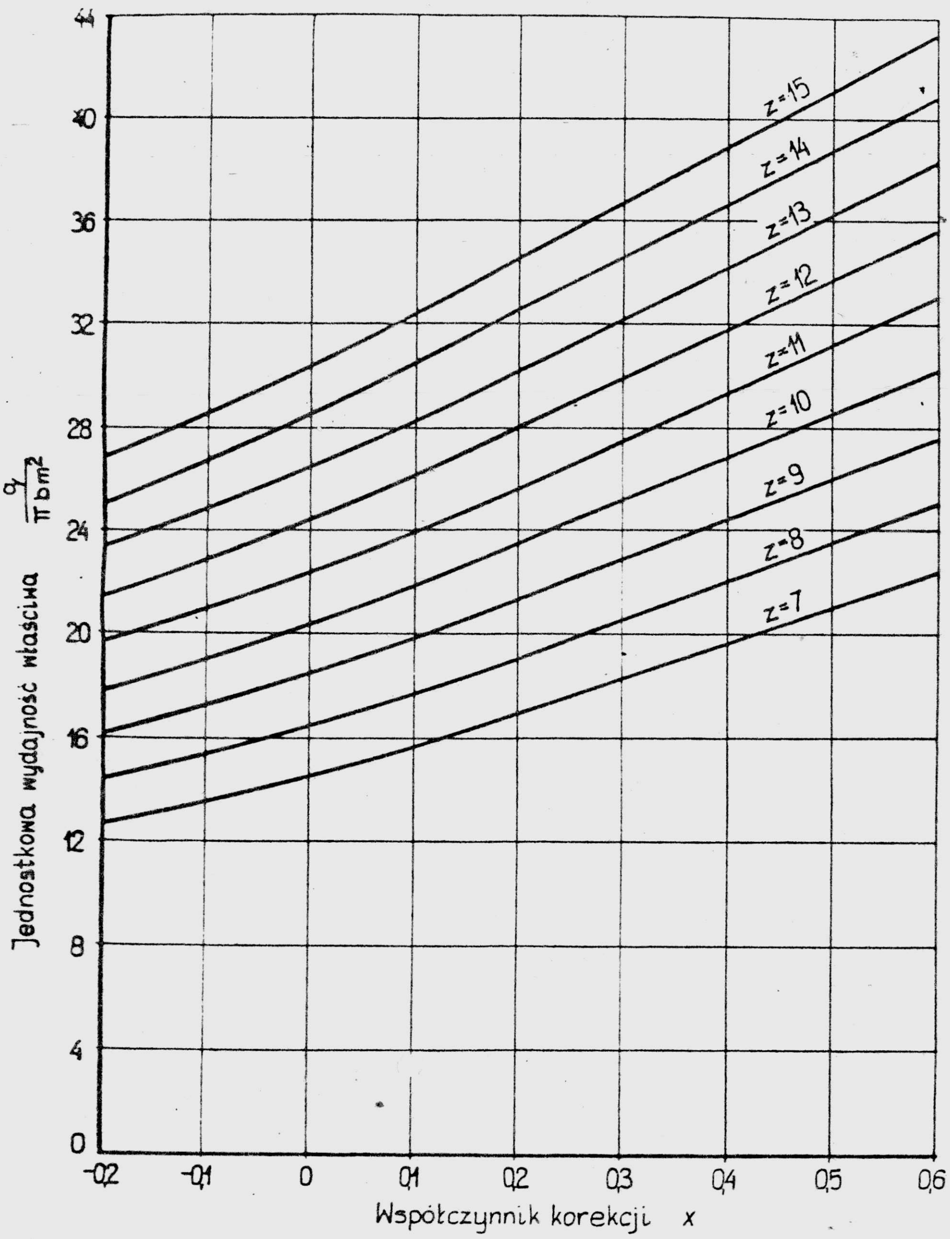
Na rys.7 pokazano przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(y)$ dla wybranych liczb zębów, niekorygowanych $(x_1 = x_2 = 0)$. Współczynnik wysokości zęba, jak widać z rysunku, wpływa zasadniczo na wydajność pompy. Przykładowo dla zazębienia zewnętrznego i liczb zębów koła czynnego i biernego $z_1 = z_2 = 9$ wzrost współczynnika wysokości zęba od wartości $y = 0,5$ do $y = 1,5$ wywołuje 3,5 krotny wzrost wydajności właściwej pompy. Koła o zębach wysokich mają większe pola powierzchni wrębów, a więc większa jest ich objętość wyporowa. Rys.7 jest również potwierdzeniem faktu, że decydującą rolę w odniesieniu do wydajności pomp zębatych odgrywa liczba zębów koła czynnego (z_1).

Na rys.8 pokazano przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(x)$, dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i wybranych liczb zębów $z_1 = z_2 = z$ przy przyjęciu współczynników przesunięcia zarysu $x_1 = x_2 = x$ zmieniających się od $-0,2$ do $+0,6$. Współczynnik wysokości zęba przyjęto przy tym $y_1 = y_2 = y = 1$, zaś kąt przyporu $\alpha_o = 20^o$. Jak widać z wykresu zwiększanie współczynnika korekcji x powoduje zwiększanie wydajności pompy. Przykładowo, dla liczb zębów $z_1 = z_2 = 10$ wzrost współczynnika korekcji z $x = 0$ do $x = 0,5$ powoduje wzrost wydajności właściwej o ok. 40% w stosunku do wartości początkowej. Porównując przebiegi na rys.7 i 8 widać, że współczynnik wysokości zęba ma znacznie większy wpływ na wydajność właściwą pomp od współczynnika korekcji zęba. Fakt ten tłumaczy się tym, że przy korekcji koła wierzchołkowego i dna wrębów przesuwają się o tę samą wartość, a objętość wrębu wzra-



Rys.7. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od współczynnika wysokości zęba y, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Linie ciągłe - pompy o zazębieniu zewnętrznym, linie kreskowe - pompy o zazębieniu wewnętrznym

sta znacznie mniej niż w przypadku zwiększenia wysokości zęba o tę samą wartość, kiedy średnica koła dna wrębów pozostaje niezmieniona, a rośnie średnica koła wierzchołkowego.



Rys.8. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od współczynnika korekcji x dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i wybranych liczbach zębów $z_1 = z_2 = z$

3.3. Współczynnik nierównomierności wydajności

Podstawiając do równania (14) zależności (15), (16), (19) otrzymuje się:

$$\delta = \frac{\pi^2 m^2 \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \cos^2 \alpha_o}{4 \left[r_{w_1}^2 + \frac{z_1}{z_2} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{t_z^2}{12} \right]} \qquad (23)$$

Dla najogólniejszego przypadku zębów korygowanych i o dowolnej ich wysokości, po podstawieniu ogólnie znanych związków dla zazębienia ewolwentowego wzór (23) przyjmuje postać:

$$\delta = \frac{\pi^2 \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \cos^2\alpha_o}{4\left[\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + y_1\right)^2 + \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2} + x_2 + y_2\right)^2 - \frac{z_1}{4}(z_1 + z_2)\frac{\cos^2\alpha_o}{\cos^2\alpha_t} - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{\pi^2}{12}\cos^2\alpha_o\right]} \tag{24}$$

Również i ten wzór jest ważny dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym. Dokładną wartość tocznego kąta przyporu α_t wyznacza się ze znanej [26] zależności:

$$\mathrm{inv}\alpha_t = \frac{2(x_1 + x_2)\mathrm{tg}\alpha_o}{(z_1 + z_2)} + \mathrm{inv}\alpha_o \tag{25}$$

3.4. Zależność współczynnika nierównomierności wydajności od podstawowych wielkości geometrycznych kół

Z analizy wzoru (24) wynika, że współczynnik nierównomierności wydajności pompy zależy od:

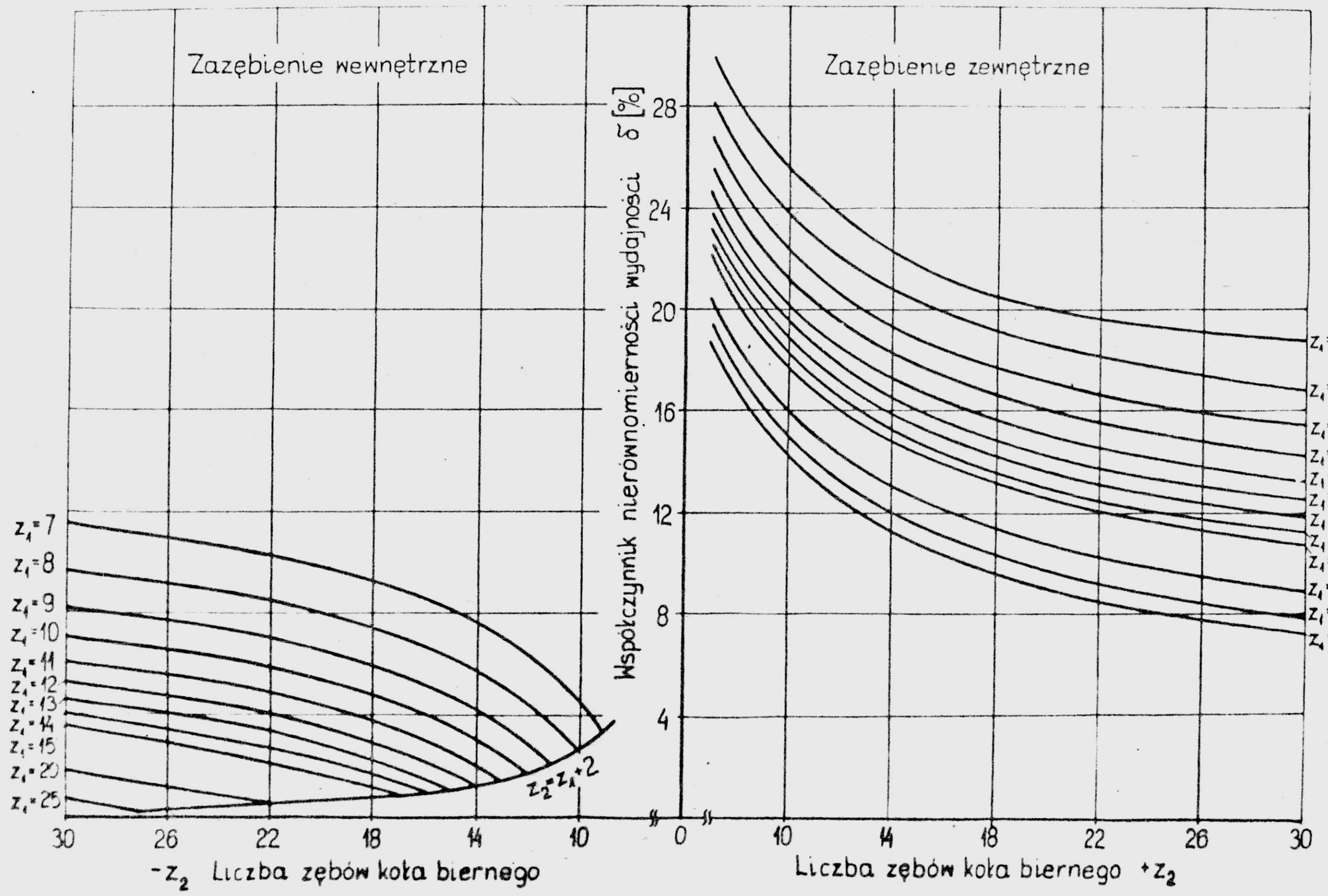
- liczb zębów koła czynnego i biernego (z_1, z_2),
- nominalnego kąta przyporu (α_o),
- współczynników wysokości zębów koła czynnego i biernego (y_1, y_2),
- współczynników korekcji zębów koła czynnego i biernego (x_1, x_2).

Wykresy ilustrujące wpływ tych parametrów na współczynnik nierównomierności wydajności podano na rys.9-14.

Przyjmując koła o zębach normalnych $(y_1 = y_2 = 1)$ i niekorygowanych $(x_1 = x_2 = 0)$ oraz kąt przyporu $\alpha_o = 20^o$ otrzymuje się ze wzoru (24):

$$\delta = \frac{\pi^2 \cos^2\alpha_o}{4\left[1 + 2\,\frac{z_1\, z_2}{z_1 + z_2} - \frac{\pi^2}{12}\cos^2\alpha\right]} \tag{26}$$

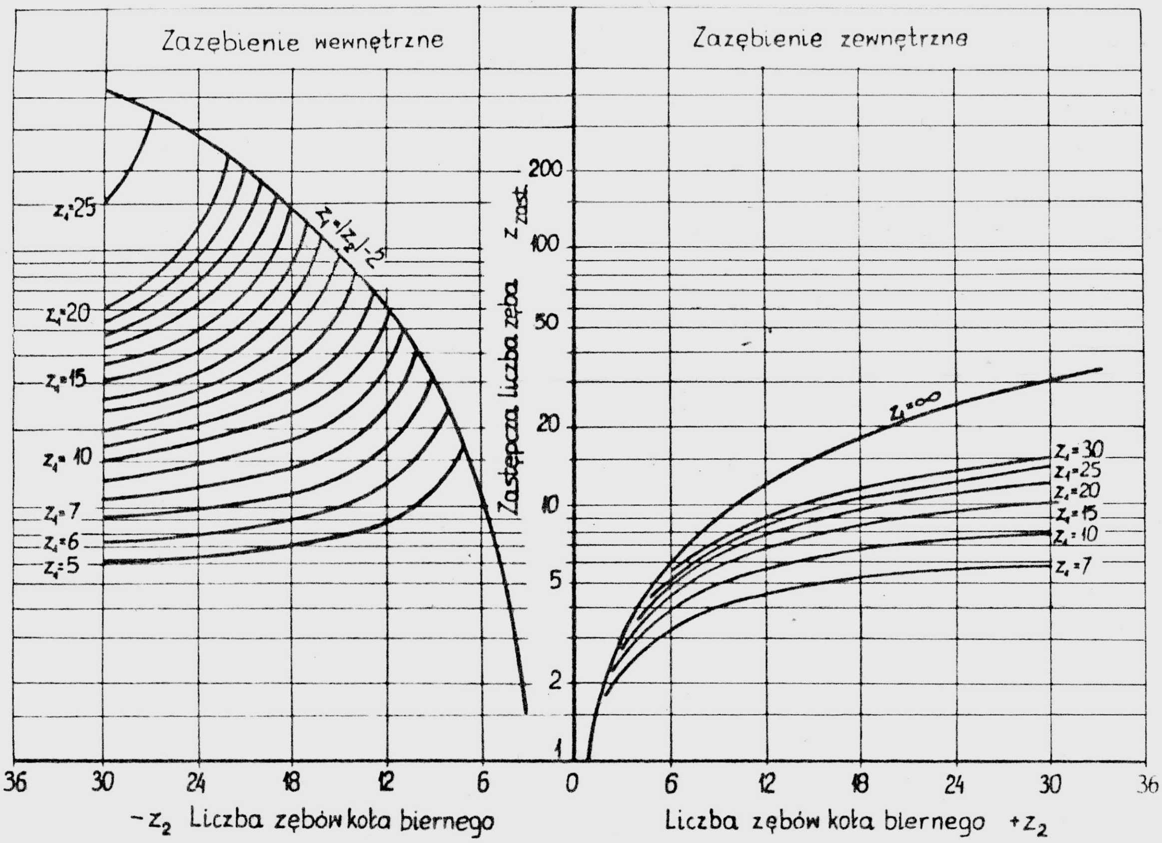
Na rys.9 pokazano przebieg zależności $\delta = f(z_2)$ dla z_1, jako parametru, przy przyjęciu współczynników wysokości zęba $y_1 = y_2 = 1$. Dla pomp o zazębieniu zewnętrznym zwiększenie liczby zębów każdego z kół powoduje zmniejszanie wartości współczynnika δ.



Rys.9. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1, jako parametru

Zasadniczo różne zarówno ilościowo, jak i jakościowo przebiegi zależności $\delta = f(z_2)$ otrzymuje się dla kół o zazębieniu wewnętrznym. W tym wypadku wzrost liczby zębów z_2, przy określonej liczbie z_1, wiąże się ze wzrostem współczynnika nierównomierności wydajności δ. Maksymalne wartości współczynnika nierównomierności wydajności są w tym przypadku znacznie mniejsze od wartości występujących przy stosowanych praktycznie liczbach zębów kół o zazębieniu zewnętrznym. Ogólnie dla zazębienia zewnętrznego i liczb zębów $z_1 = z_2 = z = 7\text{-}25$ współczynnik ten zmienia się w granicach $\delta = 30\text{-}8\%$, zaś dla zazębienia wewnętrznego i liczb zębów $z_1 = 7\text{-}25$ oraz $z_2 = z_1 + 2$ współczynnik ten wynosi $\delta = 1\text{-}12\%$.

Ze wzoru (26) wynika, że współczynnik nierównomierności wydajności zależy od wyrażenia $z_1 z_2/(z_1 + z_2)$ występującego w mianowniku, które można określić [41] jako zastępczą liczbę zębów z_{zast}. Zależność $z_{zast} = f(z_2)$ przy z_1 jako parametrze ilustruje wykres na rys.10.



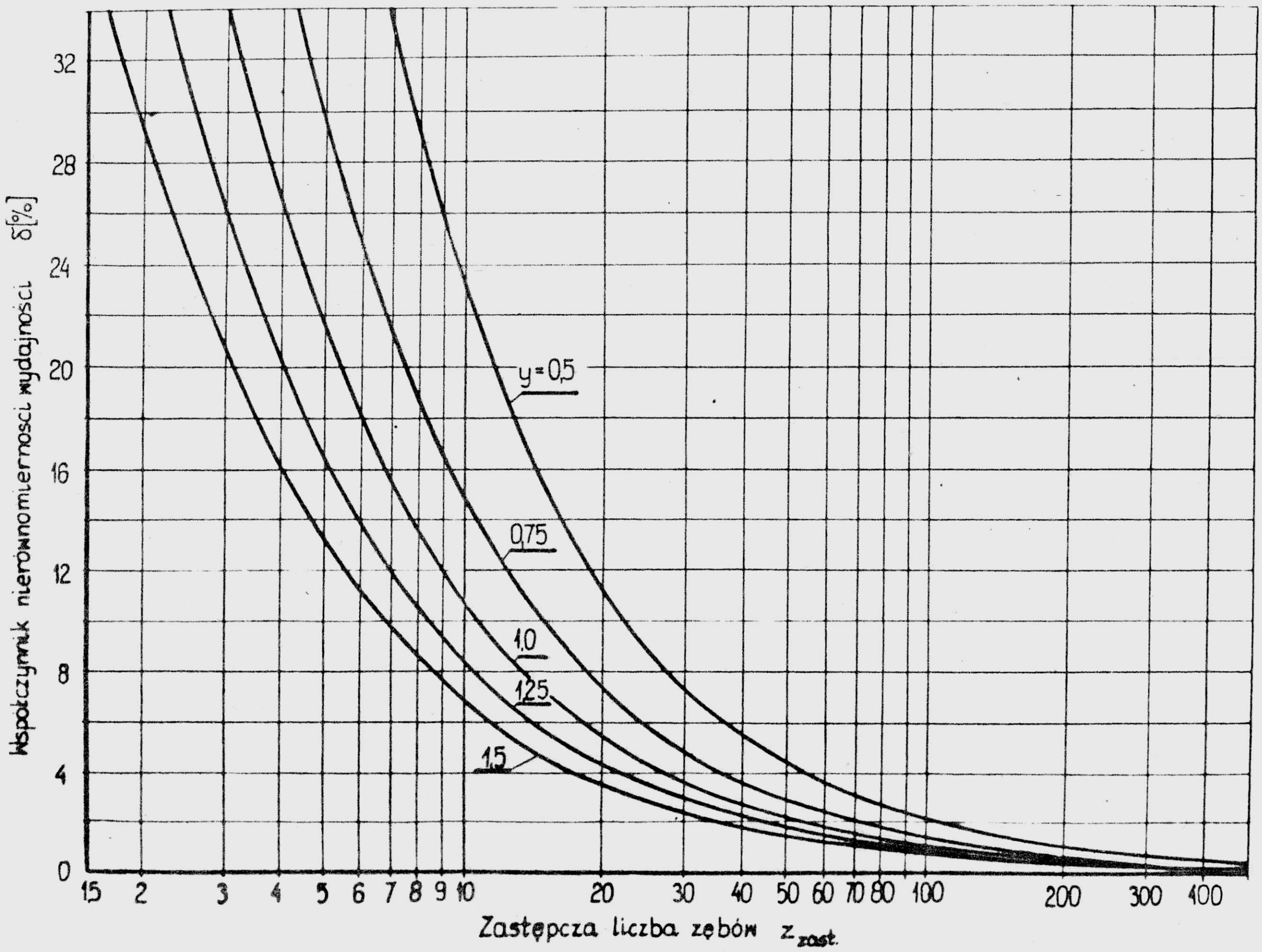
Rys.10. Przebieg zależności zastępczej liczby zębów z_{zast} od liczby zębów koła biernego z_2 dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1, jako parametru

Prawa strona wykresu odnosi się do zazębienia zewnętrznego dla którego $z_{zast} = z_1 \, z_2/(z_1 + z_2)$ lewa do zazębienia wewnętrznego zgodnie ze wzorem $z_{zast} = z_1 \, z_2/(z_1 - z_2)$.

Posługując się pojęciem zastępczej liczby zębów można przedstawić zależność współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika wysokości zęba y dla pomp o kołach z zębami niekorygowanymi i przy kącie przyporu $\alpha_o = 20^o$ jako:

$$\delta = \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_o}{4 \left[y^2 + 2y z_{zast} - \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha_o}{12} \right]} \qquad (27)$$

Obrazem graficznym tej zależności jest wykres na rys.11. Z wykresu widać, że im wyższe są zęby tym mniejsze wartości przyjmuje współczynnik nierównomierności wydajności pomp. Zmiana wartości δ przy większych wartościach liczbowych z_{zast}, co jak wynika z rys.10, ma miejsce dla pomp o zazębieniu wewnętrznym, jest mniejsza niż dla zazębień zewnętrznych o mniejszej wartości z_{zast}.

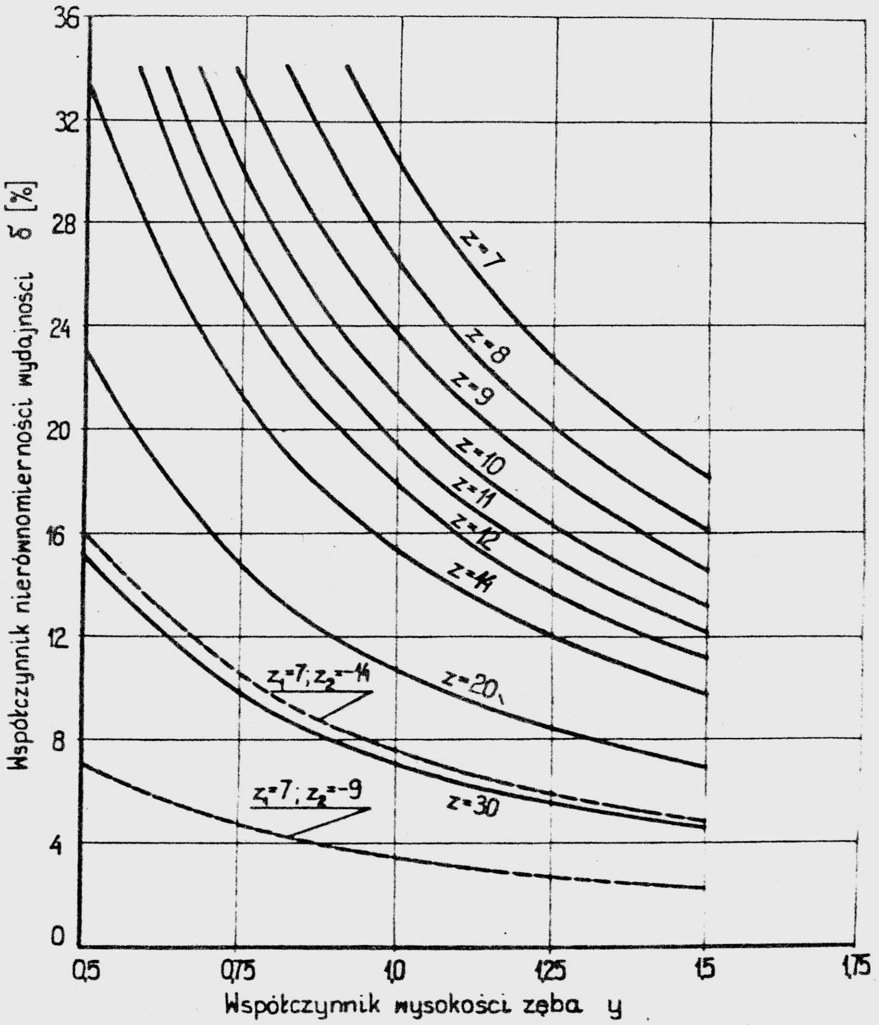


Rys.11. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od zastępczej liczby zębów z_{zast}, dla różnych wartości współczynnika wysokości zęba y

Krzywa $y = 1$ obrazuje syntetycznie wszystkie wartości podane na wykresie rys.9. Wprowadzenie więc zastępczej liczby zębów jest do analizy współczynnika nierównomierności wydajności bardzo korzystne.

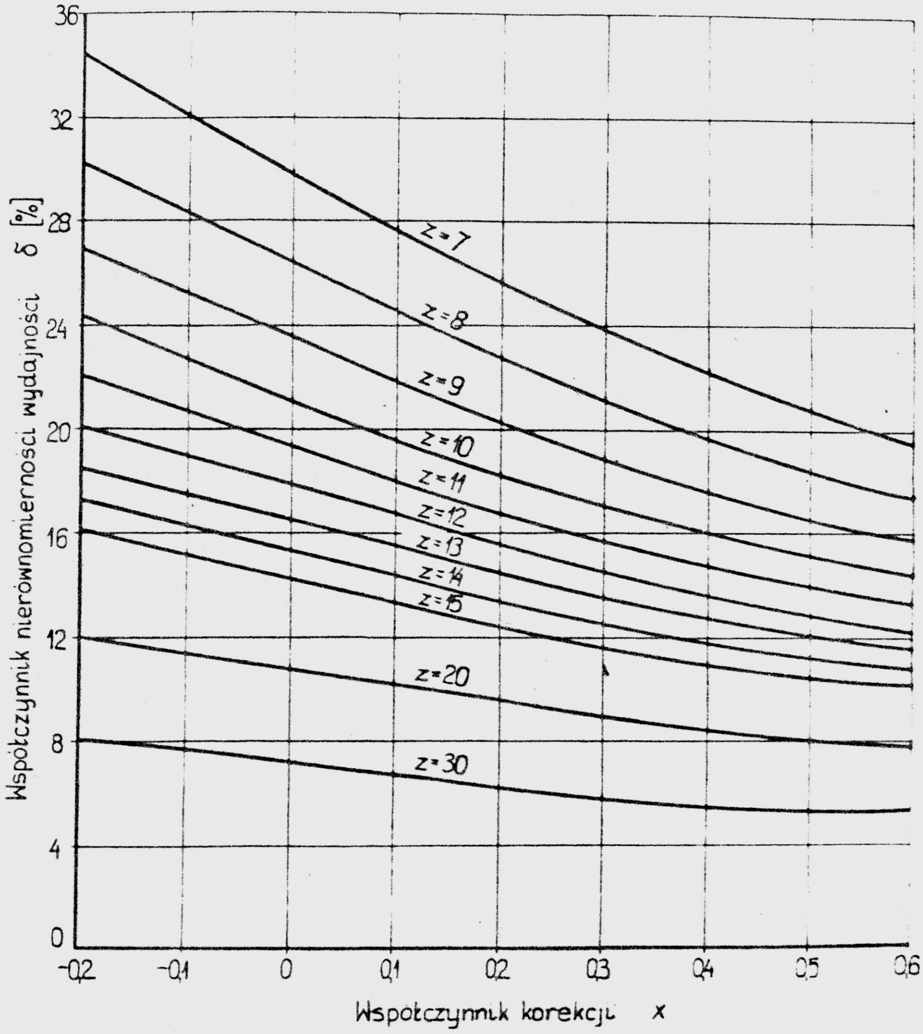
Na rys.12 przedstawiono przebieg zależności $\delta = f(y)$ dla wybranych liczb zębów niekorygowanych $(x_1 = x_2 = 0)$. Dla wszystkich tych konstrukcji przyjęto tę samą wartość kąta przyporu $\alpha_0 = 20^o$. Z wykresu wynika, że zwiększenie y, szczególnie dla pomp o zazębieniu zewnętrznym przy małej liczbie zębów, stwarza możliwość zasadniczego zmniejszenia wartości współczynnika δ. Przykładowo dla liczby zębów $z_1 = z_2 = z = 7$ zwiększanie współczynnika wysokości y od wartości 1,0 do 1,5 powoduje spadek współczynnika δ do ok. 60% wartości początkowej. W przypadku pomp o zazębieniu wewnętrznym wpływ wartości y na wartość współczynnika δ jest znacznie mniejszy. Rozpatrując pompę o liczbach zębów $z_1 = 7$ $z_2 = -14$ zauważa się, że zmiana współczynnika wysokości zęba y w tych samych granicach $y = 1-1,5$

powoduje spadek współczynnika δ o ok. 40% w stosunku do wartości początkowej. W pompach tych, szczególnie wówczas, gdy różnica liczb zębów obu kół jest niewielka, stosuje się raczej zęby niskie, aby umożliwić współpracę kół.



Rys.12. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika wysokości zęba y, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Linie ciągłe - pompy o zazębieniu zewnętrznym, linie kreskowe - pompy o zazębieniu wewnętrznym

Rys.13 przedstawia przebieg zależności $\delta = f(x)$, dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i wybranych liczb zębów $z_1 = z_2 = z$ przy współczynniku korekcji $x_1 = x_2 = x$. Współczynnik wysokości zęba przyjęto przy tym $y_1 = y_2 = y = 1$, zaś kąt przyporu $\alpha_0 = 20^o$. Zwiększanie współczynnika korekcji x powoduje spadek współczynnika nierównomierności wydajności δ. Przykładowo dla liczby zębów $z_1 = z_2 = z = 10$ zwiększanie współczynnika korekcji x od wartości $x = 0$

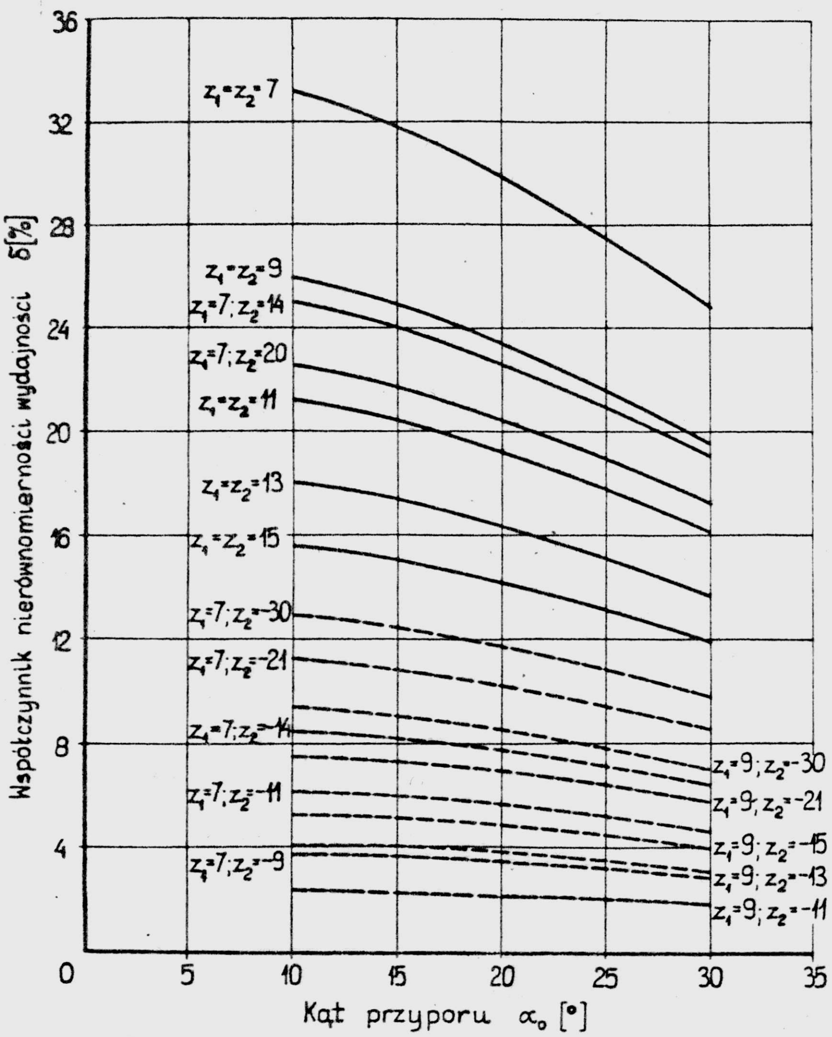


Rys.13. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika korekcji x dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i wybranych liczbach zębów $z_1 = z_2 = z$.

do $x = 0,6$ powoduje zmniejszenie współczynnika δ o ok. 40% w odniesieniu do wartości początkowej.

Wpływ przesunięcia zarysu zęba na wartość współczynnika δ jest znacznie mniejszy niż miało to miejsce w przypadku współczynnika wysokości zęba (rys.12). Ponieważ charakter wpływu obu czynników jest taki sam, można więc, dobierając je odpowiednio, uzyskać zmianę współczynnika δ w szerszym zakresie. Można również jak proponuje się w pracy [11], dobierać je tak, aby wartość ich sumy była zawsze jednakowa. Można uzyskać w ten sposób również niezmienność średnicy koła wierzchołkowego.

Na rys.14 pokazano przebieg zależności $\delta = f(\alpha_0)$ dla wybranych liczb zębów z_1, z_2 dla ustalonej wartości współczynnika wysokości zębów $y_1 = y_2 = 1$. Z wykresu widać, że wzrost kąta przyporu powoduje zmniejszenie wartości współczynnika δ we wszystkich konstrukcjach pomp. Przykładowo dla liczby zębów $z_1 = z_2 = z = 9$ zwiększanie kąta przyporu α od wartości 20^o do 30^o powoduje spadek współczynnika δ o ok. 15% w stosunku do wartości początkowej. Wpływ ten jest większy dla pomp o zazębieniu zewnętrznym, szczególnie w przypadku kół o małej liczbie zębów. Dla pomp o zazębieniu wewnętrznym, zwłaszcza przy małej różnicy liczb zębów kół pędzonego i pędzącego, wpływ wartości α_o na wartość δ jest niewielki.



Rys.14. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od kąta przyporu α_o dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. linie ciągłe - pompy o zazębieniu zewnętrznym, linie kreskowe - pompy o zazębieniu wewnętrznym

4. POMPY O ZAZĘBIENIU CYKLOIDALNYM

4.1. Wartości chwilowe wydajności: maksymalna, minimalna, średnia oraz jednostkowa właściwa

Schemat zazębienia cykloidalnego pokazano na rys.15. Z zasady współpracy kół zębatych wynika, że

$$\overset{\frown}{A_1C} = \overset{\frown}{E_1C}$$

Z warunków geometrycznych zazębienia cykloidalnego otrzymuje się:

$$r_{t_1} \cdot \alpha_1 = \varrho_1 \cdot \beta_1$$

oraz:

$$\frac{u}{2\varrho_1} = \sin\frac{\beta_1}{2}$$

skąd:

$$u = 2 \cdot \varrho_1 \sin\left(\frac{r_{t_1}}{2\varrho_1}\alpha_1\right)$$

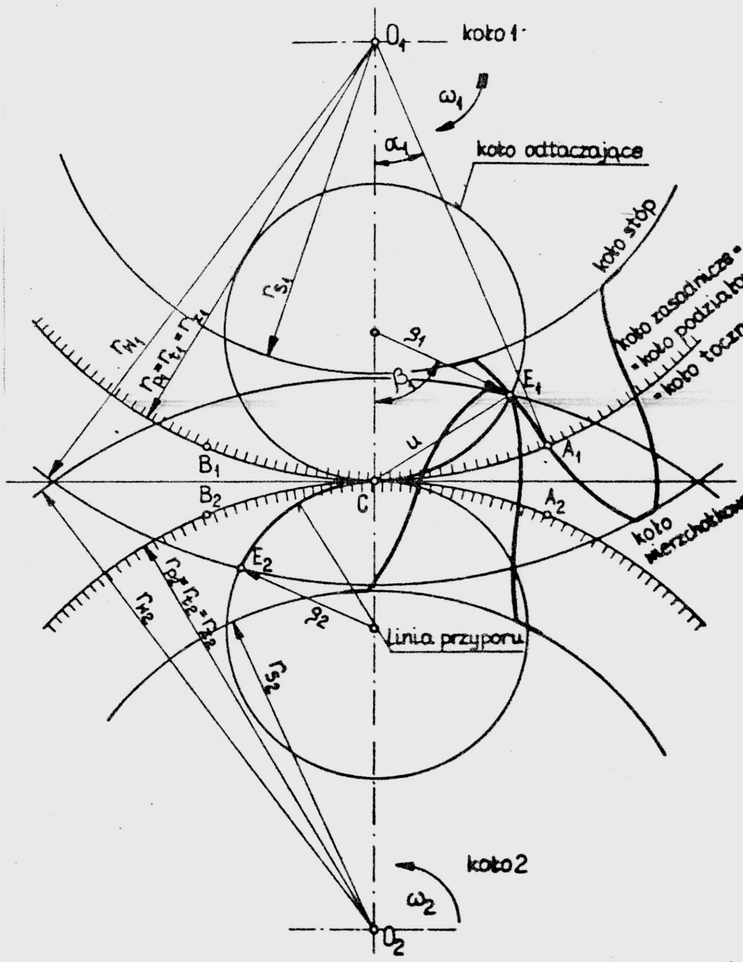
W celu zapewnienia płynnej współpracy kół oraz niedopuszczenia do nagłych zmian wydajności linia przyporu musi być symetryczna względem centrali O_1O_2, czyli promienie kół odtaczających muszą być sobie równe, a więc $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Po wyprowadzeniu współczynnika kształtu zęba $R_1 = r_{t_1}/\varrho_1$ otrzymuje się ostatecznie wzór na odległość punktu przyporu współpracujących kół zębatych o zarysie cykloidalnym od bieguna zazębienia C w postaci:

$$u = 2\,\varrho_1 \sin\left(\frac{R_1}{2}\alpha_1\right) \tag{28}$$

Z uwagi na to, że linia przyporu składa się z dwóch symetrycznych łuków, kąt α_1, określający obecnie położenie punktu przyporu, zmienia się w granicach:

$$-\frac{\alpha_{z_1}}{2} < \alpha_1 < +\frac{\alpha_{z_1}}{2}$$

przy czym: $\alpha_{z_1} = 2\pi/z_1$ jest kątem odpowiadającym podziałce zasadniczej t_z.



Rys.15. Zazębienie cykloidalne

Podstawiając zależność (28) do wzoru (7) otrzymuje się wydajność chwilową pompy o zazębieniu cykloidalnym:

$$Q_u = \frac{dq_u}{dt} = \frac{b \cdot \omega_1}{2} \left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) 4 \frac{r_{t_1}^2}{R_1^2} \sin^2\left(\frac{R_1}{2}\alpha_1\right)\right] \quad (29)$$

Ze wzoru tego wynika, że maksymalna wartość wydajności chwilowej osiągnięta zostanie wówczas, gdy $\alpha_1 = 0$, czyli gdy punkt przyporu znajduje się w punkcie centralnym C, a więc

$$Q_{umax} = \frac{b \cdot \omega_1}{2} \left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) \right] \quad (30)$$

Minimalna wartość wydajności chwilowej wystąpi dla $\alpha_1 = \pm \alpha_{z_1}/2$, czyli wówczas, gdy para współpracujących zębów będzie wchodzić lub wychodzić z zazębienia, a zatem:

$$Q_{umin} = \frac{b \cdot \omega_1}{2} \left[r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) 4 \frac{r_{t_1}^2}{R_1^2} \sin^2\left(\frac{R_1 \cdot \alpha_{z_1}}{4}\right)\right] \quad (31)$$

Całkując wyrażenie (29) w granicach $\pm\alpha_{z_1}/2$ oraz podstawiając jednocześnie $dt = d\alpha_1/\omega_1$, otrzymuje się objętość cieczy q_{z_1} wypartą przy obrocie o kąt α_{z_1}:

$$q_{z_1} = \frac{b \cdot \alpha_{z_1}}{2} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \left[\frac{2r_{t_1}^2}{R_1^2} + \frac{4r_{t_1}^2}{R_1^3 \cdot \alpha_{z_1}} \sin\left(R_1 \frac{\alpha_{z_1}}{2}\right)\right]\right\} \quad (32)$$

Postępując wg zasad podanych w rozdziale 2 otrzymuje się wzory na wydajność właściwą q oraz wydajność teoretyczną Q_t, równą wydajności średniej $Q_{uśr}$:

$$q = q_{z_1} \cdot z_1 = \frac{b z_1 \alpha_{z_1}}{2} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \left[\frac{2r_{t_1}^2}{R_1^2} + \frac{4r_{t_1}^2}{R_1^3 \alpha_{z_1}} \sin\left(R_1 \frac{\alpha_{z_1}}{2}\right)\right]\right\} \quad (33)$$

$$Q_t = Q_{uśr} = \frac{b n z_1 \alpha_{z_1}}{2} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \left[\frac{2r_{t_1}^2}{R_1} + \frac{4r_{t_1}^2}{R_1^3 \alpha_{z_1}} \sin\left(R_1 \frac{\alpha_{z_1}}{2}\right)\right]\right\} \quad (34)$$

Podstawiając do wzoru (33) znane związki:

$$r_{w_1} = m\left(\frac{z_1}{2} + y_1\right), \qquad r_{w_2} = m\left(\frac{z_2}{2} + y_2\right) \quad (35)$$

$$r_{t_1} = \frac{m \cdot z_1}{2}, \qquad r_{t_2} = \frac{m \cdot z_2}{2} \quad (36)$$

po przekształceniach otrzymuje się zależność na jednostkową wydajność właściwą pompy zębatej o zazębieniu cykloidalnym w postaci bezwymiarowej,

$$\frac{q}{\pi b m^2} = \left(\frac{z_1}{2} + y_1\right)^2 + \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2} + y_2\right)^2 - \frac{z_1}{4}(z_1 + z_2) - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\left[\frac{z_1^2}{2R_1^2} + \frac{z_1^3}{R_1^3 \cdot 2\pi} \sin\left(\frac{R_1 \cdot \pi}{z_1}\right)\right] \quad (37)$$

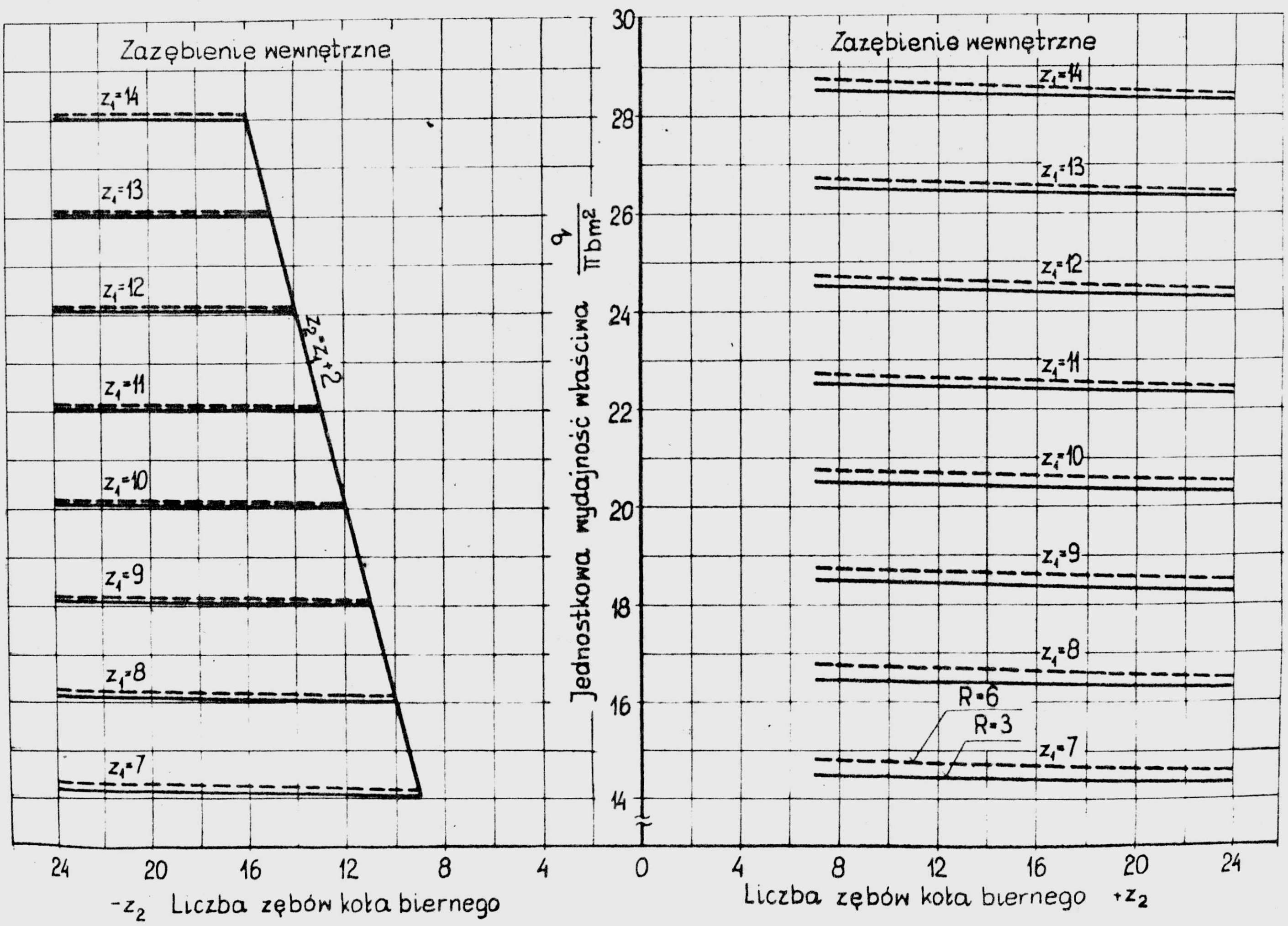
W przypadku zazębienia wewnętrznego uwzględnić należy znak minus w odniesieniu do liczby zębów koła pędzonego z_2.

4.2. Zależność wydajności od podstawowych wielkości geometrycznych kół

Z analizy wzoru (37) wynika, że na wydajność wpływają:
- liczby zębów koła czynnego i biernego (z_1, z_2),
- współczynniki wysokości zęba koła czynnego i biernego (y_1, y_2),
- współczynnik kształtu zęba (R_1).

Wykresy ilustrujące wpływ tych parametrów na jednostkową **wydajność** właściwą podano na rys.16-18.

Na rys.16 przedstawiono przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(z_2)$, gdzie z_1 jest parametrem. Współczynnik wysokości zęba przyjęto $y_1 = y_2 = 1$. Linie ciągłe odnoszą się do współczynnika kształtu $R_1 = 3$, zaś kreskowe $R_1 = 6$.

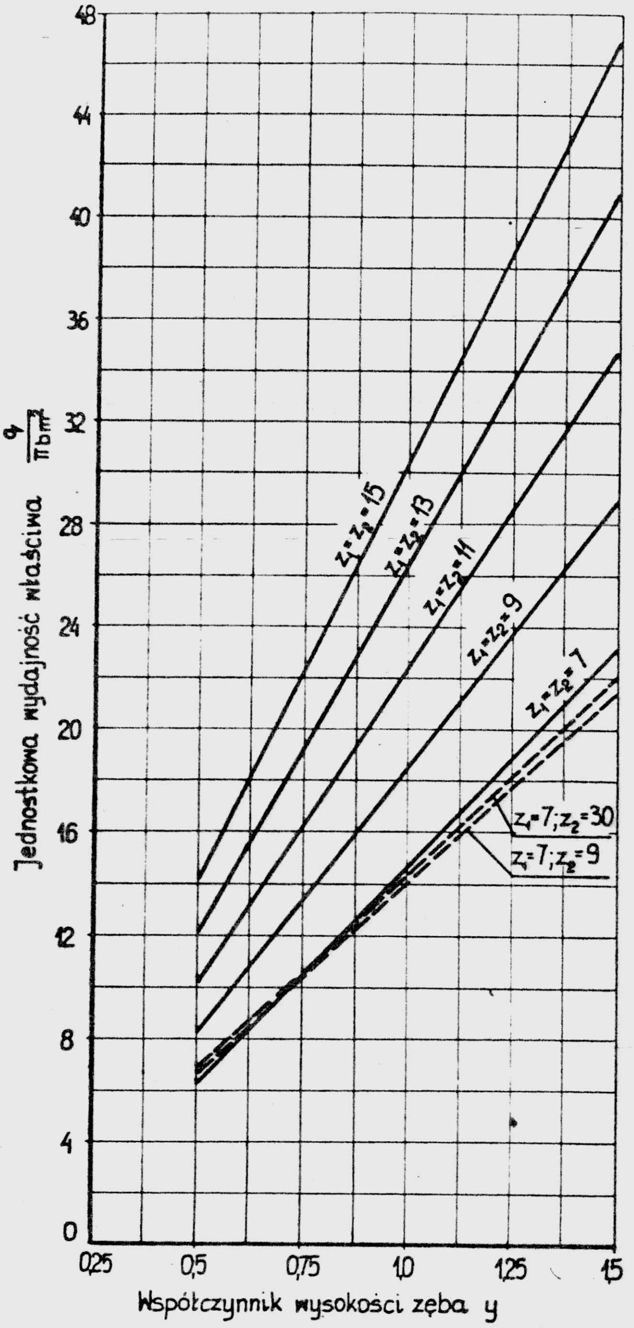


Rys.16. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1, jako parametru

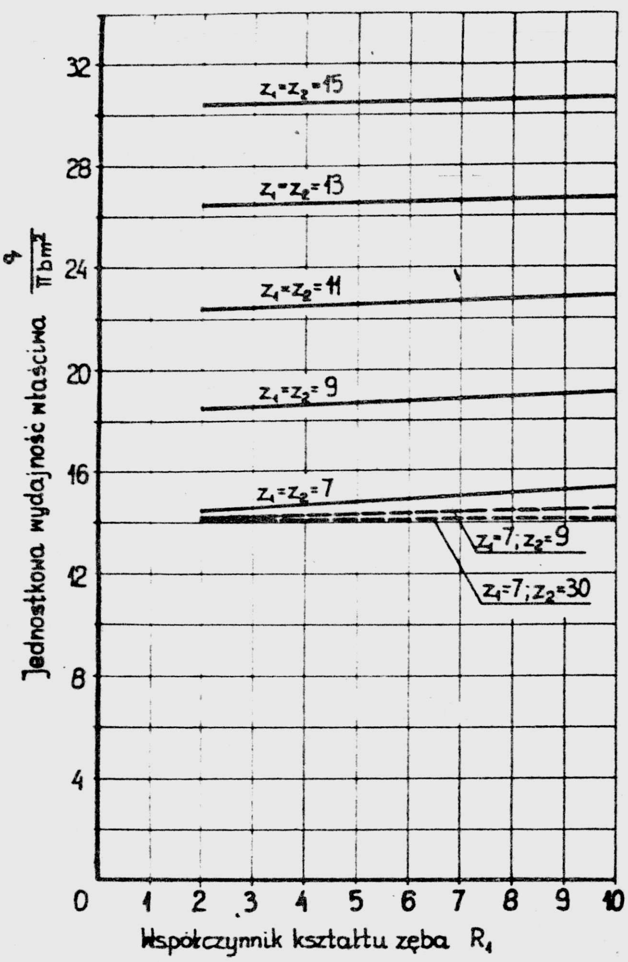
Z wykresu widać, że podobnie jak dla zazębienia ewolwentowego również dla zazębienia cykloidalnego decydujący wpływ na jednostkową wydajność właściwą pompy ma liczba zębów koła czynnego (z_1), podczas gdy liczba zębów koła biernego (z_2) praktycznie na nią nie wpływa. Podobne są również wartości wydajności rozpatrywane dla tych samych liczb zębów (tzn. ewolwentowego i cykloidalnego) obu typów zazębień. I tak na przykład wzrost liczby zębów koła czynnego (z_1) z 10 do 14 przy ustalonej liczbie zębów koła biernego $z_2 = 10$ powoduje taki sam wzrost jednostkowej, wydajności właściwej wynoszący ok. 40%. Wzrost liczby zębów (z_2) przy ustalonej liczbie zębów $z_1 = 10$ praktycznie nie wywołuje zmian jednostkowej wydajności właściwej. Z wykresu wynika również, że zwiększanie wartości współczynnika kształtu zęba R_1 z 3 do 6 powoduje nieznaczny wzrost jednostkowej wydajności właściwej, podobnie jak miało to miejsce w przypadku zazębienia ewolwentowego przy wzroście kąta przyporu.

Na rys.17 pokazano przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(y)$ dla wybranych liczb zębów z_1, z_2 i współczynnika kształtu zęba o wartości $R_1 = 3$. Zauważa się, że tak jak dla zazębienia ewolwentowego również dla zazębienia cykloidalnego współczynnik wysokości zęba y ma zasadniczy wpływ na jednostkową wydajność właściwą. Wartości wydajności rozpatrywane dla tych samych liczb zębów obu typów zazębień są bardzo zbliżone. Rozpatrując wzrost wydajności spowodowany wzrostem współczynnika wysokości y dla tych samych parametrów, jakie przyjęto przy analizie tego problemu dla zazębienia ewolwentowego, tzn. $z_1 = z_2 = 9$, $y = 0{,}5-1{,}5$, zauważa się, że jego wzrost jest również 3,5 krotny w stosunku do wartości początkowej.

Na rys.18 przedstawiono przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(R_1)$ dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i wybranych liczb zębów $z_1 = z_2$, dla ustalonych wartości współczynników wysokości zęba $y_1 = y_2 = 1$. Na podstawie tego rysunku stwierdzić można, że zwiększanie wartości współczynnika kształtu zęba R_1 powoduje nieznaczne tylko zwiększenie wydajności właściwej pompy. Wpływ ten jest znacznie mniejszy niż wpływ innych parametrów geometrycznych zazębienia.



Rys.17. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od współczynnika wysokości zęba y, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Linie ciągłe - pompy o zazębieniu zewnętrznym, linie kreskowe - pompy o zazębieniu wewnętrznym



Rys.18. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od współczynnika kształtu zęba R_1, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Linie ciągłe - pompy o zazębieniu zewnętrznym, linie kreskowe - pompy o zazębieniu wewnętrznym

4.3. Współczynnik nierównomierności wydajności

Podstawiając do wyrażenia (14) zależności (30), (31), (34) oraz uwzględniając związki (35) i (36) otrzymuje się po przekształceniach wzór na współczynnik nierównomierności wydajności pompy o zazębieniu cykloidalnym:

$$\delta = \frac{\left(1+\frac{z_1}{z_2}\right)\frac{z_1^2}{R_1^2}\sin^2\left(\frac{R_1\pi}{2z_1}\right)}{\left(\frac{z_1}{2}+y_1\right)^2+\frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2}+y_2\right)^2-\frac{z_1}{4}(z_1+z_2)-\left(1+\frac{z_1}{z_2}\right)\left[\frac{z_1^2}{2R_1^2}+\frac{z_1^3}{2\pi R_1^3}\sin\left(\frac{R_1\pi}{z_1}\right)\right]} \tag{38}$$

Podobnie jak poprzednio przy rozpatrywaniu zazębienia wewnętrznego należy uwzględnić w powyższym wzorze znak minus w odniesieniu do liczby zębów koła biernego z_2.

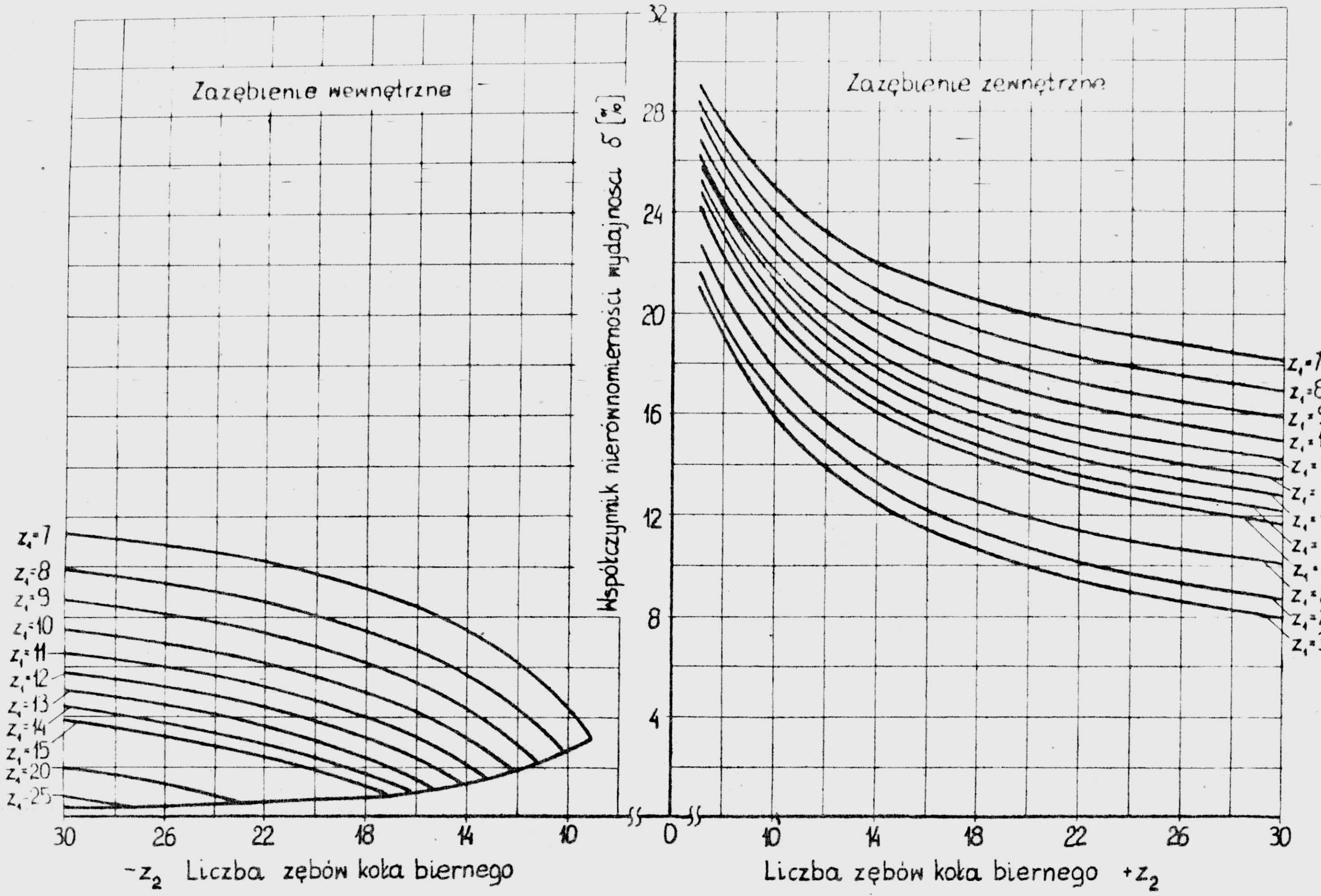
4.4. Zależność współczynnika nierównomierności wydajności od podstawowych wielkości geometrycznych kół

Z analizy wzoru (38) wynika, że na wartości współczynnika nierównomierności wydajności pompy mają wpływ:

- liczby zębów koła czynnego i biernego (z_1, z_2),
- współczynnik wysokości zęba koła czynnego i biernego (y_1, y_2),
- współczynnik kształtu zęba (R_1).

Wykresy ilustrujące wpływ tych parametrów na współczynnik nierównomierności wydajności pokazano na rys.19-24.

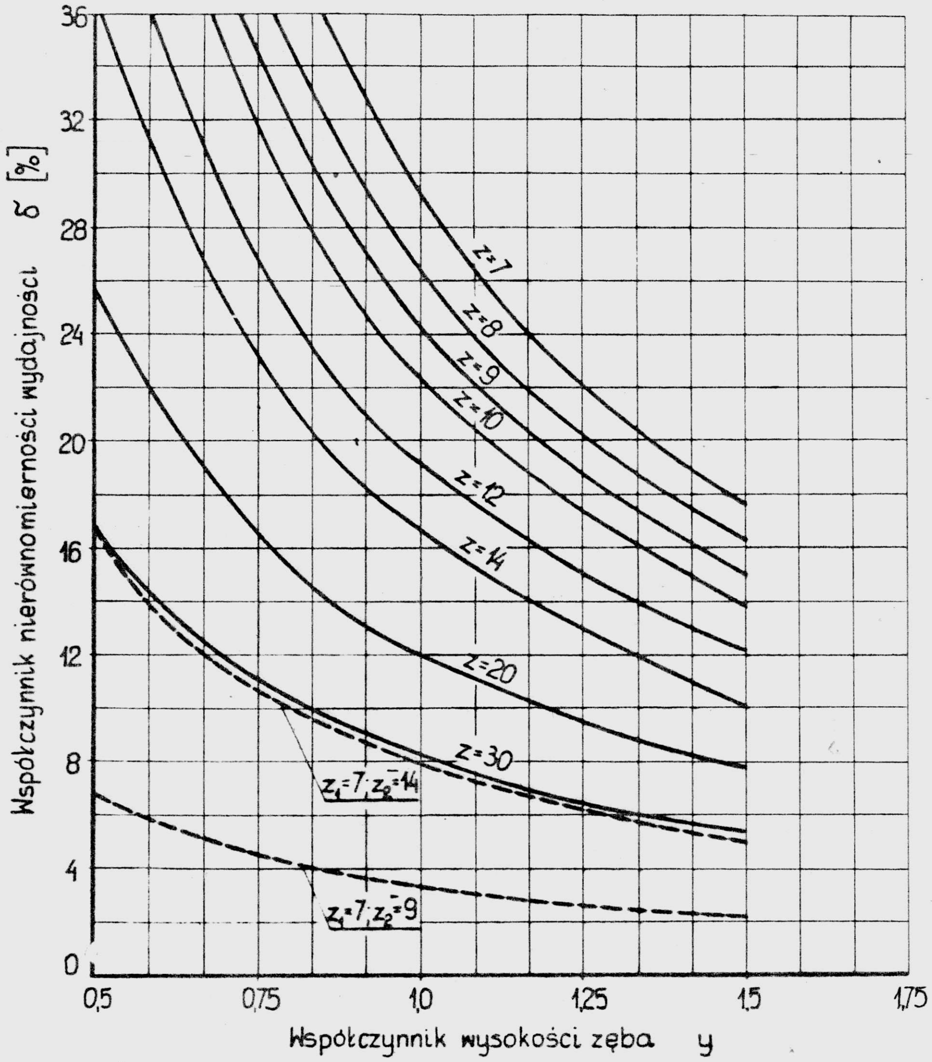
Na rys.19 przedstawiono przebieg zależności $\delta = f(z_2)$, gdzie z_1 jest parametrem, dla ustalonej wartości współczynników wysokości zęba $y_1 = y_2 = 1$ i przy współczynniku kształtu zęba $R_1 = 3$. Ogólnie przebieg tych zależności ma taki sam charakter jak w przypadku zazębienia ewolwentowego. W przypadku pomp o zazębieniu zewnętrznym zwiększenie liczby zębów zarówno koła pędzącego (z_1), jak i pędzonego (z_2) powoduje zmniejszenie współczynnika nierównomierności wydajności. Dla pomp o zazębieniu wewnętrznym tylko zwiększenie liczby zębów koła pędzącego (z_1) powoduje zmniejszenie wartości współczynnika, natomiast zwiększenie liczby zębów koła pędzonego (z_2) wywołuje odwrotny skutek. Wartości współczynnika nierównomierności wydajności δ dla pomp o zazębieniu wewnętrznym są znacznie mniejsze niż dla pomp o zazębieniu zewnętrznym.



Rys.19. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1, jako parametru

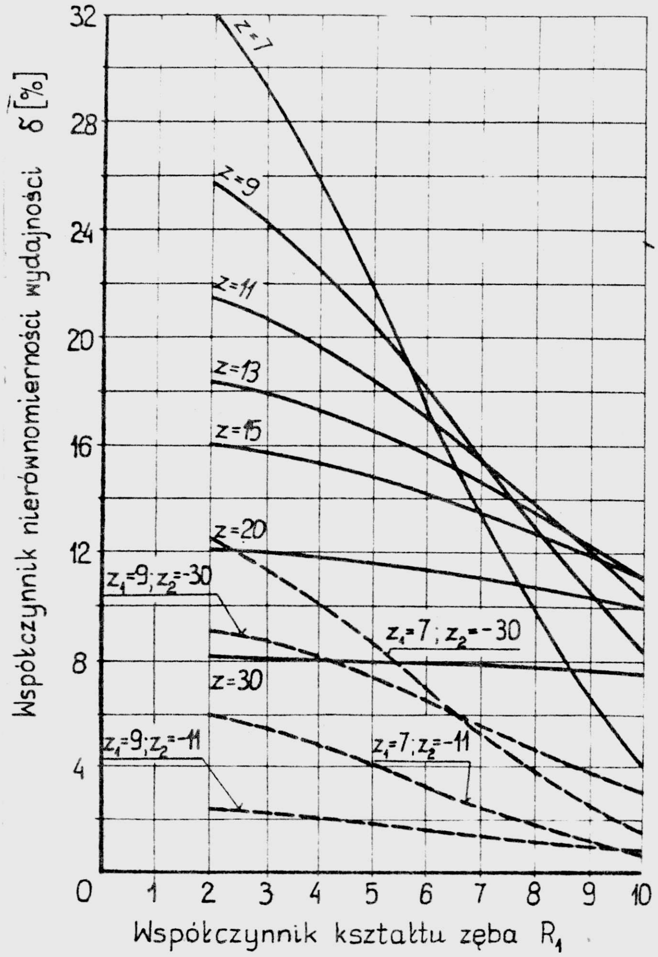
Dla zazębienia zewnętrznego i liczb zębów $z_1 = z_2 = z = 7-25$ współczynnik ten zmienia się w granicach $\delta = 28-8\%$, zaś dla zazębienia wewnętrznego i takich samych liczb zębów koła czynnego $z_1 = 7-25$ oraz $z_2 = z_1 + 2$ dla koła biernego współczynnik ten wynosi $\delta = 11-1\%$.

Na rys.20 przedstawiono przebieg zależności $\delta = f(y)$ dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Dla wszystkich krzywych przyjęto tę samą wartość współczynnika kształtu zęba $R_1 = 3$. Z rysunku tego wynika, że podobnie jak dla zazębienia ewolwentowego współczynnik wysokości zęba y wpływa zasadniczo na współczynnik nierównomierności wydajności δ. Z wykresu widać także, że zwiększenie y szczególnie dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i kół o małej liczbie zębów powoduje spadek współczynnika δ. Przykładowo dla liczby zębów $z_1 = z_2 = z = 7$ zwiększanie współczynnika wysokości y od wartości 1,0 do 1,5 powoduje spadek współczynnika δ do ok. 60% wartości początkowej. W przypadku pomp o zazębieniu wewnętrznym wpływ współczynnika y ma ten sam charakter, ale jest mniejszy. Rozpatrując więc pompę o liczbach zębów $z_1 = 7$, $z_2 = -14$ zauważa się, że zmiana współczynnika wysokości zęba y w tych samych granicach $y = 1-1,5$ powoduje spadek współczynnika δ o ok. 30% w stosunku do wartości początkowej.



Rys.20. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika wysokości zęba y dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Linie ciągłe - pompy o zazębieniu zewnętrznym, linie kreskowe - pompy o zazębieniu wewnętrznym

Na rys.21 pokazano przebieg zależności $\delta = f(R_1)$ dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Współczynniki wysokości zęba przyjęto tu także $y_1 = y_2 = 1$. Na rysunku widać, że zwiększenie współczynnika kształtu zęba R_1 powoduje spadek wartości współczynnika δ. Jest on szczególnie duży dla pomp o zazębieniu zewnętrznym i dla kół o małej liczbie zębów. Przykładowo dla $z_1 = z_2 = z = 7$ zwiększanie współczynnika kształtu R_1 od wartości 3 do 6 powoduje spadek współczynnika δ o ok. 40% wartości początkowej.



Rys.21. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika kształtu zęba R_1, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2. Linie ciągłe - pompy o zazębieniu zewnętrznym, linie kreskowe - pompy o zazębieniu wewnętrznym

W przypadku pomp o zazębieniu wewnętrznym zależność ta ma podobny charakter, ale spadek współczynnika δ jest nieco mniejszy. Przykładowo dla $z_1 = 7$, $z_2 = -30$ zmiana wartości współczynnika R_1, w tych samych granicach $R_1 = 3-6$ powoduje spadek współczynnika δ o ok. 30% wartości początkowej.

Z dotychczasowej analizy wzorów oraz wykresów wynika, że znaczny wpływ na współczynnik nierównomierności wydajności δ pomp o zazębieniu ewolwentowym i cylkoidalnym ma rodzaj zazębienia oraz różnica liczb zębów koła biernego i czynnego $z_2 - z_1$. W przypadku pomp o zazębieniu wewnętrznym, zarówno o zarysie ewolwentowym jak i cykloidalnym, otrzymuje się o rząd mniejsze wartości współczynnika δ niż w pompach o zazębieniu zewnętrznym. Przykładowo dla pomp o zazębieniu zewnętrznym, ewolwentowym i liczbie zębów $z_1 = z_2 = z = 10$ wartość współczynnika δ wynosi ok. $\delta = 21\%$, zaś w pompach o zazębieniu wewnętrznym i liczbach zębów $z_1 = 10$ i $z_2 = -20$ wynosi ok. $\delta = 5\%$.

Teoretycznie można by w pompach o zazębieniu wewnętrznym zarówno w tym jak i innych przypadkach spowodować dalsze zmniejszenie wartości współczynnika δ. Wiązałoby się to jednak ze zmniejszeniem różnicy zębów $(z_2 - z_1)$ do wartości poniżej 10. W praktyce, wobec faktu że w budowie pomp zębatych stosuje się na ogół zęby normalne $y_1 = y_2 = 1$, staje się to niemożliwe do spełnienia. Nastąpiłoby bowiem, jak podaje [26], interferencja zębów. Aby jej uniknąć należałoby zastosować zęby niskie, czyli $y_1 = y_2 < 1$. Przykładem takiego rozwiązania może być konstrukcja firmy Eckerle, w której zastosowano liczby zębów $z_1 = 13$, $z_2 = -20$ (różnica zębów $z_2 - z_1 = 7$) przy współczynniku wysokości $y_1 = y_2 = 0{,}8$. W świetle przeprowadzonej analizy (rys.7, 12) niekorzystne byłoby dalsze zmniejszenie współczynnika y w celu uzyskania mniejszej różnicy zębów $z_2 - z_1$ i mniejszych wartości współczynnika δ. Mogłoby to bowiem w rezultacie wywrzeć skutek odwrotny i zwiększyć współczynnik δ, a także spowodować spadek wydajności pompy. Podobne problemy występują w przypadku zazębienia cykloidalnego. Ponieważ jednocześnie zastosowanie zarysu cykloidalnego nie jest korzystniejsze ze względu na wydajność i współczynnik jej nierównomierności powodując znaczne komplikacje technologiczne i montażowe nie buduje się pomp zębatych z zębami o takim zarysie.
W świetle tego dalszą drogą zmniejszania nierównomierności wydajności pomp zębatych jest zastosowanie w nich hipocykloidalnych zarysów zęba.

5. POMPY O ZAZĘBIENIU HIPOCYKLOIDALNYM

5.1. Zarys zazębienia i konstrukcja zęba

Na rys.22 podano ogólne zasady konstrukcji kół zębatych hipocykloidalnych. Koła te konstruuje się w ten sposób, że biorąc za podstawę kształt hipocykloidy zasadniczej tworzy się zarys zęba wg krzywej równoodległej w stosunku do niej. Zarys ten składa się z połączonych ze sobą łuków ekwidystant do hipocykloidy zasadniczej oraz półokręgów o środkach umiejscowionych w jej punktach zwrotu. W przypadku koła o uzębieniu zewnętrznym głowa zęba ma kształt półokręgu, zaś stopa wycinka łuku ekwidystanty do hipocykloidy. W kole o uzębieniu wewnętrznym jest odwrotnie.

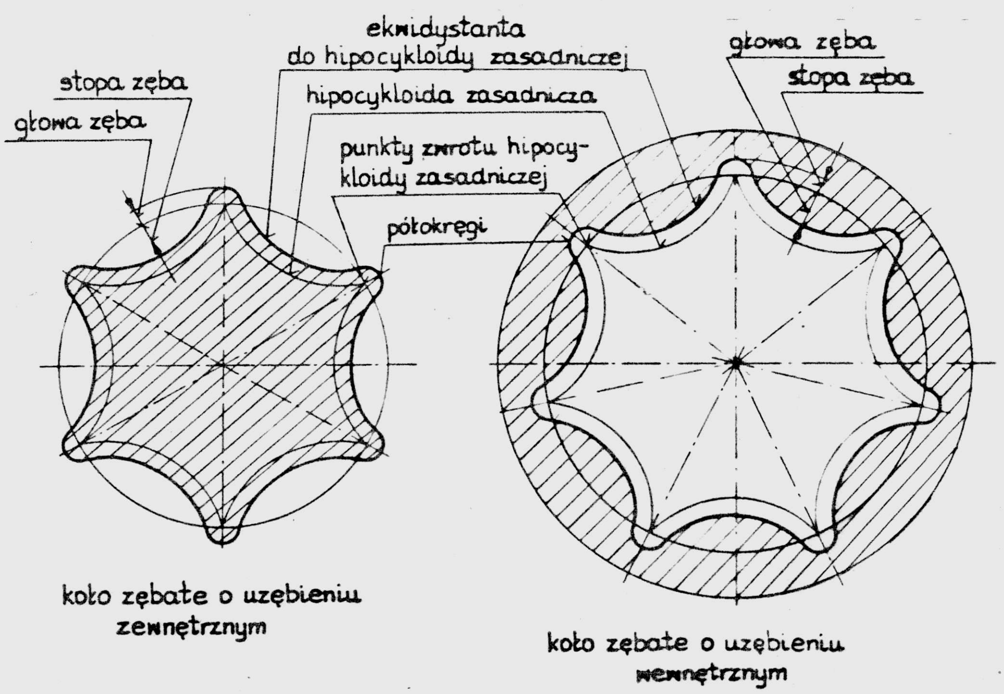
Jak podano w punkcie 1.1 i na rys.1 są dwa rodzaje kół zębatych o zarysie hipocykloidalnym:

- o całkowitych łukach hipocykloidy,
- o połówkowych łukach hipocykloidy.

Rodzaj koła zębatego zależy ściśle od kształtu hipocykloidy zasadniczej, a tę charakteryzuje moduł hipocykloidy M definiowany jako:

$$M = \frac{r_z}{\varrho} \tag{39}$$

gdzie: r_z - promień koła zasadniczego hipocykloidy,
ϱ - promień koła odtaczającego.



Rys.22. Ogólne zasady konstrukcji kół zębatych hipocykloidalnych

Uwzględniając, że $r_z = r_p$ oraz $r_p = mz/2$ można powiązać ze sobą moduł hipocykloidy M z modułem koła zębatego m i otrzymuje się:

$$m = \frac{2M\varrho}{z} \tag{40}$$

Z zasady konstrukcji kół zębatych hipocykloidalnych wynika, że liczba zębów z jest równa modułowi hipocykloidy zasadniczej. W budowie kół zębatych moduł ten może przyjmować wartości liczby całkowitej lub ułamkowej (tzw. połówkowej), której podwójna wartość równa jest liczbie całkowitej.

Stąd można napisać:

$$M = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots = z$$

lub

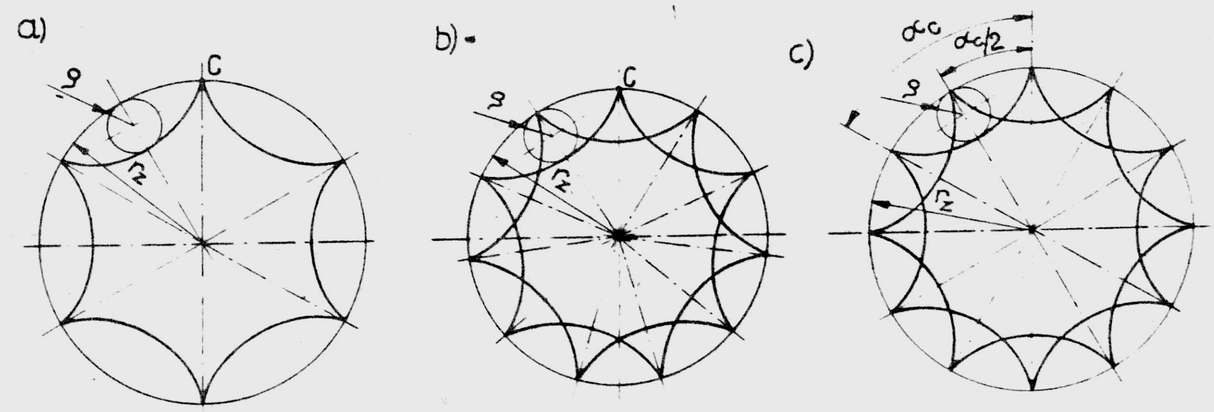
$$M = 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ \ldots = \frac{z}{2}$$

Wstawiając te związki do wzoru (40) otrzymuje się:

$$m = 2\varrho$$

$$m = \varrho$$

Gdy $m = 2\varrho$ koło odtaczające wraca do punktu wyjścia (C) po jednokrotnym obiegu po kole zasadniczym hipocykloidy (rys.23a).



Rys.23. Rodzaje hipocykloid zasadniczych

Wykorzystując tak utworzoną hipocykloidę konstruuje się koła zębate hipocykloidalne o łukach całkowitych, jak ma to miejsce w pompach produkcji f-my Heller. Gdy $m = \varrho$ koło odtaczające wraca do punktu wyjścia (C) po dwukrotnym obiegu po kole zasadniczym hipocykloidy (rys.23b). Uzyskana w ten sposób hipocykloida służy za podstawę do konstrukcji kół o łukach połówkowych. Liczba wierzchołków hipocykloidy jest nieparzysta, a w związku z tym liczba zębów jest również nieparzysta. Taki rodzaj hipocykloid zasadniczych został przyjęty dla kół zębatych pomp f-my Zolleru. Aby otrzymać parzystą liczbę wierzchołków i związaną z tym parzystą liczbę zębów wykorzystuje się dwie hipocykloidy o $m = 2\varrho$ obrócone wzajemnie o kąt równy połowie kąta środkowego jednego łuku hipocykloidy zasadniczej (rys.23c).

5.2. Geometria zazębienia kół hipocykloidalnych

5.2.1. Równania zarysu zęba

Jak stwierdzono powyżej, zarys zęba hipocykloidalnego składa się z połączonych ze sobą łuków ekwidystanty do hipocykloidy zasadniczej i okręgów zakreślonych ze środków usytuowanych w jej punktach zwrotu.

Równania ekwidystanty do hipocykloidy zasadniczej.

Równania parametryczne dowolnego punktu B hipocykloidy zasadniczej pokazanej schematycznie na rys.24 mają wg [2] postać:

$$x_h = (r_z - \rho)\cos\alpha + \rho\cos\left(\frac{r_z - \rho}{\rho}\right)\alpha$$

$$y_h = (r_z - \rho)\sin\alpha - \rho\sin\left(\frac{r_t - \rho}{\rho}\right)\alpha \tag{41}$$

gdzie: α - kąt między osią Ox układu współrzędnych a prostą OP przechodzącą przez punkt styku koła odtaczającego z kołem odtaczanym (zasadniczym)

Uwzględniając zależności geometryczne wynikające z rysunku 24 równania dowolnego punktu B_1 ekwidystanty do hipocykloidy mają postać:

$$x_e = x_h + g\sin\beta$$

$$y_e = y_h + g\cos\beta \tag{42}$$

gdzie: g jest odległością ekwidystanty do hipocykloidy zasadniczej

Kąt β występujący w równaniach (42) wyznacza się jako współczynnik kierunkowy stycznej do hipocykloidy zasadniczej w punkcie B (x_h, y_h) z następującej zależności:

$$\mathrm{tg}(-\beta) = \frac{\dfrac{dy_h}{d\alpha}}{\dfrac{dx_h}{d\alpha}} = \frac{(r_z - \rho)\cos\alpha - \rho\left(\dfrac{r_z - \rho}{\rho}\right)\cos\left(\dfrac{r_z - \rho}{\rho}\right)\alpha}{-(r_z - \rho)\sin\alpha - \rho\left(\dfrac{r_z - \rho}{\rho}\right)\sin\left(\dfrac{r_z - \rho}{\rho}\right)\alpha} \tag{43}$$

skąd ostatecznie otrzymuje się:

$$\beta = \left(\frac{r_z - 2\rho}{2}\right)\alpha \tag{44}$$

Wstawiając tę zależność do wzorów (42) otrzymuje się równania parametryczne ekwidystanty do hipocykloidy zasadniczej:

$$x_e = (r_z - \varrho)\cos\alpha + \varrho\cos\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\alpha + g\sin\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\alpha$$

$$y_e = (r_z - \varrho)\sin\alpha - \varrho\sin\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\alpha + g\cos\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\alpha \qquad (45)$$

Równania te są ważne dla wszystkich kątów α z wyjątkiem tych, które odpowiadają punktom zwrotu łuków hipocykloidy zasadniczej czyli dla

$$\alpha \neq \frac{2k\pi}{z} \qquad \text{gdzie} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, z .$$

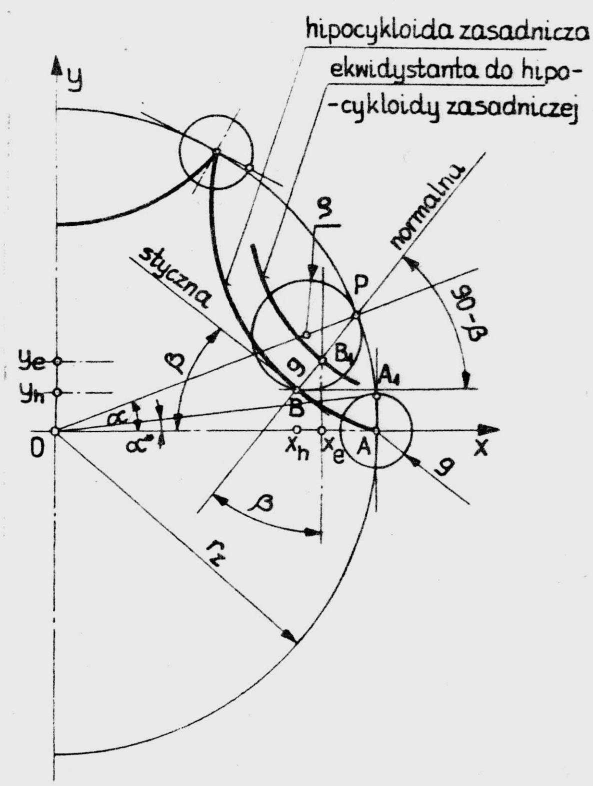
Równanie okręgu zamykającego profil

Równanie okręgu zamykającego profil, usytuowanego w każdym punkcie zwrotu hipocykloidy zasadniczej ma postać:

$$(x - r_z\cos\alpha)^2 + (y - r_z\sin\alpha)^2 = g^2 \qquad (46)$$

Równanie to jest ważne jedynie dla kątów α odpowiadających punktom zwrotu hipocykloidy zasadniczej czyli dla

$$\alpha = \frac{2k\pi}{z} \qquad \text{gdzie} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, z .$$



Rys.24.
Konstrukcja hipocykloidalnego zarysu zęba

Równania zarysu zęba

Ekwidystanta i okręg tworzą wspólnie zarys zęba, łącząc się wzajemnie w punkcie A_1, w którym zachodzi płynne przejście jednej krzywej w drugą (rys.24). Teoretycznie punkt A_1 jest granicą, do której dąży ekwidystanta konstruowana przy wykorzystaniu normalnych do hipocykloidy zasadniczej wystawionych w dowolnie małym lewostronnie domkniętym przedziale $\langle a, A)$. W związku z tym kąt α^* rozgraniczający okręg i ekwidystantę można określić jako:

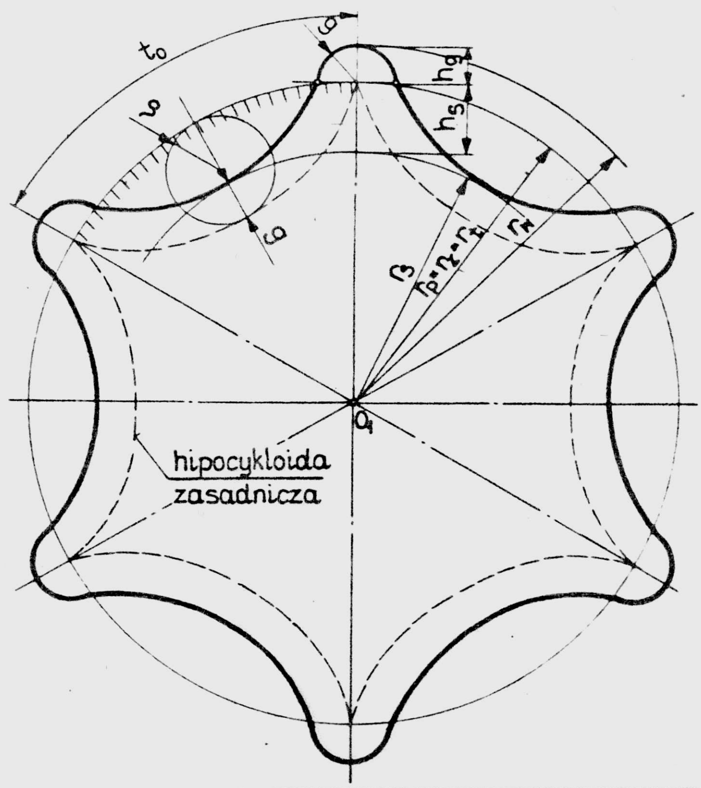
$$\alpha^* = \operatorname{arc\,tg} \frac{g}{r_z} \tag{47}$$

Ostatecznie układ równań określający zarys zęba hipocykloidalnego jest następujący:

$$\begin{cases} x_e = (r_z - \varrho)\cos\alpha + \varrho\cos\left(\dfrac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\alpha + g\sin\left(\dfrac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\alpha \\ y_e = (r_z - \varrho)\sin\alpha - \varrho\sin\left(\dfrac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\alpha + g\cos\left(\dfrac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\alpha \qquad (48) \\ \text{dla} \quad \alpha \in \left[\dfrac{2k\pi}{z} + \alpha^*, \ \dfrac{2(k+1)\pi}{z} - \alpha^*\right] \quad \text{gdzie} \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots z \\ (x - r_z\cos\alpha)^2 + (y - r_z\sin\alpha)^2 = g^2 \qquad (49) \\ \text{dla} \quad \alpha \in \left[\dfrac{2k\pi}{z} - \alpha^*, \ \dfrac{2(k+1)\pi}{z} + \alpha^*\right] \quad \text{gdzie} \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots z \end{cases}$$

5.2.2. Wymiary kół zębatych

Na rys.25 i 26 podano wielkości określające koła zębate hipocykloidalne o całkowitych łukach hipocykloidy $(m = 2\varrho)$ i połówkowych łukach hipocykloidy $(m = \varrho)$. W tabelach zestawiono odpowiednie związki określające podstawowe wymiary tych kół. W przypadku kół o pełnych łukach hipocykloidy równania te wynikają z prostych zależności geometrycznych. Natomiast w przypadku kół o łukach połówkowych istnieje konieczność wyznaczenia pewnych zależności w sposób analityczny. Są to wysokość stopy zęba h_s, promień koła stóp r_s i współczynnik wysokości stopy zęba y_2 w kole o uzębieniu zewnętrznym oraz wysokość

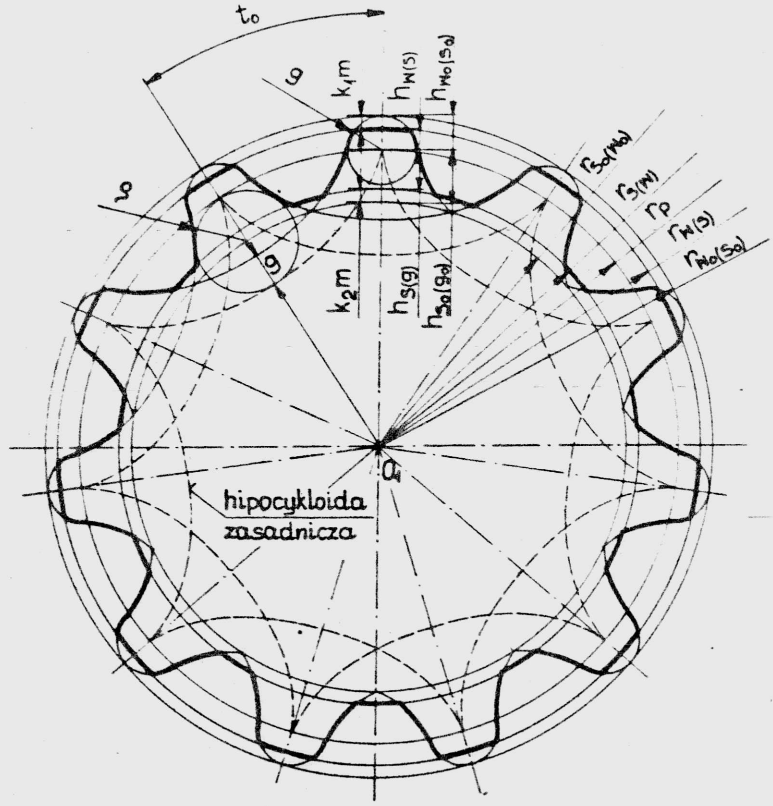


L.p.	Rodzaj wymiaru koła zębatego	Koło o uzębieniu zewnętrznym	Koło o uzębieniu wewnętrznym
1.	Promień koła podziałowego, zasadniczego, tocznego.	$r_p = r_z = r_t = \frac{zm}{2}$	$r_p = r_z = r_t = \frac{zm}{2}$
2.	Współczynnik przesunięcia ekwidystanty	$v = \frac{g}{\varrho}$	$v = \frac{g}{\varrho}$
3.	Wysokość głowy zęba	$h_g = y_1 m = g$	$h_g = y_2 m = 2\varrho - g$
4.	Wysokość stopy zęba	$h_s = y_2 m = 2\varrho - g$	$h_s = y_1 m = g$
5.	Wysokość zęba	$h_z = h_s + h_g = 2\varrho$	$h_z = h_s + h_g = 2\varrho$
6.	Współczynnik wysokości głowy zęba	$y_1 = \frac{h_g}{m} = \frac{v}{2}$	$y_2 = \frac{h_g}{m} = 1 - \frac{v}{2}$
7.	Współczynnik wysokości stopy zęba	$y_2 = \frac{h_s}{m} = 1 - \frac{v}{2}$	$y_1 = \frac{h_s}{m} = \frac{v}{2}$
8.	Promień koła wierzchołkowego	$r_w = r_p + h_g = m\left(\frac{z}{2} + \frac{v}{2}\right)$	$r_w = r_p - h_g = m\left(\frac{z}{2} - 1 + \frac{v}{2}\right)$
9.	Promień koła stóp	$r_s = r_p - h_s = m\left(\frac{z}{2} - 1 + \frac{v}{2}\right)$	$r_s = r_p + h_g = m\left(\frac{z}{2} + \frac{v}{2}\right)$

Rys.25. Podstawowe związki określające wymiary kół zębatych hipocykloidalnych o całkowitych łukach hipocykloidy zasadniczej

głowy zęba h_g, promień koła wierzchołkowego r_w i współczynnik wysokości głowy zęba y_2 w kole o uzębieniu wewnętrznym. W tym celu wykorzystuje się równania zarysu zęba hipocykloidalnego.

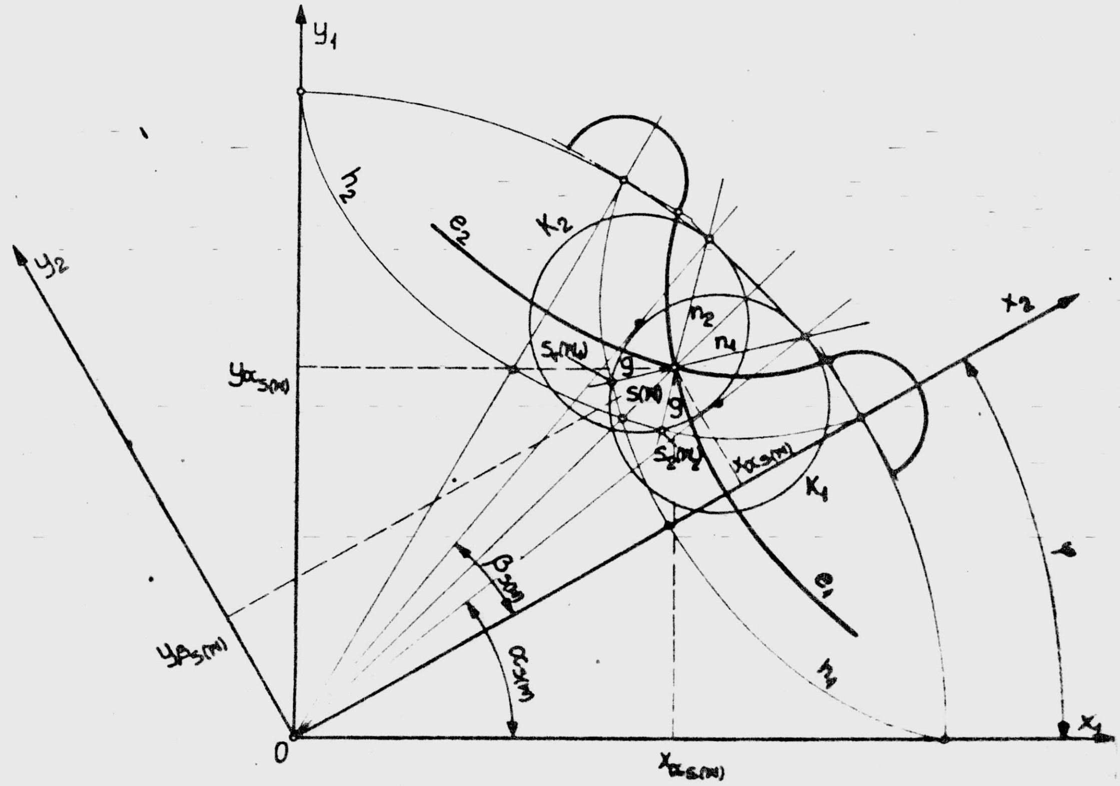
Jak widać z rys.27 stopa koła o uzębieniu zewnętrznym lub głowa koła o uzębieniu wewnętrznym powstaje z wycinków dwóch łuków ekwidystant



Lp.	Rodzaj wymiaru koła zębatego	Koło o uzębieniu zewnętrznym	Koło o uzębieniu wewnętrznym
1.	Promień koła podziałowego, zasadniczego, tocznego	$r_p = r_z = r_t = \frac{zm}{2}$	$r_p = r_z = r_t = \frac{zm}{2}$
2.	Współczynnik przesunięcia ekwidystanty	$V = \frac{g}{\varrho}$	$V = \frac{g}{\varrho}$
3.	Wysokość głowy zęba	$h_g = h_{go} - k_1 m = m(y_1 - k_1)$	$h_g = h_{go} - k_2 m = m(y_2 - k_2)$
4.	Wysokość stopy zęba	$h_s = h_{so} - k_2 m = m(y_2 - k_2)$	$h_s = h_{so} - k_1 m = m(y_1 - k_1)$
5.	Wysokość zęba	$h_z = h_s + h_g$	$h_z = h_s + h_g$
6.	Współczynnik wysokości głowy zęba	$y_1 = \frac{h_{go}}{m} = \frac{g}{m} = V$	$y_2 = \frac{h_{so}}{m} = \frac{r_p - r_{Wo}}{m}$ wzory (54),(55),(60) nomogram rys.27
7.	Współczynnik wysokości stopy zęba	$y_2 = \frac{h_{so}}{m} = \frac{r_p - r_{so}}{m}$ wzory (54),(55),(60) nomogram rys.27	$y_1 = \frac{h_{so}}{m} = \frac{g}{m} = V$
8	Promień koła wierzchołkowego	$r_W = r_p + h_g = m(\frac{z}{2} + y_1 - k_1)$	$r_W = r_p - h_g = m(\frac{z}{2} - y_2 + k_2)$
9.	Promień koła stóp	$r_S = r_p - h_s = m(\frac{z}{2} - y_2 + k_2)$	$r_S = r_p + h_s = m(\frac{z}{2} + y_1 - k_1)$

Rys.26. Podstawowe związki określające wymiary kół zębatych hipocykloidalnych o połówkowych łukach hipocykloidy zasadniczej

e_1, e_2 które obrócono wzajemnie o kąt $\varphi = 2\pi/z$. Punkt przecięcia się tych łuków e_1, e_2 czyli najniższy punkt stopy zęba S względnie głowy W jest ściśle związany z łukami hipocykloid zasadniczych h_1, h_2 poprzez normalne n_1, n_2 wystawione w punktach $S_1(W_1)$, $S_2(W_2)$ i odznaczone na nich odległości g.



Rys.27. Konstrukcja stopy względnie głowy zęba koła czynnego dla przypadku kół zębatych hipocykloidalnych o połówkowych łukach hipocykloidy zasadniczej

Znając kąty usytuowania $\alpha_{s(w)}$, $\beta_{s(w)}$ okręgów odtaczających K_1, K_2 przechodzących odpowiednio przez punkty $S_1(W_1)$, $S_2(W_2)$ można z równań ekwidystant (48) ściśle wyznaczyć współrzędne punktu $S(W)$, a tym samym promień koła stóp względnie wierzchołkowego okręgu o uzębieniu zewnętrznym względnie wewnętrznym. Wyprowadzenie odpowiednich wzorów podano poniżej.

Równania parametryczne ekwidystanty e_1 w układzie współrzędnych prostokątnych Ox_1y_1 ma postać:

$$x_1 = (r_z - \rho)\cos\alpha + \rho\cos\left(\frac{r_z - \rho}{\rho}\right)\alpha + g\sin\left(\frac{r_z - 2\rho}{2\rho}\right)\alpha \tag{50}$$

$$y_1 = (r_z - \rho)\sin\alpha - \rho\sin\left(\frac{r_z - \rho}{\rho}\right)\alpha + g\cos\left(\frac{r_z - 2\rho}{2\rho}\right)\alpha$$

Równania parametryczne ekwidystanty e_2 w układzie współrzędnych prostokątnych Ox_2y_2 ma postać:

$$x_2 = (r_z - \varrho)\cos\beta + \varrho\cos\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\beta + g\sin\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\beta$$

$$y_2 = (r_z - \varrho)\sin\beta - \varrho\sin\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\beta + g\cos\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\beta \qquad (51)$$

Pamiętając, że obie ekwidystanty e_1, e_2 mają punkt wspólny S(W) i uwzględniając obrót układu współrzędnych Ox_2y_2 o kąt $\varphi = 2\pi/z$ można napisać:

$$x_1 = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi$$

$$y_1 = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi \qquad (52)$$

Uwzględniając odpowiednie podstawienia otrzymuje się:

$$(r_z - \varrho)\cos\alpha + \varrho\cos\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\alpha + g\sin\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\alpha =$$

$$= \left[(r_z - \varrho)\cos\beta + \varrho\cos\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\beta + g\sin\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\beta\right]\cos\varphi - \qquad (53)$$

$$+ \left[(r_z - \varrho)\sin\beta - \varrho\sin\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\beta + g\cos\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\beta\right]\sin\varphi$$

$$(r_z - \varrho)\sin\alpha - \varrho\sin\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\alpha + g\cos\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\alpha =$$

$$= \left[(r_z - \varrho)\cos\beta + \varrho\cos\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\beta + g\sin\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\beta\right]\sin\varphi + \qquad (54)$$

$$+ \left[(r_z - \varrho)\sin\beta - \varrho\sin\left(\frac{r_z - \varrho}{\varrho}\right)\beta + g\cos\left(\frac{r_z - 2\varrho}{2\varrho}\right)\beta\right]\cos\varphi$$

Wykorzystując zależność (53) oraz wynikający bezpośrednio z rysunku związek:

$$\alpha_{s(w)} + \beta_{s(w)} = 2\varphi \qquad (55)$$

można obliczyć wartości kątów $\alpha_{s(w)}$, $\beta_{s(w)}$.
Otrzymane w ten sposób wartości $\alpha_{s(w)}$, $\beta_{s(w)}$ spełniają równanie (54), a więc są rzeczywiście kątami usytuowania okręgów odtaczających K_1, K_2, które wyznaczają punkt S(W) przecięcia się łuków ekwidystant od hipocykloid zasadniczych.

Wartości tych kątów zależą od stosunku promieni kół odtaczanego r_z i odtaczającego ϱ tworzących hipocykloidę zasadniczą czyli od liczby zębów koła zębatego hipocylkoidalnego oraz od wielkości g przesunięcia ekwidystanty do hipocykloidy zasadniczej.

Tak obliczone i sprawdzone wartości kątów $\alpha_{s(w)}$ i $\beta_{s(w)}$ wykorzystano do obliczeń średnicy koła stóp względnie wierzchołkowego $r_{s(w)}$, wysokości stopy względnie głowy zęba $h_{s(g)}$ oraz współczynnika wysokości stopy względnie głowy zęba y_2 w kołach o uzębieniu zewnętrznym lub wewnętrznym. Promień koła stóp lub wierzchołkowego $r_{s(w)}$ określony jest wzorem:

$$r_{s(w)} = \sqrt{x^2_{\alpha_{s(w)}} + y^2_{\alpha_{s(w)}}} = \sqrt{x^2_{\beta_{s(w)}} + y^2_{\beta_{s(w)}}} \tag{56}$$

W dalszej części wyprowadzeń i obliczeń wykorzystywać się będzie kąt $\alpha_{s(w)}$.

Podstawiając do zależności (56) równanie (50) oraz uwzględniając kąt $\alpha_{s(w)}$ otrzymuje się po przekształceniach wzór na promień stóp względnie promień wierzchołkowy kół zębatych o uzębieniu zewnętrznym lub wewnętrznym.

$$r_{s_o(w_o)} = \sqrt{(r_z - \varrho)^2 + \varrho^2 + g^2 + 2\varrho(r_z - \varrho)\cos\left(\frac{r_z}{\varrho}\right)\alpha_{s(w)} + 2g(r_z - \varrho)\sin\left(\frac{r_z}{2\varrho}\right)\alpha_{s(w)} - 2g\varrho\sin\left(\frac{r_z}{2\varrho}\right)\alpha_{s(w)}} \tag{57}$$

Jest to promień obliczeniowy (wyznaczony teoretycznie), a w praktyce ulega on pomniejszeniu o wartość skrócenia stopy lub głowy zęba.

Teoretyczna wysokość stopy lub głowy zęba koła o uzębieniu zewnętrznym lub wewnętrznym określona jest zależnością:

$$h_{s_o(g_o)} = my_2 = r_p - r_{s_o(w_o)} \tag{58}$$

czyli

$$my_2 = \frac{mz}{2} - \sqrt{(r_z - \varrho)^2 + \varrho^2 + g^2 + 2\varrho(r_z - \varrho)\cos\left(\frac{r_z}{\varrho}\right)\alpha_{s(w)} + 2g(r_z - \varrho)\sin\left(\frac{r_z}{2\varrho}\right)\alpha_{s(w)} - 2g\varrho\sin\left(\frac{r_z}{2\varrho}\right)\alpha_{s(w)}} \tag{59}$$

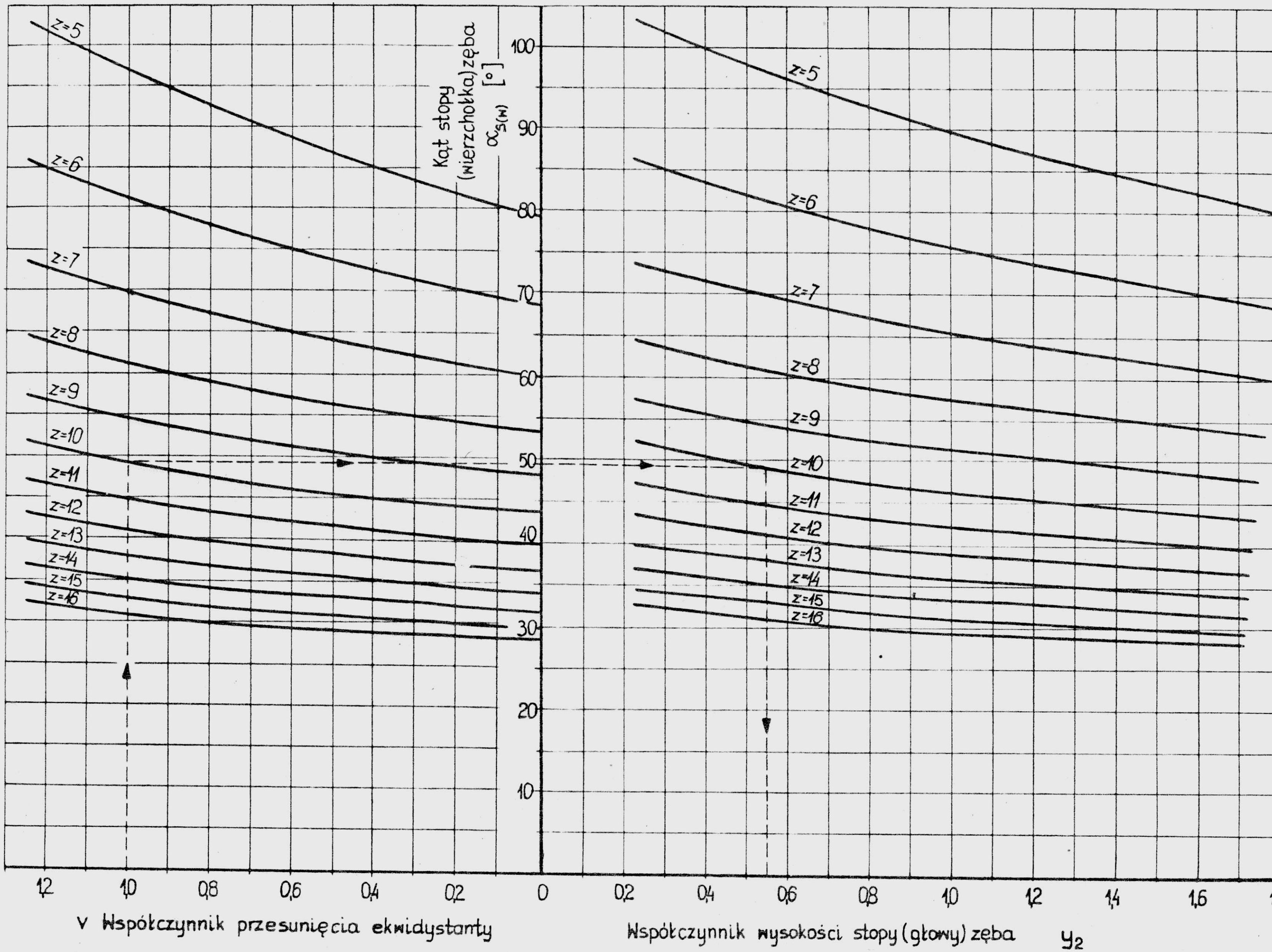
Po przekształceniach i uwzględnieniu modułu $m = \varrho$ i współczynnika przesunięcia ekwidystanty $v = g/\varrho$ otrzymuje się ostatecznie wzór na współczynnik y_2 wysokości stopy lub głowy zęba hipocykloidalnego koła zębatego o uzębieniu zewnętrznym lub wewnętrznym:

$$y_2 = \frac{z}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{z}{2} - 1\right)^2 + (z-2)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\alpha_{s(w)} + v(z-4)\sin\left(\frac{z}{4}\right)\alpha_{s(w)} + v^2} \qquad (60)$$

Jak widać ze wzoru (60) współczynnik ten zależy od liczby zębów z kąta $\alpha_{s(w)}$ oraz współczynnika przesunięcia ekwidystanty v.

Ponieważ wzoru (60) używa się w połączeniu ze wzorami (53), (55), co jest kłopotliwe w obliczeniach, wykonano odpowiedni nomogram, służący do doboru współczynnika y_2 wysokości stopy względnie głowy zęba koła o uzębieniu zewnętrznym względnie wewnętrznym, w zależności od liczby zębów koła zębatego z. Nomogram ten, jak i sposób korzystania z niego pokazano na rys.28.

W przypadku kół hipocykloidalnych o pełnych łukach hipocykloid ($m = 2\varrho$) skracanie głowy względnie stopy zęba jest teoretycznie możliwe, lecz w praktyce nieprzydatne w zastosowaniu do pomp zębatych. Całkiem odmiennie zagadnienie to wygląda w odniesieniu do kół hipocykloidalnych o łukach połówkowych ($m = \varrho$). Jak widać z rys.27 teoretycznie ukształtowana głowa zęba koła o uzębieniu zewnętrznym jest okręgiem, zaś jego stopa zakończona jest ostrym wierzchołkiem. W przypadku kół o uzębieniu wewnętrznym jest odwrotnie. Wykonanie ostro zakończonego wierzchołka stopy względnie głowy zęba jest utrudnione ze względów technologicznych, a otrzymywany w praktyce zarys uwzględniający nawet nieznaczne jego zaokręglenie byłby przybliżeniem wymaganego zarysu hipocykloidalnego. Niemożliwa wręcz ze względów wytrzymałościowych jest współpraca kolistej części zęba z częścią ostro zakończoną, gdyż występowałyby zbyt duże naciski jednostkowe, nadmierne zużycie części kolistej zęba i łamanie się części ostro zakończonej. W związku z tym skraca się głowę i stopę zęba o wartość $k_{1(2)}m$, przy czym $k_{1(2)}$ oznacza współczynnik skrócenia głowy względnie stopy zęba. Końcowe wzory określające rzeczywiste wysokości głowy i stopy zęba hipocykloidalnego oraz promienia koła wierzchołkowego i koła stóp podano w tabeli na rys.26.



Rys.28. Nomogram doboru współczynnika y_2 wysokości stopy względnie głowy zęba koła zębatego hipocykloidalnego o łukach połówkowych i uzębieniu zewnętrznym względnie wewnętrznym

5.3. Współpraca kół zębatych. Linia przyporu

Zazębienia hipocykloidalne jak podano w rozdziale 1 projektowano z myślą ich wykorzystania w pompach zębatych o zazębieniu wewnętrznym a szczególnie z zamierzeniem maksymalnego zmniejszenia różnicy zębów $z_2 - z_1$. Im mniejsza jest bowiem ta różnica, tym mniejsza wartość współczynnika nierównomierności wydajności δ. W przypadku zastosowania zazębienia hipocykloidalnego o pełnych łukach hipocykloidy ($m = 2\varrho$) różnica zębów $z_2 - z_1 = 1$ (rys.29a). Większych różnic z wymienionych uprzednio powodów nie stosuje się. Wszystkie zęby koła czynnego są więc w stałym kontakcie z zębami koła biernego i nie jest potrzebny w pompie element oddzielający przestrzenie ssawne od tłocznej w postaci wkładki sierpowej. W przypadku zębów o połówkowych łukach hipocykloid ($m = \varrho$) pokazanych na rys.29b różnica $z_2 - z_1$ może wynosić minimum 2. Nie może ona być mniejsza ze względu na interferencję zębów, możliwa jest większa, lecz wiąże się to ze wzrostem współczynnika nierównomierności wydajności δ. W przypadku tego typu zazębienia zęby wzajemnie współpracujących kół są ze sobą w styku jedynie na pewnym łuku, a więc istnieje konieczność wprowadzenia wkładki sierpowej.

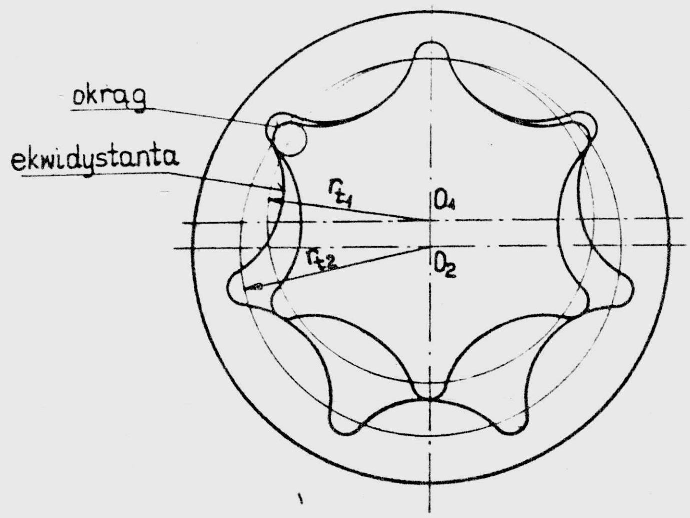
Jak wynika z rysunku 29 zarówno w kołach zębatych hipocykloidalnych o pełnych jak i połówkowych łukach hipocykloid współpraca kół zębatych odbywa się na zasadzie toczenia po sobie bez poślizgu odpowiednich kół tocznych i związanych z nimi wycinków okręgów stanowiących głowy zębów koła czynnego oraz ekwidystant do hipocykloidy zasadniczej stanowiących głowy zębów koła biernego.

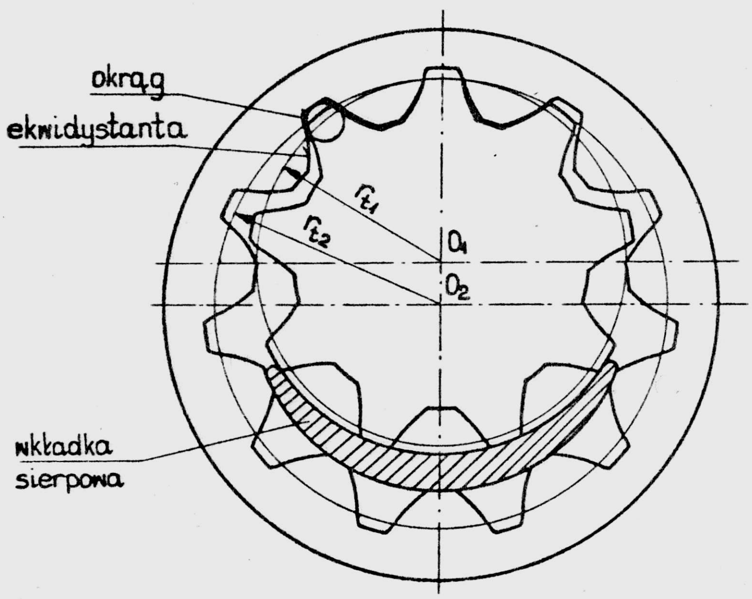
W celu wyznaczenia linii przyporu należy sprawdzić ważność zasady zazębienia (postulatu Willisa). Wykonano to dla kół zębatych hipocykloidalnych o pełnych łukach hopicykloid.

5.3.1. Sprawdzenie ważności zasady zazębienia

Zasada ta wg [26] brzmi: "prosta prostopadła do boku zęba w punkcie styku zębów kół współpracujących musi przechodzić przez punkt styku kół toczących się po sobie bez poślizgu (kół tocznych)".

Pokazane na rys.30 koła 1 i 2 obracają się dookoła swoich środków O_1 i O_2 w ten sposób, że boki zębów pozostają w stałym styku. Koło 1 obracające się z chwilową prędkością kątową ω_1 nadaje wskutek styku boków zębów w punkcie B kołu 2 chwilową prędkość kątową ω_2.





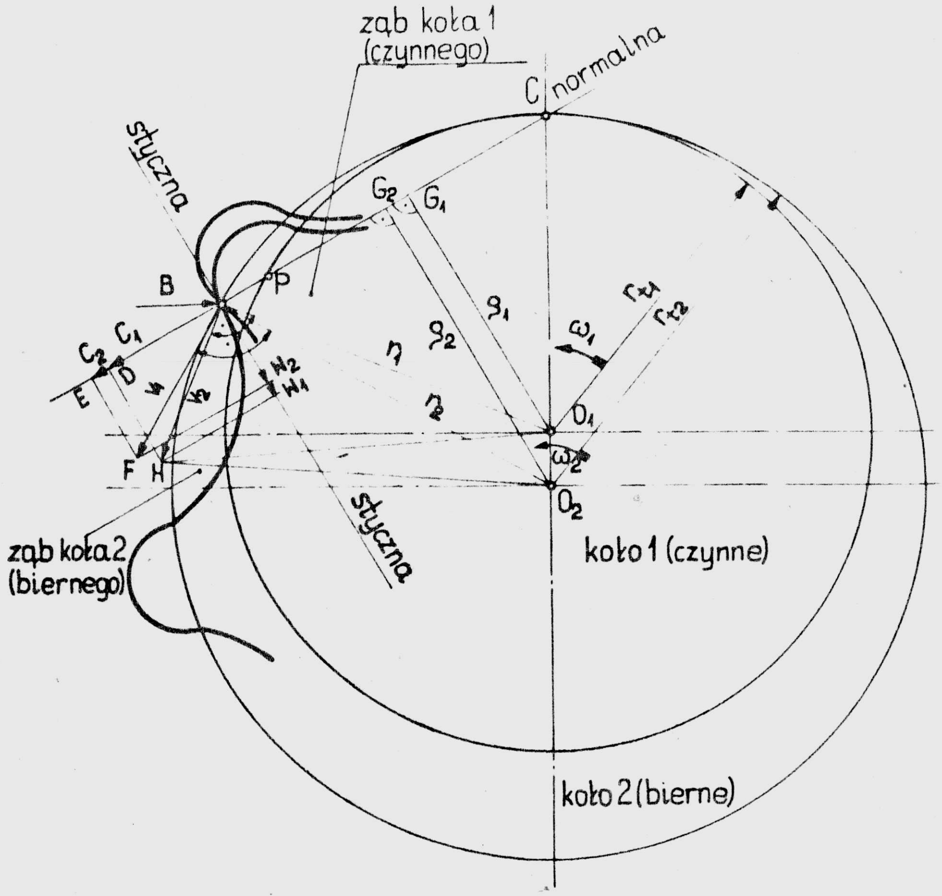
Rys.29. Współpraca zębów o zarysach hipocykloidalnych w pompach zębatych

a) pompy o zazębieniu o łukach całkowitych

b) pompy o zazębieniu o łukach połówkowych

Zgodnie z zasadami kinematyki, w punkcie B otrzymujemy dla koła 1 i 2 chwilowe prędkości:

$$v_1 = r_1 \cdot \omega_1$$
$$v_2 = r_2 \cdot \omega_2 \tag{61}$$



Rys.30. Podstawowa zależność kinematyczna podczas zazębiania się dwóch kół o zarysach hipocykloidalnych

Prędkości te można rozłożyć na składowe styczne do boków zębów W_1, W_2 oraz prostopadłe do nich C_1, C_2. Z podobieństwa trójkątów BDH i O_1G_1B otrzymuje się:

$$\frac{C_1}{v_1} = \frac{\varrho_1}{r_1} \qquad \text{skąd} \qquad C_1 = v_1 \frac{\varrho_1}{r_1} \tag{62}$$

Z podobieństwa trójkątów BEF i O_2G_2B wynika:

$$\frac{C_2}{v_2} = \frac{\varrho_2}{r_2} \qquad \text{skąd} \qquad C_2 = v_2 \frac{\varrho_2}{r_2} \tag{63}$$

Ponieważ, zgodnie z założeniem oba zęby powinny pozostawać w ciągłym styku, więc musi być spełniony warunek:

$$C_1 = C_2 \tag{64}$$

Gdyby $C_1 < C_2$, wówczas ząb koła 2 wyprzedzałby ząb koła 1, a jest to niemożliwe. Gdyby zaś $C_1 > C_2$, wówczas ząb koła 1 wyprzedzałby ząb koła 2, co jest również niemożliwe. W związku z tym:

$$v_1 \frac{\varrho_1}{r_1} = v_2 \frac{\varrho_2}{r_2} \tag{65}$$

Po podstawieniu zależności (61) otrzymuje się:

$$r_1 \cdot \omega_1 \frac{\varrho_1}{r_1} = r_2 \cdot \omega_2 \frac{\varrho_2}{r_2} \tag{66}$$

lub

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \tag{67}$$

Uwzględniając, że w podobnych do siebie trójkątach O_1CG_1 i O_2CG_2 jest:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} \tag{68}$$

można ostatecznie zapisać:

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} \tag{69}$$

Z zależności (69) wynika, że $\omega_1 r_{t_1} = \omega_2 r_{t_2}$ = prędkości obrotowej w punkcie C. W związku z tym wykreślone ze środka O_1 koło o promieniu r_{t_1} i ze środka O_2 koło o promieniu r_{t_2} mają jednakowe prędkości obwodowe są to więc koła toczące się po sobie bez poślizgu (koła toczne), Uwzględniając, że punkt C jest wynikiem przecięcia się linii prostopadłej do boków zębów w punkcie styczności z linią łączącą środki obrotów obu kół można przyjąć, że zazębienie hipocykloidalne spełnia zasadę zazębienia.

W podobny sposób można udowodnić zasadę zazębienia dla zazębienia hipocykloidalnego o połówkowych łukach hipocykloid.

5.3.2. Linia przyporu

Z zasady zazębienia (rys.29) oraz z konstrukcji kół zębatych hipocykloidalnych (rys.24, 25) wynika, że:

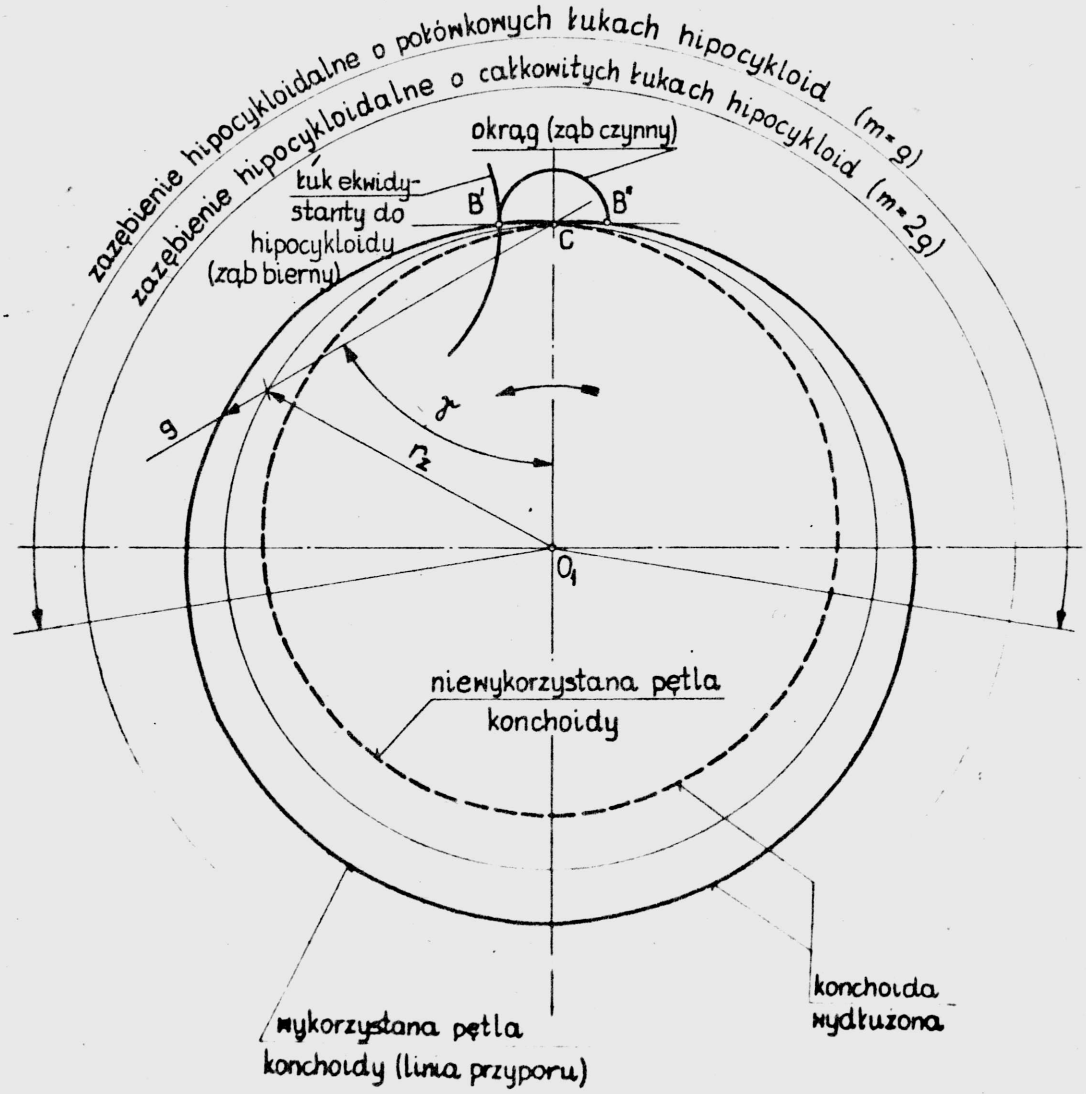
- prosta prostopadła do boków współpracujących zębów w punkcie ich styku B przechodzi przez punkt centralny zazębienia C
- punkt przyporu B leży na tej prostej i jest odległy o wartość g

od bieguna P powstałego w wyniku przecięcia się tej prostej z kołem tocznym koła zębatego czynnego.

Reguły te są identyczne z regułami konstrukcji krzywych zwanych konchoidami, a konkretnie konchoidy wydłużonej [2]. Linia przyporu zazębienia hipocykloidalnego jest więc konchoidą wydłużoną o równaniach parametrycznych:

$$x = 2r_z\cos^2\gamma + g\cos\gamma$$
$$y = 2r_z\cos\gamma\sin\gamma + g\sin\gamma \qquad (70)$$

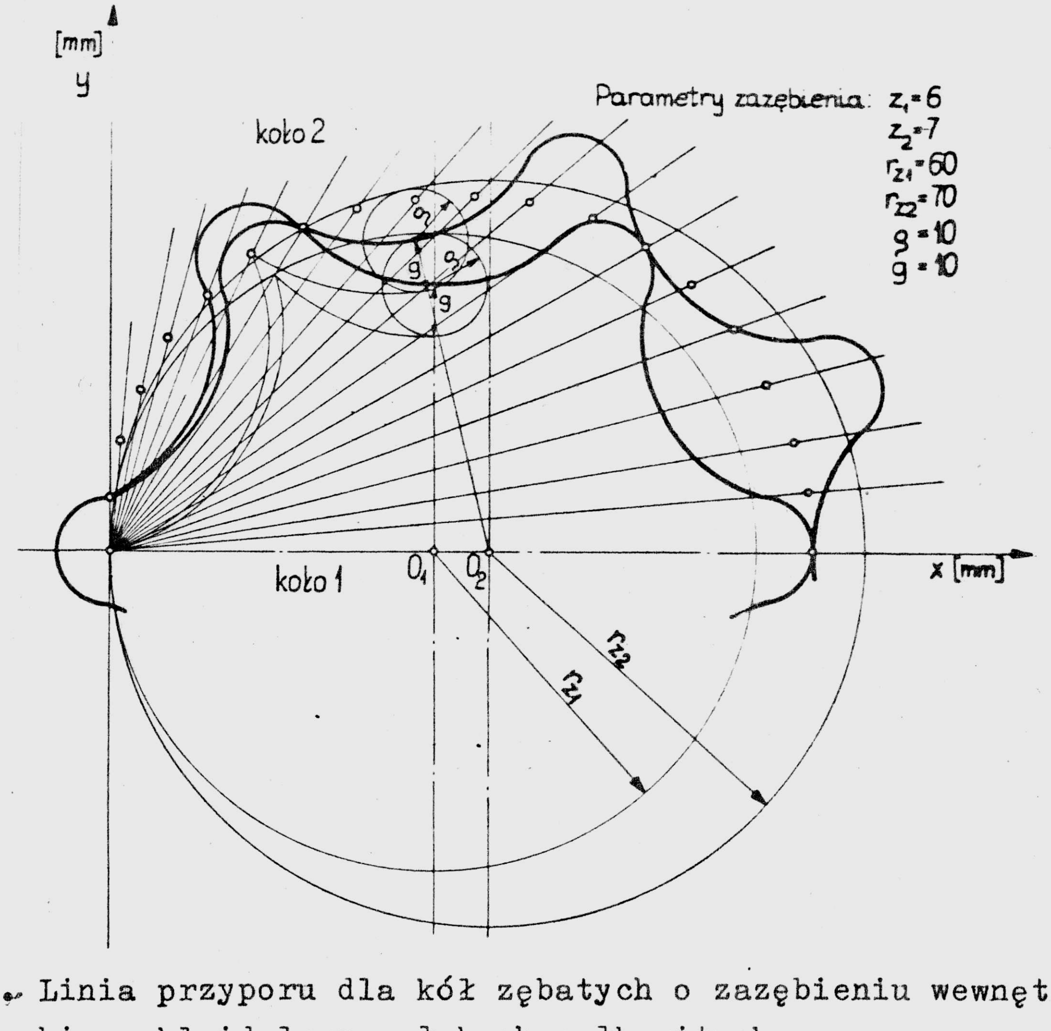
i kształcie pokazanym na rysunku 31.



Rys.31. Kształt linii przyporu dla kół zębatych o zazębieniu wewnętrznym i hipocykloidalnym zarysie zęba

Linia przyporu w kształcie konchoidy jest ważna zarówno dla zazębienia hipocykloidalnego w pełnych łukach, jak i połówkowych łukach hipocykloid. W pierwszym wypadku stanowi ona całą zewnętrzną pętlę konchoidy zaś w drugim jej wycinek, którego wielkość zależy od różnicy zębów $z_2 - z_1$ oraz skrócenia głowy i stopy zęba. Zarówno w jednym jak i drugim przypadku początkowym punktem przyporu jest punkt B', w którym stykają się okrąg głowy zęba koła czynnego z ekwidystantą głowy koła biernego. Końcowym punktem przyporu jest punkt B'' symetrycznie położony względem osi zęba. Wycinek linii przyporu $B'B''$ jest wycinkiem wyobrażalnym, gdyż po obrocie koła czynnego o kąt 2π punkt przyporu przechodzi z jednej strony zęba po zarysie głowy na drugą i przypór rozpoczyna się powtórnie w punkcie B'.

Na rys.32 podano przykładowo linię przyporu wyznaczoną dla pary kół hipocykloidalnych o łukach całkowitych o liczbach zębów koła czynnego $z_1 = 6$ i koła biernego $z_2 = -7$. Inne parametry zazębienia podano na rysunku. Punkty określające linię przyporu wyznaczono w



Rys.32. Linia przyporu dla kół zębatych o zazębieniu wewnętrznym hipocykloidalnym o łukach całkowitych

dwojaki sposób, na drodze obliczeniowej wg równań (70) i konstrukcyjnej jako kolejne punkty styku kół zębatych przetaczanych po sobie. Obydwa rodzaje punktów pokrywają się ze sobą, co potwierdza fakt, że linia przyporu jest konchoidą wydłużoną. Linię przyporu wyznaczono jedynie dla połowy obwodu, gdyż druga połowa jest symetryczna.

5.4. Wartości chwilowe wydajności: minimalna, maksymalna, średnia i jednostkowa właściwa

Z warunków geometrycznych (rys.33) wynika, że odległość u punktu przyporu B od bieguna zazębienia C określona jest zależnością:

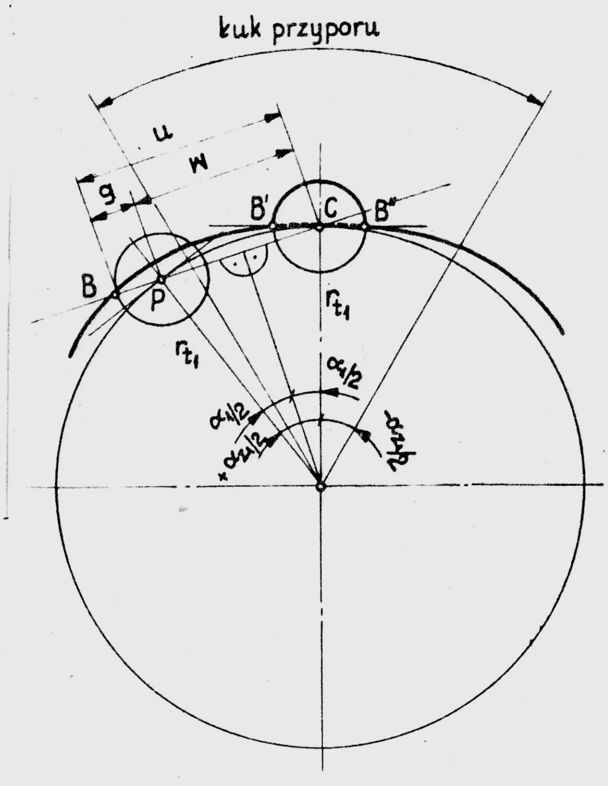
$$u = W \pm g \tag{71}$$

Uwzględniając że:

$$W = 2r_{t_1} \sin \frac{\alpha_1}{2} \tag{72}$$

otrzymuje się

$$u = 2r_{t_1} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \pm g \tag{73}$$



Rys.33.
Wyznaczanie odległości u punktu przyporu od punktu centralnego zazębienia C, dla zazębienia hipocykloidalnego

Łuk przyporu, na którym odbywa się współpraca zębów związana z przetłaczaniem cieczy ze strony ssawnej na tłoczną pompy składa się z dwóch części. W związku z tym kąt α_1 określający położenie punktu przyporu zmienia się w granicach:

$$-\frac{\alpha_{z_1}}{2} \leqslant \alpha_1 \leqslant +\frac{\alpha_{z_1}}{2}$$

przy czym

$$\alpha_{z_1} = \frac{2\pi}{z_1}$$

Dla kątów

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_{z_1}}{2} \div 0$$

ważna jest zależność

$$u = 2r_{t_1}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - g\ ,$$

zaś dla kątów

$$\alpha_1 = 0 \div +\frac{\alpha_{z_1}}{2}$$

zależność

$$u = 2r_{t_1}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + g\ .$$

Podstawiając zależność (73) do ogólnie ważnego dla pomp zębatych wzoru (7) otrzymuje się wydajność chwilową pomp zębatych o zazębieniu hipocykloidalnym:

$$Q_u = \frac{dq_u}{dt} = \frac{b\omega_1}{2}\left\{r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right)\left[2r_{t_1}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + g\right]^2\right\} \tag{74}$$

Z analizy geometrycznej i wzoru wynika, że maksymalna wartość wydajności chwilowej osiągnięta zostanie wówczas, gdy $\alpha_1 = 0$ i wynosić będzie:

$$Q_{umax} = \frac{b\omega_1}{2}\left\{r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right)g^2\right\} \tag{75}$$

Minimalna wartość wydajności chwilowej wystąpi, gdy

$$\alpha_1 = \pm \frac{\alpha_{z_1}}{2} = \mp \frac{\pi}{z_1}$$

i wynosić będzie:

$$Q_{umin} = \frac{b\omega_1}{2} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \cdot \left[2r_{t_1} \sin\left(\frac{\pi}{2z_1}\right) + g\right]^2 \right\} \tag{76}$$

Aby otrzymać objętość cieczy q_z wypartą przy obrocie koła pędzącego o kąt α_{z_1} należy zależność (74) scałkować w granicach

$$\left(-\frac{\alpha_{z_1}}{2} \div 0\right) \quad \text{oraz} \quad \left(0 \div +\frac{\alpha_{z_1}}{2}\right),$$

przy czym należy uwzględnić wg uprzednich wskazówek odpowiedni znak przy parametrze g oraz podstawienie $dt = d\alpha_1/\omega_1$.

$$q_z = \frac{b}{2} \int_{-\frac{\alpha_{z_1}}{2}}^{0} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \cdot \left[2r_{t_1} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - g\right]^2 \right\} d\alpha_1 +$$

$$+ \frac{b}{2} \int_{0}^{+\frac{\alpha_{z_1}}{2}} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \cdot \left[2r_{t_1} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + g\right]^2 \right\} d\alpha_1 \tag{77}$$

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się ostatecznie:

$$q_{z_1} = \frac{b \cdot \alpha_{z_1}}{2} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \cdot \left[4 \frac{r_{t_1}}{\alpha_{z_1}} \left(\frac{\alpha_{z_1}}{2} - \sin \frac{\alpha_{z_1}}{2}\right) + 16\left(1 - \cos \frac{\alpha_{z_1}}{4}\right) + g^2\right] \right\} \tag{78}$$

Postępując wg zasad podanych w rozdziale 2, otrzymuje się: wzory na wydajność właściwą q oraz wydajność teoretyczną Q_t równą wydajności średniej $Q_{uśr}$:

- wydajność właściwa

$$q = q_z \cdot z_1 = \frac{bz_1 \alpha_{z_1}}{2} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \left[4 \frac{r_{t_1}}{\alpha_{z_1}} \left(\frac{\alpha_{z_1}}{2} - \sin \frac{\alpha_{z_1}}{2} \right) + 16 \left(1 - \cos \frac{\alpha_{z_1}}{4} \right) + g^2 \right] \right\} \tag{79}$$

- wydajność teoretyczna

$$Q_t = Q_{uśr} = \frac{bnz_1 \alpha_{z_1}}{2} \left\{ r_{w_1}^2 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}} r_{w_2}^2 - r_{t_1}(r_{t_1} + r_{t_2}) - \left(1 + \frac{r_{t_1}}{r_{t_2}}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[4 \frac{r_{t_1}}{\alpha_{z_1}} \left(\frac{\alpha_{z_1}}{2} - \sin \frac{\alpha_{z_1}}{2} \right) + 16 \left(1 - \cos \frac{\alpha_{z_1}}{4} \right) + g^2 \right] \right\} \tag{80}$$

Podstawiając do wzoru (79) wyprowadzone uprzednio zależności dla zazębienia hipocykloidalnego o postaci:

$$r_{w_1} = m \left(\frac{z_1}{2} + y_1 - k_1\right), \qquad r_{w_2} = m \left(\frac{z_2}{2} - y_2 + k_2\right) \tag{81}$$

oraz

$$r_{t_1} = \frac{z_1 m}{2}, \qquad r_{t_2} = \frac{z_2 m}{2} \tag{82}$$

i pamiętając, że możliwe jest tylko zazębienie wewnętrzne $(-z_2)$, po przekształceniach otrzymuje się zależność na jednostkową wydajność właściwą pompy zębatej o zazębieniu hipocykloidalnym w postaci bezwymiarowej:

$$\frac{q}{\pi b m^2} = \left(\frac{z_1}{2} + y_1 - k_1\right)^2 - \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2} - y_2 + k_2\right)^2 - \frac{z_1}{4}(z_1 - z_2) - \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right) \cdot$$

$$\left[\frac{z_1^3}{2\pi} \left(\frac{\pi}{z_1} - \sin \frac{\pi}{z_1} \right) + 4 \frac{g}{m} \frac{z_1^2}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2 z_1} \right) + \frac{g^2}{m^2} \right] \tag{83}$$

Po uwzględnieniu cech konstrukcyjnych rodzaju zazębienia hipocykloidalnego (moduł m, współczynnik wysokości głowy i stopy zęba y_1, y_2, współczynniki skrócenia głowy i stopy zęba k_1, k_2) wzór ten przyjmie odpowiednio postać:

- dla zazębienia hipocykloidalnego o łukach całkowitych $(m = 2\varrho)$

$$\frac{q}{\pi b m^2} = \left(\frac{z_1}{2} + \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2} - 1 + \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{z_1}{4}(z_1 - z_2) - \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{z_1^3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{z_1} - \sin\frac{\pi}{z_1}\right) + 2v\,\frac{z_1^2}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2z_1}\right) + \frac{v^2}{4}\right] \tag{84}$$

- dla zazębienia hipocykloidalnego o łukach połówkowych $(m = \varrho)$

$$\frac{q}{\pi b m^2} = \left(\frac{z_1}{2} + v - k_1\right)^2 - \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2} - y_2 + k_2\right)^2 - \frac{z_1}{4}(z_1 - z_2) - \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{z_1^3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{z_1} - \sin\frac{\pi}{z_1}\right) + 4v\,\frac{z_1^2}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2z_1}\right) + v^2\right] \tag{85}$$

Przy czym $y_2 = f(v)$ wyznacza się z nomogramu (rys.27).

5.5. Zależność wydajności od podstawowych wielkości geometrycznych kół

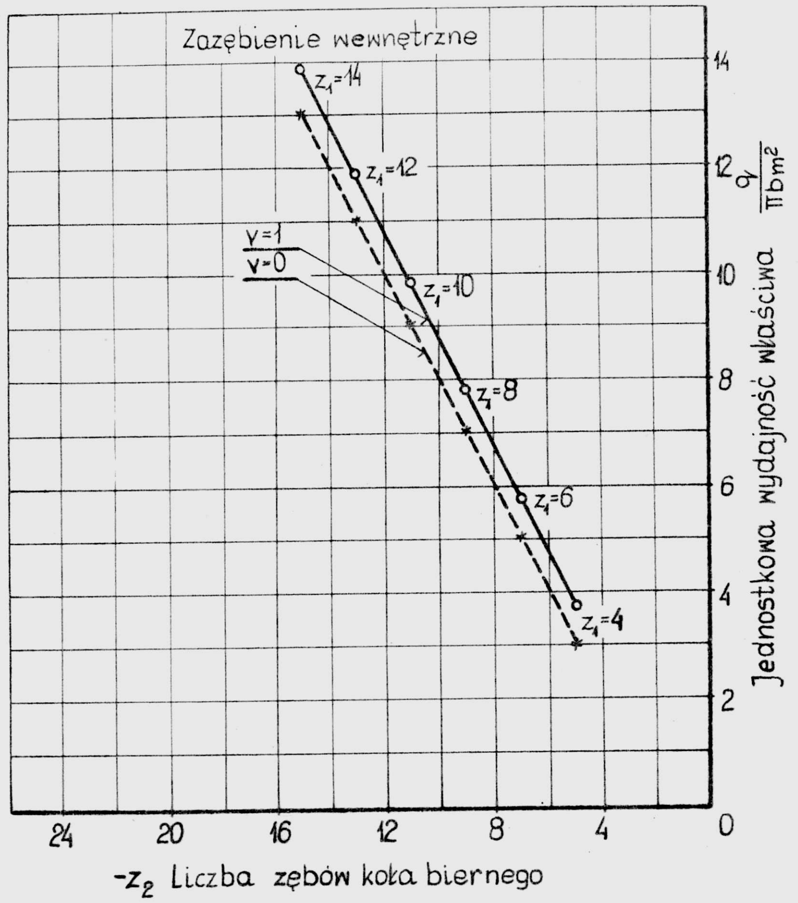
Z analizy wzorów (84), (85) wynika, że na wydajność pompy zębatej o zazębieniu wewnętrznym i hipocykloidalnym zarysie zębów mają wpływ:

- liczby zębów koła czynnego i biernego (z_1, z_2),
- współczynnik odległości ekwidystanty od hipocykloidy zasadniczej (v),
- współczynniki skrócenia głowy i stopy zęba (k_1, k_2) (w wypadku zazębienia hipocykloidalnego o połówkowych łukach hipocykloidy zasadniczej).

Wykresy ilustrujące wpływ tych parametrów na jednostkową wydajność właściwą pokazano na rys.34-38.

Wykresy te wykonano jedynie dla zazębienia wewnętrznego $(z_2 < 0)$, bowiem tylko takie jest możliwe do zastosowania w budowie pomp zębatych.

Na rys.34, 35 pokazano przebieg zależności $q/(\pi b m^2) = f(z_2)$ dla z_1 jako parametru dla przypadku zazębienia hipocykloidalnego o całkowitych i połówkowych łukach hipocykloidy.

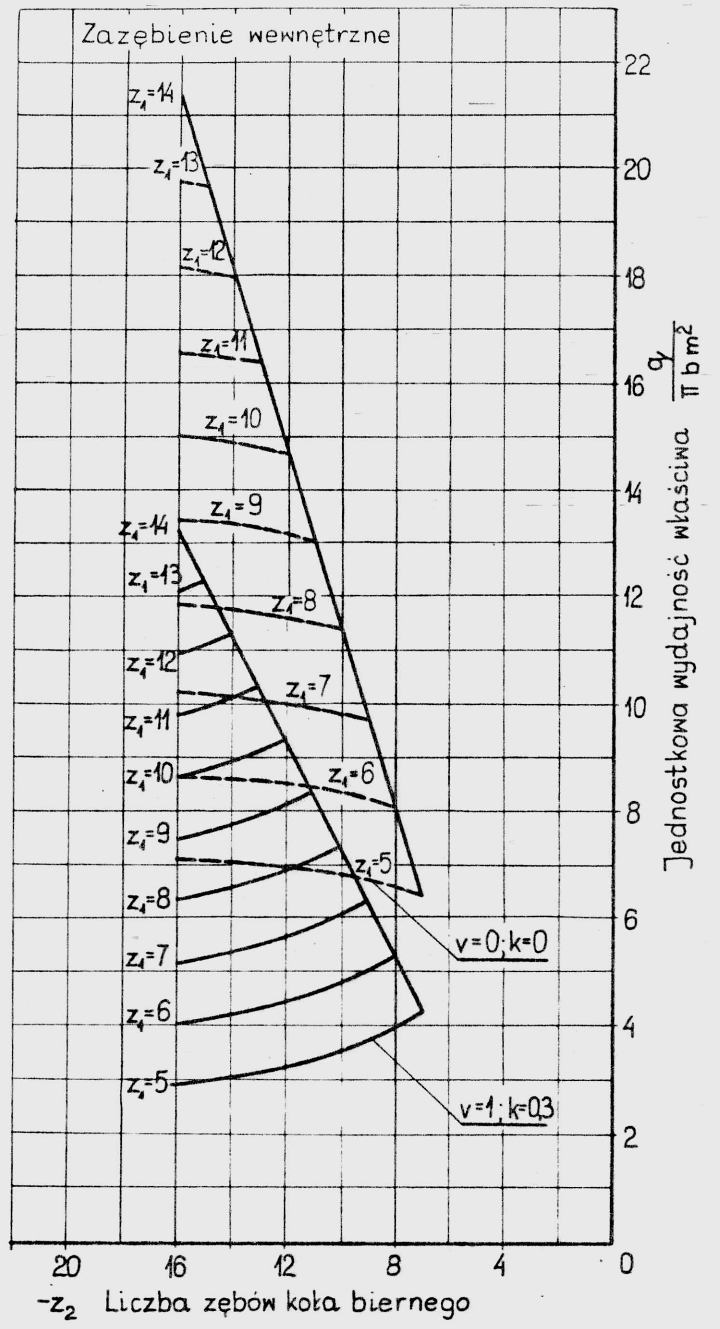


Rys.34. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1. Zazębienie hipocykloidalne o łukach całkowitych $(m = 2\varrho)$

Rozpatrywano dwa przypadki konstrukcji kół zębatych:

- teoretyczny oznaczony na rysunkach linią kreskową, gdy koła zębate mają kształt hipocykloid zasadniczych (patrz rys.23), tzn. gdy $v = 0$,
- rzeczywisty oznaczony na rysunkach linią ciągłą, gdy w kołach zębatych uwzględniono odpowiednie przesunięcia zarysu i skrócenia głowy i stopy zęba (patrz rys.25, 26), tzn. gdy $v = 1$ dla zazębienia o łukach całkowitych (rys.34) oraz $v = 1$, $k_1 = k_2 = k = 0,3$ dla zazębienia o łukach połówkowych (rys.35).

Wpływ liczby zębów kół pompy ma podobny charakter jak w przypadku zazębienia ewolwentowego i cykloidalnego. Z wykresów wynika, że im większa jest liczba zębów koła czynnego (z_1), tym większa jest jednostkowa wydajność właściwa $q/(\pi bm^2)$. Jest to ważne zarówno dla zazębienia o łukach całkowitych jak i połówkowych dla przypadku teoretycznego $(v = 0)$ i rzeczywistego $(v = 1)$. Przykładowo dla zazębie-



Rys.35. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1. Zazębienie hipocykloidalne o łukach połówkowych $(m = \rho)$

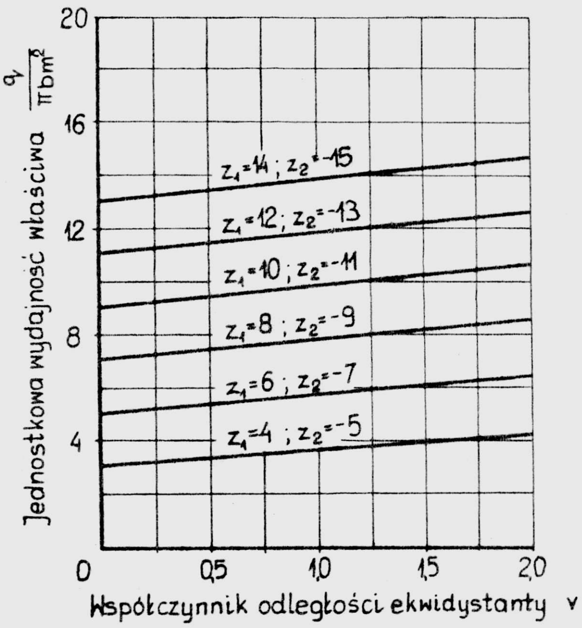
nia hipocykloidalnego o łukach całkowitych oraz $v = 0$ wzrost liczby zębów koła czynnego od $z_1 = 6$ do $z_1 = 10$ powoduje wzrost jednostkowej wydajności właściwej blisko 1,7 raza.

Liczba zębów koła biernego (z_2) w przypadku zazębienia o całkowitych łukach hipocykloid nie ma praktycznie wpływu na wydajność.

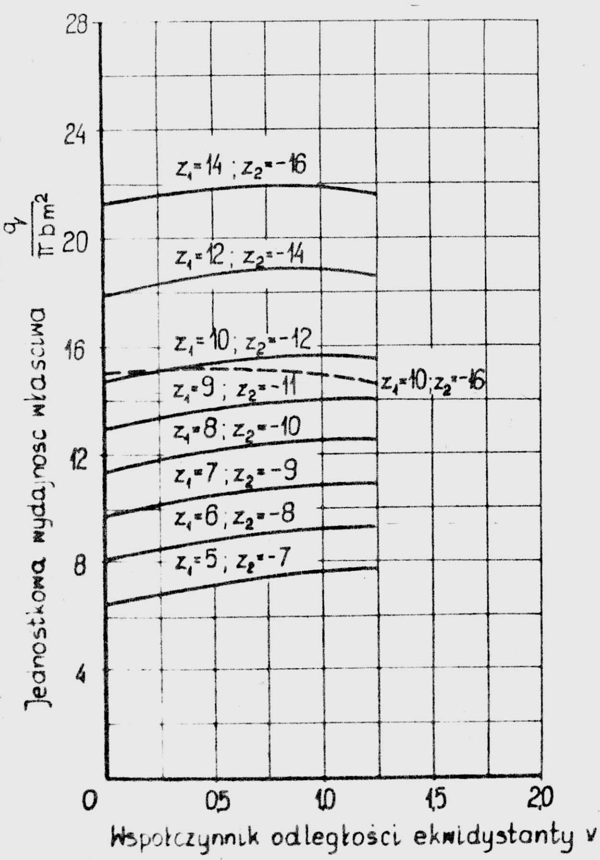
Jest ona bowiem, jak to wynika z zasady konstrukcji pomp o takim zazębieniu, ściśle powiązana z liczbą zębów koła czynnego z_1 i wynosi $z_2 = z_1 + 1$. Dla zazębienia o połówkowych łukach hipocykloid, w którym $z_2 \geqslant z_1 + 2$ zmiana liczby zębów koła biernego z_2 powoduje kilkuprocentowy wzrost względnie spadek wydajności pompy, zależnie od wartości współczynników v i k.

W przypadku, gdy $v = 1$ i $k = 0$ oraz $v = 1$ i $k_1 = k_2 = k = 0,3$ (rzeczywiste kształty kół zębatych hipocykloidalnych) co obrazują na rys.34, 35 linie ciągłe, wydajność pomp o zazębieniu hipocykloidalnym o pełnych łukach hipocykloid nieznacznie się zwiększa zaś wydajność pomp o zazębieniu o połówkowych łukach hipocykloid wyraźnie zmniejsza się średnio o ok. 50% wartości uzyskiwanych dla $v = 0$ i $k = 0$. W pierwszym przypadku spowodowane jest to zwiększaniem się pola powierzchni wrębu koła zębatego spowodowanego przesunięciem zarysu zęba zaś, w drugim jego zmniejszeniem wynikającym głównie ze skrócenia głowy i stopy zęba.

Na rys.36, 37 pokazano przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(v)$, gdzie z_1, z_2 są parametrami, odpowiednio dla przypadku zazębienia hipocykloidalnego o całkowitych i połówkowych łukach hipocykloidy.



Rys.36. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od współczynnika odległości ekwidystanty v, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2 i zazębienia o łukach całkowitych ($m = 2\varrho$)

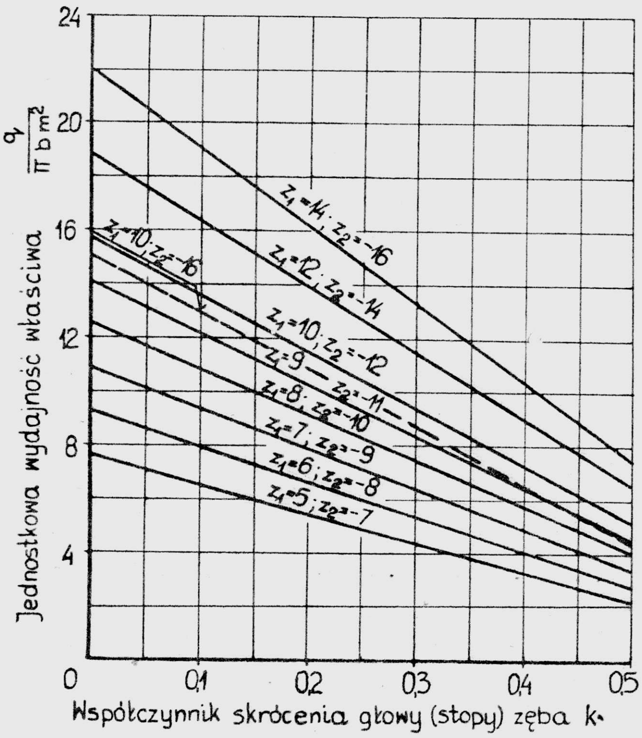


Rys.37. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od współczynnika odległości ekwidystanty v, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2 i zazębienia o łukach połówkowych $(m = \varrho)$

W wypadku zębów o łukach połówkowych nie uwzględniano skrócenia głowy i stopy zęba, czyli $k_1 = k_2 = k = 0$. Z wykresów widać, że zwiększanie współczynnika v odległości ekwidystanty do hipocykloidy powoduje wzrost jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$. Wzrost ten jest większy dla zębów o całkowitych łukach hipocykloidy. W jednym i drugim przypadku zazębienia jest on stosunkowo niewielki, gdyż nie przekracza 10% wartości początkowej, rozpatrując możliwy do zastosowania zakres wartości współczynnika v = 0–2 względnie 1,25. Wzrost ten spowodowany jest tym, że odsuwanie łuku ekwidystanty od łuku hipocykloidy zasadniczej i związane z tym zaokrąglanie głowy zęba łukiem okręgu powoduje zwiększanie średnicy wierzchołkowej koła, a więc pola powierzchni wrębów i objętości wyporowej pompy. W przypadku zazębienia o łukach połówkowych przy $v \geqslant 1$ następuje spadek wydajności, gdyż przyrost pola powierzchni wrębu wywołany zwiększeniem średnicy wierzchołkowej jest eliminowany przez krzyżowo nakładające się pola ograniczone łukami ekwidystant.

Zwiększanie liczby zębów z_2 koła biernego przy ustalonej liczbie zębów koła czynnego z_1 (krzywa kreskowa na rys.37) w przypadku zazębienia o łukach połówkowych powoduje nieznaczny spadek wydajności. Przykładowo dla liczby zębów $z_1 = 10$ zwiększenie liczby zębów z_2 z 12 do 16 wywołuje spadek wydajności ok. 5%.

Na rys.38 przedstawiono przebieg zależności $q/(\pi bm^2) = f(k)$ dla $v = 1$, gdzie z_1, z_2 są parametrami zwiększania współczynnika skrócenia głowy i stopy zęba powoduje znaczny spadek wydajności. Przykładowo dla $z_1 = 10$, $z_2 = -12$ zwiększenie współczynnika skrócenia głowy i stopy zęba od wartości 0 do 0,3 powoduje spadek wydajności o ok. 40%. Wywołane jest to zmniejszaniem się odpowiednich średnic koła zębatego i jednocześnie zmniejszaniem się pola powierzchni wrębów i objętości wyporowej kół zębatych. Zwiększanie liczby zębów z_2 koła biernego, przy zachowaniu tej samej liczby zębów koła czynnego z_1 oraz innych parametrów zazębienia (krzywa kreskowa na rys.38) powoduje nieznaczny, kilkuprocentowy spadek wydajności.



Rys.38. Przebieg zależności jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ od współczynnika skrócenia głowy (stopy) zęba k, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2 i zazębienia o łukach połówkowych $(m = \rho)$

5.6. Współczynnik nierównomierności wydajności

Podstawiając do wyrażenia (14) zależności (75), (76), (80) oraz uwzględniając związki (81), (82) otrzymuje się po przekształceniach wzór na współczynnik nierównomierności wydajności pompy zębatej o zazębieniu wewnętrznym i hipocykloidalnym zarysie zęba:

$$\delta = \frac{\left(1-\frac{z_1}{z_2}\right)\left[z_1^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2z_1}\right) + 2z_1\frac{g}{m}\sin\left(\frac{\pi}{2z_1}\right)\right]}{\left(\frac{z_1}{2}+y_1-k_1\right)^2-\frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2}-y_2+k_2\right)^2-\frac{z_1}{4}(z_1-z_2)-\left(1-\frac{z_1}{z_2}\right)\left[\frac{z_1^3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{z_1}-\sin\frac{\pi}{z_1}\right)+4\frac{g}{m}\frac{z_1^2}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2z_1}\right)+\frac{g^2}{m^2}\right]} \tag{86}$$

przy czym dla zazębienia hipocykloidalnego o pełnych łukach hipocykloidy $(m = 2\varrho)$ ma on postać:

$$\delta = \frac{\left(1-\frac{z_1}{z_2}\right)\left[z_1^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2z_1}\right) + z_1 v\sin\left(\frac{\pi}{2z_1}\right)\right]}{\left(\frac{z_1}{2}+\frac{v}{2}\right)^2-\frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2}-1+\frac{v}{2}\right)^2-\frac{z_1}{4}(z_1-z_2)-\left(1-\frac{z_1}{z_2}\right)\left[\frac{z_1^3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{z_1}-\sin\frac{\pi}{z_1}\right)+2v\frac{z_1^2}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2z_1}\right)+\frac{v^2}{4}\right]} \tag{87}$$

zaś dla zazębienia o połówkowych łukach hipocykloidy $(m = \varrho)$ ma on postać:

$$\delta = \frac{\left(1-\frac{z_1}{z_2}\right)\left[z_1^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2z_1}\right) + 2z_1 v\sin\left(\frac{\pi}{2z_1}\right)\right]}{\left(\frac{z_1}{2}+v-k_1\right)^2-\frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2}{2}-y_2+k_2\right)^2-\frac{z_1}{4}(z_1-z_2)-\left(1-\frac{z_1}{z_2}\right)\left[\frac{z_1^3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{z_1}-\sin\frac{\pi}{z_1}\right)+4v\frac{z_1^2}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2z_1}\right)+v^2\right]} \tag{88}$$

5.7. Zależność współczynnika nierównomierności wydajności od podstawowych wielkości geometrycznych kół

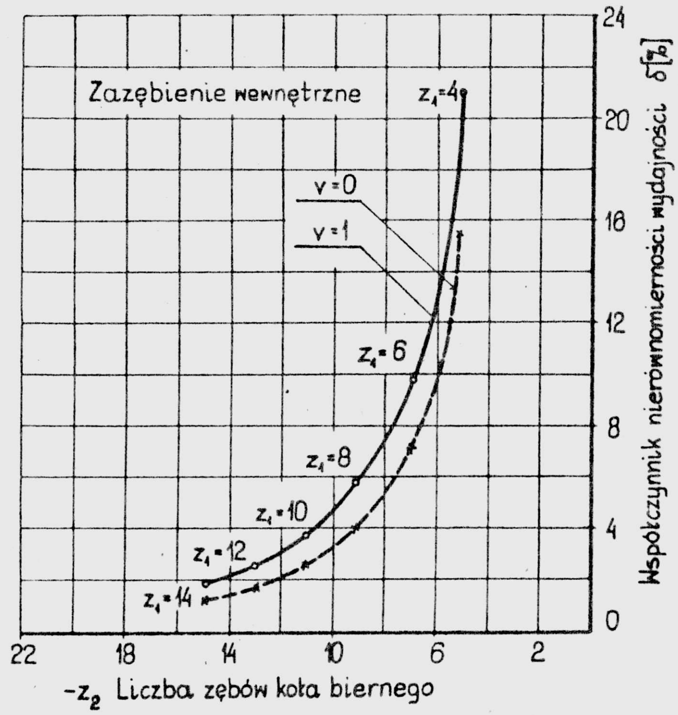
Z analizy wzorów (87), (88) wynika, że podobnie jak na wydajność również na jej nierównomierność mają wpływ:

- liczby zębów koła czynnego i biernego (z_1, z_2),
- współczynnik odległości ekwidystanty od hipocykloidy zasadniczej (v),
- współczynniki skrócenia głowy i stopy zęba k_1, k_2 (w przypadku zazębienia hipocykloidalnego o połówkowych łukach hipocykloidy zasadniczej).

Wykresy ilustrujące wpływ tych parametrów na współczynnik nierównomierności wydajności δ pokazano na rys.39-43.

Odpowiednie wykresy wykonano również tylko dla zazębienia wewnętrznego $(z_2 < 0)$.
Na rys.39, 40 przedstawiono przebiegi zależności $\delta = f(z_2)$ dla z_1 jako parametru dla zazębienia hipocykloidalnego o całkowitych i połówkowych łukach hipocykloidy. Podobnie jak w przypadku wydajności właściwej rozpatrywano koła "teoretyczne" i "rzeczywiste".

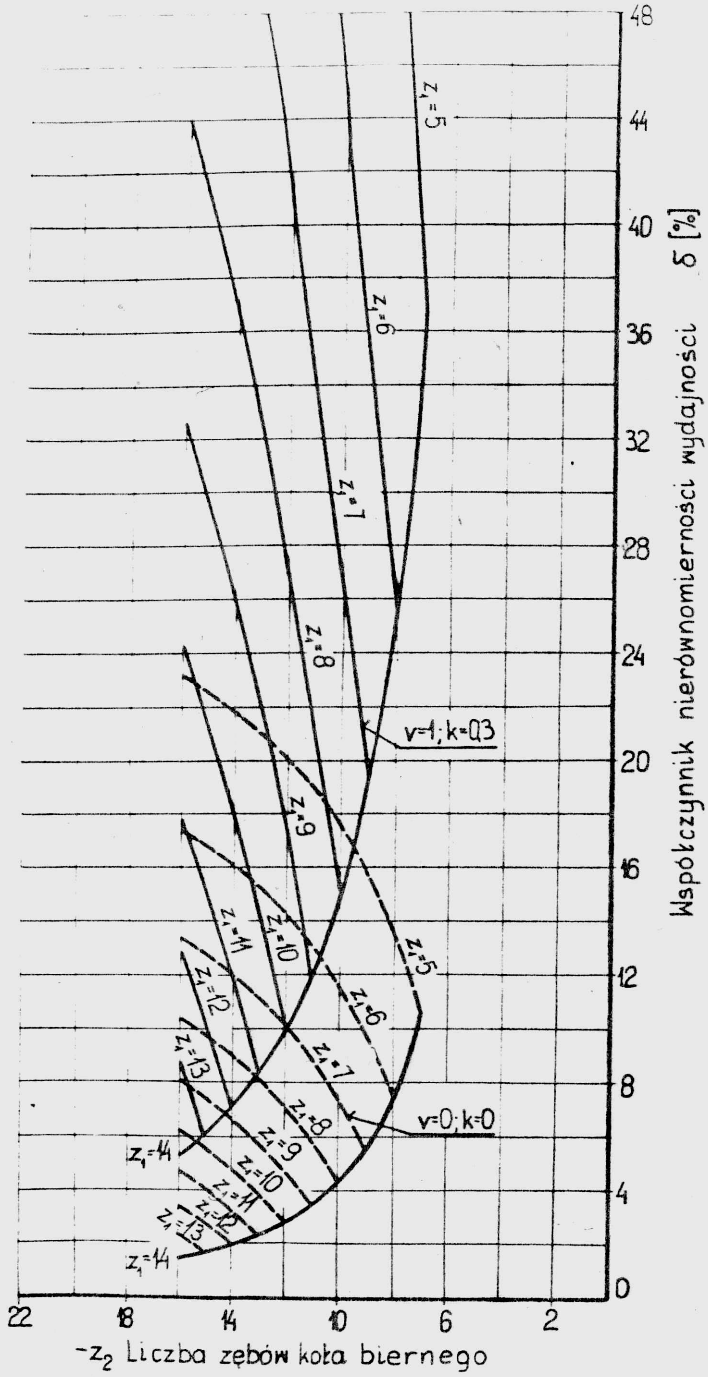
Wpływ liczby zębów kół pompy ma podobny charakter jak w przypadku zazębienia ewolwentowego i cykloidalnego.



Rys.39. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1, dla zazębienia o łukach całkowitych $(m = 2\varrho)$

Im większa jest liczba zębów koła czynnego (z_1), tym mniejsza jest wartość współczynnika nierównomierności wydajności δ. Jest to ważne dla zazębienia o łukach całkowitych i połówkowych dla przypadku teoretycznego $(v = 0)$ i rzeczywistego $(v = 1)$. Przykładowo z rys.39 widać, że dla zazębienia hipocykloidalnego o łukach całkowitych oraz $v = 0$ wzrost liczby zębów koła czynnego od $z_1 = 6$ do $z_1 = 10$ powoduje spadek wartości współczynnika δ z 7% do 2%.

Liczba zębów koła biernego (z_2) w przypadku zazębienia o całkowitych łukach hipocykloid nie ma praktycznie wpływu na współczynnik δ.



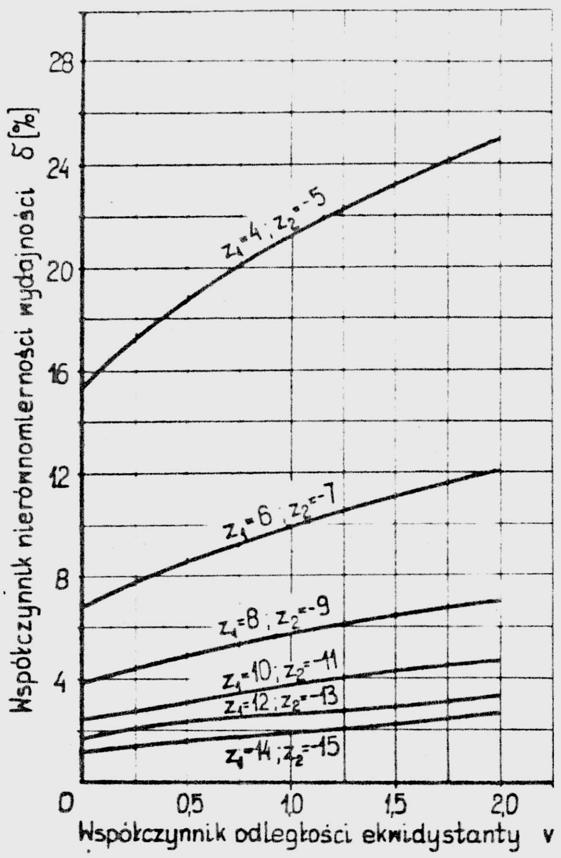
Rys.40. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od liczby zębów koła biernego z_2, dla różnych liczb zębów koła czynnego z_1, dla zazębienia o łukach połówkowych ($m = \rho$)

Jest ona bowiem, jak to wynika z zasady konstrukcji pomp o takim zazębieniu, ściśle powiązana z liczbą zębów koła czynnego z_1 i wynosi $z_2 = z_1 + 1$.

W przypadku zazębienia o połówkowych łukach hipocykloid, dla których liczba zębów koła biernego wynosi $z_2 \geqslant z_1 + 2$ wzrost liczby zębów koła biernego powoduje znaczne powiększenie wartości współczynnika δ. Przykładowo dla zazębienia teoretycznego ($v = 0$, $k = 0$) i ustalonej liczby zębów koła czynnego $z_1 = 10$ zwiększenie liczby zębów koła biernego z_2 od 12 do 16 wywołuje wzrost wartości współczynnika nierównomierności wydajności z 3% do 6%.

W przypadku, gdy $v = 1$ a $k = 0$ oraz $v = 1$ i $k_1 = k_2 = k = 0,3$ (rzeczywiste kształty kół zębatych hipocykloidalnych) co obrazują na rys.39, 40 linie ciągłe, współczynnik nierównomierności wydajności pomp o zazębieniu hipocykloidalnym o całkowitych łukach hipocykloid nieznacznie się zwiększa, zaś o połówkowych łukach kilkakrotnie się zwiększa w porównaniu do przypadku teoretycznego. Przykładowo przyjmując liczbę zębów koła czynnego $z_1 = 10$, a koła biernego $z_2 = -12$ i porównując ze sobą wartości współczynnika δ otrzymuje się jego wzrost z około 3% dla przypadku teoretycznego do 10% dla przypadku rzeczywistego. Jest to spowodowane skróceniem głowy i stopy zęba, a przez to zmniejszenie pola powierzchni wrębu, w którym przenoszony jest czynnik ze strony ssawnej na tłoczną w stosunku do pola powierzchni zęba, który oddziela kolejne wręby i powoduje przerwę w przetłaczaniu cieczy.

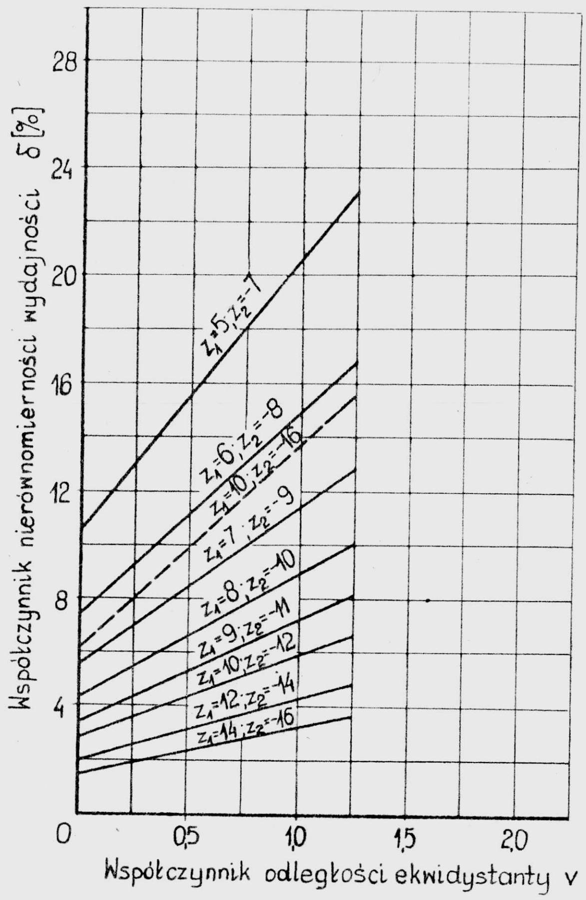
Na rys.41, 42 pokazano przebieg zależności $\delta = f(v)$, dla z_1 i z_2 jako parametru, odpowiednio dla przypadku zazębienia hipocykloidalnego o całkowitych i połówkowych łukach hipocykloidy. Z wykresów widać, że zwiększanie współczynnika v odległości ekwidystanty od hipocykloidy powoduje wzrost współczynnika nierównomierności wydajności δ. Przykładowo dla zazębienia o połówkowych łukach hipocykloid i liczbach zębów $z_1 = 6$ i $z_2 = -8$ zmiana współczynnika $v = 0-1,25$ powoduje wzrost współczynnika δ od 7,5% do 17%. Dla większych liczb zębów wzrost ten jest mniejszy co jest widoczne na tym samym wykresie dla liczb zębów $z_1 = 10$, $z_2 = -12$, gdzie przy zmianie współczynnika $v = 0-1,25$ otrzymuje się wzrost współczynnika δ od 3% do 7%. Analizując wykresy zauważa się również, że wzrost współczynnika δ spowodowany wzrostem współczynnika v jest większy dla zazębienia hipocykloidalnego o łukach połówkowych. Przyjmując dla obu typów zazębień jednakową liczbę zębów koła czynnego $z_1 = 10$, liczbę zębów koła biernego $z_2 = -11$ i $z_2 = -12$ oraz zakładając zmianę współczynnika $v = 0-1,25$ otrzymuje się dla zazębienia o łukach całkowitych wzrost δ z 2,5% do 5% zaś dla zazębienia o łukach połówkowych z 3% do 7%.



Rys.41. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika odległości ekwidystanty v, dla wybranych liczb zębów z_1 i z_2 i zazębienia o łukach całkowitych ($m = 2\varrho$)

W przypadku zazębienia o łukach połówkowych zwiększanie liczby zębów koła biernego z_2 przy ustalonej liczbie zębów koła czynnego z_1 (rys.42 - krzywa kreskowa) powoduje wzrost współczynnika nierównomierności wydajności. Przykładowo, ustalając liczbę zębów koła czynnego równą $z_1 = 10$ i zwiększając liczbę zębów koła biernego z $z_2 = -12$ do $z_2 = -16$, wywołuje się wzrost współczynnika δ o 100-150% wartości początkowej w zależności od wartości współczynnika v zmniejszającego się w granicach 0-1,25.

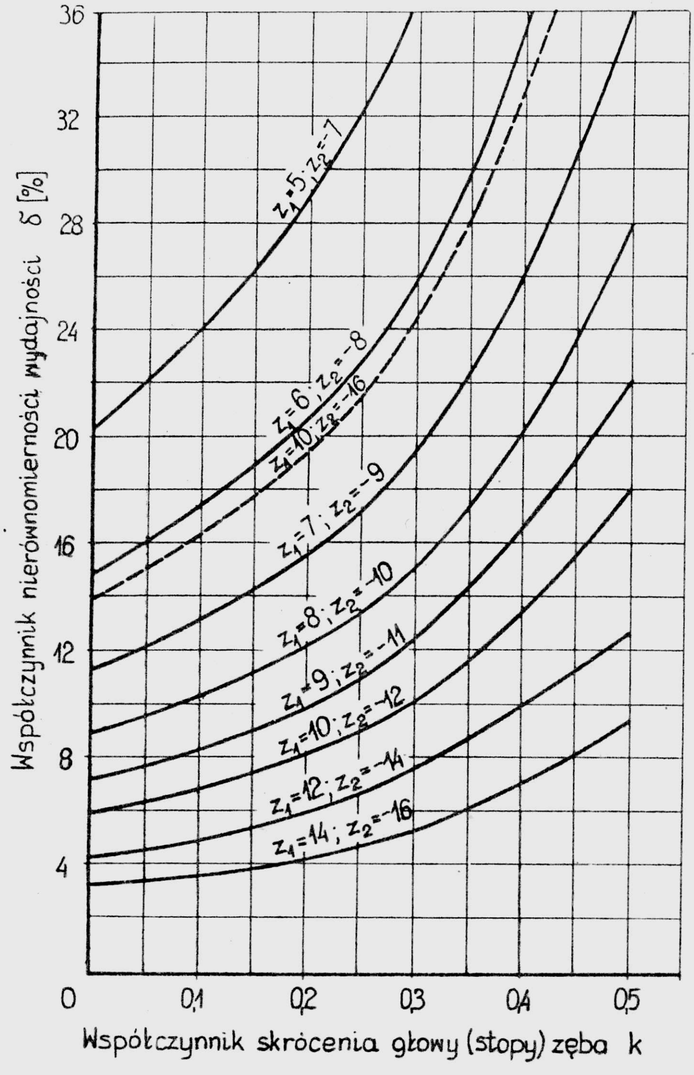
Na rys.43 przedstawiono przebieg zależności $\delta = f(k)$ dla współczynnika $v = 1$ przy z_1, z_2 jako parametrach. Wykres ten odnosi się jedynie do zazębienia hipocykloidalnego o połówkowych łukach hipocykloid. Zwiększanie współczynnika skrócenia głowy i stopy zęba powoduje znaczny wzrost nierównomierności wydajności. Przykładowo dla liczby zębów koła czynnego $z_1 = 10$ oraz koła biernego $z_2 = -12$, z uwzględnieniem przesunięcia ekwidystanty ($v = 1,0$), zmiana współczynnika skrócenia głowy względnie stopy w granicach $v = 0-0,5$ powoduje prze-



Rys.42. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika odległości ekwidystanty v, dla wybranych liczb zębów z_1 i z_2 i zazębienia o łukach połówkowych ($m = \rho$)

szło 3-krotny wzrost współczynnika nierównomierności wydajności w stosunku do wartości początkowej.

Podobnie jak w przypadku zwiększania współczynnika odległości ekwidystanty również przy zwiększaniu współczynnika skrócenia głowy i stopy zęba wzrost nierównomierności wydajności spowodowany jest zmniejszaniem się pola powierzchni wrębu w stosunku do pola powierzchni zęba, która oddziela kolejne wręby i powoduje przerwę w przetłaczaniu cieczy ze strony ssawnej na tłoczną.



Rys.43. Przebieg zależności współczynnika nierównomierności wydajności δ od współczynnika skrócenia głowy (stopy) zęba k, dla wybranych liczb zębów z_1, z_2 i zazębienia o łukach połówkowych

6. PORÓWNANIE WYDAJNOŚCI I JEJ NIERÓWNOMIERNOŚCI POMP O ROZPATRYWANYCH ZARYSACH ZĘBÓW

Wyprowadzony w punkcie 3 wzór (21) na wydajność właściwą pompy zębatej o zazębieniu ewolwentowym porównano ze wzorem na wydajność właściwą podanym przez Judina w pracy [19]. Wartości otrzymane wg wzoru (21) różnią się maksymalnie o ok. 10% w stosunku do otrzymanych wg powszechnie dotychczas stosowanego wzoru podanego przez Judina, otrzymanego na podstawie geometrycznych obliczeń objętości wrębów kół zębatych pompy. Różnice te wynikają z tego, że we wzorze Judina uwzględniano wpływ liczby przyporu, której wartość w pompach zębatych wynosi $1 < \varepsilon \leqslant 1,1$, czego nie uczyniono we wzorze (21). Wpływ liczby przyporu jest jednakże zawsze dyskusyjny, gdyż aby mógł on rzeczywiście zaistnieć należy prawidłowo rozwiązać problem rowków odciążających [21], które mają za zadanie odprowadzić czynnik z przestrzeni zasklepionej do komory tłocznej pompy. W przypadku pomp o zazębieniach hipocykloidalnych nie są znane w dostępnej literaturze wzory na wydajność właściwą, a w związku z tym nie ma z czym porównywać wzorów (79) wyprowadzonych w punkcie 5. Zestawiono więc w tabeli 1 odpowiednie wartości katalogowe wydajności właściwej (q_{kat}) z wartościami obliczonymi (g_{obl}) wg wzorów wyprowadzonych w pracy. Różnice między tymi wartościami mieszczą się w zakresie 2,1-14,3% i wynikają z celowego zaniżania przez producenta wartości katalogowych tak, aby mieć zapas pewności w stosunku do charakterystyk rzeczywistych uzyskiwanych na stanowiskach badawczych oraz z przybliżonego charakteru niektórych danych wziętych do obliczeń, które nie zawsze można było ściśle ustalić lub odtworzyć. W związku z tym uznano, że zgodność wartości katalogowych i obliczeniowych jest zadawalająca. Poczynione powyżej spostrzeżenia podkreślają wiarygodność wyprowadzonych wzorów i ich przydatność dla niżej przeprowadzonych porównań.

Jak powiedziano w punkcie 4.3 głównym celem zastosowań zazębienia hipocykloidalnego było zmniejszenie różnicy zębów $(z_2 - z_1)$ między kołami biernym i czynnym, a przede wszystkim zmniejszeniem bezpośrednio z tym związanego współczynnika nierównomierności wydajności δ. Z dotychczasowej analizy wynika, że zarówno jednostkową wydajność właściwą $q/(\pi bm^2)$, jak również współczynnik nierównomierności wydajności δ można zmieniać w szerokim zakresie poprzez dobór parametrów zazębienia z_1, z_2, v, k. Aby przekonać się o możliwościach nowych konstrukcji pomp zębatych o zazębieniach hipocykloidalnych w stosunku do tradycyjnych o zazębieniu ewolwentowym dokonano ich wzajemnego porównania i oceny ze względu na dwie podstawowe wielkości kryterialne, jakimi są jednostkowa wydajność właściwa $q/(\pi bm^2)$ oraz współczynnik nierównomierności wydajności δ.

Na rys.44-46 dokonano zestawienia jednostkowej wydajności właściwej i współczynnika nierównomierności wydajności pomp zębatych o różnych rodzajach zazębienia i zarysach zębów. Porównywano pompy o zazębieniu zewnętrznym i wewnętrznym oraz o zarysach ewolwentowym, cykloidalnym, hipocykloidalnym z łukami całkowitymi i połówkowymi.

T a b e l a 1.

Zestawienie wartości katalogowych i obliczeniowych wydajności właściwej pomp o zazębieniach hipocykloidalnych

lp.	Producent pompy	Rodzaj zazębienia	Parametry zazębienia	Wydajność właściwa pompy		Różnica wydajności
				teoretycz. wg produc. q_{kat}	obliczen. wg wzoru q_{obl}	$\frac{q_{kat}-q_{obl}}{q_{kat}}100\%$
				cm^3/obr	cm^3/obr	%
1	Zahnradfabrik Friedrichshafen	Hipocykloidalne o łukach całkowitych ($m = 2\varrho$)	$z_1 = 12$, $z_2 = -13$, $v = 1$ $m = 5$, $b = 10$	8,50	9,32	+9,6
			$z_1 = 6$, $z_2 = -7$, $v = 0{,}75$ $m = 8$, $b = 10$	11,00	11,23	+2,1
2	Zollern Hydraulik	Hipocykloidalne o łukach połówkowych ($m = \varrho$)	$z_1 = 9$, $z_2 = -11$, $v = 0{,}6$ $y_2(v) = 0{,}9$, $k_1 = 0{,}20$, $k_2 = 0{,}25$, $m = 6{,}85$, $b = 18{,}7$	21,40	24,47	+14,3

Parametry geometryczne porównywanych pomp były o ile to możliwe jednakowe dla wszystkich zarysów, a przy tym tak dobrane, aby były możliwe do zrealizowania w praktyce. W przypadkach, w których nie można było tego spełnić ze względu na specyfikę poszczególnych zazębień wybrano wartości najkorzystniejsze pod kątem otrzymania możliwie najwyższych wydajności i najniższej jej nierównomierności.

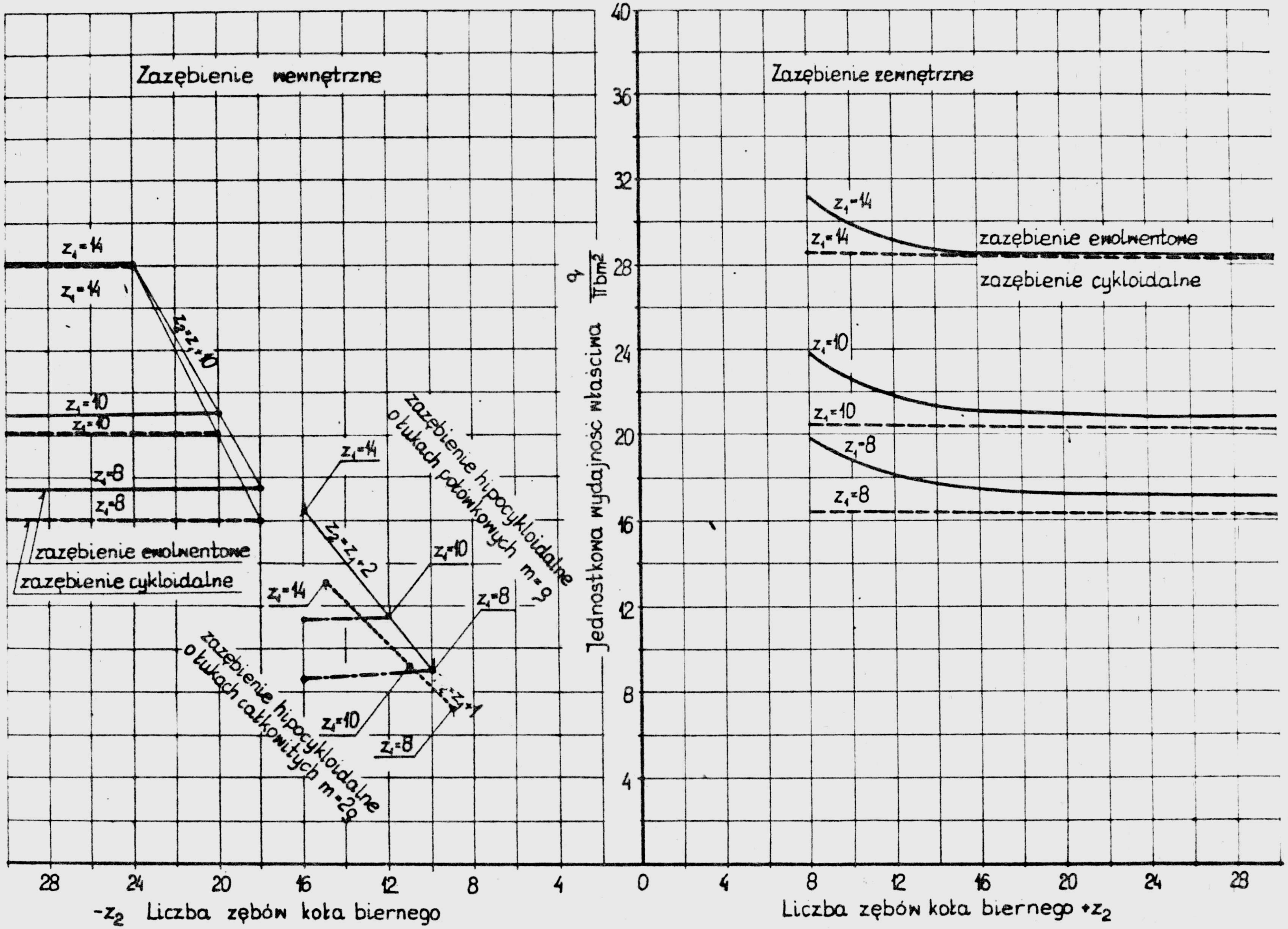
Tak więc liczby zębów z_1 koła czynnego dobrano $z_1 = 8, 10, 14$. Liczby zębów koła biernego z_2 dobrano wg możliwości współpracy pary kół o danym zarysie zęba. W przypadku zazębienia ewolwentowego, cykloidalnego, normalnego jest to $z_2 \geqslant z_1 + 10$. W przypadku zazębienia hipocykloidalnego o całkowitych łukach hipocykloid jest to $z_2 = z_1 + 1$ zaś dla zazębienia o łukach połówkowych $z_2 = z_1 + 2$.
Współczynnik wysokości zęba ewolwentowego i cykloidalnego przyjęto $y_1 = y_2 = 1$.

Inne parametry geometryczne zazębienia wynosiły:
- nominalny kąt przyporu kół o zazębieniu ewolwentowym $\alpha_0 = 20^0$,
- współczynnik kształtu zęba kół o zazębieniu cykloidalnym $R = 3$,
- współczynnik przesunięcia ekwidystanty do hipocykloidy zasadniczej kół o zazębieniach hipocykloidalnych $v = 0,25$ (zazębienie o łukach całkowitych), $v = 0,5$ (zazębienie o łukach połówkowych),
- współczynnik skrócenia głowy i stopy zęba hipocykloidalnego o łukach połówkowych $k_1 = k_2 = k = 0,2$,

W obliczeniach wydajności i jej nierównomierności pomp o zazębieniu ewolwentowym, w przypadku rozpatrywania konkretnych par liczb zębów uwzględniono odpowiednią korekcję i współczynniki korekcji x_1, x_2.

Analizując wykresy na rys.44 stwierdza się, że największą jednostkową wydajność właściwą zapewniają w kolejności pompy zębate o następujących zarysach zębów:
- ewolwentowym,
- cykloidalnym,
- hipocykloidalnym o łukach połówkowych,
- hipocykloidalnym o łukach całkowitych.

Jak już uprzednio stwierdzono w przypadku zazębień wewnętrznych minimalna liczba zębów koła biernego z_2 pomp o zazębieniach hipocykloidalnych jest dużo mniejsza niż pomp o zazębianiach ewolwentowym i cykloidalnym, przy założeniu jednakowej liczby zębów koła czynnego z_1. Wynosi ona:
- dla zazębienia hipocykloidalnego o łukach całkowitych $z_2 = z_1 + 1$
- dla zazębienia hipocykloidalnego o łukach połówkowych $z_2 = z_1 + 2$



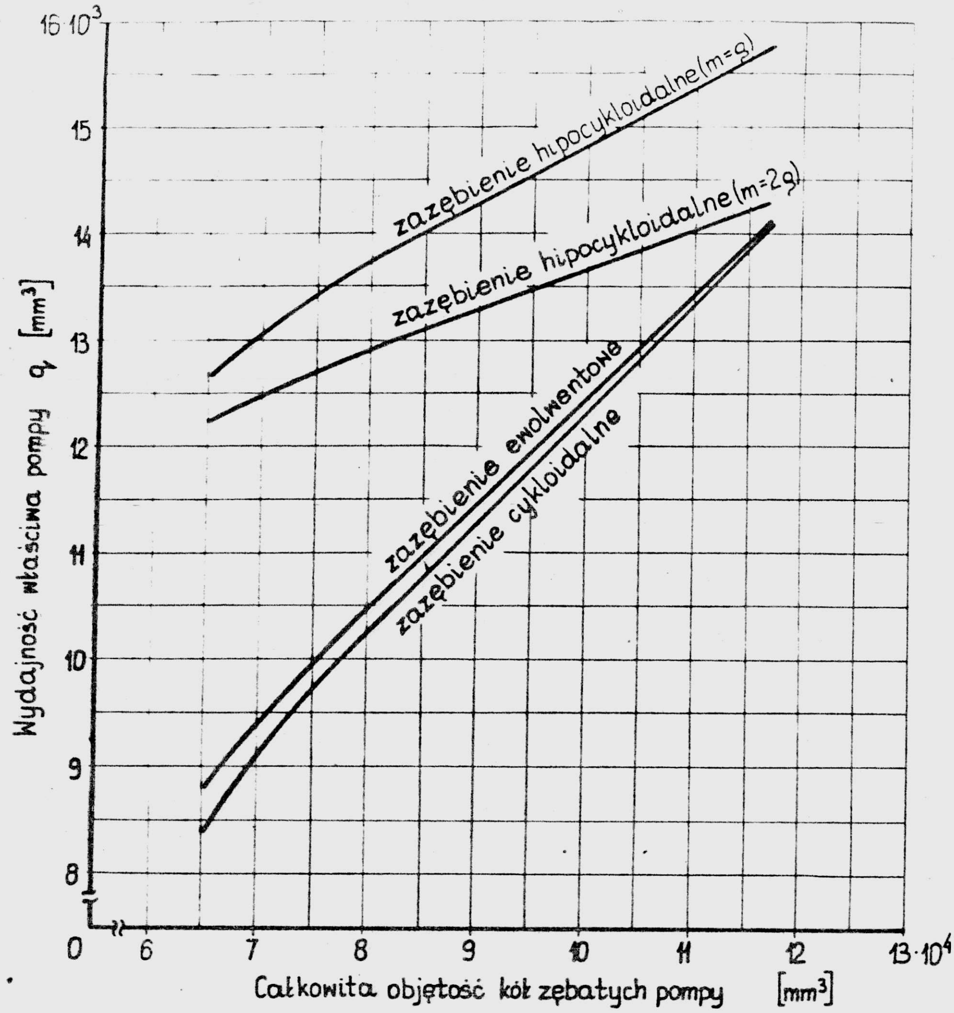
Rys.44. Zestawienie wartości jednostkowej wydajności właściwej $q/(\pi bm^2)$ w zależności od liczby zębów koła biernego z_2 pomp zębatych o różnych zarysach zębów dla wybranych liczb zębów koła czynnego z_1 jako parametru

- dla zazębienia ewolwentowego i cykloidalnego $z_2 = z_1 + 10$. W związku z tym średnice wierzchołkowe współpracującej pary kół (gabaryty promieniowe pompy) o zarysach hipocykloidalnych są dużo mniejsze niż pary kół o zarysach ewolwentowym i cykloidalnym. Przyjmując jednakową liczbę zębów koła czynnego z_1 i odpowiadającą im liczbę zębów z_2 można, w ramach całkowitej objętości pary kół jednakowej dla wszystkich zarysów, zwiększyć szerokość (gabaryty osiowe pompy) kół o zarysach hipocykloidalnych w stosunku do kół o zarysach ewolwentowym i cykloidalnym. Zakładając więc jednakową liczbę zębów koła czynnego z_1 i moduł m, zmieniając odpowiednio do zarysu zęba liczbę zębów z_2 oraz szerokość b tak, aby całkowita objętość kół zębatych pozostawała stała i wspólna dla danego zestawu parametrów z_1, m zbadano jak zmienia się wydajność właściwa q pomp zębatych w zależności od zarysu zęba. Inaczej mówiąc, zabadano ile czynnika q w czasie jednego obrotu wałka napędowego zdołają przetłoczyć poszczególne pompy o tej samej całkowitej objętości kół zębatych, lecz o różnych zarysach zębów. Całkowitą objętość obliczano jako sumę objętości walców o średnicach równych średnicom kół wierzchołkowych i wysokości równej szerokości koła zębatego. Obliczenia przeprowadzono wyłącznie dla zazębienia wewnętrznego jako możliwego do realizacji dla wszystkich rodzajów zarysów oraz dla trzech wartości objętości odpowiadających liczbom zębów koła pędzącego $z_1 = 8, 10, 14$. Do obliczeń przyjęto jednakowy moduł $m = 4$, pozostałe parametry zaś ustalono jak w przypadku obliczeń porównawczych jednostkowej wydajności właściwej. Z wykresów na rys.45 wynika, że największą wydajność właściwą q z danej całkowitej objętości kół zębatych można uzyskać w kolejności w pompach o następujących zarysach zębów:

- hipocykloidalnym o łukach połówkowych
- hipocykloidalnym o łukach całkowitych
- ewolwentowym
- cykloidalnym.

Na rys.46 zestawiono porównawczo wartości współczynnika nierównomierności wydajności δ dla pomp zębatych o różnych rodzajach zazębienia i zarysach zębów.

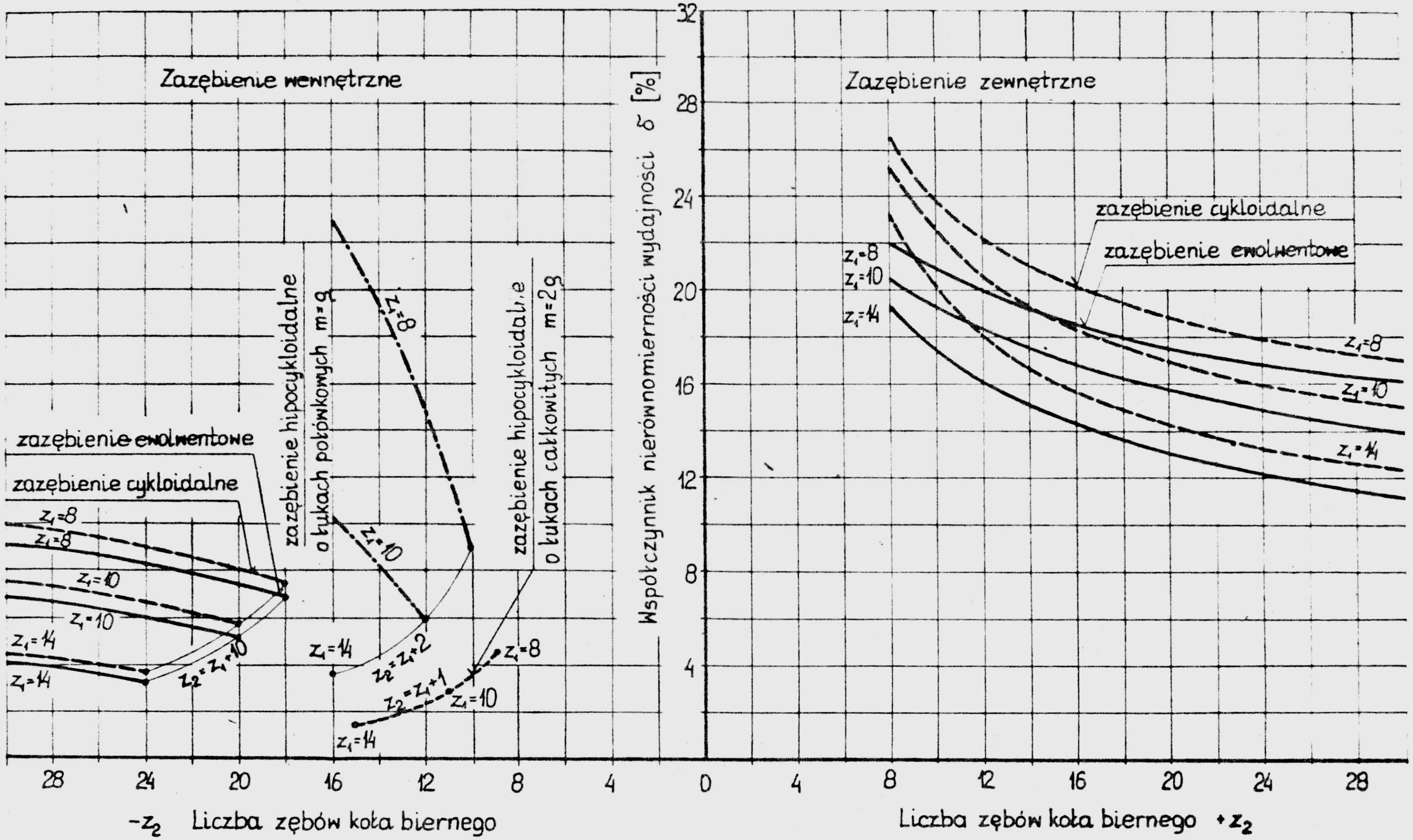
Analizując te wykresy zauważa się, że pompy o zazębieniu wewnętrznym dają o rząd mniejsze wartości współczynnika nierównomierności wydajności δ niż pompy o zazębieniu zewnętrznym i to bez względu na rodzaj zarysu zęba. Niektóre większe wartości współczynnika δ otrzymane dla zazębienia wewnętrznego hipocykloidalnego o łukach połówko-



Rys.45. Zestawienie przebiegów wydajności właściwej q w zależności od całkowitej objętości koła czynnego i biernego pomp zębatych o różnych zazębieniach

wych oraz dużej różnicy liczb zębów $z_2 - z_1$ a odpowiadające wartościom otrzymanym dla zazębień zewnętrznych nie są powodem do podważania tego stwierdzenia, gdyż w praktyce nie stosuje się takich liczb zębów.

Wśród pomp zębatych o zazębieniu wewnętrznym najmniejsze wartości współczynnika nierównomierności wydajności δ dają pompy o zazębieniu hipocykloidalnym o łukach całkowitych. Wartości współczynnika δ w przypadku pomp z zębami o innych zarysach są większe i niewiele się różnią między sobą.



Rys.46. Zestawienie wartości współczynnika nierównomierności wydajności δ w zależności od liczby zębów koła biernego z_2 pomp zębatych o różnych zarysach zębów dla wybranych liczb zębów koła czynnego z_1 jako parametru

7. PODSUMOWANIE

W pracy przeprowadzono analizę stanu obecnego i tendencji rozwojowych w budowie pomp zębatych. Ustalono, że istnieje duża różnorodność typów i odmian konstrukcyjnych tych pomp, a jednocześnie brak pełnej analizy i porównania ich możliwości, oraz oceny wpływu rodzaju zazębienia, zarysu zęba i parametrów zazębienia na główne wielkości kryterialne, za jakie przyjęto jednostkową wydajność właściwą oraz współczynnik nierównomierności wydajności. Ustalono, że w dostępnej literaturze nie ma uniwersalnych zależności pozwalających wyznaczyć wydajność i współczynnik jej nierównomierności wszystkich typów i odmian konstrukcyjnych pomp zębatych. W pracy wykazano, że istnieje taka możliwość ujednolicenia obliczeń tych wielkości kryterialnych dla różnych typów pomp zębatych. Świadczą o tym odpowiednie wzory służące do obliczeń tych wielkości wyprowadzone zarówno dla przypadku ogólnego (7, 8, 9, 12, 13, 14) jak również dla szczegółowych przypadków zazębień o zarysach wywodzących się z krzywych kołowych tzn. ewolwentowym, cykloidalnym, hipocykloidalnym o całkowitych i połówkowych łukach hipocykloidy (22,24,37,38,84,85,87,88).Wszystkie te wzory wyprowadzono wykorzystując tą samą wspólną dla wszystkich pomp zębatych zasadę równoważności energii ciśnienia i niezbędnej do jej wytwarzania pracy mechanicznej.

Istnieje ścisły związek między rodzajem zazębienia, zarysem zęba i parametrami geometrycznymi zazębienia a wydajnością i nierównomiernością wydajności pomp zębatych. Wynika to bezpośrednio z wyprowadzonych w pracy wzorów (22, 24, 37, 38, 84, 85, 87, 88).

Jednostkowa wydajność właściwa zależy od:
- zarysu zęba kół zębatych pompy
- liczby zębów kół zębatych pompy
- parametrów geometrycznych zazębienia.

W przypadku zazębień o zarysie ewolwentowym i cykloidalnym jednostkowa wydajność właściwa praktycznie nie zależała od rodzaju zazębienia, tzn. czy było ono zewnętrzne czy wewnętrzne. W pozostałych przypadkach zarysów problem wpływu rodzaju zazębienia nie istnieje, gdyż możliwe jest jedynie zazębienie wewnętrzne.
Najbardziej przydatne ze względu na możliwość uzyskania jak największej jednostkowej wydajności właściwej są w kolejności następujące zarysy zębów:

- ewolwentowy
- cykloidalny
- hipocykloidalny o łukach połówkowych
- hipocykloidalny o łukach całkowitych.

W przypadku wszystkich pomp o zarysach zębów wywodzących się z krzywych kołowych zarówno o zewnętrznym, jak i wewnętrznym rodzaju zazębienia jednostkowa wydajność właściwa zależy przede wszystkim od liczby zębów koła czynnego. Im większa jest liczba zębów koła czynnego, tym większa jest jednostkowa wydajność właściwa pompy zębatej. Liczba zębów koła biernego nie ma praktycznie wpływu na wartość jednostkowej wydajności właściwej pompy zębatej. Nie ma również wpływu na tę wydajność różnica zębów między kołem czynnym i biernym.

W pompach o zazębieniu ewolwentowym zwiększanie współczynnika wysokości zęba, współczynnika korekcji oraz kąta przyporu powoduje wzrost jednostkowej wydajności właściwej. Największy wpływ ma współczynnik wysokości zęba.

W pompach o zazębieniu cykloidalnym zwiększanie współczynnika wysokości zęba oraz współczynnika kształtu zęba powoduje wzrost jednostkowej wydajności właściwej pompy. Podobnie i tutaj większy wpływ ma współczynnik wysokości zęba.

W pompach o zazębieniach hipocykloidalnych zwiększanie współczynnika odległości ekwidystanty powoduje zwiększanie jednostkowej wydajności właściwej przy czym wzrost ten jest większy w przypadku pomp o łukach całkowitych. Skracanie głowy i stopy zęba (zwiększanie współczynników k_1 i k_2) powoduje znaczne zmniejszenie jednostkowej wydajności właściwej pompy.

Z porównania i analizy przeprowadzonej w rozdziale 6 wynika, że z określonej całkowitej objętości kół zębatych czynnego i biernego największą wydajność właściwą q pompy uzyskuje się w przypadku zastosowania następujących zarysów wywodzących się od krzywych kołowych:
- hipocykloidalnego o łukach połówkowych,
- hipocykloidalnego o łukach całkowitych,
- ewolwentowego,
- cykloidalnego.

Współczynnik nierównomierności wydajności pomp zębatych zależy od:
- zarysu zębów,
- rodzaju zazębienia,
- liczby zębów kół zębatych,
- parametrów zazębienia.

Najkorzystniejsze pod względem możliwości uzyskania małej nierównomierności wydajności są w kolejności zarysy:

- hipocykloidalny o łukach całkowitych,
- hipocykloidalny o łukach połówkowych,
- ewolwentowy,
- cykloidalny.

We wszystkich przypadkach zarysów poprzez stosowanie wewnętrznego rodzaju zazębienia otrzymuje się znacznie mniejszą nierównomierność wydajności niż dla zewnętrznego rodzaju zazębienia.

We wszystkich przypadkach zarysów wartość współczynnika nierównomierności wydajności zależy przede wszystkim od liczby zębów koła czynnego. Im jest ona większa, tym mniejsza jest nierównomierność wydajności pompy zębatej. Mniejsze choć wyraźne znaczenie ma liczba zębów koła biernego. W przypadku zazębienia zewnętrznego zwiększanie liczby zębów koła biernego powoduje spadek, zaś w przypadku zazębienia wewnętrznego wzrost współczynnika nierównomierności wydajności. Inaczej można powiedzieć, że zwiększanie różnicy zębów biernego i czynnego powoduje w przypadku zazębienia zewnętrznego spadek, zaś wewnętrznego wzrost nierównomierności wydajności pompy zębatej.

W pompach o zazębieniu ewolwentowym zwiększanie współczynnika wysokości zęba i współczynnika korekcji powoduje spadek współczynnika nierównomierności wydajności, przy czym wpływ współczynnika wysokości zęba jest większy.

Podobnie w pompach o zazębieniu cykloidalnym wzrost wysokości zęba i współczynnika kształtu zęba powoduje spadek współczynnika nierównomierności wydajności. Wpływ obu współczynników jest znaczny.

W pompach o zazębieniach hipocykloidalnych zwiększanie współczynnika odległości ekwidystanty powoduje zwiększanie się współczynnika nierównomierności wydajności, przy czym w pompach o zazębieniu z łukami połówkowymi wpływ ten jest większy. Skracanie głowy i stopy zęba o zarysie hipocykloidalnym z łukami połówkowymi powoduje wzrost współczynnika nierównomierności wydajności.

Z przedstawionych wniosków wynika, że chcąc otrzymać pompę zębatą która jednocześnie zapewniałaby uzyskanie możliwie maksymalnej wydajności właściwej q i minimalnej jej nierównomierności (małego współczynnika nierównomierności wydajności) należy konstruować je z uwzględnieniem następujących zasad:

- Stosować zazębienie wewnętrzne
- Dobrać odpowiednio liczby zębów kół zębatych. Liczba zębów koła

czynnego powinna być możliwie duża. Liczbę zębów koła biernego powinno dobierać się tak, aby różnica zębów koła biernego i czynnego była minimalna.

- Stosować zarys zęba hipocykloidy o łukach całkowitych
- Stosując zarys hipocykloidalny o łukach całkowitych należy dobierać możliwie najmniejszy współczynnik odległości ekwidystanty.

Słuszność tych spostrzeżeń potwierdza praktyka budowy pomp zębatych, gdyż liczni producenci stosują wewnętrzny rodzaj zazębienia i to w przypadku pomp o zazębieniach ewolwentowych (pompa f-my Eckerle) jak i o zazębieniach hipocykloidalnych (pompy f-my Zahnradfabrik, Heller, Gerotor, Nichols, Double A). Liczba zębów koła czynnego zmienia się w tych konstrukcjach w granicach $z_1 = 6-14$ i zauważa się tendencję do stosowania większych wartości z tego zakresu tzn. 10, 12, 14, które powodują zwiększanie wydajności pompy i zmniejszanie jej nierównomierności. Zwiększanie liczby zębów koła czynnego powoduje jednocześnie wzrost gabarytów pompy,co jest niekorzystne ze względów wytrzymałościowych, materiałowych,technologicznych,akustycznych itd.Stąd też mówi się o doborze "możliwie dużej" liczby zębów koła czynnego, który uwzględniałby powyższe zagadnienia. Liczbę zębów koła biernego w tych konstrukcjach dobiera się tak, aby różnica zębów koła biernego i czynnego była minimalna. W przypadku zazębień hipocykloidalnych wynosi ona 1 względnie 2. W praktyce znajduje również potwierdzenie spostrzeżenie, że w przypadku zazębień hipocykloidalnych o łukach całkowitych należy dobierać możliwie małe wartości współczynnika odległości ekwidystanty. Zastrzeżenie "możliwie małe" uzasadnione jest innymi niż wydajność i jej nierównomierność względami, takimi jak wytrzymałościowe, materiałowe, technologiczne, które należy uwzględnić przy projektowaniu.

LITERATURA

1. Amann R.: Zahnradpumpen mit Evolventenverzahnung. Mitteilung des Hydraulischen Instituts. Technische Hochschule München, nr 1/1926.
2. Bronsztejn J.N., Siemiendiajew K.A.: Matematyka. Poradnik encyklopedyczny. PWN, Warszawa 1970 r.
3. Birjukow B. N.: Rotorno-porszniewyje gidrawliczeskie maszyny. Maszinostrojenie, Moskwa 1972 r.
4. Backé W.: Entwicklungstendenzen - Hydraulik. Industrie Anzeiger, nr 3/1979 r.

5. Christ K.: Gerotormotor p_n 16 MPa, TGL 10881. Maschinenbautechnik 8/1978 r.
6. Eisenmann S. A.: Neue Trochoideninnenzahnradpumpe mit geringer Pulsation und extrem ruhigem Lauf. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 4/1973 r.
7. Ernst W.: Gidropriwod i jego promyszlennoje primienienie. Gosudarstwiennoje Nauczno-Techniczeskoje Izdatielstwo Maszinostroitielnoj Literatury. Moskwa 1963 r.
8. Fichtenholtz G. M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1964 r.
9. Fricke H. J.: Neue Wege der Geräuschsenkung bei Außenzahn radpumpen. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 10/1977 r.
10. Frei T.: Die Ölversorgungsanlagen an Werkzeugmaschinen. Technische Rundschau nr 6/1972 r.
11. Gutbrod W.: Förderstrom von Aussen - und Innenzahnradpumpen und seine Ungleichförmigkeit. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 2/1975 r.
12. Gösele R.: Volumenstromschwankungen zykloidisch und ägudistant zykloidisch verzahnter Pumpen. Industrie - Anzeiger, nr 68/1979 r.
13. Gösele R.: Förderstromschwankungen zykloiden - und zykloidenänlich verzahnter Pumpen. 2 Bericht zum Forschungsvorhaben Tu 14/28 des Institutes für Werkzeugmaschinen. Universität Stuttgart.
14. Hamann Z.: Pompy gerotorowe. Narada Naukowo-Techniczna Pompy, silniki i przekładnie w hydrostatycznych układach napędowych, Wrocław, maj 1965 r.
15. Hohensee H.: Eine neue Hochdruck - Zahnradpumpe. Ölhydraulik und Pneumatik, 10/1966 r.
16. Hoffmann D.: Wirkungsgrad und Pulsation verschiedener Zahnradpumpenbauarten und ihr Einfluss auf den Einsatzberiech. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 8/1974 r.
17. Hübsch H.: Untersuchung des Geräuschverhaltens und konstruktive Möglichkeiten zur Geräuschminderung an nicht druckkompensierten Zahnradpumpen. Praca doktorska, Uniwersytet Stuttgart 1969 r.
18. Ickiewicz I. St.: Einfluss der Betriebsparameter auf Pulsation und Geräusch von Zahnradpumpen. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 5/1979 r.
19. Judin E. M.: Pompy zębate. PWT, Warszawa 1958 r.

20. Kollek W., Stryczek J.: Optimierung der Parameter von Zahnradpumpen mit Evolventen - Außenverzahnung. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 4/1978 r.
21. Kollek W., Stryczek J.: Wpływ zasklepiania cieczy we wrębach międzyzębnych na hałaśliwość pracy pomp zębatych. Sterowanie i napęd hydrauliczny SINH Nr 5/1980 r.
22. Litwin F. L.: Teorija zubczatych zaceplenij. Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1968 r.
23. Majteinyi S.: Möglichkeiten der Förderstromberechnung für Zahnradpumpen. Maschinenbautechnik, nr 12/1975 r.
24. Marlok J.: Verdrängungsvorgang im Quetschbereich von Zahnradpumpen. Industrie - Anzeiger, nr 94/1975 r.
25. Neumann R.: Technische Anwendungen des Umlaufräderprinzips. Maschinenbautechnik, nr 2/1976 r.
26. Ochęduszko K.: Koła zębate. WNT, Warszawa 1969 r.
27. Ohrberg C. V.: Le moteur gerotor et le moteur orbit. EFL + HPA 6/1969 r.
28. Pham Duc Nhuan: O doborze parametrów konstrukcyjnych i modelowaniu pewnych maszyn hydraulicznych o zazębieniu cykloidalnym. Praca doktorska, Politechnika Warszawska 197 .
29. Pigott J. S.: Some Characteristics of Rotary Pumps in Aviation Service. Transactions of A.S.M.E., 10/1944 r.
30. Panzer P., Beitler G.: Arbeitsbuch der Ölhydraulik. Krausskopf - Verlag 1969 r.
31. Richter H.: Teoretische Förderstrom - und Quetschraum - untersuchungen an Zahnradpumpen. Technischer Informationsdienst Hydraulik, nr 2/1962 r.
32. Schöller K.: Die Ring - Rotor - Pumpe ein geräuscharmer Hydrogenerator. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 5/1974 r.
33. Seelinger K.: Trochoiden - Verzahnungen. Antriebstechnische Informationen der Heinrich Desch KG für den Konstrukteur - Desch Antriebstechnik, nr 24/1972 r.
34. Stryczek S.: Einfluss der Konstruktion von Außenzahnradpumpen auf das Betriebsgeräusch. Ölhydraulik und Pneumatik, nr 12/1976 r.
35. Stryczek S.: Tendencje rozwojowe w dziedzinie napędów hydraulicznych. Przegląd Mechaniczny, nr 12, 13/1978 r.
36. Stryczek J.: Pompy zębate o zazębieniu ewolwentowym. Przegląd Mechaniczny, nr 7/1978 r.

37. Stryczek J.: Pompy zębate o zazębieniu cykloidalnym. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, nr 1/1980 r.
38. Stróżniak K., Leichsenring G.: Nowe jednostki zębate - wynikiem naukowo-technicznej współpracy między PRL i NRD. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, nr 1/1980 r.
39. Stróżniak K., Stryczek S.: Verdrängerpumpen in hydrostatischen Antrieben. Ölhydraulik und Pneumatik nr 4/1971 r.
40. Schraff W.: Markttendenzen Ölhydraulik und Pneumatik. Ölhydraulik und Pneumatik Report 1974 r.
41. Willekens F.A.M.: Instantes Fördervolumen, geometrisches Hubvolumen und Ungleichförmigkeitsgrad von Zahnradpumpen. Industrie - Anzeiger, nr 26/1971 r.
42. Weaver C. D., Toogood C. J.: Design trends in gear motor. Fluid Power International, nr 1/1973 r.
43. Innenverzahnt geht's leiser. Fluid nr 3/1973 r.

Mgr inż. Jarosław Stryczek
Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn
Politechniki Wrocławskiej

Pracę złożono w Redakcji Instytutu KEM 20.11.80

ODBIORCY:

1.	Biblioteka i Ośrodek Informacji Inst. KEM	2
2.	Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
3.	Promotor - doc. dr hab. inż. Wacław Kollek	1
4.	Recenzenci	2
5.	Autor	2