

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100165209

OBCIĄŻENIA HYDRODYNAMICZNE ZAMKNIĘĆ BUDOWLI WODNYCH

Stanisław
Wojciech
Kostecki



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej



Stanisław W. Kostecki

Obciążenia hydrodynamiczne zamknięć budowli wodnych



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2008

Niniejsza monografia została opracowana w ramach projektu badawczego finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji o numerze 4 T07E 071 29, rozpoczętego w grudniu 2005 r.

Recenzenci
Stanisław DOBROCIŃSKI
Tomasz STRZELECKI

Opracowanie redakcyjne
Alina KACZAK

Korekta
Hanna JUREK

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy.

Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2008

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

www.oficyna.pwr.wroc.pl

oficwyd@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-379-7



334594L/1

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 270/2008.

Alce 2008/05221

Spis treści

Ważniejsze oznaczenia	7
1. Wstęp	11
1.1. Cel pracy i podstawowe założenia	15
1.2. Zakres pracy	16
2. Obciążenia zamknięć budowli hydrotechnicznych	20
2.1. Rodzaje sił hydrodynamicznych	21
2.1.1. Siły spowodowane przez przyczyny zewnętrzne	21
2.1.2. Siły wywołane niestabilnością przepływu i oderwaniem warstwy przyściennej	23
2.1.3. Siły powodowane ruchem konstrukcji	25
2.1.4. Siły wzbudzane oscylacją objętości cieczy	27
2.2. Obciążenia zamknięć wynikające z odrywania się warstwy przyściennej	27
2.2.1. Zamknięcia w przewodzie ciśnieniowym	28
2.2.1.1. Zasuwa płaska	28
2.2.1.2. Segment	31
2.2.2. Zamknięcie powierzchniowe – kłapa soczewkowa	33
2.3. Skutki obciążeń hydrodynamicznych	35
3. Podstawowe równania hydromechaniki	37
3.1. Sformułowanie matematyczne zagadnienia przepływu	37
3.1.1. Współrzędne Lagrange’a i Eulera	37
3.1.2. Trajektorie cząstek cieczy	39
3.1.3. Prędkość odkształcenia elementu płynu i prędkość kątowna	40
3.1.4. Równanie transportu	41
3.1.5. Równanie ciągłości przepływu	43
3.1.6. Równanie zachowania pędu	44
3.1.7. Równanie zachowania momentu pędu	45
3.1.8. Równania przepływu cieczy	47
3.1.9. Przepływ potencjalny	50
3.2. Wirowość	55
3.2.1. Kinematyka wirowości	56
3.2.2. Dynamika wirowości	58
3.3. Teoria warstwy przyściennej	61
3.3.1. Model laminarnej warstwy przyściennej	63
3.3.2. Podstawy teorii przepływu turbulentnego	65

3.3.3. Model turbulენტnej warstwy przyściennej	68
3.3.4. Odrywanie turbulენტnej warstwy przyściennej	71
4. Przegląd metod przybliżonego rozwiązywania przepływu	74
4.1. Uprozczone metody służące wyznaczaniu obciążeń hydrodynamicznych	75
4.1.1. Metoda siatki hydrodynamicznej	75
4.2. Uwagi ogólne do stosowania metod „siatkowych”	78
4.2.1. Bezpośrednie rozwiązanie równań Naviera–Stokesa (DNS)	80
4.2.2. Rozwiązanie uśrednionych równań Reynoldsa (RANS).....	83
4.2.3. Metoda LES	84
4.2.4. Metoda elementów brzegowych	86
4.3. Metody bezsiatkowe.....	93
4.4. Uzasadnienie wyboru metody	95
5. Metoda wirów	97
5.1. Wprowadzenie.....	97
5.2. Podstawy matematyczne – równanie transportu wirowości	101
5.3. Metoda wirów punktowych.....	103
5.4. Metoda wirów dyskretnych – sformułowanie deterministyczne	107
5.4.1. Numeryczne rozwiązanie dwuwymiarowego transportu wirowości.....	107
5.4.2. Wybór funkcji wygładzającej	112
5.5. Sformułowanie stochastycznej metody kropel wirowych	116
5.5.1. Metoda dekompozycji w zagadnieniu transportu wirowości	116
5.5.1.1. Przybliżone rozwiązanie problemu adwekcji wirowości.....	116
5.5.1.2. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia dyfuzji wirowości	117
5.5.2. Zagadnienia transportu wirowości w obszarach ograniczonych	121
5.5.3. Generowanie wirowości wzdłuż brzegów.....	123
5.5.4. Brzeg ruchomy	129
5.5.5. Brzeg periodyczny	132
5.6. Uwagi dotyczące zbieżności stochastycznej metody wirów	134
5.6.1. Adwekcja wirowości.....	135
5.6.2. Zbieżność metody przypadkowego błędzenia.....	138
5.7. Przykłady obliczeń pól prędkości i wirowości metodą kropel wirowych	142
5.7.1. Strefa recyrkulacji w kanale ze stopniem.....	142
5.7.2. Opływ przeszkody – metoda wirów deterministyczna i stochastyczna.....	147
5.8. Metoda warstw wirowych	151
6. Wyznaczanie siły hydrodynamicznej metodą elementów brzegowych i metodą wirów	161
6.1. Wprowadzenie.....	161
6.2. Podstawowe definicje i równania.....	161
6.3. Matematyczne zagadnienie rozkładu ciśnienia	164
6.4. Rozwiązanie słabe zagadnienia różniczkowego rozkładu ciśnienia.....	167
6.5. Sformułowanie równań całkowych metody elementów brzegowych	168
6.6. Modyfikacje równań poprawiające efektywność metody przybliżonej wyznaczania ciśnienia	172
6.7. Przykłady obliczenia rozkładu ciśnienia	173

7. Analiza obciążeń hydrodynamicznych działających na wybrane rodzaje zamknięć hydrotechnicznych	177
7.1. Zasuwa płaska	177
7.1.1. Dolna krawędź pozioma.....	181
7.1.2. Dolna krawędź pozioma – przepływ potencjalny	185
7.1.3. Dolna krawędź pochylona zgodnie z kierunkiem strumienia przepływu...	189
7.1.4. Dolna krawędź pochylona przeciwnie do kierunku strumienia przepływu	193
7.1.5. Obciążenia chwilowe zamknięcia zasuwowego.....	195
7.2. Zamknięcie klapowe	198
7.3. Analiza wyników i wnioski.....	202
8. Podsumowanie	204
9. Dodatki.....	213
Dodatek A. Wyznaczenie jakobianu $\det \nabla_{\alpha} \mathbf{X}(t, \alpha)$ gradientu trajektorii cząstki	213
Dodatek B. Wyprowadzenie postaci adwekcyjnej zasady zachowania pędu (równania ruchu Cauchy'ego)	216
Dodatek C. Szczegóły przekształceń przy wyprowadzaniu równania zachowania momentu pędu	217
Dodatek D. Niektóre przekształcenia wektorowe, funkcyjne i wzory całkowe	220
Literatura	222

Ważniejsze oznaczenia

\mathbf{a}	– wektor przyspieszenia
b	– szerokość
C	– obwód, stała całkowania
C_p	– bezwymiarowy współczynnik ciśnienia
C_s	– stała w modelu Smagorinskiego
\mathbf{D}	– tensor prędkości odkształcenia
\mathbf{D}'	– dewiator tensorem prędkości deformacji
E	– wartość oczekiwana
E_k	– energia kinetyczna
f	– częstotliwość
\hat{f}	– transformata Fouriera funkcji obciążenia (rozdz. 5)
F	– ilość materii w objętości kontrolnej
\mathbf{F}	– siła
f, f_ϵ	– funkcja obciążenia (rozdz. 5)
\mathbf{f}, f_i	– gęstość rozkładu sił masowych i jej składowa
g	– przyspieszenie ziemskie
G	– funkcja we wzorze Biota–Savarta (rozdz. 5)
G	– funkcja Greena
G_ϵ	– funkcja we wzorze Biota–Savarta po regularyzacji
h	– głębokość, wysokość kanału
h	– wymiar oczka siatki (rozdz. 5)
Δh	– wysokość prędkości
h_d	– głębokość wody dolnej
H	– funkcja Heaviside'a (rozdz. 6)
\mathbf{I}	– tensor jednostkowy
J_2	– funkcja Bessela II rzędu
K	– kinetyczna energia turbulencji
\mathbf{K}	– jądro całki Biota–Savarta
\mathbf{K}_ϵ	– jądro całki Biota–Savarta po regularyzacji
l	– długość „drogi mieszania”
L	– długość
L	– makroskopowy wymiar przepływu

\mathbf{n}	– wektor jednostkowy normalny
O	– rząd błędu
p, \bar{p}	– ciśnienie, wartość średnia
P	– ciśnienie kinematyczne
q	– objętościowe natężenie przepływu na jednostkę szerokości
q	– dowolna wielkość fizyczna (rozdz. 3)
\mathbf{q}_b	– pochodna normalna prędkości do brzegu
Q	– objętościowe natężenie przepływu
r	– promień wodzący
R	– stała gazowa
Re	– liczba Reynoldsa
s	– parametr
\mathbf{s}	– wektor styczny
S	– pole powierzchni
Sh	– liczba Strouhala
\mathbf{t}	– wektor naprężenia
T	– temperatura
$t, \Delta t$	– czas, krok czasowy
$\mathbf{T} = [T_{ij}]$	– tensor naprężenia
$\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}'$	– wektor prędkości, wartość średnia, fluktuacja
u_1, u_2, u_3	– składowe wektor prędkości
\mathbf{U}_b	– wektor prędkości na brzegu
\mathbf{u}_0	– wektor prędkości początkowej
$[\mathbf{u}]$	– skok prędkości na warstwie wirowej
$\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon, \tilde{\mathbf{u}}_{\epsilon;h}$	– przybliżone pole prędkości w metodzie wirów
V	– objętość kontrolna płynu
W	– proces Winera
\mathbf{x}	– wektor położenia
x_1, x_2, x_3	– współrzędna przestrzeni
X	– trajektoria ruchu cząstki
\hat{X}	– przybliżona trajektoria ruchu cząstki
\tilde{X}	– przybliżona trajektoria ruchu cząstki po dyskretyzacji
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$	– punkt położenia początkowej cząstki
γ	– oznaczenie krzywej, fragment brzegu
γ	– intensywność warstwy wirowej (rozdz. 6)
Γ	– cyrkulacja (natężenie wiru)
δ	– funkcja Diraca
δ_{ij}	– symbol Kroneckera
δ	– grubość warstwy przyściennej (rozdz. 3)

ε_{ijk}	– symbol Levi–Civita
ε	– promień obciążenia (rozdz. 5, 7)
ε	– dyssypacja energii kinetycznej turbulencji (rozdz. 4)
η_d	– wymiar wirów dyssypatywnych
θ	– potencjał zespolony
λ	– drugi współczynnik lepkości
Λ^h	– podział obszaru siatką (rozdz. 5), podział warstwy (rozdz. 6)
μ	– współczynnik lepkości dynamicznej
μ_t	– współczynnik lepkości turbulentnej
ν	– kinematyczny współczynnik lepkości
ξ	– punkt źródłowy
ρ	– gęstość cieczy
τ	– czas (rozdz. 3)
τ	– tensor naprężeń lepkich
τ_t	– naprężenia turbulentne
τ_l	– naprężenia lepkie
τ_{ij}	– składowa tensora naprężeń Reynoldsa skali podsiatkowej (rozdz. 4)
φ	– funkcja potencjału prędkości
ψ	– funkcja prądu
$\tilde{\psi}_\delta, \tilde{\psi}_{\delta,h}$	– przybliżona funkcja prądu w metodzie wirów
Ψ	– potencjalna funkcja prądu rozdz. 6
ν_T	– współczynnik lepkości turbulentnej (eddy viscosity)
$\tilde{\omega}_\delta, \tilde{\omega}_{\delta,h}$	– przybliżona wirowość w metodzie wirów
ω	– wirowość
$\tilde{\omega}$	– przybliżona wirowość po dyskretyzacji (rozdz. 5)
Ω	– wektor rotacji (wiru)
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	– składowe wektora wiru
ω	– prędkość kątowna
$()^T$	– symbol transpozycji wektora lub macierzy
$(*)$	– operator splotu

1. Wstęp

Modelowanie obciążeń hydrodynamicznych, wynikających z oddziaływania turbulentnego strumienia przepływu cieczy na zamknięcie budowli wodnej, powinno być przeprowadzane w zgodzie z fizyką. W stosowanych do tej pory metodach uproszczonych wyznaczania obciążeń hydrodynamicznych zakłada się zwykle, że ciecz jest doskonała, a przepływ potencjalny. Konsekwencją takich założeń jest niemożność modelowania rzeczywistych zjawisk występujących podczas opływu zamknięć hydrotechnicznych, takich jak tworzenie się i odrywanie warstwy granicznej i powstawanie stref recyrkulacji. Zjawiska te mają istotny wpływ na wielkość oraz charakter obciążenia hydrodynamicznego zamknięcia. Wykonywane dawniej obliczenia współczynnika wydatku i kontrakcji były często weryfikowane badaniami eksperymentalnymi, które wskazywały, że przyjęte uproszczenia nie powodują dużych błędów obliczeniowych. Pojawiła się powtarzana często w publikacjach opinia (Naudascher i Rockwell, 1994), że przepływ z dużą liczbą Reynoldsa może być traktowany jako przepływ potencjalny. Jednak, aby takie przyjęcie uproszczeń było dopuszczalne przy wyznaczaniu obciążeń hydrodynamicznych, muszą być spełnione odpowiednie warunki, przede wszystkim fizyczne i geometryczne. Niniejsza praca ma na celu między innymi wskazanie takich przypadków, kiedy lepkość cieczy nie może być pominięta. George Batchelor, jeden z najznakomitszych mechaników płynów tak napisał w swojej książce (Batchelor, 1967):

Zwykle przyczyna różnicy charakteru tych dwóch przepływów leży w różnym zachowaniu się rzeczywistego i idealnego płynu blisko stałego brzegu. Płyn rzeczywisty spełnia warunek braku poślizgu na brzegu stałym, jakkolwiek mała byłaby jego lepkość, podczas gdy płyn idealny nie spełnia tego warunku.

W większości przypadków rzeczywistego przepływu przez budowle hydrotechniczne mamy do czynienia z ruchem turbulentnym, gdy w warstwie przyściennej zachodzą intensywne procesy tworzenia się wirów, które następnie są unoszone przez główny strumień przepływu. Jednym z bardzo szczególnych zjawisk opływu, którego nie można symulować na gruncie teorii przepływu potencjalnego lub przepływu cieczy nielepkiej, jest odrywanie się warstwy przyściennej. To zasadnicza przyczyna powstawania dużych spójnych (koherentnych) struktur wirowych, których efektem jest pojawianie

się w przepływie quasi-okresowych pól wirowości, prędkości i ciśnienia (por. rys. 3.9). Zmienne wartości naporu wody na konstrukcję mogą być z kolei przyczyną jej drgań, co przekłada się na dodatkową zmianę pola prędkości i wirowości. Tym samym tworzy się mechanizm, który w niesprzyjających warunkach może prowadzić do podtrzymywania, a nawet wzmacniania amplitudy ruchu konstrukcji (Naudascher i Rockwell, 1994).

Innym trudnym do analizy przypadkiem jest zjawisko opływu zamknięcia hydrotechnicznego w warunkach jego zmiany położenia. Dodatkowy ruch ma wpływ na odrywanie lub przyleganie warstwy przyściennej i może istotnie zmieniać proces generowania wirów.

Modelowanie takich zjawisk jest zagadnieniem, o którym Batchelor (1967) napisał:

Jednym z najważniejszych problemów mechaniki płynów jest określenie właściwości przepływu zachodzącego przy jednoczesnym ruchu opływającego ciała o prostych kształtach, dla założonego rzędu wartości liczby Reynoldsa (Re), zwłaszcza dla dużych wartości Re , odniesionych do wymiarów ciała poruszającego się w wodzie lub powietrzu, które zaliczane są do płynów o małej lepkości.

Od napisania tego stwierdzenia upłynęły cztery dekady, jednak nie straciło ono nic ze swojej aktualności.

Wyznaczanie obciążeń hydrodynamicznych dotyczy wielu różnych zjawisk fizycznych i przypadków rozwiązań technicznych. Może to być związane z ogólną turbulencją przepływu, powstawaniem warstwy granicznej za opływaną konstrukcją, przemieszczaniem się konstrukcji w cieczy, falowaniem cieczy, drganiami zamknięć wzbudzanych przepływem. Inną grupę stanowią obciążenia spowodowane uderzeniem hydraulicznym, inną wreszcie siły pochodzące od ruchu obrotowego w maszynach przepływowych – turbin, pomp i wentylatorów. Bardzo silne efekty zmiennego obciążenia powstają w wyniku zjawisk katastrofalnych, takich jak awarie budowli wodnych, falowanie w wyniku abrazji brzegów w zbiorniku retencyjnym, trzęsienie ziemi, eksplozje. Jak widać obciążenia hydrodynamiczne obejmują wiele zagadnień. Z tego względu w niniejszej pracy autor skupił się wyłącznie na opisie i modelowaniu zjawisk pochodzących od turbulentnego strumienia cieczy, przepływającej przez wybrane rodzaje zamknięć hydrotechnicznych.

Modelowanie obciążeń hydrodynamicznych polega na wyznaczeniu parametrów przepływu, a przede wszystkim rozkładu prędkości i ciśnienia. Jeśli wyniki obliczeń mają być wiarygodne i dotyczyć zagadnień inżynierskich, należy modelować przepływ turbulentny z uwzględnieniem jego fizycznych właściwości. Przepływ turbulentny jest jednym z tych zjawisk, które są bardzo trudne do modelowania. Turbulencja przepływu oznacza bowiem ruch, który jest powszechnie określane mianem losowego lub chaotycznego (Elsner, 1987), (Gatski i inni, 1996). W tym obrazie chaotycznych ruchów cząstek cieczy pojawiają się również spójne ruchy dotyczące pewnych obszarów przepływu, zwane koherentnymi strukturami wirowymi. Skala wymiarów struktur koherentnych może być zbliżona do wymiaru całego obszaru przepływu, ich obecność

istotnie wpływa na transport masy, pędu i energii w przepływie. Oprócz tych struktur wirowych największych, istotną cechą ruchu turbulentnego jest występowanie w nim całej gamy wirów o mniejszych rozmiarach, aż do najmniejszych, których wymiar zależy od lepkości cieczy, przy czym najmniejsza skala osiąga 0,1 mm dla swobodnej strugi (Elsner, 1987).

Ustalony w sensie średnim ruch turbulentny wymaga dla jego podtrzymania nieustannego dopływu energii z zewnątrz. Energia w ruchu turbulentnym pochodzi od rozkładu prędkości średnich i przekazywana jest wirom największym, o najniższych częstotliwościach. Źródłem takiej energii, charakterystycznym dla opływu zamknięcia, będzie warstwa przyścienna, a także jej odrywanie się od krawędzi zamknięcia i formowanie się warstwy granicznej. W warstwie granicznej przepływ jest silnie naprzemienny (intermitentny), co oznacza, że chwilami ma on charakter laminarny, a chwilami turbulentny – zjawisko to jest efektem tworzenia się struktur koherentnych. Energia wirów dużych jest transferowana następnie poprzez skale średnie do wirów najmniejszych o największej częstotliwości, tworząc tak zwaną kaskadę energii. Dopiero w wirach najmniejszych następuje dyssypacja energii turbulencji wskutek jej zamiany na ciepło. Obecne badania wskazują, że występuje również zjawisko przekazywania energii w kierunku odwrotnym, czyli od wirów najmniejszych do największych – tak zwane rozproszenie wsteczne (z ang. *backscatter*).

Inną bardzo ważną cechą przepływów turbulentnych jest niejednorodność zjawiska turbulencji, objawiająca się zależnością fluktuacji prędkości od kierunku przepływu. Jest to wynik przekazywania energii od przepływu średniego, który ma jeden dominujący kierunek. Silny wpływ na zjawisko anizotropowości turbulencji ma obecność brzegów, wykazujących tłumiące działanie na normalne do brzegu składowe fluktuacji prędkości. Według Gatski i in., (1996) pewną anizotropowość obserwuje się nawet w skali najmniejszej.

Przedstawiona charakterystyka turbulencji wskazuje jak wielkie trudności związane są z opisem matematycznym omawianego zjawiska. Dlatego też uciekamy się do opisu fenomenologicznego, zakładającego jednorodność i ciągłość materii, gdyż wtedy dysponujemy równaniami, wynikającymi z różnych teorii tego ruchu. Najbardziej uniwersalne i zarazem dokładne jest równanie Naviera–Stokesa, jednak jego bezpośrednie rozwiązywanie napotyka wiele trudności.

Wybór metody modelowania zależeć będzie od teorii przyjętej do analizy tego ruchu. Jeżeli przyjmujemy założenie, że turbulencja jest wyłącznie losowa, to właściwe rozwiązanie możemy znaleźć na gruncie teorii stochastycznej, wykorzystując do tego celu uśrednione równanie Reynoldsa. Gdyby z kolei rozważać wyłącznie zjawisko pojawiania się struktur koherentnych, które często mają w przybliżeniu charakter okresowy, można by traktować przepływ turbulentny jako deterministyczny i wyznaczać go z równania Naviera–Stokesa. Klasycznym przykładem takiego okresowego zjawiska jest opływ walca i tworzenie się ścieżki wirowej Kármána. Wiry Kármána, mimo pewnej regularności, nie są oczywiście zupełnie jednakowe pod względem natężenia

wirowości i częstości odrywania. W innych przypadkach, na przykład opływu zasuw, ta regularność jest jeszcze mniejsza. Świadczy to o tym, że zjawisko przepływu turbulentnego nie jest w pełni ani stochastyczne, ani deterministyczne. Przystępując do wyboru modelu, należy rozważyć jeszcze parametry przepływu związane z jego turbulencją początkową, geometrią obszaru, warunkami brzegowymi – czynnikami silnie oddziałującymi na charakter przepływu i tworzenie się struktur koherentnych. To sprawia, że niezwykle trudno jest na obecnym etapie wiedzy zbudować model uniwersalny, który mógłby być stosowany do wszystkich rodzajów przepływów turbulentnych.

Złożoność zjawiska turbulencji powoduje, że w zagadnieniach inżynierskich rozwiązanie przepływu turbulentnego poszukiwane jest wyłącznie za pomocą symulacji numerycznych, które uwzględniają złożoną, stochastyczno-deterministyczną naturę zjawiska. Modelowanie numeryczne przepływów turbulentnych to dynamicznie rozwijająca się dziedzina, w której dominują obecnie dwie grupy metod – metody wykorzystujące siatkę numeryczną do aproksymacji rozwiązania równań różniczkowych opisujących zjawisko przepływu oraz metody, w których nie korzysta się z siatki. Przez pojęcie siatki numerycznej rozumie się pewien skończony zbiór punktów, reprezentujący przestrzeń fizyczną. Podstawą do modelowania dla tych metod są równania Reynoldsa lub równania Naviera–Stokesa.

W niniejszej pracy zaprezentowano założenia i opisy różnych modeli obliczeniowych, od najprostszych, wykorzystujących funkcję potencjału prędkości, które nie spełniają przedstawionych wymagań, aż do tych najnowszych, z uwzględnieniem nie tylko ich możliwości, ale także ograniczeń.

W monografii zaproponowano zastosowanie do obliczeń numerycznych opływu zamknięć hydrotechnicznych numerycznej, bezsiatkowej metody wirów, jako alternatywy dla metod z siatką numeryczną. Metodę tę zaproponowano, gdyż oddaje ona najwierniej fizykę zjawiska generowania wirowości i tworzenia się struktur koherentnych. Nie wymaga stosowania współczynników empirycznych i nadaje się do wyznaczania parametrów przepływu dla dowolnie złożonych geometrycznie obszarów z brzegami stacjonarnymi lub ruchomymi. Dzięki temu można ją użyć w praktycznych obliczeniach pola prędkości i ciśnienia, a następnie wyznacza się obciążenie hydrodynamiczne zamknięć hydrotechnicznych.

W zamierzeniach autora, oprócz walorów poznawczych, praca ma szeroki aspekt praktyczny, polegający na wyjaśnieniu mechanizmów powstawania zmiennych obciążeń, których niepożądanym efektem mogą być drgania zamknięć hydrotechnicznych. Dzięki przeprowadzonym symulacjom numerycznym i porównaniu wyników z metodami opartymi na równaniu przepływu potencjalnego, przedstawiono również te przypadki opływu zamknięć, które zdecydowanie nie powinny być wyznaczane za pomocą uproszczonych metod. Przedstawione w pracy wnioski dotyczące kształtów krawędzi opływanych zamknięć zasuwowych i segmentowych, które nie powodują niebezpieczeństwa pojawiania się drgań, będą z pewnością stosowane przez inżynierów, zajmujących się projektowaniem tego typu konstrukcji.

1.1. Cel pracy i podstawowe założenia

Zasadniczym celem prezentowanej monografii jest opracowanie metody wyznaczania zmiennych obciążeń hydrodynamicznych działających na zamknięcia hydrotechniczne. Proponowana przez autora metoda w zasadniczy sposób różni się od dotychczas stosowanych prostych rozwiązań numerycznych, nieuwzględniających turbulentnego charakteru przepływu i zachodzących w nim niekorzystnych zjawisk polegających na powstawaniu zmiennego naporu hydrodynamicznego. Efektem obliczeń zaproponowaną metodą jest wyznaczenie średniej wartości siły hydrodynamicznej oraz składnika fluktuacji, który może być podstawą do dalszych prac nad dynamicznym zachowaniem się opływanych konstrukcji. Metoda zakłada możliwość analizowania przepływów laminarnych i turbulentnych. Te pierwsze służą przede wszystkim weryfikacji metody, drugie są podstawą modelowania oddziaływania strumienia na opływającą konstrukcję w warunkach, które występują „w naturze”, tzn. dla dużych liczb Reynoldsa około 10^5 – 10^6 .

Metoda, aby była skuteczna musi zostać wyposażona w narzędzia obliczeniowe w postaci algorytmów i programów komputerowych. Celem pracy było ich opracowanie, aby umożliwić efektywne symulacje numeryczne przepływów dla modeli odpowiadających rzeczywistym konstrukcjom hydrotechnicznym. Dało to możliwość osiągnięcia kolejnego celu praktycznego – określenia kształtu opływanej krawędzi zamknięcia hydrotechnicznego, który nie wywołuje niestabilności strumienia opływowego i tym samym silnych dynamicznych obciążeń – i w tym kontekście sformułowanie wniosków i zaleceń przydatnych w procesie projektowania zamknięć.

W opracowywaniu monografii ograniczono się do wyznaczania jednego z możliwych rodzajów obciążeń hydrodynamicznych, a mianowicie pochodzącego od niestabilności przepływu wywołanego silną turbulencją i odrywaniem strumienia opływowego. Pozostałe przyczyny, takie jak falowanie strumienia, ruch konstrukcji lub uderzenie hydrauliczne są bowiem innej natury i wymagają budowy innych, często mniej złożonych modeli obliczeniowych. W pracy dominuje analiza dwóch rodzajów zamknięć, które są szczególnie narażone na drgania – zamknięcia zasuwowego w przewodzie ciśnieniowym oraz zamknięcia klapowego, stanowiącego zamknięcie jazowe na niskim progu. Pierwsze reprezentuje klasę zamknięć z dolną krawędzią opływającą, a drugie z krawędzią górną. Wybór ten był podyktowany objęciem szerszego spektrum zjawisk, gdyż w przypadku zamknięcia zasuwowego występują duże prędkości i intensywność towarzyszącego im zmiennego ciśnienia, podczas gdy w przypadku klap mamy do czynienia z wolniejszym przepływem i swobodną powierzchnią. Zamieszczone w pracy symulacje opływu innych konstrukcji stanowią potwierdzenie możliwości stosowania zaproponowanej metody do różnych zagadnień, także takich, które nie wywodzą się z budownictwa wodnego.

Dodatkową motywacją do napisania niniejszej pracy była chęć przybliżenia problematyki związanej z numerycznym modelowaniem przepływów turbulentnych w aspekcie praktycznych obliczeń, a zwłaszcza prezentacja własnych rozwiązań polegających na wykorzystaniu metody wirów w połączeniu z metodą elementów brzegowych. Metodami tymi analizowano najpierw pola prędkości i wirowości, a następnie wyznaczano rozkład ciśnienia na opływanej powierzchni zamknięcia, który razem z polem prędkości jest podstawą do obliczenia siły hydrodynamicznej. Metoda wirów, która symuluje przepływ na podstawie ruchu cząstek wirowości jest w tym kontekście bardzo obiecująca, daje bowiem dobre przybliżenie zjawiska opływu turbulentnego, lecz jest stosowana stosunkowo rzadko. Składają się na to zdaniem autora różne przyczyny – „młody wiek” metody, stosunkowo długi czas obliczeń przy dużej liczbie cząstek wirowości oraz trudności w spełnieniu warunków brzegowych.

1.2. Zakres pracy

Zgodnie z definicją obciążenie hydrodynamiczne obejmuje w zasadzie wszystkie przypadki oddziaływań cieczy na konstrukcję, jeśli tylko są one we wzajemnym ruchu i następuje wymiana pędu pomiędzy nimi. W zależności od rodzaju konstrukcji i sposobu opływu cieczy zjawisko obciążenia hydrodynamicznego może przebiegać w inny sposób i różne mogą być efekty jego oddziaływania. Dlatego w rozdziale drugim przedstawiono w sposób możliwie syntetyczny systematykę obciążeń hydrodynamicznych, i warunków ich występowania, opierając się na literaturze przedmiotu oraz zebranych własnych doświadczeniach. Doświadczenia te głównie dotyczyły zamknięć klapowych, których problemom drgań poświęcona była praca doktorska autora monografii (Kostecki, 1985). W pracy tej przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych do analizy drgań własnych konstrukcji w powietrzu oraz w wodzie. Efekt oddziaływania wody jest związany z tzw. „masą towarzyszącą”, która powoduje znaczne zmniejszenie częstości drgań. Wyniki obliczeń wykonanych przez autora zostały zweryfikowane bardzo pozytywnie badaniami drgań na modelu zamknięcia klapowego i na rzeczywistej konstrukcji kłapy (Rogała i Kostecki, 1987) na przelewie zapory Słup na rzece Nysie Szalonej. Wyniki badań autora posłużyły do znalezienia przez niego oryginalnego sposobu usunięcia przyczyny tych drgań (Kostecki i inni, 1986). Oprócz zamknięć klapowych, które z racji swojej wiotkiej konstrukcji są szczególnie podatne na drgania, w rozdziale drugim wskazano, że do rodzajów zamknięć, które podlegają bardzo silnym i zmiennym obciążeniom zaliczyć należy zamknięcia zasuwowe i segmentowe. Ich dynamiczne obciążenie jest wynikiem pulsacyjnej zmienności ciśnienia w przepływie turbulentnym, a zwłaszcza zjawisko odrywania się warstwy przyściennej od krawędzi opływanej. Wartość siły hydrodynamicznej może w ich przypadku wielokrotnie przekraczać siłę pochodzącą od ciężaru własnego (Col-

gate, 1959). Pomijanie tych zjawisk przy projektowaniu może doprowadzić do problemów eksploatacyjnych skutkujących koniecznością modernizacji zamknięcia czy budowli, co zawsze jest bardzo kosztowne lub nawet może być przyczyną awarii zagrażającej bezpieczeństwu ludzi i ich mienia. Opis negatywnych skutków obciążeń hydrodynamicznych podano w końcowej części tego rozdziału. Aby móc analizować zjawisko obciążenia hydrodynamicznego metodami numerycznymi, niezbędne jest zastosowanie do jego opisu równań mechaniki płynów.

Rozdział trzeci jest syntetyczną prezentacją zagadnień z mechaniki płynów i hydrauliki w zakresie zagadnień omawianych w następnych rozdziałach. W części pierwszej zebrano podstawowe zasady zachowania w mechanice oraz przedstawiono równania przepływu potencjalnego, cieczy idealnej i cieczy newtonowskiej. Do każdego z tych równań w skrócie omówiono warunki niezbędne do prawidłowego sformułowania zagadnienia brzegowego. Część druga tego rozdziału poświęcona została omówieniu kinematyki i dynamiki wirowości, zagadnieniom ważnym w kontekście rozwijania przez autora metody wirów. Trzecią część tego rozdziału zajmują zagadnienia związane z turbulencją przepływów. Do przedstawienia w pracy wybrano zagadnienia, które mają bezpośredni związek z wyznaczaniem parametrów przepływu turbulentnego i siły hydrodynamicznej. Zmienna w czasie wartość siły hydrodynamicznej, działającej na powierzchnię konstrukcji, jest ściśle powiązana ze zjawiskami zachodzącymi w warstwie przyściennej. Przedstawiono opis tworzenia się tej warstwy i zjawisko jej odrywania od powierzchni zamknięcia. W rozdziale tym starano się także naświetlić poziom trudności w formułowaniu matematycznego modelu przepływu turbulentnego i zjawiska turbulentnej warstwy przyściennej.

Problemy modelowania przepływów turbulentnych metodami numerycznymi stanowią treść rozdziału czwartego. Przedstawiono w nim stosowane dotychczas metody wyznaczania siły hydrodynamicznej, w większości oparte na teorii przepływu potencjalnego i równaniu Bernoulliego. Na uwagę w opisie tych metod zasługują monografie Naudaschera (1991) i Naudaschera i Rockwella (1994), którzy przedstawili w niej liczne przykłady obliczeń podaną metodą. Jednakże proste metody dają wyniki obarczone znacznym błędem, a w niektórych przypadkach nie powinny być stosowane, co zostało wykazane w pracy autora (Kostecki, Strzelecki, 2006). Oprócz tych prostych metod w pracy omówiono metody numeryczne, które można stosować w obliczeniach pola przepływu i ciśnienia dla przepływu turbulentnego. Przedstawiono ich charakterystyczne cechy z podziałem na metody siatkowe i bezsiatkowe. W tej pierwszej grupie wyróżniono stosunkowo nową metodę LES (*Large Eddy Simulation*), (Gatski i inni, 1996), która jest obecnie intensywnie rozwijana na miejsce klasycznej metody, opartej o uśrednione po czasie równanie Reynoldsa. Jej zaletą jest rozwiązywanie równań ruchu turbulentnego dla dużych skal wirowości na podstawie równań Naviera–Stokesa, a z równania uśrednionego stochastycznie tylko dla skal małych. Metoda ta jest uważana za dającą lepszą aproksymację, niż w klasycznym podejściu za pośrednictwem uśrednionego równania Reynoldsa. Jak do tej pory zastosowanie tej metody do zagad-

nień inżynierskich jest mocno ograniczone ze względu na problemy modelowania odrywania turbulენტnej warstwy przyściennej (Gatski i inni, 1996).

Pewnym rozwiązaniem może być zastosowanie metody bezsiatkowej, zwłaszcza proponowanej przez autora metody wirów dyskretnych (Kostecki, 2007). Główną jej zaletą, oprócz braku siatki numerycznej, jest bezpośrednie rozwiązywanie równań Naviera–Stokesa sformułowanych w postaci równania transportu wirowości. To zagadnienie zostało omówione w rozdziale piątym, który stanowi ważną część pracy zawierającą zaproponowane przez autora rozwiązania rozkładów pól prędkości i wirowości w przepływie turbulენტnym. Po przeglądzie literatury dotyczącym historii metody i jej podstaw matematycznych skoncentrowano się na przedstawieniu poszczególnych jej sformułowań, w zależności od obszaru zastosowania. Zaprezentowano metodę wirów punktowych, która leży u podstaw metod wirów, a jest obecnie wykorzystywana w analizie ruchu warstwy wirowej opisanej równaniem całkowym z jądrem osobliwym (Lindsay i Krasny, 2001). Metoda wirów dyskretnych ma dwa sformułowania – pierwsze stochastyczne, które zostało zapoczątkowane przez Chorina (1973) i drugie deterministyczne zaproponowane po raz pierwszy przez Fishelov (1990). W pracy przedstawiono wyprowadzenie równań obu tych metod. Szczególnie skoncentrowano się na zagadnieniu metody stochastycznej wirów, jako bardziej odpowiedniej do losowego charakteru przepływu. Podano własną propozycję funkcji regularyzacji jądra opartą na funkcji Cauchy’ego, która ma zaletę analitycznej całkowalności i jak pokazano w punkcie 5.4.2 spełnia kryteria zbieżności i jest stabilna. Kluczowym problemem wyznaczania z metody wirów parametrów przepływu w obszarach ograniczonych jest zagadnienie spełnienia warunku brzegowego, na którym występuje znikanie składowych prędkości. W celu spełnienia tego warunku autor zaproponował wykorzystanie dodatkowego pola przepływu potencjalnego, wyznaczanego metodą elementów brzegowych. Oprócz rozwiązania potencjalnego do pełnego opisu zjawiska przepływu wzdłuż brzegu obszaru wykorzystano w pracy odpowiednie procedury generowania wirowości na brzegu, stanowiącego brzeg kanału lub opływanej konstrukcji.

W pracy przedstawiono także (Puckett, 1989) metodę warstw wirowych, wykazując równocześnie, że jej zakres stosowana do przepływów, które charakteryzują się dużą liczbą Reynoldsa i odrywaniem warstwy wirowej jest ograniczony. W metodzie numerycznej ważne jest stwierdzenie jej zbieżności i stabilności. Obszerne omówienie tego zagadnienia zamieszczono w podrozdziale 5.6, w którym zawarto uwagi i spostrzeżenia autora odniesione do metody wirów dyskretnych w sformułowaniu stochastycznym w rozbiciu na zagadnienie adwekcji i dyfuzji wirowości.

Rozdział szósty jest najważniejszą częścią pracy, stanowi bowiem aplikację użytych w poprzednim rozdziale równań metody wirów dyskretnych do wyznaczania siły hydrodynamicznej. Z przedstawionej w tym rozdziale definicji wynika, że siła hydrodynamiczna działająca na konstrukcję stanowią naprężenia styczne i ciśnienia, całkowane po całej powierzchni tej konstrukcji. Udział naprężeń stycznych dla dużych liczb Reynoldsa w stosunku do sił ciśnienia jest niewielki i może być pominięty. Po

przedstawieniu różnych sformułowań zagadnienia ciśnienia, zaprezentowano opis siły hydrodynamicznej od strony teoretycznej oraz dyskusję poprawności rozwiązania w kontekście różnych warunków brzegowych dla zagadnienia rozkładu ciśnienia w strumieniu przepływowym. Autor przedstawił swoją koncepcję rozwiązania zagadnienia na podstawie przekształcenia równania Naviera–Stokesa do równania Poissona określającego rozkład ciśnienia. Potrzebne do tego rozwiązania rozkłady pola prędkości i wirowości są otrzymywane metodą wirów (Kostecki 2003, 2006), w postaci rozwiązania metodą różnic skończonych. W niniejszej pracy zaproponowano metodę rozwiązania równania Poissona dla ciśnienia wykorzystując do tego celu podejście wariacyjne. Przez odpowiednie sformułowanie zagadnienia brzegowego uzyskano postać równań, do rozwiązania których nie jest konieczna znajomość funkcji ciśnienia na brzegu, wystarczą do tego bowiem rozkłady prędkości i wirowości w obszarze przepływu. Rozwiązania problemu dokonano metodą elementów brzegowych. Zaletą tego podejścia jest możliwość ograniczenia rozwiązania tylko do brzegowych wartości ciśnienia, które odpowiednio scałkowane po konturze zamknięcia dają poszukiwaną wartość siły hydrodynamicznej. Jeśli interesuje nas pole ciśnienia wewnątrz obszaru przepływu to metodą elementów brzegowych łatwo to ciśnienie może być wyznaczone na podstawie rozwiązania brzegowego.

Po części teoretycznej przedstawiono przykłady obliczeń numerycznych potwierdzających dokładność i efektywność metody.

W rozdziale siódmym przeprowadzono analizę obciążeń hydrodynamicznych działających na wybrane dwa rodzaje zamknięć hydrotechnicznych, na podstawie opracowanych autorskich programów numerycznych. Programy te zostały napisane częściowo w języku Fortran 95, a częściowo w programie Matlab, który posłużył także do wizualizacji wyników.

Pierwszym analizowanym obiektem jest zasuwa płaska, o poziomej dolnej krawędzi, zamykająca spust denny zapory Słup na rzece Nysie Szalonej. Obiekt wybrano ze względu na pojawiające się podczas jego eksploatacji drgania, wynikające ze zmiennej obciążenia hydrodynamicznego. Analizowano dwa różne poziomy otwarcia tej zasuwy i wyznaczono parametry fizyczne przepływu oraz ciśnienie panujące w przewodzie spustu dennego. Wyniki porównano z rozwiązaniem opartym na teorii przepływu potencjalnego. Dodatkowo przeprowadzono symulację trzech innych hipotetycznych kształtów dolnej krawędzi tego zamknięcia, aby stwierdzić, jaki jest wpływ kształtu na wartość siły hydrodynamicznej.

Drugim zamknięciem był model kłapy stanowiący przykład obliczeń zamknięcia ze swobodną powierzchnią. Poddano symulacji dwa przepływy przez kłapę uzyskując dobrą zgodność obliczonego ciśnienia z pomiarami wykonanymi na tym modelu.

Ostatni rozdział pracy zawiera uwagi końcowe i wnioski oraz kierunki dalszych spodziewanych badań autora.

2. Obciążenia zamknięć budowli hydrotechnicznych

Zamknięcia hydrodynamiczne budowli wodnych śródlądowych są poddane znacznym zmiennym obciążeniom, które powinny być brane pod uwagę na etapie projektowania, zgodnie z obowiązującą normą (PN-2000-032003), a także podczas ich eksploatacji. Siły hydrodynamiczne (oprócz siły hydrostatycznej) stanowią bowiem dodatkowe obciążenie i zaliczają się do zasadniczych długotrwałych obciążeń, na które powinno być projektowane każde zamknięcie. Ich nieuwzględnienie lub niewłaściwe oszacowanie w konsekwencji może prowadzić do zagrożenia konstrukcji, o czym świadczą liczne awarie (Naudascher, 1991), (Naudascher i Rockwell, 1994). We wspomnianej normie oraz w podręcznikach dotyczących projektowania (Fanti, 1972) brak jest opisu metod, którymi można byłoby obliczać w skuteczny sposób siłę hydrodynamiczną – wynik złożoności i różnorodności przypadków występowania tej siły i związanych z nią zjawisk.

Siłę hydrodynamiczną można zdefiniować jako napór wody wywołany jej ruchem lub ruchem samej konstrukcji, działający na jej powierzchni. Opis fizyczny polega na określeniu zmiany strumienia pędu w cieczy opływającej konstrukcję, traktowaną jako ciało nieprzepuszczalne. Wartość naporu hydrodynamicznego jest równoważna ilości strumienia pędu przechodzącego przez powierzchnię w kierunku do niej prostopadłym. Strumień pędu zależy od pola prędkości oraz od gęstości cieczy. Zmiana pola prędkości w czasie będzie mieć wpływ na zmianę pędu i w konsekwencji na zmienność obciążenia hydrodynamicznego.

W niniejszej monografii zajmować się będziemy przede wszystkim oddziaływaniami, które występują podczas eksploatacji zamknięć hydrotechnicznych.

Omawiając siłę hydrodynamiczną należy podkreślić, że niezależnie od przyczyny jej powstania składa się ona z dwóch części – wartości średniej oraz fluktuacji (por. p. 3.3.2). Średnia wartość obciążenia hydrodynamicznego stanowi więc dodatkową siłę, którą należy uwzględnić na etapie projektowania konstrukcji i urządzeń wyciągowych. Jeżeli obciążenie jest wynikiem podciśnienia, gdy dodatkowo występuje zjawisko kawitacji, to może nastąpić uszkodzenie opływanej powierzchni. Fluktuacja prę-

kości, której towarzyszą znaczne zmiany ciśnienia na powierzchni zamknięcia może powodować jego drgania. Efektem tych drgań jest na ogół zmęczenie materiału prowadzące do awarii zamknięcia.

Rozróżnia się wiele różnych zjawisk prowadzących do pojawienia się siły hydrodynamicznej.

2.1. Rodzaje sił hydrodynamicznych

Rodzaje sił hydrodynamicznych klasyfikuje się pod kątem przyczyny, która je wywołała, oraz na podstawie mechanizmu, powodującego trwałość jej występowania. Obszerną systematykę obciążeń hydrodynamicznych sporządził po raz pierwszy Naudascher (1961, 1991), a została przyjęta i zastosowana przez innych autorów (Kolkmann 1984; Thang, 1984). Naudascher wyróżnia następujące rodzaje sił:

- a) spowodowane przez przyczyny zewnętrzne,
- b) wywołane niestabilnością przepływu i oderwaniem warstwy przyściennej od krawędzi zamknięcia,
- c) powodowane ruchem konstrukcji lub jej części,
- d) wzbudzone oscylacją objętości cieczy.

Przedstawiona systematyka jest ogólna i nie zawsze można jednoznacznie rozstrzygnąć, do której grupy należy zakwalifikować dany przypadek. Aby ułatwić i przybliżyć zasady tego podziału, przedstawiono charakterystykę poszczególnych rodzajów sił hydrodynamicznych.

2.1.1. Siły spowodowane przez przyczyny zewnętrzne

Do grupy sił spowodowanych przez przyczyny zewnętrzne Naudascher (1991) oraz Thang (1984) zaliczają wszystkie zmienne siły działające na opływającą konstrukcję, których pochodzenie nie zależy od zjawisk zachodzących na styku konstrukcja–ciecz, lecz jest wynikiem działania czynnika zewnętrznego. Wyróżnia się kilka odmiennych źródeł, do których przede wszystkim zalicza się fluktuacje prędkości i ciśnienia wynikające z turbulencji napływającej cieczy. Przykładem może być oddziaływanie strumienia na dno bystrza lub kaskady powodujące jego uszkodzenia oraz fluktuacje prędkości i ciśnienia pojawiające się w obrębie odskoku hydraulicznego działające na płytę niecki wypadowej i na ubezpieczenia poniżej niecki. Jest kilka przypadków niszczenia tych urządzeń wynikających ze znacznych pulsacji ciśnienia, których amplituda różni się nawet 10–20-krotnie od wartości średniej (Naudascher, 1991). Destruktywne są w tym przypadku podciśnienia, za ich przyczyną powstaje bowiem kawitacja i niszczenie powierzchni konstrukcji. Materiał ubezpieczenia nierzadko też jest unoszony przez siły ciśnienia i porywany przez przepływający strumień. Innym źródłem zmien-

nej siły jest powstawanie warstwy granicznej za opływającym elementem konstrukcji. W strefie recyrkulacji powstają silne pulsacje oraz ujemne wartości ciśnienia, które mogą niekorzystnie wpływać na elementy znajdujące się w ich strefie.

Przepływy dwufazowe są kolejnym, częstym źródłem silnych pulsacji prędkości i ciśnienia. Zachodzą w sytuacji równoczesnego przepływu dwu różnych płynów, na przykład cieczy oraz gazu. W konstrukcjach wodnych zjawisko to zachodzi szczególnie intensywnie w spustach dennych zapór, sztolniach energetycznych lub obiegowych, w sytuacji kiedy w przewodzie pojawiają się bąble powietrza, które przemieszczają się zgodnie z kierunkiem przepływu lub przeciw niemu. Ich przemieszczaniu, a następnie znikaniu w skutek wentylacji towarzyszą często pulsacje porównywalne ze zjawiskiem uderzenia hydraulicznego.

W przypadku konstrukcji morskich głównym źródłem zmiennego obciążenia będzie falowanie. Dla zamknięć hydrotechnicznych śródlądowych falowanie może także mieć duży udział w obciążeniach hydrodynamicznych, jeśli akwen wodny jest dostatecznie duży do powstania wysokiej fali. Przykłady obliczeń tej siły, działającej na zanurzony w wodzie cylinder, można znaleźć w literaturze (Naudascher, 1991; Sarpkaya, 1989).

Z pozostałych zewnętrznych źródeł siły hydrodynamicznej wymienić jeszcze należy trzęsienie ziemi oraz eksplozję ładunku w wodzie. Trzęsienie ziemi powoduje, że konstrukcja jest przyspieszana w kierunku poziomym i pionowym. Największe poziome przyspieszenia są rzędu 1,0 g. W przypadku wysokich zapór następuje interakcja między zgromadzoną w zbiorniku wodą a konstrukcją polegająca na tym, że ruch konstrukcji wywołuje w cieczy falę ciśnieniową, która znacząco zmniejsza częstość drgań przez efekt masy towarzyszącej. Równocześnie w zbiorniku może powstać fala powierzchniowa, zagrażająca przelaniem konstrukcji zapory i obwałowań. Ruch pionowy wpływa na stateczność w poziomie posadowienia i może być przyczyną poślizgu i zniszczenia zapory. W samej zaporze powstają odkształcenia korpusu, które są groźne dla wytrzymałości.

Wybuch ładunku w wodzie jest obciążeniem udarowym o określonej charakterystyce, przekazującym się na konstrukcję w postaci fali ciśnienia $p(x, t)$. Rozkład ciśnienia w przestrzeni i czasie zależy od rodzaju materiału wybuchowego, odległości wybuchu od budowli oraz geometrii budowli i jej otoczenia. Impuls ciśnienia trwa bardzo krótko i zazwyczaj interesuje nas jego maksymalna wartość. Rozkład ciśnienia na froncie fali uderzeniowej można aproksymować krzywą wykładniczą opisaną równaniem Cole'a (Dobrociński, 2000):

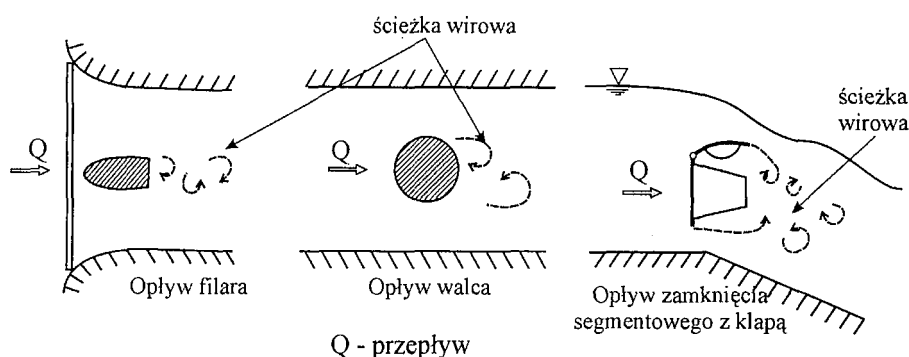
$$p(R, t) = p_m e^{-\frac{t}{\Theta}} \quad (2.1)$$

gdzie: $p_m = 52,3 \left(\sqrt[3]{G/R} \right)^{1,13}$ – maksymalna wartość impulsu, MPa, G – masa ładunku TNT, kg, $\Theta = 0,093 \sqrt[3]{G} \left(\sqrt[3]{G/R} \right)^{-0,22}$, ms, t – czas od momentu wybuchu, ms.

Wyznaczenie dynamicznej reakcji konstrukcji zamknięcia na obciążenie falą uderzeniową pochodzącą od podwodnej detonacji trotylu wymaga rozwiązania równania drgań zamknięcia z uwzględnieniem masy towarzyszącej wody.

2.1.2. Siły wywołane niestabilnością przepływu i oderwaniem warstwy przyściennej

Grupę obciążeń wywołanych niestabilnością przepływu i oderwaniem warstwy przyściennej można zdefiniować jako niestabilność strumienia cieczy spowodowaną oddziaływaniem opływanej konstrukcji. Składowa fluktuacji ciśnienia jest w tym przypadku wzmacniana przez mechanizm sprzężenia zwrotnego między cieczą i konstrukcją. Przykładowe schematy tego zjawiska przedstawiono na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Przykłady tworzenia się ścieżki wirowej za opływającą konstrukcją

Zjawisko sprzężenia zwrotnego występuje podczas drgań konstrukcji. Jest wiele różnych przypadków, które można zakwalifikować do tej grupy obciążeń. Zwykle wymienia się ścieżkę wirową, jej najbardziej znanym przypadkiem jest formowanie się wirów za opływającym walcem. Wiry odrywają się cyklicznie od powierzchni walca z okresem zależnym od liczby Reynoldsa dla wartości $Re < 10^3$, powyżej której okres ten jest prawie niezmienny i może być wyrażony bezwymiarową liczbą Strouhala (Gryboś, 1998):

$$St = \frac{D}{ut^*} \approx 0,21 \quad (2.2)$$

gdzie: u – prędkość strugi, D – średnica walca, t^* – okres odrywania się wirów od powierzchni walca.

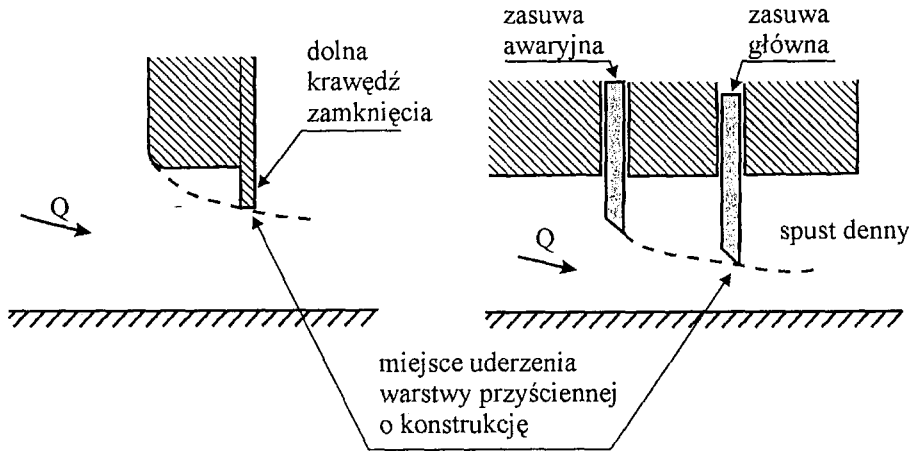
W przypadku opływu innych kształtów częstość odrywania się wirów jest trudna do określenia i najczęściej wyznaczana empirycznie w postaci funkcji zależnej od liczby Strouhala.

Przyczyną, która często prowadzi do wzbudzenia drgań konstrukcji jest cykliczne zjawisko zderzenia się oderwanej warstwy granicznej z dalszą częścią konstrukcji. Zjawisko odbywa się periodycznie, występuje bowiem sprzężenie zwrotne między polem prędkości i ciśnienia, co sprawia, że po oderwaniu strumień jest ponownie zakrzywiany do brzegu. Częstość tego uderzania strumienia o konstrukcję zależy od prędkości cieczy u i odległości między punktem oderwania i przylegania L i można ją w przybliżeniu wyrazić zależnością (Narayanan, 1972; Naudascher, 1991)

$$\frac{fL}{u} = 1 \quad (2.3)$$

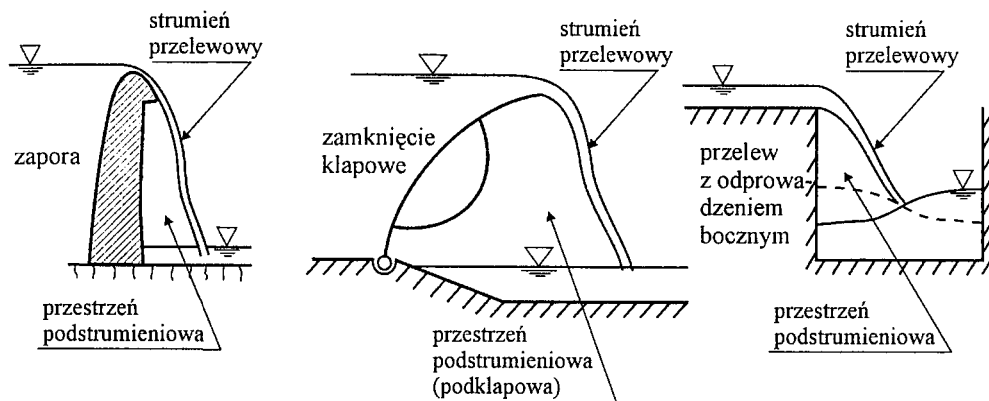
gdzie f – częstość pulsacji siły hydrodynamicznej.

Schematyczne przykłady powstawania tego zjawiska przedstawiono na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Przykłady uderzania oderwanej warstwy przyściennej o opływającą konstrukcję

Zmienność granicy dwóch ośrodków płynnych obejmuje również zjawiska zaliczane do opisywanej grupy niestabilności. Najczęstszym przykładem tej niestabilności jest falowanie strumienia spadającego z zamknięcia klapowego umieszczonego na wysokim progu. Badania zjawiska były przedmiotem pracy Petrikata (1976), który odkrył, że spadający z powierzchni kłapy strumień faluje, tworząc zmienne ciśnienie powietrza w przestrzeni pod strumieniem powodującym zmienne obciążenie konstrukcji (Kostecki, Popow, 1987). Podobne zjawisko powstaje, gdy strumień spada z przelewu czołowego lub z przelewu bocznego, powodując wahania wody w kanale. Schematy tych obciążeń przedstawiono na rysunku 2.3.

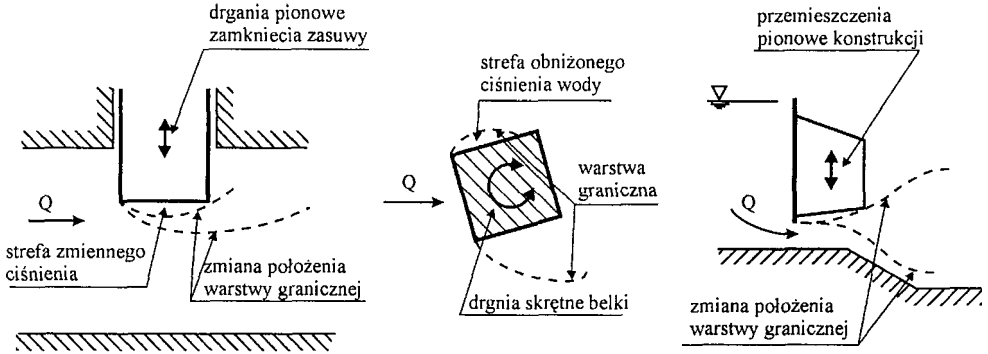


Rys. 2.3. Przykłady falowania strumienia przelewowego powodujące zmiany ciśnienia powietrza zamkniętego w przestrzeni podstrumieniowej

2.1.3. Siły powodowane ruchem konstrukcji

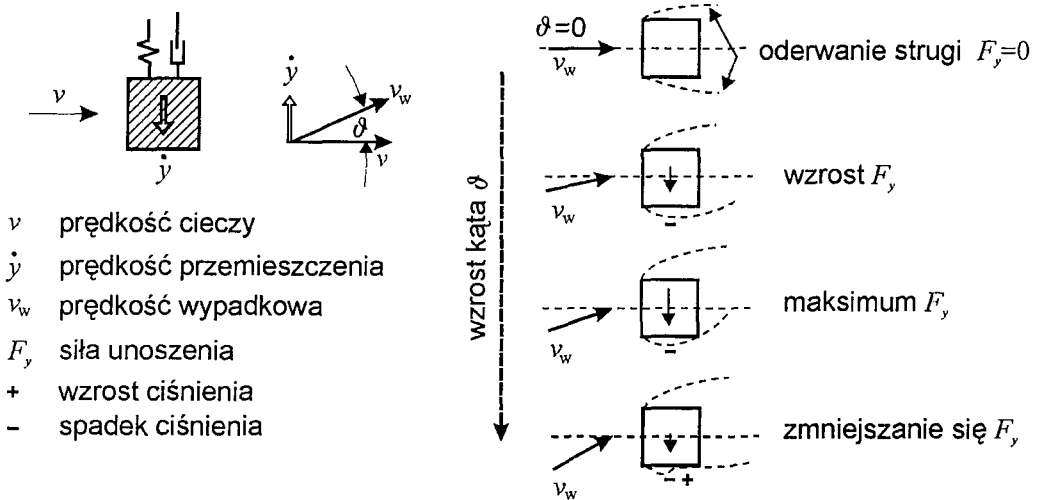
Przy omawianiu sił powstających od turbulencji przepływu lub w wyniku niestabilności oderwania strumienia zakładano, że opływana krawędź jest nieruchoma, tzn. nie uczestniczy w mechanizmie powstawania tej siły. Siły spowodowane ruchem konstrukcji są przedstawiane jako rodzaj wymuszenia dodatkowych fluktuacji siły hydrodynamicznej. Gdy konstrukcja wykonuje drgania, wówczas dodatkowa siła może być zapisana w postaci składowej harmonicznej – jeśli jest ona zgodna w fazie z przyspieszeniem konstrukcji, to można ją przedstawić jako efekt masy towarzyszącej, jeśli jest zgodna w fazie z prędkością, będzie elementem tłumienia drgań (Zienkiewicz, 1978). Siły spowodowane ruchem konstrukcji są trudne do określenia w badaniach modelowych ze względu na złożoność tego zjawiska, na które wpływ ma prędkość, ściśliwość i gęstość przepływającej cieczy, masa, sprężystość i tłumienie konstrukcji. W literaturze przedmiotu (Naudascher i Rockwell 1994; Novak, 1984; Thang, 1984) przy opisie tego mechanizmu wyróżnia się dodatkowo sposób wzbudzenia drgań przepływem cieczy. Strumień może opływać konstrukcję z dwóch stron, jak w przypadku pali, zamknięć awaryjnych w postaci belek zakładanych w przepływie, krat na wlotach do sztolni i spustów, łopatek turbin. W przypadku zasuw płaskich i segmentów przepływ odbywa się pod nimi, a klap i sektorów ponad nimi, zamknięcia iglicowe są opływane wokół zgodnie z kierunkiem ich osi. Podstawowe schematy odzwierciedlające mechanizm wzajemnego oddziaływania konstrukcji i cieczy przedstawiono na rysunku 2.4.

Niebezpieczne drgania są wówczas, gdy siła wzbudzona ruchem konstrukcji działa w kierunku tego ruchu zwiększając jego amplitudę, a wraz ze zwiększeniem amplitudy zwiększa się siła wymuszająca. Ten szczególny przypadek rezonansu, określane mianem ujemnego tłumienia (ang. *galloping*), wyjaśnimy na prostym przykładzie belki zakładanej o kształcie prostokątnym. Na rysunku 2.5 przedstawiono schemat takiej



Rys. 2.4. Schematy wzajemnego oddziaływania opływającego strumienia cieczy i poruszającej się konstrukcji

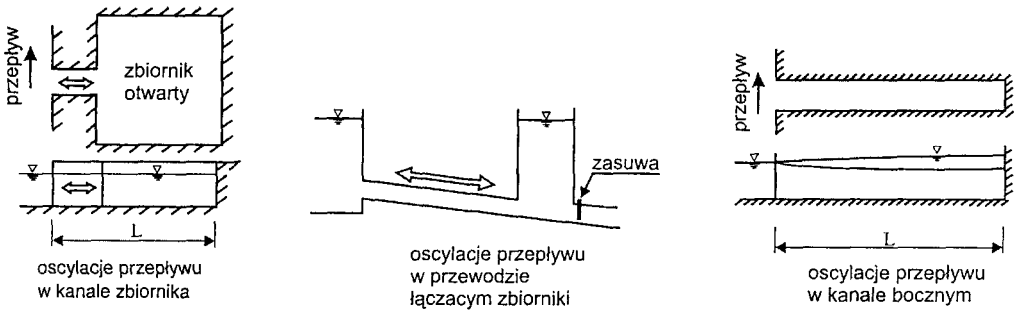
belki w chwili, kiedy następuje jej ugięcie w dół. Pod belką powstaje wtedy strefa recyrkulacji, gdzie panuje obniżone ciśnienie, nad belką ciśnienie nie ulega zmianie i w konsekwencji siła wypadkowa ciśnienia jest również skierowana ku dołowi. Jeśli jeszcze zjawisko odbywa się w pobliżu dna, to ruch w dół spowoduje zwiększenie prędkości przepływu pod belką co dodatkowo spowoduje spadek ciśnienia. Jeśli belka ugnie się maksymalnie i rozpocznie się ruch ku górze, to kierunek siły wypadkowej ciśnienia także ulegnie zmianie. Mechanizm ten powoduje wzrost amplitudy drgań, co łączy się ze wzrostem siły je wymuszającej, aż do momentu, gdy siły tłumienia ustabilizują amplitudę lub nastąpi zniszczenie konstrukcji belki.



Rys. 2.5. Mechanizm wzbudzenia drgań belki zakładanej strumieniem opływającej cieczy (wg Naudascher, 1994)

2.1.4. Siły wzbudzone oscylacją objętości cieczy

Częstym przypadkiem w instalacjach prowadzących ciecz jest powstanie fali stojącej ciśnienia spowodowanej różnymi czynnikami, na przykład pulsacyjną pracą niesprawnego zaworu. Podobnie oscylacje mogą się pojawić między dwoma zbiornikami połączonymi odcinkiem rurociągu. Są to tak zwane układy dyskretnie, a zasada ich działania przypomina zjawisko znane pod nazwą oscylatora Helmholtza (Naudascher, 1991; Naudascher, Rockwell, 1994). Niektóre schematy oscylacji objętościowej lub ciśnieniowej przedstawiono na rysunku 2.6.



Rys. 2.6. Schematy obciążeń konstrukcji wywołane oscylacją cieczy

Drgające układy ciągłe polegają na powstaniu fali objętościowej na krótkim odcinku kanału, której działanie jest podtrzymywane przez zaburzenia od warstwy granicznej powstającej za opływającą konstrukcją lub ruch zamknięcia odcinka kanału, co oznacza współdziałanie kilku rodzajów źródeł zmiennego obciążenia. Jako szczególny przypadek oscylatora można wymienić zjawisko uderzenia hydraulicznego, które powstaje po gwałtownym zamknięciu zaworu w rurociągu (Batchelor, 1967; Gryboś, 1998).

Szczegółowe informacje dotyczące klasyfikacji sił hydrodynamicznych oraz różne przykłady ich działania można znaleźć w pracach Naudaschera (1961, 1972, 1991), Naudaschera i Rockwella (1994) oraz Novaka (1984).

2.2. Obciążenia zamknięć wynikające z odrywania się warstwy przyściennej

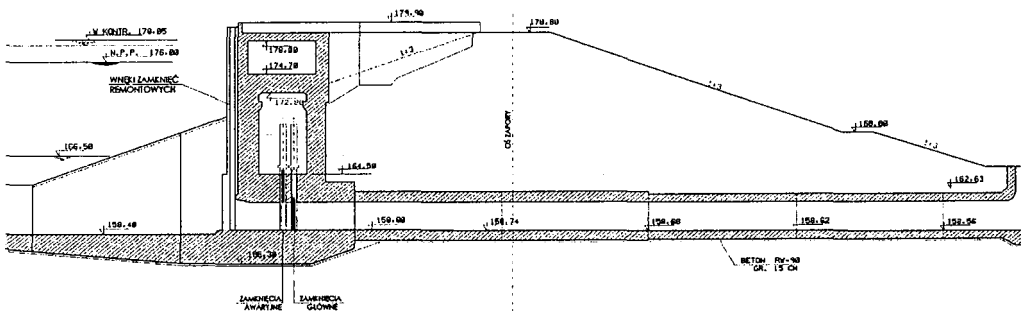
Większość istotnych zmiennych obciążeń działających na zamknięcia hydrotechniczne pochodzi od warstwy granicznej powstającej za opływającą krawędzią zamknięcia. Autor zdecydował się przybliżyć niektóre z nich na podstawie badań przedstawionych w literaturze, aby następnie porównać ich wyniki z tymi, jakie uzyskał zapropono-

nowaną metodą numeryczną. Typowymi zamknięciami narażonymi na zjawisko zmiennego obciążenia od strumienia przepływu są zasuwy płaskie i segmenty w przewodzie ciśnieniowym oraz, w mniejszym stopniu, zamknięcia powierzchniowe. Ponadto rozpatrzmy opływ zamknięcia klapowego, które w dolnym położeniu jest poddawane działaniom silnych podciśnień.

2.2.1. Zamknięcia w przewodzie ciśnieniowym

2.2.1.1. Zasuwa płaska

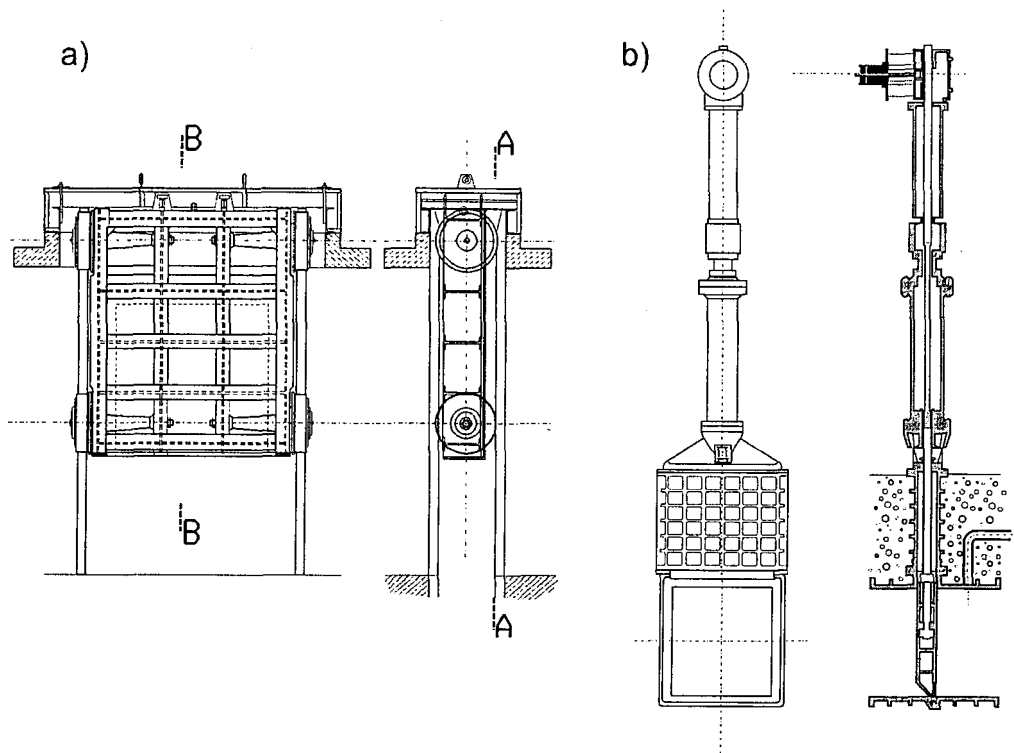
Zasuwa płaska stanowi typ zamknięcia często stosowany jako zamknięcie głębino- we, z uwagi na jej zalety: dużą sztywność konstrukcji oraz prostotę wykonania, łatwość montażu, konserwacji i remontu. Zamknięcia te występują zarówno na wlocie do przewodu (rys. 2.7), jak i w środku przewodu lub jako zamknięcia powierzchniowe. W dwóch pierwszych przypadkach poziom wody za zamknięciem może wypełniać przewód całkowicie lub częściowo.



Rys. 2.7. Przykłady zastosowania zamknięcia zasuwowego

Jednym ze zjawisk, które ma istotny wpływ na sterowanie zamknięciem oraz jego niestabilne obciążenie jest siła ssąca/ściąająca (ang. *downpull*) będąca efektem różnicy całkowitej ciśnień pionowych. Badaniem tego zjawiska zajmowano się już w późnych latach 50. XX w. Simmons (1959) badał na modelu powietrznym dwa typy zasuw – wyposażoną w koła sztywno zamocowane do ramy zamknięcia oraz na łożyskach ślizgowych. Zauważył on, że maksymalne zasysanie zamknięcia pierwszego typu występuje przy jego niewielkim otwarciu, a zamknięcia ślizgowego przy otwarciu 45% wysokości przewodu. Jest to spowodowane różną konstrukcją obu zamknięć (rys. 2.8).

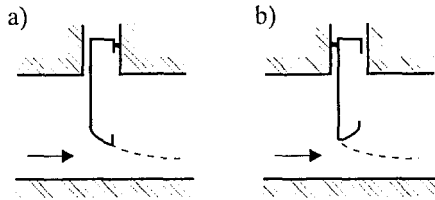
Podobne badania modelowe oraz pomiary w naturze wykonał Colgate (1959), który określił podciśnienie dla zasuw w przypadku trzech różnych zapór: Hoovera, Shasta i Palisades. Uzyskane wartości wskazują na bardzo wysokie podciśnienia. Według



Rys. 2.8. Zamknięcie zasuwowe a) oparte na kołach sztywno zamocowanych, b) zamknięcie z łożyskiem ślizgowym

Sagar (1995) zasuwę mające koła toczne poruszające się po torach powinny być stosowane w charakterze zamknięć głównych do wysokości piętrzenia do 45 m, a jako zamknięcia awaryjne do 120 m, ze względu na występowanie wneki na koła, która przy większych jej szerokościach powoduje niekorzystne zawirowania dynamicznie obciążające zamknięcie. Tej wady nie mają zamknięcia z łożyskiem ślizgowym, jednakże do manewrowania nimi potrzebne są masywniejsze urządzenia wyciągowe, a ich największą wadą jest zanoszenie lub zamulenie uniemożliwiające manewrowanie zamknięciem. Sagar (1995) zwraca też uwagę na częste zjawisko drgań zasuw, których przyczyną najczęściej jest warstwa graniczna odrywająca się od dolnej krawędzi zasuw, oscylacje ciśnienia na jego dolnej powierzchni, uderzanie strumienia wypływającego spod zasuw o jej wystające elementy oraz brak napowietrzania przewodu za zasuwą i powstanie przepływu dwufazowego. Ponadto autor opisuje zjawisko wystrzeliwania zamknięcia w górę pod wpływem ciśnienia działającego na jej dolną krawędź. Takie niebezpieczeństwo pojawia się wówczas, gdy zasuwę ma uszczelnienie górne od strony wody dolnej (rys. 2.9) i jest częściowo podniesiona podczas napełniania kanału. Badaniem szerokości i kształtu wnek zasuw zajmował się Ball (1959), który określił warunki, w jakich najczęściej dochodzi do kawitacji w wyniku odrywania się warstwy przyściennej od krawędzi wneki. Sformułował on wiele zaleceń, których

przestrzeżenie zmniejsza ryzyko powstawania ubytków i uszkodzeń kawitacyjnych. Badania na modelu hydraulicznym zasuw w przewodzie ciśnieniowym pod kątem określania siły hydrodynamicznej wykonał również Aydin i in. (2006).

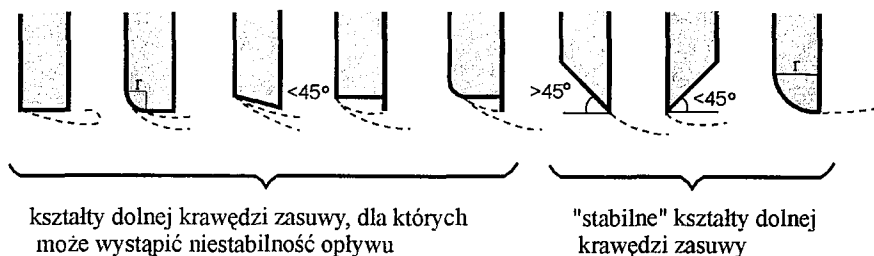


Rys. 2.9. Schemat uszczelnienia zasuw: a) od wody dolnej, b) od wody górnej

Zjawisko tworzenia się za opływającym zamknięciem zasuwowym strefy recyrkulacji i związane z nią pulsacje ciśnienia były przedmiotem licznych prac badawczych. Narayanan i Reynolds (1972) zajmowali się pomiarami doświadczalnymi na modelu zamknięcia zasuwowego w przewodzie ciśnieniowym. Celem tych pomiarów było określenie długości strefy, rozkładu prędkości średniej w przewodzie za zamknięciem, rozkładu średniej wartości ciśnienia oraz częstości jego pulsacji. Model był aerodynamiczny, dlatego wyniki pomiarów mogą być traktowane wyłącznie jakościowo. Autorzy stwierdzili, że największa częstość pulsacji ciśnienia powietrza wystąpiła zaraz za opływającą ścianką, a następnie ulegała zmniejszeniu, aby ustalić się w odległości równej w przybliżeniu długości strefy recyrkulacji. Przyczyną tego zjawiska jest według Narayanan (1972) obecność brzegów, które ograniczają swobodny rozwój ścieżki wirowej Kármána. Zwiększenie grubości warstwy przyściennej dolnej i górnej powoduje, że warstwa graniczna za opływającym zamknięciem bardzo szybko wchodzi w interakcje z turbulentną warstwą przyścienną, co powoduje rozpad struktur koherentnych i wyrównanie częstości pulsacji prędkości oraz ciśnienia. Podobne badania, ale dla ostrosłupa prostokątnego w przewodzie ciśnieniowym, wykonał Castro (1979).

Badania drgań zamknięć zasuwowych były tematem wielu prac (Campbell, 1961; Naudascher, 1961; Kolkman, 1984), a następnie (Thang, 1984). Thang przeanalizował różne rodzaje wzbudzenia drgań zasuw i określił problem odrywania się strumienia od krawędzi zamknięcia i jego powtórnego zderzenia się z konstrukcją (niestabilność przepływu) jako najczęstszą przyczynę drgań. Celem badań modelowych na modelu hydraulicznym było określenie najbardziej stabilnych kształtów dolnej krawędzi zasuw, za którą przyjęto kształty przedstawione na rysunku 2.10. Ponadto autor ten, wymuszając drgania poziome lub pionowe modelu zasuw, badał rozkłady ciśnień, jakie powstają na opływanej płaskiej poziomej krawędzi zamknięcia.

W swoich badaniach nad naturą drgań wymuszonych Thang stwierdził, że wartość liczby Strouhala $Sh = 0,4$ odpowiada warunkom największej energii pulsacji ciśnienia oraz taką samą wartość zanotowano, badając częstotliwość drgań zamknięcia. Wynika



Rys. 2.10. Stabilne i niestabilne kształty dolnej krawędzi zasuw według Thanga (1984)

z tego, że zjawisko ma charakter sprzężenia zwrotnego między wymuszeniem a ruchem drgającym. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów autor zaproponował określanie podatności zamknięcia na wzbudzenie za pomocą tzw. wskaźnika niestabilności wyrażonego wzorem:

$$C_L = \frac{\bar{p} - h_d}{\Delta h} \quad (2.4)$$

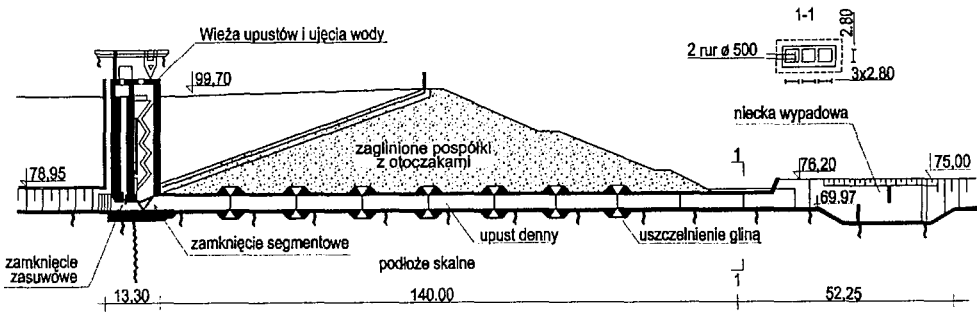
gdzie: $\Delta h = u^2/2g$ – wysokość prędkości przed zamknięciem, \bar{p} – uśrednione ciśnienie na krawędzi dolnej zasuw, h_d – głębokość dolnej wody.

Po narysowaniu dla danego zamknięcia krzywej zależności C_L od s/b , gdzie s oznacza otwarcie, a b grubość zamknięcia, można określić, że jeśli $\frac{dC_L(s/b)}{d(s/b)} < 0$, to zamknięcie znajduje się w strefie bezpiecznej, w przeciwnym razie narażone jest na wymuszanie drgań.

2.2.1.2. Segment

Drugim typem chętnie stosowanych zamknięć głębinowych jest segment o osi poziomej. Na rysunku 2.11 przedstawiono przekrój przez zapórę Dobromierz na rzece Strzegomce z widocznym blokiem urządzeń zrzutowych i segmentowym zamknięciem głównym.

Jego zaletą w stosunku do zamknięcia zasuwowego jest mniejsza siła wyciągowa oraz brak wnęk w ścianach bocznych przewodu, a wadą większa przestrzeń potrzebna do ulokowania zamknięcia i bardziej skomplikowany sposób podnoszenia. Z tego względu segmenty umieszcza się w środku przewodu ciśnieniowego. Jako zamknięcie jazowe segment stosowany jest zwykle do zamykania dużych światel jazu i w razie dużego piętrzenia. Często bywa też wykorzystywany jako zamknięcie przelewu zapory oraz górnej głowy śluzy. Pod względem podatności na zmienne obciążenie hydrodynamiczne segmenty nie odbiegają od zamknięć zasuwowych i dlatego wszystkie spostrzeżenia o przyczynach powstawania zmiennych obciążeń hydrodynamicznych odnoszą się w równej mierze do segmentów i do zasuw.



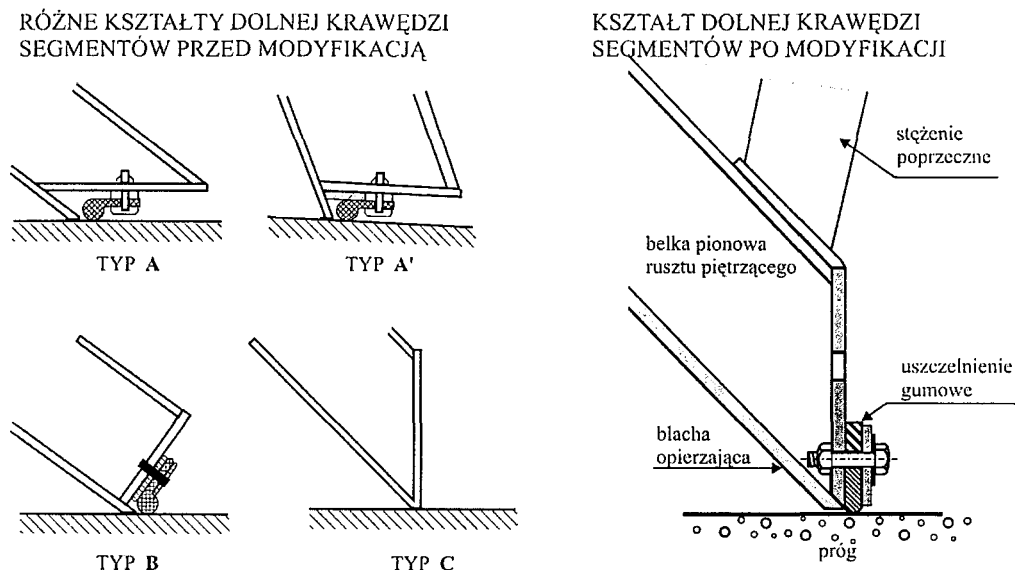
Rys. 2.11. Przekrój przez zapórę Dobromierz na rzece Strzegomce

Pierwsze prace poświęcone zamknięciom segmentowym dotyczyły głównie problemów wyznaczania współczynnika wydatku. Rhone (1959) badał zjawisko kawitacji na koronie przelewu zapory zamykanego segmentem oraz rozważał kryteria właściwego doboru uszczelnień bocznych i progu pod kątem ich szczelności i trwałości. Zagadnieniem analitycznego wyznaczania przepływu i średniego obciążenia hydrodynamicznego dla segmentów jazowych umocowanych na niskim progu zajmował się La-rock (1969).

Interesujące badania podjął Schmidgall (1972), który przedstawił wyniki dla istniejących 13 stopni wodnych, zamykanych segmentami o różnej konstrukcji, na drodze wodnej McClellan–Kerr Arkansas River. Na stopniach tych stwierdzono liczne uszkodzenia segmentów spowodowanych ich silnymi drganiami. Uszkodzenia polegały na spękaniu połączeń spawanych, w większości pionowych belek rusztu piętrzącego z dolnym dźwigarem głównym i dolną belką poziomą. Wszystkie segmenty wykazywały takie spęknięcia zmęczeniowe, a w przypadku dwóch konstrukcji uszkodzeniu uległo 90% spoin, z czego ponad połowa była całkiem zerwana.

W celu zbadania przyczyn tego zjawiska wykonano badania modelowe, na podstawie których stwierdzono, że przyczyną drgań była niestabilność przepływu wywołana odrywaniem się warstwy przysiennej od dolnej krawędzi zamknięć. Badania posłużyły także do modyfikacji kształtu dolnej opływanej krawędzi, co umożliwiło wyeliminowanie drgań. Na rysunku 2.12 przedstawiono charakterystyczne cztery spośród siedmiu rodzajów konstrukcji dolnej krawędzi segmentów przed i po modyfikacji.

Na podstawie badań i pomiarów Schmidgall sformułował kilka wniosków, z których najważniejszy to, że tylko ostry i wąski kształt dolnej krawędzi segmentu zapewnia właściwe zabezpieczenie przed niepożądanym efektem zmiennej siły hydrodynamicznej. Naudascher (1991) uważa ponadto, że dolny główny dźwigar segmentu powinien być podniesiony możliwie wysoko, aby zapobiec uderzaniu w niego strumienia wypływającego spod zamknięcia.



Rys. 2.12. Kształt dolnej krawędzi segmentów na rzece Arkansas przed i po modyfikacji, według Schmidgalla (1972)

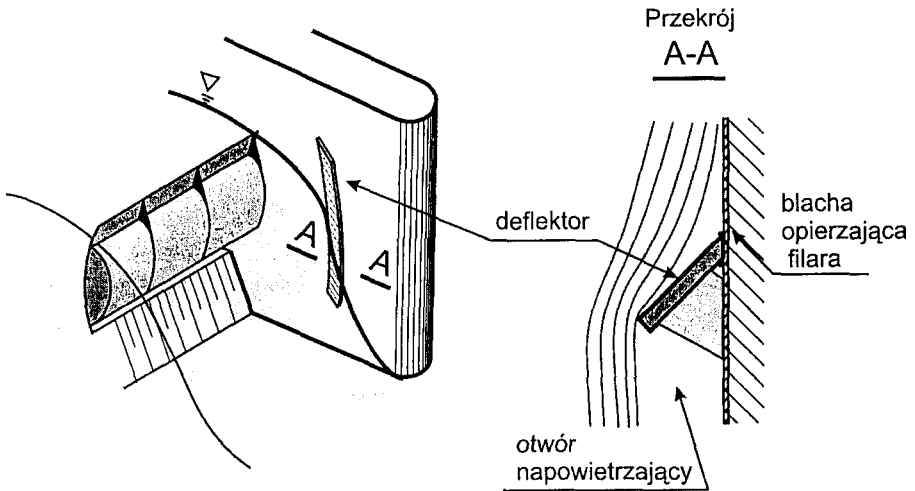
Drgania mogą być przyczyną nie tylko uszkodzeń zmęczeniowych, ale także awarii zamknięcia. Taki przypadek, dotyczący segmentu na przelewie zapory, został opisany przez Kolkmana (1984) oraz Naudaschera i Rockwella (1994). Na skutek silnych drgań stateczność utracił początkowo dolny dźwigar ramienia segmentu, a następnie konstrukcja obydwu ramion została zniszczona.

Więcej szczegółowych informacji o obciążeniach hydrodynamicznych segmentów i ich konsekwencjach można znaleźć w monografii Naudaschera (1991).

2.2.2. Zamknięcie powierzchniowe – kłapa soczewkowa

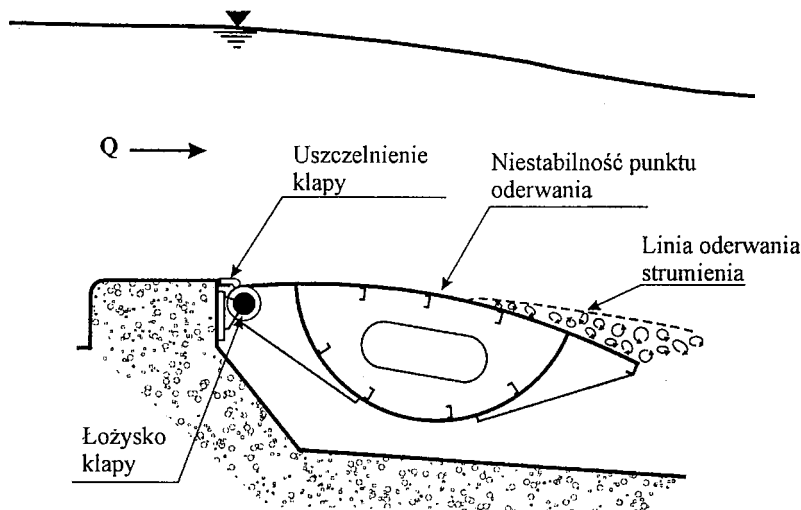
Zamknięcie kłapowe soczewkowe jest najczęściej stosowanym rodzajem zamknięcia powierzchniowego dla piętrzenia do 5 m wysokości. Ma ono kilka zalet, takich jak: lekkość konstrukcji, wysoki współczynnik wydatku, duża sztywność na skręcanie, brak wnęk w stosunkowo niskich i krótkich filarach. Wadą tego zamknięcia jest podatność na drgania, które pojawiać się mogą w różnych położeniach zamknięcia, różny też może być mechanizm wymuszania tych drgań. Wyróżnia się dwa główne przypadki zmiennego obciążenia kłap. Pierwszy z nich występuje w sytuacji, gdy kłapa umieszczona jest na wysokim progu, a przestrzeń pod kłapą nie jest dostatecznie napowietrzona – opisał to Petrikat (1955, 1976), a następnie Pariset (1955), Rogala i Kostecki (1987), Kostecki i Popow, (1987). Polega na sprzężeniu zwrotnym między trzema elementami – spadającym z kłapy strumieniem, powietrzem zamkniętym w przestrzeni podstrumieniowej oraz sprzężystą konstrukcją. Falujący strumień pracuje tak jak pom-

pa, zmieniając ciśnienie pod klapą. Jeśli system wentylacji nie zapewnia dostatecznie szybkiej wymiany powietrza, to ciśnienie po przekazaniu się na konstrukcję kłapy pobudza ją do drgań zgodnych z częstotliwością wymuszania, z kolei ruch konstrukcji wzmacnia falowanie strumienia spadającego z kłapy. Ten swoisty mechanizm współdziałania: spadający strumień – powietrze w przestrzeni podstrumieniowej – konstrukcja, może prowadzić do rezonansu i awarii konstrukcji, jeśli jej częstota własna w wodzie będzie zgodna z częstotliwością wzbudzenia. Przykładem takiej awarii jest zniszczenie konstrukcji kłapy na przelewie zapory Słup na Nysie Szalonej, mimo że przestrzeń podstrumieniowa była wentylowana przewodem o średnicy 0,5 m. Badania autora (Kostecki i in., 1986) przeprowadzone w naturze pozwoliły na znalezienie rozwiązania tego problemu w postaci deflektora zamocowanego do blachy opierającej filara (rys. 2.13), który, odsuwając strumień od powierzchni filara, utworzył dodatkowy otwór napowietrzający przestrzeń pod klapą.



Rys. 2.13. Zwiększenie napowietrzania kłapy przez zastosowanie deflektora

Drugi przypadek silnie zmiennych obciążeń hydrodynamicznych zachodzi wówczas, gdy kłapa jest w dolnym położeniu, zatopiona wysokim strumieniem przelewowym (Winter, 1982; Rogala i Winter, 1983; Rogala i Winter, 1986). Od powierzchni kłapy odrywa się wtedy warstwa przyścienna, tworząc strefę kawitacji. Ponieważ zjawisko odrywania nie jest stabilne – punkt oderwania przemieszcza się po powierzchni kłapy (rysunek 2.14), zmianie ulega również wartość wypadkowej siły hydrodynamicznej, która może prowadzić do unoszenia kłapy i jej drgań. Zjawisko to zostało opisane także przez Naudaschera i Rockwella (1994), Naudaschera (1991), Fantiego (1960).



Rys. 2.14. Zjawisko odrywania się warstwy przyściennej od powierzchni kłapy

2.3. Skutki obciążeń hydrodynamicznych

Obciążenia hydrodynamiczne mają zwykle negatywny skutek na opływającą konstrukcję. Wiąże się to z kilkoma niepożądanymi zjawiskami, które należy przewidywać na etapie projektowania. Pierwszym z nich jest zwiększone obciążenie na zamknięcie, które zależy od geometrii zamknięcia i budowli, poziomu górnej i dolnej wody, prędkości przepływu, stąd jest ono trudne do wyznaczenia. Wartości tego obciążenia mogą mieć istotne znaczenie w projektowaniu urządzeń wyciągowych. Świadczy o tym np. wynik pomiarów siły ssącej określonej przez wspomnianego wcześniej Colgate'a (1959) dla zapory Palisades o wysokości piętrzenia 47,5 m. Maksymalna wartość składowej pionowej siły hydrodynamicznej (w układzie grawitacyjnym) dla zasuw o rozpiętości 6,1 m i wysokości 12 m wynosiła 3690 kN w warunkach maksymalnego przepływu 1270 m³/s i dla 55% otwarcia zasuw. W celu porównania: maksymalna siła pozioma wynikająca z ciśnienia hydrostatycznego wyniosłaby w takich warunkach 29 880 kN, a ciężar zamknięcia w przybliżeniu 700 kN.

W zamknięciach niskiego piętrzenia, takich jak kłapy, wartość obciążenia hydrodynamicznego w zależności od kąta nachylenia cięciwy powłoki zewnętrznej kłapy do poziomu stanowić może nawet 100% obciążenia hydrostatycznego (Grčić, 1963).

Następnym problemem jest zjawisko kawitacji, które było badane przez wielu autorów, m.in. Balla (1959), Ripkena (1972), Naudaschera (1991), Sagara (1995). Występuje ono w strefie podciśnień, która najbardziej zagraża konstrukcjom upustowym, mającym wnęki w filarach. Dla zasuw najbardziej narażone są dolne obszary wnęk.

W przypadku segmentów, stanowiących zamknięcie przelewów, ubytki kawitacyjne powstają na powierzchni przelewowej poniżej zamknięć.

Najbardziej niepożądanym efektem, który towarzyszyć może zmiennemu obciążeniu hydrodynamicznemu, są drgania zamknięć hydrotechnicznych. W literaturze znajdują się opisy różnych przypadków wzbudzenia drgań i związanych z nimi awarii budowli (Naudascher, 1991; Naudascher i Rockwell, 1994; Kolkman 1984; Novak, 1984; Hardwick, 1974; Thang, 1984; Kostecki, 1983; Rogala i Kostecki, 1985; Rogala i in., 1984; Appel i in., 1961).

W Polsce były miejsce awarie zamknięć wywołane tą przyczyną. Są to między innymi zerwanie zamknięcia zasuwowego z klapą lodową na jazie w Brzegu Dolnym na Odrze, które nastąpiło wskutek drgań klapy lodowej oraz pęknięcie wału napędowego, spowodowane drganiami klapy soczewkowej, w wyniku niedostatecznego napowietrzania komory podstrumieniowej na przelewie zbiornika Słup na Nysie Szalonej.

Z przytoczonych opisów wynika, że problem zmiennych obciążeń jest bardzo istotny, ponieważ wpływa na bezpieczeństwo budowli i jej długotrwałą i bezawaryjną pracę.

3. Podstawowe równania hydromechaniki

Oddziaływanie cieczy na opływającą konstrukcję hydrotechniczną jest zagadnieniem z dziedziny hydrodynamiki i wymaga przedstawienia, związanego z nim, podstawowego opisu matematycznego dla czytelności następnych rozdziałów monografii. Ze względu na specyfikę zjawiska opływu przedstawiony materiał obejmuje zwarty opis zagadnień związanych z przepływem cieczy idealnej oraz z przepływem cieczy lepkiej i nieściśliwej. Opis ten uzupełniony został zagadnieniami kinematyki i dynamiki wirowości oraz problematyką warstwy przyściennej.

3.1. Sformułowanie matematyczne zagadnienia przepływu

3.1.1. Współrzędne Lagrange'a i Eulera

W hydromechanice istnieją dwa sposoby opisu zachowania się cieczy. W pierwszym, nazywanym sposobem Lagrange'a, rozważamy zbiór przemieszczających się cząstek cieczy¹. Z cząstkami związane są wielkości fizyczne, takie jak prędkość, ciśnienie, temperatura, wirowość, które będą się zmieniały podczas ich ruchu. Cząstki identyfikujemy ze względu na ich położenie początkowe $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ oraz czas τ , które pełnią rolę współrzędnych w układzie odniesienia Lagrange'a. Każda fizyczna wielkość, związana z płynącą cząstką może być wyrażona w postaci funkcyjnej zależności od (α, τ) . Na przykład położenie cząstki w nieruchomym układzie odniesienia będziemy wyrażać następująco

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\alpha, \tau), \quad \text{gdzie } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in R^N, \quad \mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha, \quad (3.1)$$

a ciśnienie, temperaturę i gęstość ze wzorów

¹ Jako cząstkę cieczy rozumiemy tutaj pewną objętość cieczy, dostatecznie dużą w porównaniu do odległości międzycząsteczkowych, aby można ją było traktować jako element ośrodka ciągłego.

$$\begin{aligned}
 p' &= p'(\mathbf{a}, \tau) \\
 T' &= T'(\mathbf{a}, \tau) \\
 \rho' &= \rho'(\mathbf{a}, \tau)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

W tym punkcie znak „prim” przy wielkości fizycznej oznacza, że jest ona rozważana w układzie Lagrange’a dla odróżnienia od tych w układzie Eulera. W dalszych rozdziałach pracy nie będzie tego rozróżnienia, a o tym, że równanie jest rozwiązywane w układzie Lagrange’a będzie informacja na początku rozdziału.

Opis przepływu polega na śledzeniu trajektorii ruchu cząstek $\mathbf{X}(\mathbf{a}, \tau)$ w przestrzeni i w czasie. Prędkość cząstki o początkowym położeniu w punkcie \mathbf{a} po czasie τ można przedstawić za pomocą równania

$$\mathbf{u}'(\mathbf{a}, \tau) = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{a}, \tau)}{\partial \tau}
 \tag{3.3}$$

przyspieszenie zaś relacją

$$\mathbf{a}'(\mathbf{a}, \tau) = \frac{\partial \mathbf{u}'(\mathbf{a}, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}(\mathbf{a}, \tau)}{\partial \tau^2}
 \tag{3.4}$$

Metoda Lagrange’a jest naturalnym sposobem zapisu równań wykorzystywanych w metodach cząstek, przez związek z trajektorią ruchu.

Drugi sposób opisu przepływu nosi nazwę metody Eulera i polega na ustaleniu punktu obserwacji $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ leżącego w obszarze przepływającej cieczy. Prędkość cieczy jest więc funkcją położenia punktu obserwacji oraz czasu

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \quad \mathbf{x} \in R^N
 \tag{3.5}$$

Pozostałe wielkości opisujące stan cieczy również będą funkcjami położenia \mathbf{x} oraz czasu

$$\begin{aligned}
 p &= p(\mathbf{x}, t) \\
 T &= T(\mathbf{x}, t) \\
 \rho &= \rho(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

W opisie Eulera pojedyncza cząstka i jej historia nie są przedmiotem rozważań. Opis ruchu dotyczy globalnego stanu obszaru przepływu i jego zmian w czasie.

Związek między opisem Lagrange’a i Eulera jest dany relacją

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{X}(\mathbf{a}, \tau), \quad \mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in R^N \\
 \tau &= t
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

gdzie \mathbf{a} jest wektorem położenia początkowego cząstki cieczy. W ten sposób

$$\begin{aligned}
 p'(\boldsymbol{\alpha}, \tau) &= p(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \tau), t) \\
 T'(\boldsymbol{\alpha}, \tau) &= T(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \tau), t) \\
 \rho'(\boldsymbol{\alpha}, \tau) &= \rho(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \tau), t)
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Jeśli oznaczymy dowolną wielkość fizyczną wyrażoną w układzie Lagrange'a przez q' , a tę samą wielkość w układzie Eulera przez q , to na podstawie wzoru (3.7) można wyprowadzić związek między tymi wielkościami

$$q'(\boldsymbol{\alpha}, \tau) = q(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \tau), t) \tag{3.9}$$

Po obliczeniu szybkości zmiany tej wielkości mamy

$$\frac{\partial q'}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \tag{3.10}$$

Ponieważ iloraz $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \tau)}{\partial \tau} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, \tau), t)$ wyraża prędkość cząsteczki cieczy i $\tau = t$, otrzymujemy

$$\frac{\partial q'}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \tag{3.11}$$

gdzie pierwszy człon (3.11) po prawej stronie wyraża pochodną po czasie zmiennej q w punkcie \mathbf{x} , zwaną pochodną lokalną, drugi zaś człon różnicę q wynikającą z przemieszczenia się cząsteczki do nowego położenia po nieskończenie małym czasie dt , określaną mianem pochodnej unoszenia. W układzie Eulera ogólnej postaci tego wzoru został nadany symbol

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\cdot), \tag{3.12}$$

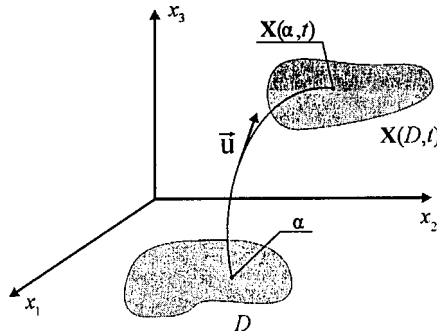
który nosi nazwę pochodnej materialnej, jako mającej związek z przemieszczającą się materią (Landau i Lifszyc, 1994). Powszechnie w użyciu jest również symbol d/dt oraz nazwa pochodna substancjalna.

3.1.2. Trajektorie cząstek cieczy

Ważnym zagadnieniem dotyczącym metod opisanych w niniejszej monografii jest trajektoria cząstek wyznaczających strumień cieczy. Jeśli założymy, że cząstka w chwili $t = 0$ znajduje się w położeniu $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in R^N$, $N = 2, 3$, to jej położenia w kolejnych chwilach t wyznaczają trajektorię ruchu tej cząstki $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t) = (X_1, X_2, \dots, X_N)' \in R^N$, przy czym zachodzi związek

$$\frac{d\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t), t) \quad (3.13)$$

Jeżeli przez D oznaczymy pewien kontrolny obszar cieczy, składający się z pewnej liczby cząstek w chwili $t = 0$, to po czasie t zajmie on nowe położenie, zgodnie z rysunkiem 3.1.



Rys. 3.1. Przemieszczanie objętości cieczy jako ruch cząstek po trajektoriach

Rozważmy operacje całkowania dowolnej wielkości fizycznej $q(\mathbf{x}, t)$ w obszarze $\mathbf{X}(D, t)$ uwzględniając transformację obszaru cieczy po czasie t . Najwygodniej jest sprowadzić całkowanie tylko do obszaru D , co uzyskujemy za pomocą odpowiedniej zamiany zmiennych. Wtedy

$$\int_{\mathbf{X}(D, t)} q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_D q(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t), t) J(\boldsymbol{\alpha}, t) d\boldsymbol{\alpha} \quad (3.14)$$

gdzie $J(\boldsymbol{\alpha}, t)$ – jacobian transformacji dany wzorem

$$J(\boldsymbol{\alpha}, t) = \det(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t)) \quad (3.15)$$

Dla gładkich przepływów cieczy nieściśliwej można udowodnić (porównaj Dodatek A), że $J(\boldsymbol{\alpha}, t) = 1$. W ten sposób, przyjmując $J = 1$, objętość obszaru $\mathbf{X}(D, t)$ jest w dowolnym czasie równa objętości D .

3.1.3. Prędkość odkształcenia elementu płynu i prędkość kątowna

Gdy przyjmiemy znaną właściwość gładkiego pola wektorowego, wówczas pole prędkości cząstki płynu w otoczeniu punktu \mathbf{x}_0 możemy przedstawić zgodnie ze wzorem Taylora w postaci

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + (\nabla\mathbf{u})(\mathbf{x}_0, t_0)\Delta\mathbf{x} + O(\Delta x^2), \quad \Delta\mathbf{x} \in R^3 \quad (3.16)$$

gdzie $\nabla \mathbf{u} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$, $1 \leq i, j \leq 3$ – gradient wektora \mathbf{u} , zwany tensorem prędkości względnej.

Jak każdy tensor można go rozłożyć na część symetryczną \mathbf{D} i antysymetryczną $\mathbf{\Omega}$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \quad (3.17)$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \quad (3.18)$$

Tensor \mathbf{D} nazywany jest tensorem prędkości odkształcenia. Jego elementy leżące na przekątnej odpowiadają prędkościom odkształceń objętościowych $\partial u_i / \partial x_i$, a elementy poza przekątną stanowią prędkości odkształceń postaciowych

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j$$

Elementy tensora $\mathbf{\Omega}$, leżące na przekątnej są zerami. Natomiast elementy poza przekątną wyrażają składowe prędkości kątovej poruszającego się elementu płynu, traktowanego jak ciało sztywne

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j$$

Korzystając z wprowadzonych równaniami (3.17) i (3.18) definicji, na podstawie (3.16) otrzymujemy

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \Delta \mathbf{x} \quad (3.19)$$

gdzie drugi wyraz po prawej stronie równania wynika z postaci tensora $\mathbf{\Omega}$.

Zależność (3.19) wyraża pierwsze twierdzenie Helmholtza – prędkość w dowolnym punkcie obszaru płynnego różni się od prędkości w punkcie sąsiednim o prędkość kątową i odkształceniową objętości płynnej, zawierającej te punkty.

3.1.4. Równanie transportu

Równanie transportu jest stosowane w opisie deformacji ciała stałego, a także przepływu cieczy (Mattheij i in., 2005). Rozważmy dowolną wielkość fizyczną o gęstości $q(\mathbf{x}, t)$, ograniczoną w danej chwili do objętości kontrolnej $V(t)$ o powierzchni $S(t)$ –

bez ograniczania ogólności rozważań możemy myśleć o masie substancji. Wtedy ilość materii zgromadzonej w objętości kontrolnej jest równa

$$F(t) = \int_{V(t)} q(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.20)$$

Obliczmy następnie szybkość zmiany tej ilości w czasie. W tym celu rozważmy po nieskończenie małym czasie dt różnicę w ilości materii

$$\begin{aligned} F(t+dt) - F(t) &= \int_{V(t)+dV} \left(q(\mathbf{x}, t) + dt \frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) dV - \int_{V(t)} q(\mathbf{x}, t) dV \\ &= \int_{dV(t)} q(\mathbf{x}, t) dV + dt \int_V \frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV + dt \int_{dV} \frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zauważmy, że dla małych wartości dt zmiana objętości będzie proporcjonalna do przemieszczenia powierzchni $S(t)$ w kierunku do niej prostopadłym, co można wyrazić relacją

$$dV = \int_{S(t)} dt (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.22)$$

gdzie \mathbf{n} – wektor normalny do powierzchni $S(t)$ skierowany na zewnątrz $V(t)$, \mathbf{u} – wektor prędkości punktów powierzchni (cząstek substancji ją tworzących).

Stąd

$$\int_{dV(t)} q(\mathbf{x}, t) dV = dt \int_{S(t)} q(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.23)$$

Po zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymujemy

$$\int_{S(t)} q(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot (q(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}) dV \quad (3.24)$$

gdzie \mathbf{u} – wektor prędkości cząstek wewnątrz objętości kontrolnej.

Po pominięciu ostatniego składnika w równaniu (3.21) jako wyrazu wyższego rzędu $O(dt^2)$ i uwzględnieniu relacji (3.23) i (3.24) otrzymamy

$$F(t+dt) - F(t) = dt \int_{V(t)} \frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV + dt \int_{V(t)} \nabla \cdot (q\mathbf{u}) dV \quad (3.25)$$

Po podzieleniu przez dt i przejściu do granicy $dt \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie znane pod nazwą równania transportu Reynoldsa

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (q\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \right) dV \quad (3.26)$$

Równanie (3.26) można także przedstawić, korzystając z pochodnej materialnej. Gdy $\nabla \cdot (q\mathbf{u}) = q\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla q$, mamy

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \int_{v(t)} \left(\frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}\nabla q(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t)\nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \\ &= \int_{v(t)} \left(\frac{Dq}{Dt}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t)\nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.1.5. Równanie ciągłości przepływu

Równanie ciągłości przepływu wyraża w formie matematycznej zasadę zachowania masy. W celu jego wyprowadzenia skorzystamy z równania transportu (3.26) zastosowanego do gęstości $\rho(\mathbf{x}, t)$ przepływającej cieczy. Podstawmy tam $q = \rho(\mathbf{x}, t)$ i przyjmijmy, że w przepływie nie występują dodatkowe źródła masy, zatem masa objętości kontrolnej nie będzie zmieniać się w czasie

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho dV = 0 \quad (3.28)$$

co daje

$$\int_{v(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \right) dV = 0 \quad (3.29)$$

Ponieważ równość w (3.29) zachodzi dla dowolnie wybranej objętości kontrolnej, więc musi być spełniony warunek

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.30)$$

Po wykorzystaniu pochodnej materialnej mamy

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.31)$$

Jeśli ciecz jest nieściśliwa, to $\rho = \text{const}$ i równanie ciągłości upraszcza się do postaci wyrażającej zerową dywergencję pola prędkości

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.32)$$

3.1.6. Równanie zachowania pędu

W mechanice zmiana pędu ciała jest równa popędowi siły wypadkowej działającej na to ciało. W przypadku ośrodka ciągłego, jakim są ciecze, sformułowanie matematyczne tego prawa wymaga posłużenia się objętością kontrolną. Siły, które działają na ciecz, możemy podzielić na powierzchniowe oraz masowe lub objętościowe. Siły powierzchniowe objawiają się w postaci naprężenia na powierzchni cieczy. Przykładami sił masowych mogą być siła grawitacji, siła odśrodkowa oraz siły pochodzące od pola elektrycznego i magnetycznego (Puzyrewski i Sawicki, 1998). Zasadę zachowania pędu dla objętości kontrolnej cieczy zapiszemy w postaci wektorowej (Mattheij i inni, 2005)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV \quad (3.33)$$

W równaniu (3.33) pierwsza całka po prawej stronie wyraża wypadkową sił powierzchniowych, a druga sił masowych. Charakter sił powierzchniowych polega na tym, że naprężenie jest funkcją wektora normalnego, wyraża zapis wektora naprężenia w postaci $\mathbf{t}(\mathbf{n})$, gdzie \mathbf{n} jest wektorem normalnym do S , skierowanym na zewnątrz V .

Można wykazać (Gryboś, 1998), (Puzyrewski, Sawicki, 1998) że

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (3.34)$$

gdzie \mathbf{T} – tensor naprężenia w danym punkcie o składowych $\mathbf{T} = [T_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq 3$.

Pierwszą całkę po prawej stronie równania (3.33) przekształcamy do całki objętościowej, korzystając ze wzoru Greena

$$\int_{S(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS = \int_{S(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dV = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{T}^T dV \quad (3.35)$$

gdzie \mathbf{T}^T oznacza transformację tensora \mathbf{T} .

Zauważmy, że dywergencja tensora jest wektorem, którego i -ta współrzędna wyraża się wzorem

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{i,j}, \quad i=1, 2, 3 \quad (3.36)$$

co pozwala na przedstawienie $\nabla \cdot \mathbf{T}^T$ w postaci macierzowej

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{T}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{T}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

gdzie \mathbf{T}_i – i -ty wiersz w tensorze \mathbf{T} .

Równość (3.33) można teraz zapisać dla każdej współrzędnej oddzielnie. Dla i -tej współrzędnej ma ona postać

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u_i dV = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{T}_i dV + \int_{V(t)} \rho f_i dV \quad (3.38)$$

Po podstawieniu do całki po lewej stronie równania transportu (3.26) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u_i dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) \right) dV \quad (3.39)$$

Z porównania (3.38) i (3.39) wynika następująca relacja

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) \right) dV = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{T}_i dV + \int_{V(t)} \rho f_i dV \quad (3.40)$$

Ponieważ $V(t)$ jest wybrane dowolnie, możemy opuścić znak całkowania, co prowadzi do związku lokalnego zasady zachowania pędu

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T}_i + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.41)$$

lub w notacji wektorowej

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) = \nabla \cdot \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{f} \quad (3.42)$$

Iloczyn $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T$ jest macierzą, której dywergencja wynika ze wzoru

$$\left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \right)_i = \sum_{j=1}^3 \rho \frac{\partial (u_i \cdot u_j)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.43)$$

Równanie (3.42), po uwzględnieniu równania ciągłości (3.30), można teraz zastąpić relacją

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{f} \quad (3.44)$$

Szczegóły przekształcenia zamieszczono w Dodatku B.

3.1.7. Równanie zachowania momentu pędu

Zasadę zachowania momentu pędu materii zgromadzonej w objętości V wyraża następująca relacja

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS + \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dV \quad (3.45)$$

Pierwszą całkę (3.45) możemy przekształcić, korzystając z równania transportu (3.26) oraz równania ciągłości (3.30) następująco

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{v(t)} \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dV = \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \quad (3.46)$$

Szczegóły przekształcenia zamieszczono w Dodatku C.

Stosując z kolei do drugiej całki (3.45) wzór Gaussa–Ostrogradskiego, mamy

$$\int_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS = \int_{s(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{v(t)} (\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}^T) + \mathbf{t}^*) dV \quad (3.47)$$

gdzie \mathbf{t}^* – wektor utworzony z niesymetrycznych wyrazów tensora naprężeń \mathbf{T}

$$\mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} T_{32} - T_{23} \\ T_{13} - T_{31} \\ T_{12} - T_{21} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Szczegóły przekształcenia również zamieszczono w Dodatku C.

Po podstawieniu (3.46) i (3.48) do wyrażenia (3.45) otrzymujemy

$$\int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{v(t)} (\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}^T) + \mathbf{t}^*) dV + \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dV \quad (3.49)$$

Korzystając z właściwości iloczynu wektorowego i porządkując elementy tego równania, otrzymujemy

$$\int_{v(t)} \mathbf{r} \times \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - (\nabla \cdot \mathbf{T}^T) - \rho \mathbf{f} \right] dV = \int_{v(t)} \mathbf{t}^* dV \quad (3.50)$$

Zauważmy następnie, że na mocy zasady zachowania pędu (3.44) wyrażenie w nawiasie kwadratowym z lewej strony równania (3.50) znika. Wnioskujemy, że $\mathbf{t}^* = 0$ i w konsekwencji otrzymujemy ważny wniosek

tensor naprężeń \mathbf{T} jest symetryczny $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$

W dalszych równaniach będziemy mogli opuszczać znak transpozycji tego tensora. Dlatego między innymi zasada zachowania pędu, wyrażona za pomocą pochodnej materialnej, ma teraz postać

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad (3.51)$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad (3.52)$$

Równość (3.51) i (3.52) znana jest pod nazwą równania ruchu Cauchy'ego. Przedstawione w poprzednich punktach zależności posłużą nam do wyprowadzenia równań przepływu cieczy.

3.1.8. Równania przepływu cieczy

Wyprowadzone równanie ruchu Cauchy'ego stanowi podstawę wyznaczania przepływów cieczy dla różnych jej modeli. Najbardziej znanym, bo opisującym stan większości płynów występujących w naturze, takich jak powietrze i woda, jest model płynu Newtona. W modelu tym zakłada się izotropowość jego właściwości oraz liniowe relacje między tensorem naprężeń, a tensorem prędkości deformacji (Puzyrewski i Sawicki, 1998; Gryboś, 1998; Landau i Lifszyc, 1994). Relację tą można przedstawić w postaci

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.53)$$

W wyrażeniu (3.53) p jest ciśnieniem hydrodynamicznym, stanowiącym składnik naprężeń normalnych w cieczy, \mathbf{I} – tensor jednostkowy, $\boldsymbol{\tau}$ – tensor naprężeń lepkich.

Zgodnie z hipotezą Newtona, wyrażającą

- liniową zależność naprężeń stycznych od prędkości odkształcenia postaciowego,
 - izotropowość płynu,
- naprężenia lepkie wyrażają się wzorem

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (3.54)$$

gdzie μ – współczynnik lepkości dynamicznej, \mathbf{D} – tensor prędkości odkształcenia, λ – drugi współczynnik lepkości nazywany też współczynnikiem lepkości objętościowej.

Tensor naprężeń wyrazić teraz można następującą relacją

$$\mathbf{T} = -(p + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.55)$$

Równanie (3.55) przyjmuje często postać

$$\mathbf{T} = \left(-p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}' \quad (3.56)$$

gdzie $\mathbf{D}' = \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$ jest nazywany dewiatorowym tensorem prędkości deformacji.

Na podstawie równania zachowania masy można w tym wzorze $\left(-p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{u})\right)\mathbf{I}$ zastąpić relacją $\left(-p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)\mathbf{I}$ i wówczas zauważamy, że ten pierwszy składnik tensora naprężeń (3.56) reprezentuje opór cieczy na dynamiczne sprężanie (kompresję), a drugi wyraża opór ścinania (Mattheij i in., 2005). Mianem współczynnika lepkości objętościowej określa się wówczas nie λ , a występującą w tym wzorze sumę $\lambda' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$.

Jeśli przyjmie się założenie, że ciecz jest nieściśliwa, to relacja (3.55) uprości się do postaci

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.57)$$

Po podstawieniu otrzymanego wyrażenia (3.57) do równania zachowania pędu i założeniu, że μ ma wartość stałą otrzymuje się wyrażenie znane pod nazwą równania Naviera–Stokesa

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} \quad (3.58)$$

gdzie symbol $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – operator różniczkowy Laplace'a².

Po podzieleniu obu stron równania przez gęstość cieczy ρ otrzymujemy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.59)$$

gdzie $\nu = \mu/\rho$ – współczynnik lepkości kinematycznej.

Jeśli rozważana ciecz jest ściśliwa, to otrzymamy następującą postać równania zachowania pędu

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p - \nabla(\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} \quad (3.60)$$

W większości praktycznych zagadnień przepływów płynów newtonowskich, opisanych równaniem Naviera–Stokesa, poszukuje się ich rozwiązania, formułując odpowiednie zagadnienie początkowo-brzegowe. Warunkiem brzegowym w obszarze D w tym przypadku będzie znikanie prędkości podczas kontaktu ciecz–ciało stałe, co wynika z lepkości płynu i jego adhezji na brzegu

² Częściej używanym symbolem operatora Laplace'a jest Δ , jednak nie będziemy go tu używać, ponieważ w dalszej części monografii symbol ten jest zarezerwowany na oznaczanie różnicy skończonej.

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_b, \text{ dla } \mathbf{x} \in \partial D, t > 0, \quad (3.61)$$

gdzie \mathbf{U}_b – prędkość poruszania się brzegu i zwykle jest ona równa zeru.

Liczba niewiadomych w trójwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich wynosi cztery. Są to trzy składowe prędkości oraz ciśnienie, dlatego, dla jednoznaczności rozwiązania, zagadnienie przepływu musi być uzupełnione równaniem ciągłości (3.32). W przypadku przepływu płynu ściśliwego, na przykład gazu, dodatkową piątą niewiadomą będzie gęstość gazu. Aby uzupełnić liczbę równań, możemy wówczas przyjąć na przykład liniowe równanie konstytutywne w postaci równania Clapeyrona

$$p = RT\rho \quad (3.62)$$

gdzie $R(p, T)$ – stała gazowa, T – temperatura gazu.

Jeżeli rozważymy przepływ cieczy newtonowskiej, w którym współczynnik lepkości jest bardzo mały $\nu \ll 1$, co pozwala zaniedbać zjawiska związane z lepkością, to w takim przepływie nie występują siły styczne. Tensor naprężenia (3.55) uprości się tylko do składowych normalnych, czyli ciśnienia. Wówczas równanie Naviera–Stokesa przekształci się w równanie Eulera opisujące przepływ cieczy nielepkiej

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (3.63)$$

Równanie Eulera ma zastosowanie w tych wszystkich zagadnieniach, w których siły bezwładności i ciśnienia są dużo większe niż siły związane z lepkością i dlatego siły lepkości można pominać. Do zagadnień takich zalicza się najczęściej opływ płata skrzydła samolotu, dla którego rząd wielkości sił ciśnienia i bezwładności jest dużo większy od rzędu sił lepkości. Równanie Eulera (3.63) ma w trójwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich pięć niewiadomych – trzy składowe wektora prędkości \mathbf{u} , ciśnienie p oraz gęstość ρ . Do dyspozycji są trzy równania, po jednym dla każdej składowej prędkości oraz równanie ciągłości i dlatego trzeba liczbę równań uzupełnić związkiem konstytutywnym, na przykład wyrażającym adiabatyczność ruchu. Dla jednoznaczności rozwiązania należy jeszcze przyjąć odpowiednie warunki początkowe i brzegowe. Za warunek początkowy przyjmuje się rozkład prędkości oraz ciśnienia w czasie $t = 0$. Warunek brzegowy przyjmuje się w postaci zerowej składowej prędkości normalnej do brzegu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ dla } \mathbf{x} \in \partial D, t > 0, \quad (3.64)$$

gdzie \mathbf{n} – wektor normalny do brzegu.

W niektórych przypadkach możemy mieć do czynienia z innym warunkiem brzegowym, gdy brzeg jest na przykład przepuszczalny lub ruchomy.

Jeśli prędkość przepływu jest bardzo mała, to przez porównanie rzędu poszczególnych członów równania Naviera–Stokesa (Gryboś, 1998) dochodzimy do wniosku, że

siły związane z bezwładnością cieczy są pomijalnie małe wobec sił lepkości i ciśnienia, co pozwala zaniedbać w równaniu Naviera–Stokesa składnik adwekcyjny $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Jeśli dodatkowo zaniedbujemy działanie sił zewnętrznych, to pełne równanie Naviera–Stokesa przekształca się w uproszczone równanie Stokesa dla ruchu nieustalonego (po założeniu braku lepkości objętościowej)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.65)$$

Przez pominięcie wyrazu związanego z adwekcją otrzymaliśmy równanie liniowe, które dzięki temu jest łatwiejsze do analizowania. Warunki brzegowe, jakie stawia się dla rozwiązania tego zagadnienia, są tożsame z warunkami dla równań Naviera–Stokesa.

3.1.9. Przepływy potencjalny

Wiele zjawisk fizycznych ma charakter przepływu potencjalnego. Przykładów dostarczają przepływy cieczy, ustalone przepływy ciepła, filtracja, przepływy strumienia elektrycznego i magnetycznego. Takie zjawiska opisywane są za pomocą pól potencjalnych.

Teoria potencjału dla poszczególnych zagadnień brzegowych sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a lub Poissona. W niniejszym punkcie zilustrujemy to na przykładzie przepływu cieczy, którego pole prędkości jest polem potencjalnym.

Dla takiego pola możemy składowe wektora prędkości wyrazić za pomocą pochodnych kierunkowych potencjału prędkości

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad (3.66)$$

Zauważmy, że $\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$. W takim przypadku mamy do czynienia z polem bezwirowym, tzn. takim, w którego prawie każdym punkcie wirowość równa się zeru (choć można dopuścić istnienie izolowanych włókien wirowych zanurzonych w przepływie potencjalnym). To oznacza również, że

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{oraz} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.67)$$

Zakładamy, że potencjał prędkości jest funkcją klasy C^2 . Obliczmy dywergencję pola prędkości

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi. \quad (3.68)$$

Jeśli ciecz jest nieściśliwa, czyli $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, to potencjał prędkości takiej cieczy jest funkcją harmoniczną

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

lub inaczej

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3.69)$$

W przypadku przepływu dwuwymiarowego przepływ potencjalny można sformułować w terminach pomocniczej funkcji zwanej funkcją prądu. Zilustrujemy to na przykładzie pola prędkości zależącego tylko od dwóch współrzędnych x_1 i x_2 . Na podstawie równania ciągłości

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.70)$$

można wykazać, że istnieje taka funkcja $\psi(x_1, x_2)$ klasy C^2 , że równanie (3.70) jest spełnione tożsamościowo, to znaczy wówczas, gdy

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.71)$$

Po podstawieniu tych zależności do wyrażenia na rotację wektora prędkości (3.67) wnioskujemy, że dla przepływu potencjalnego funkcja prądu, podobnie jak potencjał prędkości, jest funkcją harmoniczną

$$\nabla^2 \psi = 0$$

lub

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.72)$$

Funkcja prądu ma taką właściwość, że różnica wartości funkcji prądu między dwoma punktami obszaru wyznacza wielkość strumienia cieczy przepływającego między tymi punktami. Można to wykazać za pomocą całki po dowolnej krzywej $\gamma(a, b)$ między dwoma punktami a i b ze składowej normalnej wektora prędkości do tej krzywej

$$Q = \int_{\gamma(a, b)} u_n dl = \int_{\gamma(a, b)} (-u_2 dx_1 + u_1 dx_2) = \int_{\gamma(a, b)} d\psi = \psi_b - \psi_a. \quad (3.73)$$

W przypadku przepływu stacjonarnego z funkcji prądu można wyznaczyć kształt linii prądu. Linia prądu jest wówczas trajektorią, która w każdym punkcie pokrywa się z kierunkiem wektora prędkości (w ruchu niestacjonarnym tak nie jest). Właściwość tę wyraża następująca relacja

$$0 = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{n} = u_1 dx_2 - u_2 dx_1 \rightarrow \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} \quad (3.74)$$

gdzie $d\mathbf{n} = [dx_2, -dx_1]$ – wektor nieskończenie mały normalny do linii prądu.

Podstawiając do niej wyrażenia (3.61), mamy

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 = d\psi = 0 \quad (3.75)$$

Oznacza to, że funkcja prądu ma wartość stałą wzdłuż trajektorii cząstki poruszającej się z przepływem.

Na podstawie (3.66) i (3.71) możemy zauważyć, że potencjał i funkcja prądu są sobą powiązane

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.76)$$

Relacja (3.76) jest znanym warunkiem Cauchy'ego–Riemanna koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja była analityczna, co oznacza istnienie potencjału zespolonego

$$\theta(z) = \varphi + i\psi, \quad z = x_1 + ix_2, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.77)$$

Pochodna zespolona tej funkcji wyraża się następująco

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = u_1 - iu_2 \quad (3.78)$$

i nazywana jest prędkością zespoloną. Można uzasadnić, że linie $\varphi = \text{const}$ i $\psi = \text{const}$ są ortogonalne, gdyż spełniają warunki Cauchy'ego–Riemanna. Wystarczy zauważyć, że w punkcie przecięcia dwóch takich krzywych odpowiednie wektory styczne mają współrzędne $[\partial\varphi/\partial x_2, -\partial\varphi/\partial x_1]$ i $[\partial\psi/\partial x_2, -\partial\psi/\partial x_1]$.

Przepływ potencjalny można zbadać przez analizę równania (3.69) albo (3.72). Różnica polegać będzie jedynie na odpowiednim sformułowaniu warunków brzegowych odpowiednio dla funkcji potencjału prędkości albo funkcji prądu.

W zagadnieniach inżynierskich związanych z przepływem cieczy najczęściej spotykamy się z sytuacją, gdzie na części brzegu prędkość przepływu jest do niego styczna, a na pozostałej części jest znana lub ma kierunek normalny.

W opisie przepływu za pomocą funkcji potencjału prędkości oraz funkcji prądu te warunki brzegowe ulegają odpowiedniej transformacji. Szczegóły tej transformacji są przedstawione w kolejnych punktach.

1. Przyjmijmy, że brzeg obszaru jest krzywą, której zapis parametryczny jest następujący

$$\gamma = (x_1(s), x_2(s)) \quad (3.79)$$

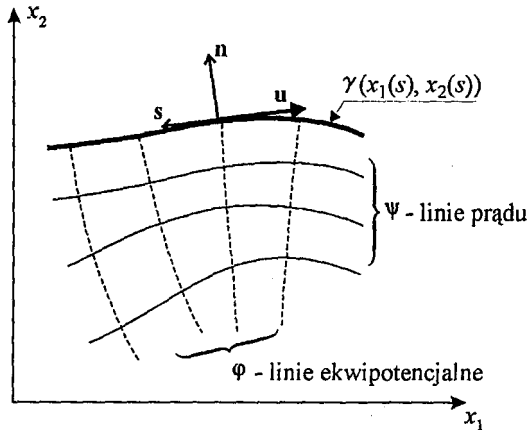
Funkcje potencjału i prądu na tym brzegu są jednocześnie funkcjami parametru s

$$\varphi = \varphi(x_1(s), x_2(s)), \quad \psi = \psi(x_1(s), x_2(s)) \quad (3.80)$$

2. W części opisanej krzywą γ , gdzie brzeg jest ścianą ograniczającą przepływ, prędkość przepływu jest styczna do brzegu, co jest równoznaczne ze znikaniem składowej normalnej prędkości (rys. 3.2)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (u_1 n_1 + u_2 n_2) = 0 \quad (3.81)$$

gdzie $\mathbf{n} = [n_1, n_2]$ – jednostkowy wektor normalny do γ , skierowany na zewnątrz obszaru przepływu.



Rys. 3.2. Określenie warunku brzegowego znikania składowej normalnej prędkości na granicy obszaru γ

W przypadku potencjału prędkości mamy warunek

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (3.82)$$

W celu wyprowadzenia podobnego warunku dla funkcji prądu obliczmy pochodną funkcji prądu po s , korzystając z równości (3.76)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \psi(x_1(s), x_2(s)) &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_2}{ds} \\ &= \nabla \varphi \left[\frac{dx_2}{ds}, -\frac{dx_1}{ds} \right] = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

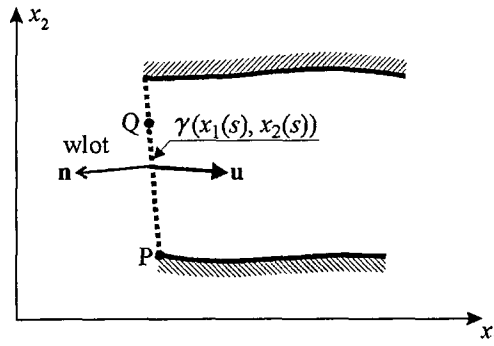
Na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\psi(x_1(s), x_2(s)) = \text{const} \quad (3.83)$$

czyli ta część brzegu jest odcinkiem linii prądu.

Wartość ψ na takim brzegu jest zwykle znana. Możemy bowiem skorzystać z (3.73), aby określić wartości funkcji prądu odpowiadające zewnętrznym brzegom, między którymi odbywa się przepływ lub wartość ψ na brzegu wewnętrznym, stanowiącym zamknięty kontur, opływany przez ciecz. Dla takiego fragmentu brzegu możemy skorzystać z warunku typu Neumanna (3.82) dla funkcji potencjału prędkości lub warunku typu Dirichleta dla funkcji prądu (3.83).

3. Część brzegu γ jest granicą, na której znany jest rozkład prędkości \mathbf{u} . Najczęściej z takim warunkiem brzegowym mamy do czynienia na wlocie do obszaru (rys. 3.3).



Rys. 3.3. Warunek brzegowy na wlocie do obszaru

Możemy wówczas wyrazić warunek Neumanna funkcji potencjału za pomocą relacji

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (3.84)$$

Dla funkcji prądu określimy następnie warunek Dirichleta

$$\psi(Q) = \int_{\gamma(P,Q)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \psi(P) \quad (3.85)$$

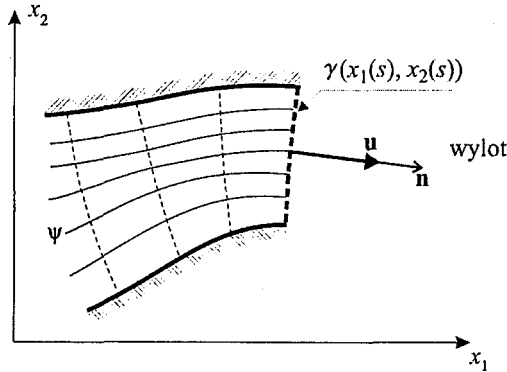
4. Gdy rozważamy brzeg, na którym nieznane wektory prędkości są do niego prostopadłe, wówczas brzeg ten jest odcinkiem linii ekwipotencjalnej (rys. 3.4). Brzeg taki jest utożsamiany z wylotem z obszaru.

Jeśli wektory są normalne do brzegu, to

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = \frac{d}{ds} \varphi(x_1(s), x_2(s)) = 0$$

To implikuje stałą wartość funkcji potencjału na tym odcinku brzegu (warunek Dirichleta)

$$\varphi = \text{const} \quad (3.86)$$



Rys. 3.4. Warunek brzegowy dla wylotu z obszaru

Zbadajmy jeszcze postać warunku brzegowego funkcji prądu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_1}{ds} = \nabla \psi \left[-\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_1}{ds} \right] = -\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (3.87)$$

Otrzymaliśmy warunek typu Neumanna funkcji prądu (3.87), który jest naturalnym warunkiem potencjału. Należy podkreślić, że równanie Laplace'a jest równaniem eliptycznym, a zatem przyjęcie poprawnego warunku brzegowego na wylocie ma istotny wpływ na jakość wyznaczonych wartości pól w obszarze przepływu.

Z przedstawionego przeglądu możliwości rozwiązania zagadnienia przepływu potencjalnego wynika, że bardzo częstym podejściem w praktycznych inżynierskich obliczeniach, dla zagadnień dwuwymiarowych, jest przyjmowanie mieszanych warunków brzegowych nakładanych na funkcję potencjału albo funkcję prądu. Sprowadza się to do zadania na części brzegu wartości funkcji (potencjału lub prądu), a na pozostałej części brzegu pochodnej normalnej tej funkcji. W zagadnieniach trójwymiarowych, ze względu na brak interpretacji fizycznej funkcji prądu, warunki brzegowe odnosi się tylko do funkcji potencjału prędkości.

3.2. Wirowość

Istotną cechą przepływu charakteryzującego się dużą liczbą Reynoldsa, który znajduje się w kręgu zainteresowania niniejszej monografii, jest powstawanie w nim wieloskalowych wirowych struktur, od drobnych zawirowań do tzw. struktur koherentnych. Matematyczny opis takiego przepływu uwzględnia zjawisko obrotu elementu cieczy, który wyrażony jest przez rotację wektora prędkości i nosi nazwę wirowości. Wirowość odgrywa istotną rolę w przenoszeniu wielkości fizycznych w przepływie

turbulentnym. W niniejszym rozdziale przedstawiono podstawowe informacje dotyczące powstawania i przenoszenia wirowości w przepływie nieściśliwym, które stanowią podstawę do modelowania matematycznego przepływu opisywanego w terminach wirowości, prędkości i funkcji prądu.

3.2.1. Kinematyka wirowości

Pole wirowości jest polem wektora rotacji prędkości cieczy³

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (3.88)$$

gdzie ε_{ijk} – symbol Levi–Civita.

W przepływie dwuwymiarowym, $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}(x_1, x_2, 0, t)$, $u_3(x_1, x_2, 0, t) = 0$ pole wirowości ma prostą strukturę, wektory rotacji bowiem mają tylko jedną niezerową trzecią współrzędną $\boldsymbol{\Omega} = [0, 0, \omega_3]$, gdzie

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.89)$$

W ten sposób są one prostopadłe do płaszczyzny (x_1, x_2) . W takim przypadku będziemy dalej przyjmować, że $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$.

Z równania (3.88) wynika w bezpośredni sposób, że pole wirowości jest bezdywergencyjne

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} \equiv 0 \quad (3.90)$$

Wektory pola wirowości w przepływie trójwymiarowym są styczne do pewnych krzywych, które nazywane są liniami wirowymi (rys. 3.5).

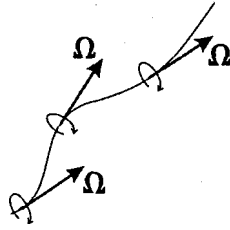
Zbiór tych linii przechodzących przez pewną krzywą niezamkniętą, nie będącą linią wirową, tworzy powierzchnię wirową, zbiór zaś linii na krzywej zamkniętej nazywany jest rurką wirową. Rurka wraz zawartym w niej płynem nazywana jest włóknem wirowym (Gryboś, 1998).

Ruch obrotowy elementów cieczy obracających się wokół osi włókna wirowego z prędkością kątową ω można opisać za pomocą strumienia wirowości

$$d\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{ndS} = 2\omega \cdot \mathbf{ndS} \quad (3.91)$$

Całka po powierzchni S jest nazywana natężeniem (intensywnością) włókna wirowego

³ Bardzo często w mechanice płynów utożsamia się rotację wektora prędkości z wirowością z pominięciem stałego mnożnika $1/2$, tzn. $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{u}$.



Rys. 3.5. Linia wirowa i wektory wiru

$$\Omega_S = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = 2 \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.92)$$

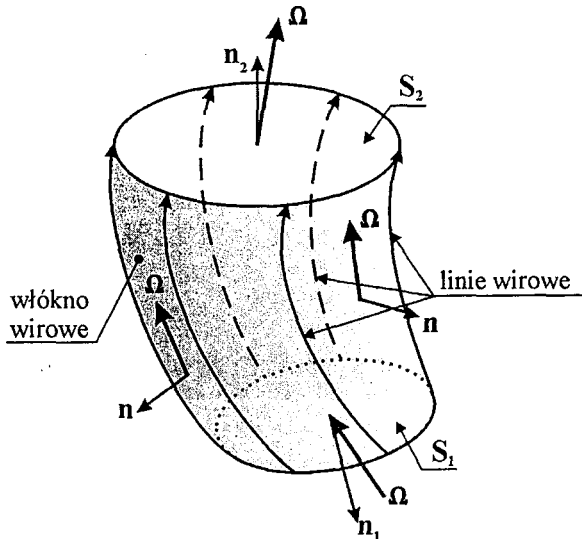
Z równania (3.90) można wyprowadzić twierdzenie o zachowywaniu wirowości wzdłuż włókna wirowego (II twierdzenie Helmholtza). Korzystając z twierdzenia Gaussa, możemy zapisać

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} dV = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.93)$$

gdzie V – objętość włókna wirowego, S – powierzchnia jego przekroju, co oznacza, że przepływ pola wirowości przez powierzchnię ograniczającą objętość V jest równy zeru.

Na podstawie rysunku 3.6 możemy równość napisać w postaci

$$0 = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} dV = \int_{S_1 \cup S_2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_2 dS$$



Rys. 3.6. Schemat do wyznaczania cyrkulacji włókna wirowego

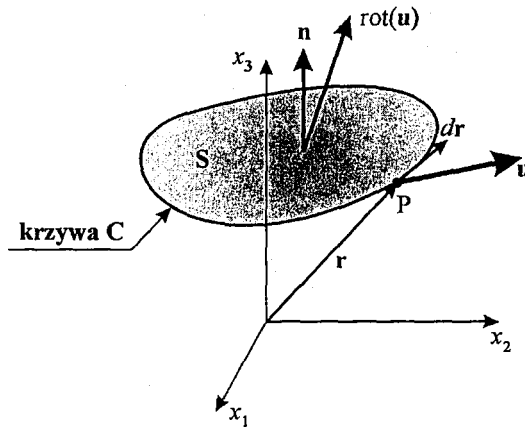
Zauważmy, że na ścianach bocznych wektor normalny i wektor wiru są do siebie prostopadłe i ich iloczyn skalarny jest równy zero. Po uwzględnieniu przeciwnych zwrotów wektora normalnego na powierzchni S_1 i S_2 oraz zależności $\Omega_1 = \Omega \cdot \mathbf{n}_1$, $\Omega_2 = \Omega \cdot \mathbf{n}_2$ otrzymamy

$$\int_{S_1} \Omega_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{S_2} \Omega_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = \Gamma$$

Z polem wirowym wiąże się pojęcie cyrkulacji, czyli krążenia wektora prędkości po krzywej C . Na podstawie twierdzenia Stokesa cyrkulacja jest równa strumieniowi rotacji przenikającego dowolną powierzchnię S ograniczoną krzywą C

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s(C)} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.94)$$

gdzie \mathbf{u} – wektor prędkości na krzywej C , $d\mathbf{r}$ – infinytezymalny odcinek konturu C (rys. 3.7).



Rys. 3.7. Schemat do wyznaczenia cyrkulacji wiru po krzywej C

3.2.2. Dynamika wirowości

Matematyczny opis przepływu cieczy newtonowskiej jest oparty przede wszystkim na równaniu Naviera–Stokesa wyrażającym zasadę zachowania pędu (3.59). Równanie to pozwoli nam wyprowadzić zależność opisującą transport wirowości podczas przepływu cieczy. W tym celu dokonamy przekształcenia równania Naviera–Stokesa przez działanie na niego operatorem rotacji. W celu uproszczenia postaci składnika adwekcji

skorzystamy z tożsamości otrzymanej wprost z równości (9.18), przedstawionej w Dodatku D

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}^2) = \mathbf{u} \cdot (\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}^2) - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u} \right) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \right) \quad (3.95)$$

Zauważmy, że na podstawie znanej tożsamości (9.26), $\nabla \times \nabla(\) \equiv 0$, znikają dwa składniki równania (3.95) odpowiadające gradientowym polom kwadratu prędkości i ciśnienia. W obliczeniach przepływu wody przez budowle hydrotechniczne pole sił masowych \mathbf{f} jest polem grawitacyjnym i przez to potencjalnym. Oznacza to, że istnieje taka funkcja skalarna $U(\mathbf{x}, t)$, że $\mathbf{f} = \nabla U$ i wówczas ten wyraz równania również znika. Po wprowadzeniu teraz do wzoru (3.95) wektora wiru $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ otrzymujemy

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) = \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3.96)$$

Wykonajmy teraz jeszcze jedno przekształcenie drugiego składnika po lewej stronie równania (3.96). Na podstawie równości (9.23) widzimy, że zachodzi następująca relacja $\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$, z której, po uwzględnieniu warunku nieściśliwości cieczy (3.32) i równania (3.90) otrzymujemy

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (3.97)$$

Podobnie możemy przekształcić wyrażenie zawierające rotację laplasjanu. Zauważmy bowiem, że $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$, a zatem korzystając ponownie z warunku nieściśliwości cieczy (3.32) i (3.90) mamy

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) = -\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) = \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (3.98)$$

Po podstawieniu (3.97) i (3.98) do (3.96) i przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę otrzymujemy postać równania opisującego adwekcyjno-dyfuzyjny transport wirowości

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (3.99)$$

kóre nosi nazwę uogólnionego równania Helmholtza.

Interpretując fizyczne znaczenie poszczególnych składników tego równania, stwierdzamy, że pierwszy oznacza szybkość zmiany wirowości, drugi składnik oznacza adwekcję, czyli unoszenie wirowości, składnik trzeci wyraża efekt rozciągania włókna wirowego, a ostatni odpowiada dyfuzji wirowości.

Przeanalizujmy teraz, czy II prawo Helmholtza o zachowaniu cyrkulacji wirowości rozciąga się na zagadnienie przepływu lepkiego danego równaniem Naviera–Stokesa. Na podstawie definicji cyrkulacji (3.94) i równania Naviera–Stokesa (3.59) możemy zapisać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma_{c(t)} &= \frac{d}{dt} \int_{c(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_{c(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{c(t)} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{r} + \nu \int_{c(t)} \nabla^2 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \nu \int_{c(t)} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r} = \nu \int_{c(t)} (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Składnik związany z ciśnieniem został pominięty, całka bowiem po krzywej zamkniętej gradientu pola jest równa zeru.

Wynika stąd, że cyrkulacja $\Gamma_{c(t)}$ nie jest zachowana (stała w czasie) dla przepływu cieczy, której współczynnik lepkości kinematycznej $\nu > 0$.

Inaczej będzie w przypadku przepływu cieczy idealnej opisanej równaniem Eulera, przepływ bowiem cieczy idealnej charakteryzuje się brakiem występowania sił stycznych związanych z lepkością. Możemy więc oczekiwać, że cyrkulacja będzie w takim przepływie zachowana.

Rzeczywiście z równania (3.100) wprost wynika zasada zachowania cyrkulacji po krzywej zamkniętej, która stanowi treść prawa Kelvina

$$\Gamma_{c(t)} = \int_{c(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \text{const} \quad (3.101)$$

Jeżeli do tak sformułowanego warunku zastosujemy formułę Stokesa, to otrzymamy zasadę zachowania natężenia wirowości wyrażonego w postaci iloczynu strumienia wirowości przechodzącego przez powierzchnię $S(t)$

$$\Omega_S = \int_{S(t)} \boldsymbol{\Omega} dS = \text{const} \quad (3.102)$$

Aby otrzymać równanie transportu wirowości dla cieczy nielepkiej, wystarczy w równaniu (3.99) pominąć ostatni składnik związany z dyfuzją wirowości

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (3.103)$$

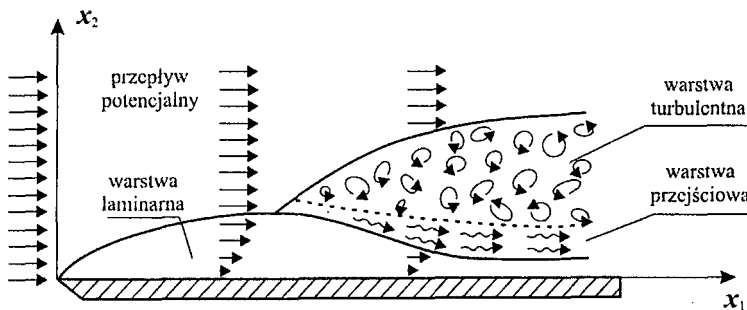
Równanie (3.103) odgrywa istotną rolę w formułowaniu zagadnienia metody wirów z zastosowaniem dekompozycji równania transportu wirowości, co będzie przedmiotem rozważań w rozdziale 5 niniejszej monografii.

3.3. Teoria warstwy przyściennej

Przepływ wody przez budowle hydrotechniczne odbywa się ze stosunkowo dużą prędkością, przy której występuje zdecydowana dominacja sił bezwładności w porównaniu z siłami lepkości (ale prędkość nie jest na tyle duża, aby rozważać przepływ cieczy ściślej). Gdy prędkość jest duża, przepływającą ciecz można w przybliżeniu traktować jako idealną, podlegającą opisowi za pomocą równania Eulera. Jeśli w takim przypadku przepływ rozważany jest w obszarze ograniczonym, to naturalnym założeniem jest, że brzeg jest „śliski”, tzn. nie znika składowa styczna do brzegu (w tym modelu nie występują siły adhezji). Tak jednak nie jest, w przepływie bowiem rzeczywistym następuje na brzegu przyleganie cząstek cieczy wskutek sił adhezji. W ten sposób znikają składowe prędkości styczne do brzegu (podrozdz. 3.1.8). Świadczy to o występowaniu w pobliżu brzegu strefy, w której dominować będą siły lepkości, odpowiadające za powstanie na brzegu naprężeń stycznych. Prandtl, który pierwszy opisał to zjawisko, zaproponował podział obszaru przepływu na strefę (warstwę) przyścienną o znacznym udziale lepkości i zewnętrzną do niej strefę, w której lepkość cieczy można pominąć. Obszerny opis zagadnienia warstwy przyściennej można znaleźć w monografiach, np. Schlichting (1965) oraz licznych pracach z dziedziny mechaniki płynów, m.in. Gryboś (1998), Landau i Lipszyc (1994), Puzyrewski i Sawicki (1998), Jeżowiecka-Kabsch i Szewczyk (2001), Batchelor (1967), Elsner (1987).

Opierając się na obserwowanych fizycznych relacjach, jakie zachodzą w warstwie przyściennej, można przyjąć założenie, że w stosunkowo cienkiej warstwie, równoległej w przybliżeniu do nieprzepuszczalnego brzegu, prędkość przepływu zmienia się od zera do prędkości panującej w głównej części strumienia, a zatem gradient prędkości w kierunku normalnym do brzegu jest dużo większy niż w kierunku stycznym.

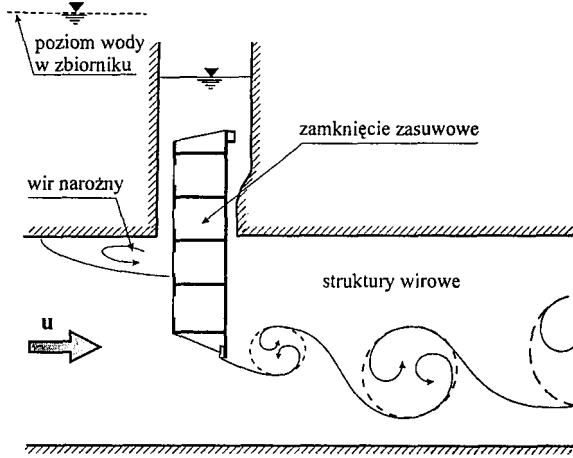
Z gradientem prędkości związane jest naprężenie styczne, które zgodnie ze wzorem (3.54) wyrazić można za pomocą relacji $\mu(\partial u_s / \partial n)$ i które osiąga duże wartości w stosunkowo niewielkiej odległości od brzegu. Na rysunku 3.8 przedstawiono formowanie się warstwy przyściennej podczas napływu cieczy na płytkę równoległą do



Rys. 3.8. Formowanie się warstwy przyściennej

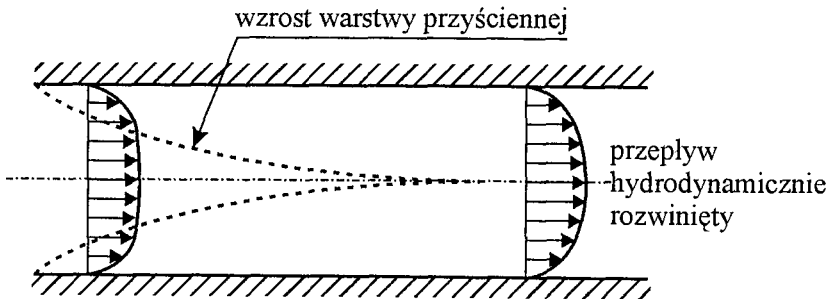
kierunku prędkości. Jako granicę obszaru warstwy przyściennej zwykle uważa się miejsce, w którym prędkość osiąga 0,99 wartości prędkości zewnętrznej strumienia, traktowanego jako potencjalny.

Jeśli opływany brzeg jest zakrzywiony, dochodzi do oderwania się warstwy przyściennej (granicznej), która wówczas formuje ścieżkę wirową. Na rysunku 3.9 przedstawiono formowanie się ścieżki za opływającym zamknięciem płaskim.



Rys. 3.9. Ścieżka wirowa za zamknięciem płaskim

W przewodach zamkniętych (np. rurach) warstwa przyścienne wzrasta wraz z długością przewodu (rys. 3.10), wypełniając w końcu całe jego wnętrze. Od tego przekroju rozkład prędkości nie zależy od współrzędnej równoległej do osi przewodu, gradient ciśnienia jest stały i równoważony przez naprężenia lepkie. Mówimy wówczas o przepływie hydrodynamicznie rozwiniętym.



Rys. 3.10. Obraz warstwy przyściennej w przewodzie zamkniętym

Jeśli przedstawiony na rysunku przepływ odbywa się między dwoma płaskimi ściankami (zagadnienie Poiseuille'a), to rozkład prędkości w kanale będzie paraboliczny i jak łatwo się przekonać na podstawie (3.59) będzie dany wzorem

$$u_1(x_2) = \frac{1}{2\nu\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x_1} (x_2^2 - hx_2) \quad (3.104)$$

gdzie h – wysokość kanału.

Równanie Naviera–Stokesa opisuje przepływ w całym obszarze łącznie z warstwą leżącą blisko brzegu, jednak w tej warstwie, ze względu na jej szczególny charakter, równania Naviera–Stokesa mogą ulec pewnemu uproszczeniu. Przedstawimy model warstwy przyściennej przepływu laminarnego, a w następnych punktach model turbulenta warstwy przyściennej.

3.3.1. Model laminarnej warstwy przyściennej

Przyjmijmy dla uproszczenia, że rozważać będziemy opływ dwuwymiarowy płaskiej płytki, której powierzchnia pokrywa się z osią x (rys. 3.8).

W równaniach przepływu dla uproszczenia pominięto siłę masową. Równania Naviera–Stokesa (3.58) i ciągłości (3.32) mają następującą, rozwiniętą postać

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.107)$$

Sformułujmy następujące założenia:

- siły bezwładności i siły lepkości są tego samego rzędu w warstwie przyściennej,
- składowa prędkości w kierunku normalnym do brzegu u_2 jest bardzo mała w porównaniu ze składową prędkości równoległą do brzegu, czyli $u_1 \gg u_2$,
- gradient prędkości w kierunku normalnym do brzegu jest dużo większy niż w kierunku stycznym $\partial u_1 / \partial x_2 \gg \partial u_1 / \partial x_1$,
- przyjmując, że rozpatrujemy zjawisko opływu płaskiej ścianki o długości L , na której powstanie warstwa przyścienne o grubości δ , określimy zasięg zmiennych x_1, x_2 w postaci $x_1 \in [0, L]$, $x_2 \in [0, \delta]$,
- w strefie odległej od brzegu, na zewnątrz warstwy przyściennej, przepływ możemy w przybliżeniu traktować jako potencjalny z prędkością U ; ponieważ na granicy warstwy przyściennej prędkości są w przybliżeniu sobie równe $u_1 \approx U$, więc ich rzędy wielkości także będą sobie równe $O(u_1) = O(U)$,

- przyjmujemy jako wielkości odniesienia dla czasu $t = O(L/U)$ i dla ciśnienia, w strefie przepływu potencjalnego, na podstawie równania Bernoulliego $p = O(\rho U^2)$
- zakładamy, że na początku płytki w miejscu, gdzie warstwa się zaczyna $u_1(0) = 0$, aby następnie osiągnąć swoją maksymalną wartość w odległości L ; dlatego rząd pochodnej prędkości określimy z różnicy skończonej $\partial u_1 / \partial x_1 \approx (u_1(L) - u_1(0)) / L = O(U/L)$. W podobny sposób określimy drugą pochodną i jej rząd wyniesie $\partial^2 u_1 / \partial x_1^2 = O(U/L^2)$.

Dalej na podstawie równania ciągłości określamy $\partial u_2 / \partial x_2 = O(U/L)$, a następnie całkując po x_2 otrzymamy $u_2 = O(U\delta/L)$.

Możemy teraz dokonać porównania rzędu poszczególnych wyrazów równania (3.105). Pochodne unoszenia i gradient ciśnienia są rzędu

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = O\left(\frac{U^2}{L}\right)$$

Rozważając rząd wyrazów związanych z lepkością

$$v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = O\left(v \frac{U}{L^2}\right), \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = O\left(v \frac{U}{\delta^2}\right)$$

widzimy, że pierwszy z nich jest do pominięcia. Ze względu na znak równości, lewa i prawa strona równania ma ten sam rząd i stąd wnioskujemy, że $\delta \sim L/\sqrt{\text{Re}}$, gdzie Re jest liczbą Reynoldsa, $\text{Re} = UL/v$.

Prowadząc podobne oszacowanie rzędu wielkości równania (3.106) ze względu na wartość prędkości u_2 o jeden rząd mniejszą od u_1 , otrzymamy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \approx 0$$

To implikuje stałą wartość ciśnienia w warstwie przyściennej w kierunku normalnym do brzegu. Na tej podstawie możemy już przedstawić układ równań warstwy przyściennej

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.110)$$

Równania (3.108)–(3.110) nazywane są równaniami Prandtla.

Rozważania dotyczą przepływu laminarnego i ich postać będzie przydatna do wyprowadzenia równań metody warstw wirowych, przedstawionej w rozdziale 5. Rozważany w tej pracy opływ zamknięć hydrotechnicznych i związane z nim zmienne obciążenie działające na te konstrukcje, są wynikiem przepływów turbulentnych z dużą liczbą Reynoldsa. Jednym z podstawowych mechanizmów odpowiedzialnych za powstawanie obciążeń hydrodynamicznych jest oderwanie turbulენტnej warstwy przyściennej od powierzchni zamknięcia.

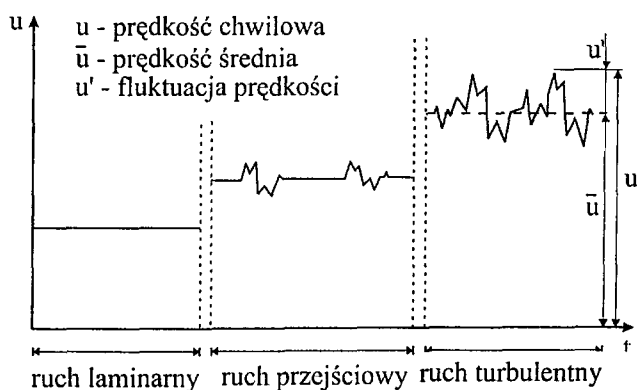
3.3.2. Podstawy teorii przepływu turbulentnego

Przepływ cieczy spełniający równanie Naviera–Stokesa ma bardzo ważną właściwość. Dla małych liczb Reynoldsa przepływ jest stabilny i jeśli powstaną w nim jakiegokolwiek zaburzenia, są one wygaszane przez lepkość cieczy. Jeśli jednak liczba Reynoldsa zwiększy się powyżej pewnej krytycznej wartości, to powstające zaburzenia są wzmacniane i przepływ traci stabilność (Joseph, 1976). Efektem utraty stabilności jest bardzo złożona kinematyka ruchu cząstek cieczy, którą nazywamy turbulencją. Cechą turbulencji jest więc pojawienie się fluktuacji prędkości oraz fluktuacji innych pozostałych wielkości fizycznych związanych z przepływem. Wektor prędkości cieczy można więc ogólnie przedstawić w postaci sumy dwóch składników

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (3.111)$$

gdzie $\bar{\mathbf{u}}$ – średnia wartość wektora prędkości, \mathbf{u}' – fluktuacja wektora prędkości.

Przejście z ruchu laminarnego do turbulentnego przedstawiono na rysunku 3.11.



Rys. 3.11. Przejście z ruchu laminarnego w turbulentny

Częstym zjawiskiem opływu ciała ruchem turbulentnym jest formowanie się za nim pewnych quasi-regularnych zaburzeń, związanych z powstawaniem w przepływie dużych, autonomicznych struktur wirowych zwanych strukturami koherentnymi.

Zwykle wyróżnia się trzy skale turbulencji. Są to: skala autonomicznych struktur zwana też skalą zewnętrzną turbulencji (Puzyrewski i Sawicki, 1998), w której powstają wiry największe, skala wirów małych ulegających dyssypacji i skala molekularna związana z lepkością cieczy. Między skalą zewnętrzną turbulencji a skalą wirów ulegających dyssypacji istnieje cały zbiór wirów o pośrednich wymiarach, co sprawia, że w przepływie istnieje ciągła struktura wirów. Na jej istnienie zwrócił uwagę Kołmogorow, który także zajmował się analizowaniem energii przenoszonej i rozpraszanej przez wiry o różnych skalach. W ujęciu Kołmogorowa proces turbulencji polega na „przepompowywaniu” energii od ruchu głównego, dzięki wirom największym, przez proces ich rozpadu do najmniejszych wirów dyssypujących (Puzyrewski i Sawicki, 1998; Jeżowiecka-Kabsch i Szewczyk, 2001).

Z powodu trudności modelowania bezpośredniego równań Naviera–Stokesa dla ruchu turbulentnego (por. podrozdz. 4.2) stosuje się ich uśrednianie, najczęściej po czasie, aby wyrazić zagadnienie przepływu w zmiennych średnich wartościach prędkości oraz ciśnienia. Podstawą procesu uśredniania równań, po założeniu, że każda z wielkości w nim występująca jest sumą wartości średniej i fluktuacji, jest relacja

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} q(x,t) dt = \bar{q}(x) \quad (3.112)$$

gdzie q jest dowolną wielkością podlegającą uśrednianiu, T jest przedziałem uśredniania odpowiednio dużym w stosunku do średniego okresu fluktuacji, tak aby prawdziwa była zależność oznaczająca wygaszenie efektów stochastycznych

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} q'(x,t) dt = 0 \quad (3.113)$$

Zastosujemy procedurę uśredniania po czasie do równania zachowania pędu, danego wzorem (3.42)

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}$$

Składnik w postaci dywergencji iloczynu diadycznego składowych fluktuacji prędkości uśredniamy w następujący sposób

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u} \mathbf{u} dt &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') dt \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{\mathbf{u}} \mathbf{u}' dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}' \bar{\mathbf{u}} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}' \mathbf{u}' dt = \overline{\mathbf{u} \mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Pozostałe wyrazy równania uśredniają się bezpośrednio z równań (3.112) i (3.113), otrzymując

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}) + \rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} + \rho \mathbf{f} \quad (3.115)$$

Składnik $\overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}$ możemy przekształcić do postaci adwekcyjnej $(\bar{\mathbf{u}} \nabla) \bar{\mathbf{u}}$ zgodnie z zasadami przedstawionymi w Dodatku B. Uśrednienie tensora naprężenia \mathbf{T} prowadzi dla cieczy nieściśliwej do relacji $\bar{\mathbf{T}} = \bar{p} \mathbf{I} + 2\mu \bar{\mathbf{D}}$. Otrzymujemy następującą postać uśrednionego równania przepływu cieczy lepkiej, nieściśliwej

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho (\bar{\mathbf{u}} \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) + \rho \mathbf{f} \quad (3.116)$$

Równanie to można uzupełnić uśrednionym równaniem ciągłości

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.117)$$

Przedostatni składnik równania (3.116) stanowi dodatkowy tensor nazywany tensorem Reynoldsa i jego postać jest następująca

$$\overline{\rho \mathbf{u}' \mathbf{u}'} = [\bar{\tau}_{ij}] = \rho \begin{bmatrix} \overline{(u'_1)^2} & \overline{u'_1 u'_2} & \overline{u'_1 u'_3} \\ \overline{u'_2 u'_1} & \overline{(u'_2)^2} & \overline{u'_2 u'_3} \\ \overline{u'_3 u'_1} & \overline{u'_3 u'_2} & \overline{(u'_3)^2} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Z procedury uśredniania wynika, że jest to tensor symetryczny, co oznacza $\bar{\tau}_{ij} = \bar{\tau}_{ji}$. Jego elementy stanowią składowe jednostkowego burzliwego strumienia pędu, nazywane naprężeniami turbulentnymi.

Równanie (3.116), pod względem liczby zmiennych, jest dużo bardziej skomplikowane niż równanie Naviera–Stokesa. Występuje tu bowiem sześć dodatkowych zmiennych – wyrazów tensora naprężeń Reynoldsa i potrzeba jeszcze dodatkowych sześciu równań dla jednoznacznego rozwiązania tego układu. Istnieje kilka hipotez, gdzie celem jest określenie dodatkowego układu równań konstytutywnych, które rozwiązywane byłyby razem z równaniami ruchu uśrednionego. Zagadnienie poszukiwania tych dodatkowych równań jest przedmiotem licznie pojawiających się prac naukowych, w których opisywane są coraz doskonalsze modele turbulencji. Ogólnie wyróżnić można

dwie grupy modeli. Pierwsza oparta jest na koncepcji lepkości turbulentnej, druga nie wprowadza pojęcia lepkości turbulentnej, lecz polega na uzależnieniu tensora naprężeń turbulentnych od energii kinetycznej turbulencji, dyfuzji i dyssypacji energii.

Do pierwszej grupy należy propozycja Prandtla przedstawienia naprężeń turbulentnych w postaci

$$\tau_i = -\rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 \quad (3.119)$$

gdzie μ_t jest współczynnikiem lepkości turbulentnej (która nie jest tu cechą fizyczną, ale wynika z lokalnych właściwości ruchu cieczy), l oznacza długości drogi mieszania.

Przez drogę mieszania Prandtl określił odległość na jaką cząsteczka cieczy przemieszcza się wskutek fluktuacji przepływu przenosząc charakterystyczne dla niej wielkości fizyczne, a następnie je traci na rzecz otaczającej ją cieczy.

Jak widać z (3.119) naprężenie turbulentne zależy będzie od kwadratu prędkości odkształcenia elementu cieczy. Związek (3.119) umożliwia domknięcie układu równań Reynoldsa pod warunkiem określenia długości drogi mieszania, która zwykle jest przedmiotem badań doświadczalnych. Istnieje też kilka innych modeli turbulencji prowadzących do bezpośredniego określenia tensora $\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$. Do najbardziej rozpowszechnionych należy model dwurównaniowy $K - \varepsilon$, w którym dodatkowe dwa równania – energii kinetycznej turbulencji oraz intensywności dyssypacji – zamykają układ równań (3.116) i (3.117) (Elsner, 1987); Gryboś, 1998); Puzyrewski i Sawicki, 1998); Malczewski i Piekarski, 1992). Układ równań $K - \varepsilon$ przedstawiono w podrozdziale 4.2.2.

3.3.3. Model turbulentnej warstwy przyściennej

Zrozumienie zjawisk zachodzących w turbulentnej warstwie przyściennej jest ważne ze względu na wybór metody rozwiązywania zagadnienia przepływu w pobliżu ściany, stanowiącego klucz do wyznaczania występującego na niej ciśnienia hydrodynamicznego.

Zjawisko opływu ruchem turbulentnym, rozważane w układzie dwuwymiarowym, wiąże się z powstaniem wzdłuż opływanej krawędzi turbulentnej warstwy przyściennej zgodnie z rysunkiem 3.8. Cechy tej warstwy można badać, analizując uśrednione równania przepływu, podobnie jak dla warstwy laminarnej, szacując rzędy wielkości poszczególnych członów układu równań. Różnica między nimi leży w pojawieniu się dodatkowego członu związanego z tensorem naprężeń turbulentnych

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial (\overline{u_1'^2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (\overline{u_1' u_2'})}{\partial x_2} \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial (\overline{u_1' u_2'})}{\partial x_1} - \frac{\partial (\overline{u_2'^2})}{\partial x_2} \quad (3.121)$$

Podobnie jak dla warstwy laminarnej stwierdzamy, że w równaniu (3.120) składnik $\partial^2 \bar{u}_1 / \partial x_1^2$ jest do pominięcia. Oszacowanie rzędu wielkości składowych tensora naprężeń turbulentnych prowadzi do wniosku, że składnik $\partial(\overline{u_1' u_2'}) / \partial x_1$ jest δ/L razy mniejszy niż $\partial(\overline{u_1' u_2'}) / \partial x_2$ i można go zaniedbać. Z równania (3.121) w kierunku osi x_2 , ze względu na małe wartości prędkości \bar{u}_2 , wszystkie wyrażenia po lewej stronie są małe. Podobnie $\partial(\overline{u_1' u_2'}) / \partial x_1$ jest małe w porównaniu z $\partial(\overline{u_2'^2}) / \partial x_2$, tak więc z całego równania pozostaje dla tego samego rzędu wielkości tylko wyrażenie

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial (\overline{u_2'^2})}{\partial x_2} = 0 \quad (3.122)$$

które wskazuje, że różnica naprężenia turbulentnego i ciśnienia głównego normalnego do osi x_1 jest stała w całej warstwie (Landau i Lifszyc, 1994). Uwzględniając podane oszacowania, otrzymujemy teraz układ równań turbulentnej warstwy przyściennej

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial (\overline{u_1' u_1'})}{\partial x_2} \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.124)$$

Do jego rozwiązania potrzebne są dodatkowe zależności związane z tensorem naprężeń turbulentnych.

Z innej postaci równań wynika inny niż w laminarnej warstwie profil uśrednionej prędkości. Profil ten wyznacza się zwykle po przyjęciu następujących założeń

- przepływ jest ustalony i nie zależy od współrzędnej x_1 ,
- składowa prędkości uśrednionej normalna do brzegu jest równa zeru.

Wobec tego na podstawie (3.123) mamy

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_2} = \frac{\partial (\tau_i + \tau_i)}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \tau = \text{const} \quad (3.125)$$

Przyjmijmy jeszcze dodatkowe założenia

- naprężenia turbulentne są wyznaczone na podstawie hipotezy Prandtla (3.119),
- w bezpośredniej bliskości ściany wskutek tłumienia fluktuacji prędkości przeważają naprężenia lepkie $\tau = \tau_i = \mu \partial \bar{u}_1 / \partial x_2$,
- w dalszych warstwach przeważają naprężenia turbulentne $\tau = \tau_i = \rho l^2 (\partial \bar{u}_1 / \partial x_2)^2$.

Obszar pierwszy nazywany jest podwarstwą lepką, a drugi obszarem rdzenia turbulentnego. Rozkład prędkości w warstwie przyściennej może być wyznaczony przez całkowanie podanych wyrażań.

W podwarstwie lepkiej otrzymujemy

$$\bar{u}_1 = \frac{\tau}{\mu} x_2 \quad (3.126)$$

co oznacza, że rozkład jest liniowy.

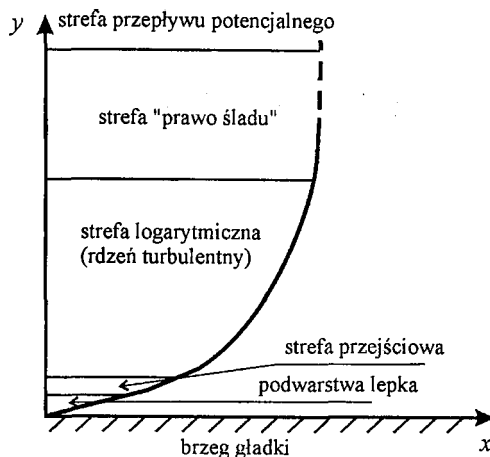
Do wyznaczenia profilu prędkości w warstwie rdzenia turbulentnego należy przyjąć postać długości drogi mieszania. Prandtl założył, że jest ona proporcjonalna do odległości od brzegu, $l = kx_2$, ze względu na jego wspomnianą cechę tłumienia. Po scałkowaniu otrzymujemy logarytmiczny kształt profilu prędkości

$$\frac{d\bar{u}_1}{dx_2} = \frac{1}{kx_2} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \rightarrow \bar{u}_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln x_2 + C \quad (3.127)$$

Dokładniejszą postać tego wzoru można znaleźć w literaturze (Puzyrewski i Sawicki, 1998; Jeżowiecka-Kabsch i Szewczyk, 2001; Gryboś, 1998; Elsner, 1987).

Obszar rdzenia turbulentnego nosi również nazwę strefy logarytmicznej. Między podwarstwą lepką a strefą logarytmicznego profilu prędkości jest jeszcze strefa przejściowa, w której naprężenia lepkie i turbulentne mają zbliżoną wartość. Te trzy strefy określane są wspólnym mianem wewnętrznego obszaru turbulencji w odróżnieniu od obszaru zewnętrznego, w którym wyróżnia się jeszcze strefę „prawa śladu”, z naprężeniami kształtowanymi przez duże struktury wirowości oraz strefę intermittencji. Zjawisko intermittencji polega na istnieniu ruchomej powierzchni rozdziału między przepływem turbulentnym a przepływem bezwirowym lub cieczą pozostającą w spoczynku. Strefa ta jest głęboko pofałdowana i ma charakter losowy (Elsner, 1987). Profil prędkości w warstwie turbulentnej przedstawiono na rysunku 3.12. Należy zwrócić uwagę, że wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa grubość podwarstwy lepkiej szybko maleje, szybciej niż zwiększa się całkowita grubość turbulentnej warstwy przyściennej.

Ogólnie stwierdza się, że grubość strefy wewnętrznej stanowi około 20% grubości warstwy, podczas gdy strefa zewnętrzna obejmuje pozostałe 80%. Kształt profilu prędkości przepływu laminarnego i turbulentnego będzie podstawą weryfikacji zaproponowanej przez autora numerycznej metody wirów, do wyznaczania pól prędkości, wirowości i ciśnienia złożonych przypadków przepływu.



Rys. 3.12. Profil prędkości cieczy w turbulentej warstwie przyściennej

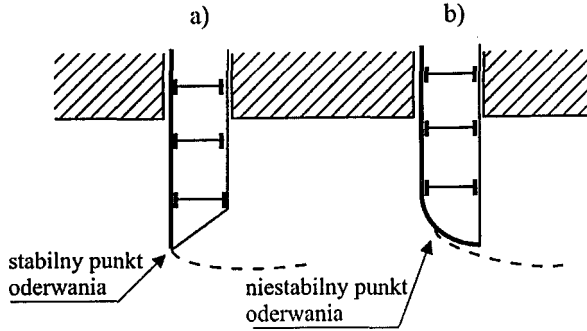
3.3.4. Odrywanie turbulentej warstwy przyściennej

Badania charakteru i pochodzenia składowych obciążeń hydrodynamicznych, działających na opływane zamknięcia wskazują, że zmiany ciśnienia na ich powierzchni, spowodowane fluktuacjami prędkości pochodzącymi od turbulencji mają charakter losowy, zarówno w czasie, jak i w przestrzeni, a zatem sumaryczna wartość tych oddziaływań dąży do zera.

Za przyczynę zmiennego obciążenia, które może powodować wzbudzenie drgań tych konstrukcji uważa się (podrozdz. 2.1.2) zjawiska quasi-okresowe, związane z odrywaniem się warstwy przyściennej i kształtowaniem się dużych, koherentnych struktur wirowych. Aby nastąpiło oderwanie się warstwy przyściennej, muszą zaistnieć odpowiednie warunki, związane z ciśnieniem w strumieniu potencjalnym przepływu, które powstają w wyniku na przykład zakrzywienia opływanej powierzchni. Gradient ciśnienia, jaki pojawi się na zewnątrz warstwy, będzie decydował o charakterze przepływu w warstwie i o jej oderwaniu.

Oderwanie może mieć charakter spływu warstwy z ostrza, jak w przypadku płata skrzydła, punkt oderwania może być ustalony przez geometrię opływającego ciała (rys. 3.13a) lub jego położenie może się zmieniać, oscylując w określonym obszarze brzegu, jak w przypadku zaokrąglonej krawędzi na rysunku 3.13b.

W przypadku przepływu laminarnego możemy przeprowadzić rozumowanie, które pozwoli na określenia wpływu ciśnienia zewnętrznego na zjawisko oderwania warstwy. Jeśli równanie (3.108) zapiszemy dla brzegu, na którym wektor prędkości jest równy zeru, to wszystkie składniki stojące po lewej stronie znaku równości znikają i otrzymujemy



Rys. 3.13. Oderwanie warstwy w przypadku: a) opływu zasuwy o ostrej krawędzi, b) zaokrąglonej krawędzi

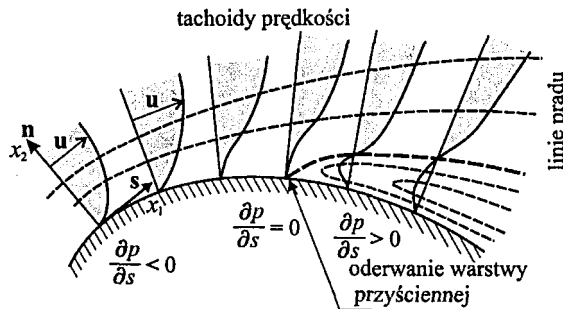
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (3.128)$$

co oznacza, że znak gradientu ciśnienia wpływać będzie na kształt tachoidy prędkości. Podczas spadku ciśnienia w kierunku przepływu kształt tachoidy będzie wypukły, jak przedstawiono na rysunku 3.15. Gdy ciśnienie będzie rosło, spowoduje wyhamowanie cząsteczek cieczy i zmianę kształtu profilu prędkości na wklęsły, co oznaczać będzie, że przy brzegu ruch płynu jest przeciwny do kierunku głównego wektora przepływu i nastąpiło oderwanie warstwy.

Według Prandtla punkt oderwania wyznacza zerowa wartość pierwszej pochodnej prędkości równoległej do brzegu

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0 \quad (3.129)$$

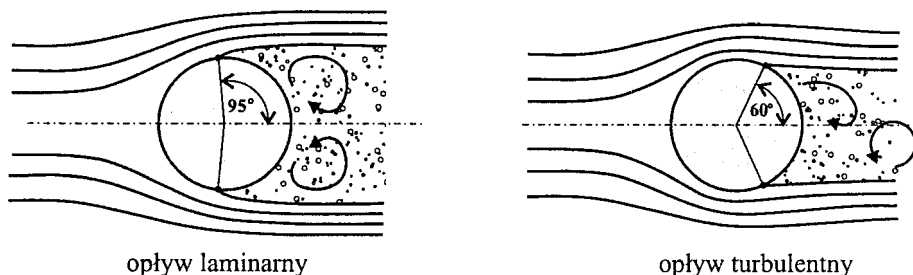
gdzie x_2 jest kierunkiem normalnym do brzegu, co przedstawiono na rysunku 3.14.



Rys. 3.14. Zmiana profilu prędkości w warunkach oderwania warstwy

Jak można zauważyć, punkt oderwania jest początkiem linii prądu, która stanowi granicę, powyżej której w przepływie laminarnym występuje uporządkowany ruch cząstek zgodny z kierunkiem przepływu głównego, a poniżej występuje strefa generowania wirów.

W ruchu turbulentnym zjawisko oddziaływania na warstwę przyścienną gradientu ciśnienia, panującego w głównym strumieniu przepływu, przebiega nieco inaczej. Gradient ujemny prowadzi do laminaryzacji przepływu w warstwie. Gradient dodatni zwiększa możliwość oderwania warstwy, ale równocześnie wskutek silnej wymiany masy i energii między warstwą wewnętrzną i zewnętrzną następuje wzrost naprężeń stycznych, które kompensują malejącą w kierunku od ścianki wartość poprzecznego gradientu prędkości średniej, hamując tendencję do oderwania się warstwy (Elsner, 1987). Najlepszym przykładem działania tego mechanizmu jest przesunięcie punktu oderwania na opływającym walcu z 95° dla $Re \sim 40$ do 60° dla $Re \sim 10^4$, co przedstawiono na rysunku 3.15.



Rys. 3.15. Oderwanie warstwy przyściennej od powierzchni walca dla ruchu laminarnego i turbulentnego

Warstwa przyścienne była i jest nadal przedmiotem licznych badań doświadczalnych nad naturą tworzenia się turbulencji w jej obrębie. Jak wykazały badania, na styku cieczy z brzegiem już w fazie przejścia warstwy laminarnej w turbulentną, generują się silne zawirowania, które następnie są unoszone wraz z przepływem. Na podstawie pomiarów stwierdzono (Elsner, 1987), że struktura generowanej na płaskich ściankach wirowości może być traktowana jako kompozycja wielu linii wirowych o powtarzalnych kształtach podkowiastych, stanowiących początek powstającej z nich struktury koherentnej. Linie wirowe początkowo przemieszczają się w kierunku przepływu i oddalają od ścianki, potem następuje ich oscylacja i rozpad struktury wirowej. To zjawisko zostało wykorzystane w numerycznej metodzie wirów do symulacji przepływu turbulentnego, w postaci procesu generowania wirowości na opływanych brzegach (podrozdział 5.5.3).

4. Przegląd metod przybliżonego rozwiązywania przepływu

Siła hydrodynamiczna może być wyznaczana w sposób przybliżony jako sumaryczna wartość uśrednionego ciśnienia oddziałującego na powierzchnię konstrukcji, wywołanego strumieniem przepływającej cieczy. Podstawą analitycznego lub numerycznego modelowania tej siły mogą być równania hydrauliki lub, dla bardziej złożonych geometrycznie przypadków opływu, równania mechaniki płynów. Pierwsze inżynierskie rozwiązania obciążenia hydrodynamicznego polegały na zastosowaniu uproszczonych metod, bazujących na równaniu Bernoulliego lub równaniu Laplace'a. W latach 70. ubiegłego wieku zaczęto stosować szerzej metody numeryczne różnic skończonych, a następnie elementów skończonych i elementów brzegowych. Zagadnienia opływu były opisywane równaniami Naviera–Stokesa lub Reynoldsa. W tym samym czasie zaczęły rozwijać się nowe metody „siatkowe” – metoda LES (*Large Eddy Simulation*) i równocześnie powstawało coraz więcej prac dotyczących metod „bezsiatkowych”, takich jak metoda bezpośredniego całkowania równań, metoda wirów i metoda wygładzonych cząstek.

Przedstawimy w skrócie wybrane metody uproszczone, z uwagi na to, że są one dalej stosowane, zwłaszcza metoda oparta na założeniu przepływu potencjalnego, opisanego równaniem Laplace'a.

Zaprezentujemy także, w dużym skrócie, podstawowe założenia służące wyznaczeniu przepływu na podstawie równań Naviera–Stokesa i Reynoldsa oraz założenia metody LES. Szczegółowe przedstawienie opisu tych zagadnień i możliwości ich praktycznego wykorzystania stanowiłoby materiał na odrębną obszerną monografię.

Z grupy metod numerycznych, jakie zwykle stosuje się do zagadnienia przepływu, polegających na dyskretyzacji obszaru i aproksymacji rozwiązania za pomocą funkcji próbnych, zostanie zaprezentowana tylko metoda elementów brzegowych ze względu na jej wykorzystanie w niniejszej pracy m.in. do rozwiązywania zagadnienia rozkładu ciśnienia w strumieniu przepływowym.

Celem zawartego w niniejszym rozdziale krótkiego przeglądu różnych metod jest przedstawienie ich właściwości dla porównania i oceny – na ich tle – możliwości, jakie daje obliczanie przepływów metodą wirów.

4.1. Uprozczone metody służące wyznaczaniu obciążeń hydrodynamicznych

4.1.1. Metoda siatki hydrodynamicznej

Podstawą większości metod uproszczonych jest założenie o potencjalnym charakterze przepływu w całym obszarze, z wyjątkiem cienkiej warstwy wzdłuż brzegu, która stanowi turbulentną warstwę przyścienną. Zakładając z pewnym przybliżeniem, że ciśnienie w tej warstwie ma wartość stałą, można wyznaczać rozkład pola prędkości przepływu w całym obszarze do granicy warstwy przyściennej. Zagadnienie takiego przepływu potencjalnego dane jest równaniem harmonicznym w terminach potencjalnej funkcji prądu lub potencjału pola prędkości, z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Szczegółowe przedstawienie tych równań oraz warunków brzegowych zamieszczono w rozdziale 3.1.9.

Na podstawie wyznaczonego w ten sposób pola prędkości określa się ciśnienie na brzegu, które zgodnie z przyjętym założeniem jest równe ciśnieniu na granicy warstwy przyściennej. Rozwiązanie przeprowadza się na podstawie równania Bernoulliego dla linii prądu leżącej wzdłuż brzegu. Do określenia przybliżonej wartości ciśnienia należy przyjąć znaną jego wartość w punkcie początkowym tej linii. Zależnie od geometrii zadania wartością tą może być ciśnienie hydrostatyczne w pewnej odległości od rozpatrywanej konstrukcji lub zero na swobodnej powierzchni. W przeciwnym razie otrzymamy rozwiązanie z dokładnością do stałej addytywnej. Bardzo często do określenia wartości ciśnienia w danym punkcie brzegu stosuje się bezwymiarowy współczynnik ciśnienia, wynikający z równania Bernoulliego, który umożliwia porównywanie różnych rozwiązań, bez względu na rzeczywistą wartość prędkości (Naudascher, 1991)

$$C_p = \frac{2(\bar{p} - \bar{p}_0)}{\rho \bar{u}_0^2} = 1 - \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}_0^2} \quad (4.1)$$

gdzie u – prędkość styczna do linii prądu, p – ciśnienie, kreska nad wielkościami oznacza uśrednienie po czasie, a indeks 0 oznacza wartość w wybranym punkcie referencyjnym.

Ciśnienie można też wyrazić przez jego wysokość piezometryczną

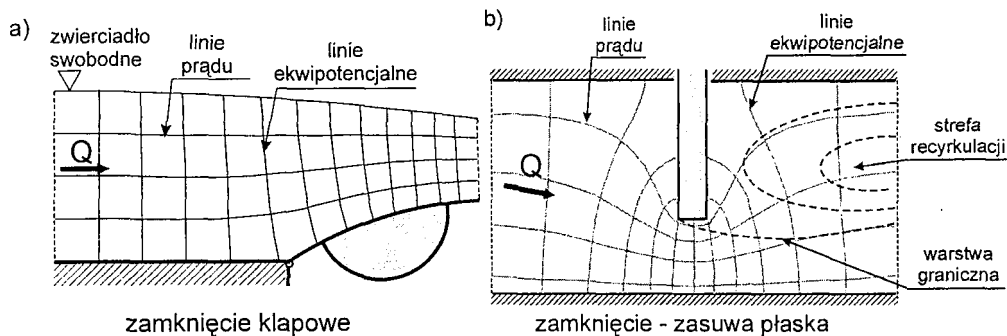
$$C_p = \frac{2g(\bar{h} - \bar{h}_0)}{\bar{u}_0^2} = 1 - \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}_0^2} \quad (4.2)$$

gdzie h – wysokość piezometryczna ciśnienia.

Całkowanie ciśnienia wzdłuż odpowiednich krawędzi pozwala na wyznaczenie składowej poziomej i pionowej siły naporu hydrodynamicznego.

Opisaną metodę można nazwać metodą siatki hydrodynamicznej, pierwsze bowiem rozwiązania polegały na ręcznym rysowaniu siatki składającej się z linii ekwipotencjalnych i linii prądu, i wyznaczaniu na ich podstawie w oczkach siatki wartości prędkości oraz ciśnienia.

Metoda siatki hydrodynamicznej daje wiarygodne wyniki pod warunkiem, że odnosi się ją do przypadków konstrukcji o kształtach łagodnie zmiennych. W innych przypadkach stosowanie teorii przepływów potencjalnych prowadzi do dużego błęd obliczeniowego, zwłaszcza w sytuacji występowania zjawiska odrywania strumienia opływowego od powierzchni zamknięcia i tworzenia się strefy recyrkulacji. Na rysunku 4.1 przedstawiono układ siatki hydrodynamicznej dla konstrukcji, której kształt spełnia warunek łagodnego opływu oraz przykład, gdy za opływana konstrukcją występuje strefa recyrkulacji i takiej metody obliczeń nie powinno się stosować.



Rys. 4.1. Przykład konstrukcji, dla której a) można stosować metodę siatki hydrodynamicznej, b) nie powinno się stosować tej metody

Na podstawie rysunku 4.1 można stwierdzić, że metoda siatki hydrodynamicznej nie modeluje przepływów z recyrkulacją. Mimo to powstało wiele prac, w których autorzy próbowali wyznaczać parametry przepływu i ciśnienia tą metodą dla różnych rodzajów zamknięć hydrotechnicznych. Jedną z pierwszych jest praca Frangmeier i Strelkoff (1968), w której autorzy zaproponowali metodę wyznaczenia przepływu w funkcji potencjału prędkości i funkcji prądu. Oryginalność metody polegała na przekształceniu konforemny obszaru obliczeniowego do postaci okręgu i sformułowanie zagadnienia w postaci równania różniczkowego nieliniowego, które rozwiązywane

było metodą iteracyjną. Podobną, opartą na przekształceniu konforemnym, metodę dla zamknięcia zasuwowego, dowolnie pochylonego względem pionu, zaproponował Larock (1969), który poszukiwał rozwiązania w półprzestrzeni. Larock (1970) podał także rozwiązanie zagadnienia opływu zamknięcia segmentowego, korzystając z tych samych założeń jak dla zasuwu oraz wykonał obliczenia rozkładu ciśnienia na powierzchni zamknięcia, wychodząc z równania Bernoulliego. Ponieważ opisane metody opierają się również na równaniu przepływu potencjalnego, strefa recyrkulacji nie jest symulowana i pozostaje w mocy zastrzeżenie nie odzwierciedlania fizyki zjawiska opływu.

Przedstawimy jeszcze jedno rozwiązanie, którego autorem jest Narayanan (1972) i które stanowi analityczne rozwiązanie zagadnienia recyrkulacji przepływu za zamknięciem zasuwowym. Swoje rozwiązanie Narayanan oparł na równaniu Reynoldsa z tensorem naprężeń turbulentnych proporcjonalnym do iloczynu prędkości średniej, prędkości odkształcenia postaciowego (por. 3.3.2) i współczynnika wynikającego z długości strefy recyrkulacji. Rozważając równoważne zagadnienie dwuwymiarowego wypływu strumienia do kanału o stałej szerokości, autor wyprowadził analityczną postać równań zachowania pędu i masy dla takiego przypadku przepływu, uzupełnionych empiryczną formułą rozkładu ciśnienia na szerokości kanału. Otrzymane wyniki są zgodne z eksperymentem, jednak stosowalność metody jest mocno ograniczona przez konieczność znajomości danych eksperymentalnych w celu poprawnego przyjęcia niezbędnych współczynników.

Do stosunkowo prostych metod, za pomocą których można wyznaczać siłę ssącą (ang. *downpull*), należy zaliczyć metodę opartą na zmianie strumienia pędu, w której wyznacza się globalną wartość siły hydrodynamicznej, jednak do jej wyznaczenia potrzebna jest znajomość pola prędkości. Aydin i inni (2006) opracował model do wyznaczenia siły ssącej – działającej w kierunku siły grawitacyjnej na dolną krawędź zasuwu. Opracowany model jest jednowymiarowy, oparty na równaniu bilansu całkowitej energii i bilansu masy i uwzględnia również przypadek ruchu zamknięcia (zamykania i otwierania). Na podstawie badań na modelu fizycznym autor wykazał, że opracowany model numeryczny daje dobre przybliżenie siły hydrodynamicznej, znacznie dokładniejsze od wyników uzyskiwanych przez Naudaschera (1991) na podstawie siatki hydrodynamicznej. Jednak metoda ta również nie może być stosowana, jeśli krawędź zamknięcia znajdzie się w zasięgu strefy recyrkulacji.

Metodę uproszczoną dla wyznaczenia obciążenia hydrodynamicznego zamknięcia klapowego zastosował Grčić (1963), który ciśnienie wyznaczał z równania Bernoulliego, na podstawie rozkładu prędkości, któremu nadawał postać funkcji liniowej, oraz Winter (1982) oraz Rogala i Winter (1983), którzy na podstawie badań modelowych wyprowadzili empiryczną formułę, pozwalającą oszacować obciążenie hydrodynamiczne klap na podstawie geometrii zamknięcia i parametrów przepływu. Stosuje się tu także klasyczną metodę siatki hydrodynamicznej (Naudascher, 1991).

W ostatnich latach pojawiły się liczne prace dotyczące dokładniejszego, niż za pomocą siatki hydrodynamicznej, rozwiązania omawianych zagadnień, a mianowicie polegające na wyznaczaniu parametrów przepływu metodami wykorzystującymi przestrzenną dyskretyzację obszaru przepływu dla cieczy lepkiej nieściślej.

4.2. Uwagi ogólne do stosowania metod „siatkowych”

Do modelowania przepływu cieczy Newtona (opisanej równaniem Naviera–Stokeisa) przy złożonej geometrii rozpatrywanej przestrzeni wykorzystywane są metody numeryczne. Najbardziej rozpowszechnione – metoda różnic skończonych, elementów skończonych, lub elementów brzegowych – posługują się dyskretyzacją obszaru jako narzędziem aproksymacji, która sprowadza układ równań różniczkowych (lub całkowych) do układu równań algebraicznych.

Rozpatrując przypadek przepływu turbulentnego, należy zauważyć, że wymagania dotyczące wielkości oczka siatki są tutaj istotnym ograniczeniem, gdyż powinny zapewniać odwzorowanie wszystkich, występujących w takim przepływie skal wirów. Stanowi to problem natury technicznej, do tak bowiem dokładnego odwzorowania, choćby najprostszego przykładu przepływu, potrzebna jest olbrzymia moc komputerów. Do zilustrowania tego problemu przyjmijmy, że wymiar makroskopowy problemu jest równy długości kanału L , w którym modelowany jest opływ zamknięcia hydrotechnicznego i wynosi dla przykładu 10 m. Wymiar oczka siatki nie może być większy niż wymiar wirów najmniejszych – dyssypatywnych, w których następuje utrata energii kinetycznej.

Zgodnie ze skalą Kołmogorowa wymiar ten można oszacować za pomocą relacji (Landau i Lifszyc, 1994)

$$\eta_d = \frac{l}{\text{Re}^{3/4}} \quad (4.3)$$

gdzie η_d – wymiar wirów dyssypatywnych, l – charakterystyczny wymiar makroskopowy turbulencji, porównywalny z wymiarami kanału, w którym odbywa się przepływ, Re – liczba Reynoldsa.

Relacja (4.3) oznacza, że im większa jest liczba Reynoldsa, tym większa jest różnica (iloraz) między skalami makro i mikro. Liczba Reynoldsa dla przepływu pod zamknięciem zamyka się w granicach $10^5 \div 10^6$. Podstawmy teraz do wzoru (4.3) wartość $\text{Re} = 10^5$ oraz wartość l , którą w naszych rozważaniach powinna być długość strefy recyrkulacji i którą przyjmijmy równą $l = 1$ m. Ze wzoru (4.3) otrzymamy $\eta_d \approx 2 \cdot 10^{-4}$ m. Zakładając teraz, że oczko siatki ma być dwa razy mniejsze niż η_d , tzn. $h = 0,0001$, oraz że wymiary kanału są $H = 1$ m i $L = 10$ m, szacujemy liczbę oczek

siatki na 10^9 dla zagadnienia dwuwymiarowego, co odpowiada w przybliżeniu liczbie równań algebraicznych. Liczba ta przekracza możliwości obliczeniowe współczesnych komputerów. Oszacujmy jeszcze liczbę kroków czasowych, potrzebnych do wyciągnięcia statystycznych wniosków z naszych symulacji numerycznych. Krok czasowy powinien być na tyle mały, aby przemieszczenie cząstki cieczy w jednym kroku czasowym nie przekraczało długości oczka siatki. Stąd

$$\Delta t \leq \frac{h}{\bar{u}} \quad (4.4)$$

gdzie \bar{u} jest uśrednioną prędkością przepływu (por. 3.3.2).

Po uwzględnieniu (4.3) mamy

$$\Delta t \leq \frac{2\eta_d}{\bar{u}} = \frac{2l}{\bar{u} \text{Re}^{3/4}} = \frac{2t_l}{\text{Re}^{3/4}} \quad (4.5)$$

gdzie t_l oznacza czas potrzebny cząstce cieczy na przepłynięcie odległości l .

Stąd oszacowanie liczby kroków czasowych wynosi

$$N_t = \frac{t_l}{\Delta t} \geq 0,5 \text{Re}^{3/4} \quad (4.6)$$

Przyjmując dalej, że całkowity czas obliczeń powinien obejmować czas przynajmniej 100-krotnie dłuższy niż wyznaczony z (4.6), aby można było dokonać statystycznej analizy wyników oraz że liczba Reynoldsa wynosi jak poprzednio $\text{Re} = 10^5$, otrzymamy potrzebną wartość $N_t \approx 280 \cdot 10^3$. Rozważania są dowodem, że w obecnej chwili nie ma możliwości technicznych bezpośredniego rozwiązywania równań Naviera–Stokesa dla przepływu turbulentnego w zagadnieniach inżynierskich. Ponadto nie do końca zbadana jest natura samej turbulencji, zwłaszcza zjawiska dyssypacji energii przez wiry najmniejsze. Stąd wniosek, że bezpośrednio rozwiązywanie równań Naviera–Stokesa, tzw. DNS (*Direct Numerical Simulation*) metodami siatkowymi może dotyczyć tylko przepływów laminarnych, dla małych liczb Reynoldsa, ewentualnie dla symulacji bardzo prostych geometrycznie zagadnień przepływów turbulentnych i najlepiej przy założeniu jednorodnej turbulencji.

Do wyznaczania przepływów turbulentnych w zagadnieniach inżynierskich stosuje się uśrednione równania Reynoldsa, tzw. metodę RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) lub wspomnianą wcześniej metodę LES, która jest połączeniem technik bezpośredniego rozwiązania równań Naviera–Stokesa w skali dużych wirów i równań Reynoldsa w skali wirów dyssypatywnych.

W kolejnych punktach tego rozdziału przedstawimy zasady rozwiązania zagadnienia przepływu laminarnego na podstawie DNS oraz turbulentnego z wykorzystaniem metody RANS i LES.

4.2.1. Bezpośrednie rozwiązanie równań Naviera–Stokesa (DNS)

Jak wspomniano w poprzednim punkcie rozwiązanie to dotyczy prawie wyłącznie przepływów laminarnych. W modelowaniu przepływu nieściśliwej cieczy newtonowskiej, który opisany jest równaniem Naviera–Stokesa oraz równaniem zachowania masy stosuje się zwykle dwa podejścia. Pierwsze polega na rozwiązaniu układu równań dla prędkości i ciśnienia, drugie dla funkcji prądu i wirowości. W celu przedstawienia obu sposobów będziemy rozważać przepływ płaski w obszarze $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ograniczonym brzegiem Γ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \text{w obszarze } \Omega \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.8)$$

Ogólne sformułowanie problemu brzegowo-początkowego przedstawia się jako

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_b, \quad \text{na brzegu } \Gamma_D \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{q}_b, \quad \text{na brzegu } \Gamma_N \quad (4.10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \text{dla } t=0 \quad (4.11)$$

gdzie \mathbf{u} – wektor prędkości, $P = p/\rho$ – ciśnienie kinematyczne, ν – współczynnik lepkości kinematycznej, Γ_D i Γ_N – odcinki brzegu, na których spełniony jest warunek Dirichleta i Neumanna i $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ oraz $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

Rolą ciśnienia w przedstawionym układzie równań jest zapewnianie zerowej dywergencji pola prędkości. W zależności od numerycznej metody rozwiązywania zagadnienia (4.7)–(4.11) istnieją różne procedury iteracyjne wymuszające spełnienie warunku (4.8) przez lokalną zmianę ciśnienia. Przykładem może być tu metoda lokalnych korekcji (Gryboś, 1998; Strzelecki i inni, 1997) lub metoda sztucznej gęstości (Anderson i inni, 1984). Istotą tych metod jest rozwiązanie zagadnienia Poissona dla ciśnienia, którego postać zależy od przyjętej metody. Zwykle formułuje się równanie Poissona przez zastosowanie operatora dywergencji do równania (4.7)

$$\nabla^2 P = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \quad (4.12)$$

Zauważmy, że jeżeli skorzystamy z tożsamości matematycznej $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$, równania (4.8) oraz faktu, że dywergencja rotacji dowolnego pola wektorowego znika, to pierwszy i ostatni składnik w nawiasie po prawej stronie równania (4.12) będzie równy zeru i równanie (4.12) ulegnie znacznemu uproszczeniu

$$\nabla^2 P = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \quad (4.13)$$

Równanie (4.13) razem z równaniem (4.7) stanowią układ równań, który bywa często stosowany do rozwiązania zagadnienia przepływu cieczy lepkiej. Jednak, jak podaje Gresho (1987), w rozwiązaniach numerycznych takie podejście obarczone jest większym błędem obliczeniowym, niż gdy rozwiązywany jest układ składający się z równań (4.7) i (4.12).

Równanie Poissona musi być, dla brzegu stacjonarnego, uzupełnione warunkiem brzegowym adhezji (brzeg nie jest śliski), który w tym przypadku stanowi warunek Neumanna dla prędkości

$$-P + \nu \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, \quad \text{dla } \Gamma_N \quad (4.14)$$

gdzie \mathbf{n} – wektor normalny do brzegu skierowany na zewnątrz (Ni, 1995, 1998).

Jeśli znane są wartości ciśnienia w obszarze (na przykład na wlocie rozkład hydrostatyczny ciśnienia, ciśnienie atmosferyczne dla zwierciadła swobodnego), to należy przyjąć dodatkowy warunek Dirichleta. Według innych autorów (Gresho, 1987; Petersson, 2001) należy stosować bardziej złożone formuły warunków brzegowych, których tu nie przytaczamy, a które wynikają wprost z równania Naviera–Stokesa. Sposób budowy odpowiednich schematów różnicowych przedstawiono w licznych pracach, m.in. przez Andersona (1984), Grybosia (1998), Matykę (2002) i autora niniejszej monografii w pracy (Strzelecki i inni, 2007).

Drugie wspomniane podejście rozwiązania zagadnienia przepływu polega na rozwiązaniu układu równań Helmholtza dla zmiennych wirowości i funkcji prądu. Układ ten wyprowadza się przez zastosowanie rotacji do równania Naviera–Stokesa, co prowadzi do następującego zagadnienia dwuwymiarowego (podrozdz. 5.2)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (4.15)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (4.16)$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi \quad (4.18)$$

Układ tych równań musi być uzupełniony warunkiem początkowym

$$\omega|_{t=0} = \omega_0, \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad (4.19)$$

oraz warunkami brzegowymi. Zgodnie z podrozdziałem 3.1.8 warunki brzegowe mogą być przyjęte w postaci znanej wartości wektora prędkości na brzegu

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_b, \text{ dla } \mathbf{x} \in \Gamma, t > 0 \quad (4.20)$$

Rozwiązanie układu równań (4.15)–(4.20) najprościej jest poszukiwać metodą iteracyjną według schematu (Anderson, 1984):

- w pierwszym kroku dla $t=0$ zakłada się pole wirowości i pole prędkości lub funkcję prądu,
- wyznacza się nowe pole wirowości z równania (4.15) dla czasu $t + \Delta t$,
- wyznacza się funkcję prądu z równania Poissona (4.16),
- wyznacza się pole prędkości z równania (4.18),
- jeśli warunek brzegowy nie jest spełniony, wyznacza się wartości wirowości na brzegach i powtarza procedurę obliczeń od wyznaczenia się nowego pola wirowości.

Po uzyskaniu zbieżności rozwiązania można wyznaczyć ciśnienie z równania Poissona (4.12). Jeśli interesuje nas ciśnienie wyłącznie na brzegach, na których prędkość znika, to na podstawie równania (4.7) możemy wyprowadzić zależność

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial P}{\partial s} \quad (4.21)$$

Jeśli dysponujemy polem wirowości, to po zastosowaniu przedstawionej w Dodatku D tożsamości (9.27) dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial P}{\partial s} \quad (4.22)$$

Na jej podstawie można wyznaczyć ciśnienie wzdłuż brzegów obszaru, jeśli znamy jego wartość choć w jednym punkcie. Jeśli tym nie dysponujemy, to ciśnienie wyznaczymy z dokładnością do stałej addytywnej. Jeśli chcemy wyznaczyć naprężenia na brzegu, to są one proporcjonalne do wirowości na tym brzegu (Cottet i Koumoutsakos, 2000)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = -\mu \mathbf{n} \times \omega \quad (4.23)$$

gdzie \mathbf{T} jest tensorem naprężeń (3.34), μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, \mathbf{n} jest wektorem normalnym, zewnętrznym do brzegu.

Szersze omówienie wykorzystania metody różnic skończonych do analizy przepływu cieczy lepkiej nieściśliwej można znaleźć m.in. w pracach Anderson i inni (1984), Gryboś, (1998), Strzelecki i inni (2007). Zastosowanie metody elementów skończonych do tych problemów zostało opisane m.in. w monografiach Zienkiewicza (1978), Grybosia (1998), Oñate (1991), a metody elementów brzegowych na przykład w monografiach Beskos (1987) i Wrobel (1984).

4.2.2. Rozwiązanie uśrednionych równań Reynoldsa (RANS)

Postać uśrednionych względem czasu równań Naviera–Stokesa, znanych pod nazwą równań Reynoldsa, została wyprowadzona w punkcie 3.3.2. i jest ona następująca

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho (\bar{\mathbf{u}} \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) + \mathbf{f} \quad (4.24)$$

gdzie $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{p} są uśrednionymi zgodnie z równaniem (3.112) wartościami prędkości i ciśnienia, $\overline{\rho \mathbf{u}'\mathbf{u}'}$ jest tensorem Reynoldsa danym relacją (3.118).

Jak wspomniano w punkcie 3.3.2, sześć nowych składowych wektora naprężeń turbulentnych wymaga związków konstytutywnych wiążących ten tensor z tensorem prędkości odkształcenia w celu otrzymania zamkniętego układu równań. Związki te przybliża się specjalnie skonstruowanym modelem turbulencji. W miarę rozwoju tej dyscypliny nauki powstawało wiele różnych modeli, które można sklasyfikować jako zerorównaniowe (algebraiczne), jedno- i wielorównaniowe, a ich szczegółowy opis przedstawili w swych pracach Elsner (1987), Gatski i inni (1996), Puzyrewski i Sawicki (1998), Gryboś (1998). Przedstawicielem grupy modeli dwurównaniowych, najczęściej stosowanym w obliczeniach inżynierskich, jest model transportu i dyssypacji energii kinetycznej przepływu nazywany $K - \varepsilon$. Model ten opisuje przepływ cieczy nieściśliwej o izotropowej turbulencji i stosunkowo dużej liczbie Reynoldsa. Model $K - \varepsilon$ jest dany następującym układem równań (Gatski i inni, 1996)

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla K = \wp - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = C_{\varepsilon 1}^* \frac{\varepsilon}{K} \wp - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (4.26)$$

gdzie $\wp \equiv -T_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ – tensor opisujący produkcję turbulencji, $K = \bar{q}^2/2$ – kinetyczna

energia turbulencji, q – przepływ jednostkowy, $\varepsilon \equiv \overline{\frac{\partial u_i \partial u_i}{\partial x_j \partial x_j}}$ – prędkość dyssypacji

energii, v_T – współczynnik lepkości turbulentnej (*eddy viscosity*), który zależy od przyjętego modelu turbulencji.

Dla modelu $K - \varepsilon$ przyjmuje się go często w postaci zaproponowanej przez Smagorinskiego (Gatski i inni, 1996) $v_T = l^2 (2\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij})^{1/2}$, gdzie $\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ jest uśrednionym tensorem prędkości odkształcenia postaciowego. W równaniu występują

jeszcze współczynniki, które zwykle wyrażone są dość złożonymi relacjami. Jednak dla przyjętych założeń izotropowej turbulencji można przyjąć następujące ich wartości (Gatski i inni, 1996)

$$C_{\varepsilon_1}^* = 1,4, \quad C_{\varepsilon_2} = 1,83, \quad \sigma_k = 1,0, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

Jak widać ze skrótowego przedstawienia, model $K - \varepsilon$ ma charakter półempiryczny i jego zastosowanie wymaga przyjęcia odpowiednich współczynników, odpowiadających fizyce badanego zjawiska, a obliczenia inżynierskie muszą być potwierdzone testami weryfikującymi przydatność przyjętych stałych do rozpatrywanego zagadnienia przepływu. Według badań przeprowadzonych przez Gatski i inni (1996) model dwurównaniowy dobrze symulował przypadek przepływu turbulentnego w kanale prostokątnym, ale już w przypadku ruchu obrotowego cieczy otrzymywano mniej dokładne wyniki, a całkiem błędne dla przepływu ze strefą recyrkulacji.

Autorzy tej pracy stwierdzili, że „piętą Achillesową” takich modeli turbulencji jest przepływ w bliskości brzegu, trzeba bowiem wprowadzać wiele dodatkowych relacji między ciśnieniem a naprężeniem, aby uzyskać rozwiązanie dla warstwy przyściennej. Podobnie nie należy oczekiwać poprawnych wyników dla przepływu w obszarze o skomplikowanej geometrii. Pod tym względem dużo dokładniejsze wyniki otrzymuje się przy zastosowaniu metody LES.

4.3.2. Metoda LES

Metoda LES jest uważana za bardziej dokładną, rozwiązuje się bowiem za jej pomocą zagadnienie przepływu dla dwóch skal turbulencji niezależnie. Wielkości fizyczne, takie jak prędkość i ciśnienie, odpowiadające skali dużych wirów są wyznaczone metodą deterministyczną, bezpośrednio z równań Naviera–Stokesa. Skala wirów małych, tak zwana „podsiatkowa”, jest modelowana w podobny sposób jak uśrednianie równań do postaci Reynoldsa. Rozdzielenie skal następuje w procesie filtrowania, które można dla jednej składowej wektora prędkości zdefiniować następująco

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.27)$$

gdzie $G(x, x')$ – jądro filtru, które może być wyrażone na przykład jako funkcja rozkładu normalnego lub funkcja „kapeluszkowa” (Gatski i inni, 1996).

Po zastosowaniu procedury uśredniania do równań Naviera–Stokesa otrzymujemy

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (4.28)$$

gdzie $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ – tensor naprężeń Reynoldsa skali podsiatkowej.

Różnica między rozwiązaniem LES a rozwiązaniem równań Reynoldsa polega na innym podejściu fizycznym do tych modeli. W rozwiązaniu LES skala podsiatkowa obejmuje część przepływu o stosunkowo niewielkim udziale energii, stanowiącym jak podaje literatura (Gatski i inni, 1996), 20–30% całkowitej energii turbulencji. Pozostała część przepływu, czyli 70–80% jest rozwiązywana bezpośrednio z równań Naviera–Stokesa, czyli dokładniej. W metodzie Reynoldsa uśrednienie dotyczy 100% przepływu i stąd błąd rozwiązania jest w tej metodzie większy niż w LES.

Modelowanie turbulencji podsiatkowej jest problemem podobnym do tego, który występuje dla tensora naprężeń turbulentnych Reynoldsa, lecz prowadzącym do bardziej złożonej fizyki zjawiska turbulencji. Stosując podobną dekompozycję pola prędkości jak dla uśredniania równań Reynoldsa

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (4.29)$$

otrzymujemy dla skali podsiatkowej w procesie filtrowania (Gatski i inni, 1996)

$$\tau_{ij} = \left(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \right) + \left(\overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{\bar{u}_j u_i'} \right) + \overline{u_i' u_j'} \quad (4.30)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie oznacza oddziaływanie między składowymi prędkości w dużej skali (oddzielonych od skal drobnych w wyniku filtrowania), które prowadzi do powstania turbulencji małoskalowej. Składnik drugi reprezentuje interakcje między skalą dużych i małych wirów oraz przekazywanie energii w obie strony. Składnik trzeci oznacza oddziaływanie wirów w skali małej i transport energii do skali dużych wirów.

Tensor naprężenia w skali podsiatkowej τ_{ij} określa się za pomocą modelowania turbulencji. Istnieją różne klasy modeli – lepkościowe, mieszane i dynamiczne, których opis można znaleźć w licznych pracach (Domaradzki, 2002; Gatski i inni, 1996; Pope, 2000). Przedstawimy tu jeden z pierwszych modeli lepkościowych, noszący nazwę „modelu Smagorinkiego” (Gatski i inni, 1996). Zaletą modelu Smagorinkiego jest jego prostota i dlatego jest on obecnie powszechnie stosowany w obliczeniach inżynierskich. Tensor naprężeń dla skali podsiatkowej w tym modelu wyrażony jest relacją

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = -2\nu_T \bar{D}_{ij} \quad (4.31)$$

$$\nu_T = (C_s \Delta)^2 |\bar{\mathbf{D}}|, \quad |\bar{\mathbf{D}}| = \sqrt{\bar{D}_{ij} \cdot \bar{D}_{ij}} \quad (4.32)$$

gdzie Δ – charakterystyczny wymiar odpowiadający długości największych wirów podsiatkowych, C_s – parametr, którego wartość zależy od modelowanego zadania – w obliczeniach z izotropową turbulencją zwykle przyjmuje się $C_s = 0,2$.

Prezentowany model ma wiele ograniczeń, m.in. w bliskości brzegu otrzymane wartości v_T są zbyt duże, nie uwzględniany jest bowiem wpływ tłumiącego działania brzegu (Gatski i inni, 1996). Wymusza to stosowanie wielu modyfikacji lub modeli należących do innej klasy. Obecnie często stosuje się hybrydową metodę polegającą na połączeniu rozwiązania LES w całym obszarze przepływu z rozwiązaniem równań Reynoldsa do obszaru brzegowego (Krajnović i Davidson, 2002).

Alternatywą dla metody opartej na rozwiązaniu równania Reynoldsa i LES jest stosowanie opisanych dalej metod, które nie wymagają siatki numerycznej.

4.2.4. Metoda elementów brzegowych

Punktem wyjścia metody elementów brzegowych MEB, zastosowanej do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania zagadnienia brzegowego do równania lub układu równań różniczkowych w obszarze D , jest sprowadzenie wyjściowego problemu do równania lub układu równań całkowych określonych na brzegu S obszaru D . Ponieważ rozwiązanie w sposób analityczny takich równań jest możliwe jedynie w szczególnych sytuacjach, rozwiązuje się je w sposób przybliżony. Najczęściej stosuje się tu metody przybliżone oparte na kombinacji metody elementów skończonych i metody kolokacji. Proces dyskretyzacji równania lub układu równań całkowych rozpoczyna się od podziału brzegu (jest on krzywą) na elementy zwane elementami brzegowymi. Dane i poszukiwane funkcje określone na brzegu, przybliża się kombinacjami liniowymi odpowiednio wybranych bazowych funkcji aproksymujących. Następnie właściwe zagadnienie przybliżone formułuje się jak w metodzie kolokacji, rozważając aproksymowane równanie lub układ równań całkowych w węzłach podziału brzegu. W rezultacie otrzymuje się układ liniowych równań algebraicznych, w którym niewiadomymi są współczynniki aproksymacji rozwiązania. Układ tych równań liniowych jest następnie rozwiązywany za pomocą standardowych procedur numerycznych. Opis zastosowania metody elementów brzegowych do różnych zagadnień hydromechaniki i hydrauliki można znaleźć w bogatej literaturze. Najbardziej znane monografie MEB opracowali Brebbia (1980), Beskos (1987), Wrobel (1984), Burczyński (1995), Gaul i inni (2003), Ali i Rajakumar (2004). Pojawiło się też kilka prac dotyczących rozwiązania tą metodą zagadnienia przepływu zadanego równaniem Stokesa lub Naviera–Stokesa oraz zagadnienia ciśnienia (Meric, 1997; Sarler i Kuhn, 1999; Florez i Power, 2001).

W niniejszej pracy metoda elementów brzegowych MEB została zastosowana do rozwiązania dwóch zagadnień – wyznaczenia pomocniczego potencjalnego pola prędkości, niezbędnego w sformułowaniu odpowiedniego warunku brzegowego w metodzie wirów (rozd. 5) oraz do określenia ciśnienia z równania Poissona (rozd. 6). W obu przypadkach zastosowano ten sam schemat rozwiązania, który przedstawiono na przykładzie rozwiązania zagadnienia potencjału.

Będziemy poszukiwać rozwiązania zagadnienia potencjału w obszarze ograniczonym D o gładkim brzegu S . Zagadnienie to jest opisane równaniem harmonicznym Laplace'a i warunkami brzegowymi

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (4.33)$$

- na części brzegu S_D (warunek brzegowy typu Dirichleta)

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad (4.34)$$

- na części brzegu S_N (warunek brzegowy typu Neumanna)

$$q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = q_0, \quad (4.35)$$

gdzie u – potencjał, $q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ – strumień (gradient pola) w kierunku prostopadłym do brzegu S , $S = S_D \cup S_N$ stanowi cały brzeg obszaru i $S_D \cap S_N = \emptyset$, \mathbf{n} – wektor jednostkowy normalny do brzegu.

Formułowanie równań całkowych dla zagadnienia brzegowego (4.33)–(4.35) zaczynamy od rozpatrzenia tożsamości Greena

$$\int_D (w \nabla^2 u - u \nabla^2 w) dD = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w - u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \quad (4.36)$$

gdzie dowolne funkcje u i w są dwukrotnie różniczkowalne w obszarze D . Tożsamość ta ma również uogólnienia na przypadek mniej regularnych funkcji, a nawet dystrybucji. Dalej będziemy stosować ją w tym ogólniejszym sensie.

Jeżeli w miejsce w podstawimy rozwiązanie fundamentalne równania Laplace'a

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 u^*(\mathbf{x}, \xi) = -\delta(\mathbf{x}, \xi), \quad \xi \in D, \quad (4.37)$$

dalej oznaczane jako $u^*(\mathbf{x}, \xi)$, to otrzymamy

$$\int_D (u^*(\mathbf{x}, \xi) \nabla^2 u - u \nabla_{\mathbf{x}}^2 u^*(\mathbf{x}, \xi)) dD = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u^*(\mathbf{x}, \xi) - u \frac{\partial u^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS(\mathbf{x}) \quad (4.38)$$

gdzie $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$.

Korzystając następnie ze znanej właściwości dystrybucji Diraca

$$f(\mathbf{x}) * \delta(\mathbf{x}, \xi) = \int_{R^2} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}, \xi) dx = f(\xi) \quad (4.39)$$

i używając konsekwentnie oznaczeń $q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ i $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}}$ znajdujemy relację między wartością funkcji $u(\xi)$ w obszarze D , a wartością tej funkcji i jej pochodnej na brzegu S

$$u(\xi) + \int_S q^*(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_S u^*(\mathbf{x}, \xi) q(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \xi \in D \quad (4.40)$$

Należy zaznaczyć, że w przypadku dwuwymiarowym, który nas najbardziej interesuje, rozwiązanie podstawowe i jego pochodna normalna wyrażają się następująco

$$u^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad q^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi r^2} (\mathbf{x} - \xi) \cdot \mathbf{n}, \quad r = |\mathbf{x} - \xi|$$

Wyznaczenie rozwiązania przybliżonego zagadnienia (4.33)–(4.35) przebiega w trzech etapach.

Etap I. Zaczynamy od sformułowania odpowiedniego zagadnienia brzegowego. W tym celu w relacji (3.40), wyprowadzonej dla punktów ξ leżących wewnątrz obszaru D dokonujemy przejścia granicznego $\xi \rightarrow S$. Ponieważ obie funkcje u^* i q^* są osobliwe, musimy zwrócić większą uwagę na zachowanie się całek przy przejściu granicznym. Funkcja u^* jest słabo osobliwa, więc druga z całek nie sprawia żadnych kłopotów. Natomiast rząd osobliwości funkcji q^* jest wyższy i wówczas otrzymujemy (Gaul, 2003)

$$\int_S q^*(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \rightarrow -\frac{1}{2} u(\xi) + \int_S q^*(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \text{gdy } \xi \rightarrow S$$

Ostatecznie po dokonaniu przejścia granicznego we wzorze (4.40) otrzymujemy relację

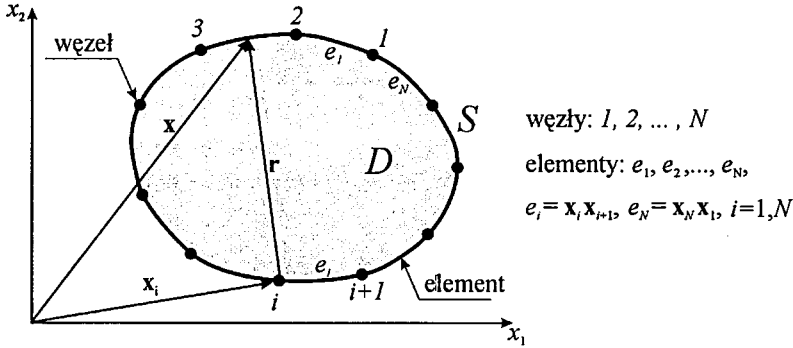
$$c \cdot u(\xi) + \int_S q^*(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_S u^*(\mathbf{x}, \xi) q(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \xi \in S \quad (4.41)$$

gdzie $c = \frac{1}{2}$.

Etap II. Zależność (4.41) traktujemy jako równanie całkowe, z którego należy wyznaczyć nieznanne wartości brzegowe funkcji $u(\xi)$, $\xi \in S_D$ i jej pochodnej normalnej do brzegu $q(\xi)$, $\xi \in S_N$ na podstawie wartości znanych, wynikających z warunku brzegowego (4.34) i (4.35).

Ponieważ analityczne rozwiązanie równania całkowego (4.41), poza bardzo szczególnie prostymi przypadkami jest niemożliwe, do wyznaczenia więc poszukiwanych wartości brzegowych będziemy stosować metodę przybliżoną. Wykorzystamy do tego celu idee zapożyczone z metody elementów skończonych i metody kolokacji.

Zacznijmy od podziału brzegu obszaru na skończone elementy za pomocą punktów, które oznaczać będziemy jak przedstawiono na rysunku 4.2.

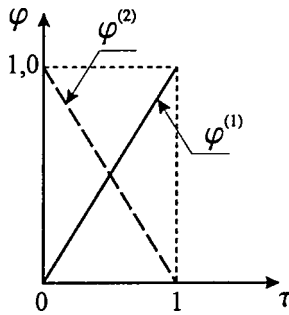


Rys. 4.2. Podział brzegu obszaru na elementy skończone

Podstawę aproksymacji funkcji brzegowych stanowią funkcje próbne, które w bieżącym węźle osiągają wartość jeden, a w pozostałych węzłach zero. W niniejszej pracy wybrano funkcje liniowe. Ich konstrukcja, przedstawiona na rysunku 4.3, polega na przyjęciu odcinka $e = [0, 1]$ jako wzorcowego elementu skończonego i wzorcowych funkcji próbnych w postaci

$$\varphi^{(1)}(\tau) = \tau, \quad \varphi^{(2)}(\tau) = 1 - \tau, \quad \tau \in [0, 1]$$

określających wzorcowy element skończony $(e, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$.

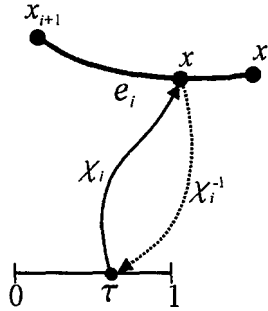


Rys. 4.3. Wzorcowe funkcje próbne

Funkcje próbne należy związać z elementem $e_i, i=1, \dots, N$. W tym celu wybieramy jedną z możliwych parametryzacji elementu e_i , stanowiącą odwzorowanie (gładkie, różnowartościowe), którego schemat przedstawia rysunek 4.4

$$\chi_i : [0, 1] \rightarrow e_i, \quad \chi_i^{-1} : e_i \rightarrow [0, 1]$$

gdzie χ_i^{-1} jest odwzorowaniem odwrotnym.



Rys. 4.4. Parametryzacja elementu brzegowego

Za funkcje próbne związane z elementem e_i przyjmujemy

$$\varphi_i^{(1)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(1)} \circ \chi_i^{-1}(\mathbf{x}), \quad \varphi_i^{(2)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(2)} \circ \chi_i^{-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in e_i \quad (4.42)$$

gdzie symbol „ \circ ” oznacza złożenie funkcji, otrzymując w ten sposób w pełni określone elementy brzegowe $(e_i, \varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)})$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Za przestrzeń V_h funkcji aproksymujących, określonych na całym brzegu S przyjęto ciągłe funkcje będące kombinacjami liniowymi funkcji próbnych związanych z elementami brzegowymi

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \quad (4.43)$$

W tym zapisie zastosowano konwencję $\varphi_i^{(1)}(\mathbf{x}) = \varphi_i^{(2)}(\mathbf{x}) = 0$ dla $\mathbf{x} \notin e_i$. Aby zapewnić ciągłość funkcji $v_h(\mathbf{x})$ współczynniki $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)})$ muszą spełniać warunki zgodności wynikające z równości

$$v_h(\mathbf{x}_i) = v_h(\mathbf{x}_i -) = v_h(\mathbf{x}_i +) \quad (4.44)$$

gdzie $v_h(\mathbf{x}_i -)$ i $v_h(\mathbf{x}_i +)$ oznaczają odpowiednio lewostronną i prawostronną granicę $v_h(\mathbf{x})$ w punkcie \mathbf{x}_i .

Prowadzi to do relacji

$$\begin{aligned} v_h(\mathbf{x}_i) &= \alpha_{i-1}^{(2)} = \alpha_i^{(1)}, \quad i = 2, \dots, N, \\ v_h(\mathbf{x}_1) &= \alpha_N^{(2)} = \alpha_1^{(1)}, \quad v_h(\mathbf{x}_i) = \alpha_{i-1}^{(2)} = \alpha_i^{(1)}, \quad i = 2, \dots, N, \\ v_h(\mathbf{x}_1) &= \alpha_N^{(2)} = \alpha_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nietrudno zauważyć, że każda funkcja $v_h(\mathbf{x})$ jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości w węzłach \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, a naturalną bazę przestrzeni V_h tworzą funkcje $v_h^{(i)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, N$, spełniające warunki

$$v_h^{(i)}(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ 0, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Przybliżonych rozwiązań $u_h(x)$, $q_h(x) \in V_h$ zagadnienia (4.33)–(4.35) będziemy poszukiwać, postępując jak w metodzie kolokacji, tzn. punktem wyjścia do sformułowania zagadnienia przybliżonego będą relacje otrzymane na podstawie równania (4.41)

$$c u_h(\mathbf{x}_i) + \int_S q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) u_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_S u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) q_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (4.46)$$

uzupełnione warunkami pochodzącymi od warunków brzegowych (4.34), (4.35)

$$u_h(\mathbf{x}_i) = u_0(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in S_D \quad (4.47)$$

$$q_h(\mathbf{x}_i) = q_0(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in S_N \quad (4.48)$$

Relacje (4.46)–(4.48) wykorzystamy do sformułowania zagadnienia przybliżonego w postaci układu równań liniowych. Przyjmijmy na wstępie oznaczenia

$$\begin{aligned} u_h(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq i \leq N} u_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq i \leq N} u_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \\ q_h(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq i \leq N} q_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq i \leq N} q_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (4.49)$$

wtedy otrzymujemy następującą postać całki występującej po lewej stronie równości (4.46)

$$\begin{aligned} \int_S q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) u_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq j \leq N} \int_S q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) (u_j^{(1)} \varphi_j^{(1)}(\mathbf{x}) + u_j^{(2)} \varphi_j^{(2)}(\mathbf{x})) dS(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq N} u_j^{(1)} \int_{e_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j^{(1)}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq j \leq N} u_j^{(2)} \int_{e_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j^{(2)}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq N} (h_{ij}^{(1)} u_j^{(1)} + h_{ij}^{(2)} u_j^{(2)}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

gdzie $h_{ij}^{(1)} = \int_{e_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j^{(1)}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$ oraz $h_{ij}^{(2)} = \int_{e_j} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j^{(2)}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$.

Przyjmując następnie, że

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^{(1)} + u_{i-1}^{(2)}, \quad u_1 = u_1^{(1)} + u_N^{(2)}, \\ h_{ij} &= h_{ij}^{(1)} + h_{(i-1)j}^{(2)}, \quad h_{1j} = h_{1j}^{(1)} + h_{Nj}^{(2)} \end{aligned}$$

całkę tę przedstawimy w następującej skróconej postaci

$$\int_S q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) u_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \sum_j h_{ij} u_j \quad (4.51)$$

Całkę po prawej stronie równania (4.46) przekształcimy analogicznie, co prowadzi do relacji

$$\int_S u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) q_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq j \leq N} \left(g_{ij}^{(1)} q_j^{(1)} + g_{ij}^{(2)} q_j^{(2)} \right) \quad (4.52)$$

gdzie $g_{ij}^{(1)} = \int_{e_j} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j^{(1)}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$ oraz $g_{ij}^{(2)} = \int_{e_j} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j^{(2)}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$.

Oznaczając następnie

$$\begin{aligned} q_i &= q_i^{(1)} + q_i^{(2)}, & q_1 &= q_1^{(1)} + q_N^{(2)}, \\ g_{ij} &= g_{ij}^{(1)} + g_{(i-1)j}^{(2)}, & g_{1j} &= g_{1j}^{(1)} + g_{Nj}^{(2)} \end{aligned}$$

otrzymujemy następującą jej postać

$$\int_S u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) q_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \sum_j g_{ij} q_j \quad (4.53)$$

Korzystając z równania (4.51) i (4.53), możemy (4.46) zapisać w postaci macierzowej

$$(c\mathbf{I} + \mathbf{H}) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad (4.54)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q}$$

W układzie równań (4.54) występuje N równań i $2N$ niewiadomych, co sugerowałoby, że jest on nieoznaczony. Uzupełniając ten układ N warunkami brzegowymi danymi wzorami (4.47) i (4.48), otrzymujemy w rezultacie układ równań oznaczony.

Po rozwiązaniu układu (4.54) uzyskujemy przybliżone wartości brzegowe funkcji potencjału $u_h(\mathbf{x})$ i jej pochodnej normalnej do brzegu $q_h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$.

Etap III. Polega na odtworzeniu przybliżonych wartości funkcji potencjału w obszarze D zgodnie ze wzorem

$$u_h(\xi) = - \int_S q^*(\mathbf{x}, \xi) u_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \int_S u^*(\mathbf{x}, \xi) q_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \xi \in D, \mathbf{x} \in S \quad (4.55)$$

Wartość strumienia $q_h(\xi)$ wewnątrz obszaru można otrzymać z równania (4.55) przez wyznaczenie gradientu pola potencjalnego $u_h(\xi)$.

4.3. Metody bezsiatkowe

W ostatnich dwóch dekadach nastąpił gwałtowny rozwój nowej generacji metod bezsiatkowych, których celem jest zapewnienie dokładnych i stabilnych rozwiązań takich przypadków, dla których metody siatkowe okazują się zawodne lub mało dokładne.

Do takich zagadnień, oprócz przepływów z dużą liczbą Reynoldsa w złożonych geometrycznie obszarach, zalicza się jeszcze eksplozje, uderzenia hydrauliczne, duże deformacje brzegów obszaru obliczeniowego, dlatego występuje duże zainteresowanie i rozwój metod bezsiatkowych. Ich podstawową zaletą jest przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych lub całkowych, z dowolnymi warunkami brzegowymi, za pomocą zbioru wybranych, nieregularnych punktów obszaru (węzłów) lub cząstek bez użycia jakiegokolwiek siatki łączącej te punkty lub cząstki.

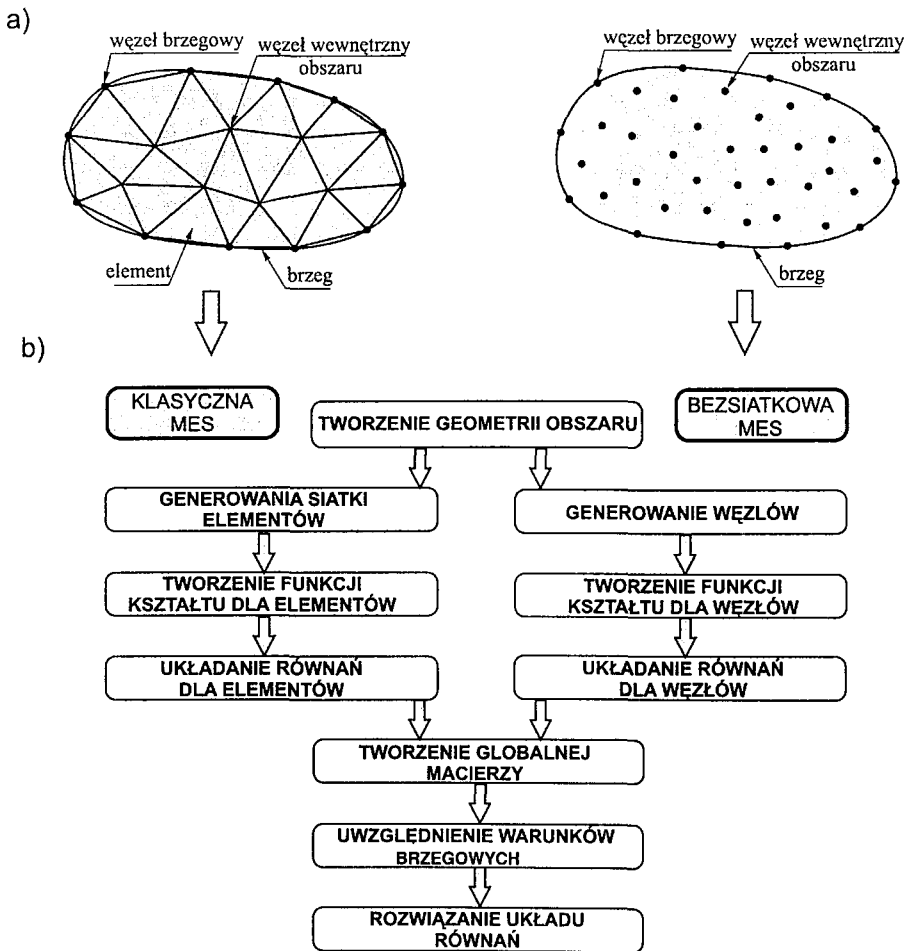
Do metod wykorzystujących nieregularne punkty obszaru zalicza się bezsiatkową metodę elementów skończonych, metodę różnic skończonych dla dowolnie nieregularnej siatki numerycznej, bezelementową metodę Galerkina, bezsiatkową lokalną metodę Petrova–Galerkina, metodę punktowej interpolacji i wiele innych metod, których opisy można znaleźć w pracy Liu i Liu (2003). Metody te są stosowane przede wszystkim do zagadnień mechaniki ciała stałego. W mechanice płynów najczęściej znajduje zastosowanie metoda lokalna Petrova–Galerkina oraz metoda różnic skończonych dla dowolnie nieregularnej siatki numerycznej. Zaletą metod bezsiatkowych jest duża elastyczność w dodawaniu lub usuwaniu węzłów, nie są bowiem one ze sobą połączone żadną relacją. To daje możliwości dopasowywania gęstości rozkładu węzłów dla uzyskania żądanej dokładności obliczeń w obszarach, w których występują duże zmiany, na przykład duże gradienty prędkości w cieczy lub spiętrzenie naprężeń w ciele stałym. Różnica między klasyczną metodą elementów skończonych a bezsiatkową przedstawiono na rysunku, na którym zaprezentowano schemat dyskretyzacji obszaru (rysunek 4.5a) oraz schemat algorytmu obliczeń (rysunek 4.5b).

Dodatkową zaletą metod bezsiatkowych jest swobodne kształtowanie brzegów, które mogą być aproksymowane z dowolną dokładnością przez zagęszczanie punktów brzegowych, ponadto geometria obszaru może w trakcie obliczeń podlegać zmianom i nie wprowadza to żadnej trudności w obliczeniach, jak w przypadku metody siatkowej, w której następuje w takich przypadkach konieczność generowania nowych siatek (Liu i Liu 2003).

Wśród metod opartych na analizie ruchu cząstek należy wyróżnić dwie – metodę wirów dyskretnych i metodę hydrodynamiki wygładzonych cząstek (*smoothed particle hydrodynamics*). Obie metody wykorzystują wygładzone cząstki, ale w odmienny sposób. W przypadku metody wirów rozwiązaniem są przybliżone trajektorie ruchu cząstek, które stanowią o ewolucji pola wirowości. Cząstki są dyskretnymi nośnikami pola wirowości i przemieszczają się wzdłuż swoich trajektorii zgodnie z polem prędkości,

które jest pochodną sumarycznego pola wirowości cząstek. W ten sposób spełnione jest zagadnienie konwekcyjnego i dyfuzyjnego transportu wirowości w obszarze przepływu. Metoda wirów stosowana jest dla różnych przypadków przepływów, zwłaszcza z dużą liczbą Reynoldsa.

W metodzie hydrodynamiki wygładzonych cząstek obszar obliczeniowy jest wstępnie podzielony siatką elementów, w środkach których stawiane są cząstki. Promień funkcji wygładzającej (nośnik cząstki) jest jej otoczeniem. Liczba innych cząstek znajdujących się w tym otoczeniu stanowi o masie i gęstości continuum przypisanej do tej cząstki. W ten sposób każda cząstka jest nośnikiem informacji umożliwiającym zbudowanie układu równań różniczkowych, spełniających równania zachowania masy, pędu i energii.



Rys. 4.5. Porównanie klasycznej MES z bezsiatkową MES
a) schemat dyskretyzacji obszaru, b) schemat algorytmu obliczeń

Metoda wygładzonych cząstek z powodzeniem była stosowana do zagadnień przepływu ze swobodną powierzchnią, zjawiska falowania, awarii zapory, uderzenia hydraulicznego, a także opisu procesów spalania i eksplozji. Szczegółowy opis tej metody i przykłady szerokiego zastosowania można znaleźć w monografii Liu i Liu, (2003).

4.4. Uzasadnienie wyboru metody

W rozdziale 4 przedstawiono liczne metody, które mogą być stosowane do rozwiązywania zagadnienia opływu lepką cieczą nieściśliwą i następnie wyznaczania ciśnienia hydrodynamicznego na opływanej powierzchni. Z dokonanego przeglądu wynika, że jak do tej pory nie ma możliwości dokładnego odwzorowania zjawisk zachodzących w takim przepływie, gdzie mamy do czynienia z silnie niestabilnym odrywaniem się warstwy przyściennej i tworzeniem się dynamicznej strefy recyrkulacji oraz z możliwością występowania ruchomego brzegu. A te właśnie zjawiska w głównej mierze decydują o powstaniu zmiennej siły hydrodynamicznej. Metody siatkowe oparte na rozwiązywaniu równań Reynoldsa oraz metodzie LES, wymagają sformułowania wielu równań i są bardzo złożone, wymagające wyznaczania empirycznych współczynników, a otrzymane rozwiązania są wygładzane wskutek działania siatki numerycznej. Biorąc to wszystko pod uwagę, należy stwierdzić, że dokładność metod siatkowych dla takich zagadnień, jakie omawia niniejsza praca, jest trudna do oszacowania. Dlatego zdecydowano się przedstawić w niniejszej monografii alternatywne do tych metod rozwiązanie metodą bezsiatkową opartą na symulacji ruchu cząstek. Spośród wymienionych w poprzednim punkcie dwóch takich metod, najbardziej stosowną do charakteru zjawiska przepływu z dużą liczbą Reynoldsa jest metoda wirów, polegająca na symulacji ruchu cząstek cieczy, stanowiących nośniki wirowości. Druga z tych metod – hydrodynamiki wygładzonych cząstek – nie została wybrana, zdaniem bowiem autora bardziej odpowiada zjawiskom, w których dominuje przemieszczanie masy danej substancji lub brzegu obszaru obliczeniowego, jak w przypadku uderzenia hydraulicznego lub awarii zapory.

Metoda wirów, której szczegółowy opis oraz przykłady zastosowania znajdują się w kolejnych rozdziałach, ma liczne walory w stosunku do innych metod, w tym metod siatkowych.

Do zalet metody można zaliczyć

1. Odwołanie się do fizycznych cech zjawiska, które jest modelowane. W tym przypadku jest to przepływ, w którym dominuje pole wirowości.
2. Ruch cząstek cieczy transportujących wirowość jest bezpośrednio symulowany dzięki procedurze śledzenia trajektorii tych cząstek i w ten sposób odtwarzane jest pole wirowości w całym obszarze przepływu.

3. Cząstki cieczy – elementy wirowości gromadzą się w tych rejonach przepływu, w których występują duże gradienty pola prędkości, odpowiedzialne za produkcję wirowości w przepływie. Metodę wirów określa się mianem samoadaptacyjnej.
4. Zagadnienie przepływu jest w tej metodzie sformułowane w terminach wirowości i funkcji prądu, dlatego nie ma potrzeby na tym etapie obliczeń numerycznych wyznaczania pola ciśnienia. Ciśnienie może być wyznaczane w niezależnych obliczeniach na podstawie otrzymanych przybliżonych pól prędkości i ewentualnie wirowości.
5. Warunek nieściśliwości cieczy jest zawsze spełniony, jest bowiem wykorzystywany do sformułowania równań transportu wirowości.
6. Dowody zbieżności metody wskazują, że jest ona zbieżna i stabilna i nie ma ograniczeń na długość kroku czasowego, tak jak w metodach siatkowych przy bezpośrednim rozwiązywaniu równań Naviera–Stokesa.
7. Algorytm metody nie generuje błędu numerycznego w postaci dyfuzji numerycznej powstającej na siatce, dzięki wykorzystaniu zmiennych Lagrange’a – trajektorii cząstek do modelowania ewolucji pól wirowości i prędkości.

Oprócz zalet, metoda wirów ma również wady, z których najistotniejsze to:

1. Długi czas obliczeń, ponieważ ewolucja pola wirowości wymaga wyznaczania oddziaływań między elementami wirowości na zasadzie „każdy z każdym”. Aby przyspieszyć obliczenia, można stosować dodatkowe procedury polegające na wyznaczaniu oddziaływań od wirów leżących w większej odległości jak od pojedynczego wiru o uśrednionej cyrkulacji, co powoduje jednak zwiększenie błędu aproksymacji.
2. Obliczenia przepływu w obszarach ograniczonych brzegami wymaga dodatkowego rozwiązania pola przepływu potencjalnego, aby spełnić warunki brzegowe, co komplikuje i wydłuża czas obliczenia metodą wirów.

Z przedstawionej charakterystyki metody wirów wynika, że jej podstawową wadą jest czasochłonność obliczeń. Mimo to autor uważa, iż metoda wirów powinna być stosowana do takich zagadnień, jakie rozważane są w niniejszej pracy, czyli wyznaczania pól prędkości i wirowości dla przepływu z dużą liczbą Reynoldsa, a coraz bardziej wydajne, wieloprocessorowe komputery będą sprzyjały rozwojowi tej metody.

5. Metoda wirów

5.1. Wprowadzenie

Metoda wirów jest zwykle stosowana do symulacji przepływów, w których dominującą rolę odgrywa dynamika wirów, ale najczęściej do aproksymacji zagadnienia Eulera w przypadkach tworzenia się śladu aerodynamicznego na przykład podczas opływu skrzydła samolotu, łopatek wentylatorów itp. Równie chętnie stosuje się ją do rozwiązywania zagadnienia Naviera–Stokesa z dużą liczbą Reynoldsa, w którym istotną rolę – oprócz adwekcji wirowości – odgrywa jej dyfuzja, tak jak podczas opływu łopatek turbin, kadłubów statków, przepływu przez zamknięcia hydrotechniczne. Zaletą metody wirów jest jej dokładność w modelowaniu wspomnianych przepływów osiągnięta w wyniku dyskretyzacji pola wirowości za pomocą skończonej liczby cząstek wirowych i bezpośredniej symulacji trajektorii ruchu tych cząstek, który wyznacza ewolucję pola wirowości i prędkości.

Metoda wirów po raz pierwszy została zastosowana w latach 30. XX wieku przez Rosenheada, który wykonał „ręczne” obliczenia ewolucji dwuwymiarowej warstwy wirowej odpowiadającej zagadnieniu niestabilności Kelvina–Helmholtza (Rosenhead, 1931). Do symulacji warstwy wirowej Rosenhead zastosował zbiór punktów wirowych, zanurzonych w nielepkiej cieczy, które wzajemnie na siebie oddziaływały przez wytwarzane pola prędkości. Ruch punktu wirowego symulowany był na zasadzie superpozycji wektorów prędkości pochodzących od pozostałych punktów wirowych. Na przełomie 50. i 60. lat były jeszcze podejmowane próby powtarzające badania Rosenheada, jednak z powodu trudności obliczeniowych metoda wirów nie była rozwijana aż do lat siedemdziesiątych, kiedy to dopiero szybki rozwój techniki komputerowej umożliwił przeprowadzanie złożonych obliczeń numerycznych.

W 1973 r. Chorin opracował metodę obliczania przepływów lepkich, w której dla uniknięcia osobliwości, jakie mają wiry punktowe zastosował w ich miejsce cząstki (krople) wirowe o nośniku zwartym i niezerowej mierze (Chorin, 1973). Jego przybliżona metoda rozwiązywania zagadnienia przepływu polega na dekompozycji równania transportu wirowości w ten sposób, że w pierwszym kroku adwekcja wirowości jest

aproksymowana metodą kropli wirowych, a w drugim dyfuzja wirowości jest symulowana metodą przypadkowego błędzenia (Monte Carlo). Metodę Chorina często określa się mianem stochastycznej metody wirów, a jego prace zapoczątkowały intensywny rozwój tej metody. Adwekcja wirowości była w tych kolejnych pracach wyznaczana metodami o coraz wyższym rzędzie zbieżności, co uzyskiwano dzięki zastosowaniu dokładniejszych funkcji aproksymujących rozkład wirowości wewnątrz wiru. Bardzo intensywne były także próby poszukiwania rozwiązań zagadnienia dyfuzji dokładniejszych niż te, które dawała metoda przypadkowego błędzenia.

Jedną z takich prób, zaproponowaną m.in. przez Leonarda (1980) jest procedura liniowego wzrostu wymiaru (promienia obciążenia) wirów w czasie. Nie znalazła ona jednak powszechnego zastosowania ze względu na to, że technika powiększania jądra wiru prowadzi do równań, które nie są zgodne z równaniami Naviera–Stokesa, co zostało wykazane w pracy Majdy i Bertozziego (2002). Próbę kontynuowania tej idei według innych założeń niż Leonarda przeprowadzili Margarit i Brancher (2001), ale wyłącznie w postaci rozwiązania teoretycznego. Nieco inny schemat deterministycznego rozwiązania równania dyfuzji przedstawił Shankar i Dommelen (1996). Polegał on redystrybucji wirowości w otoczeniu każdego wiru – o promieniu zależnym od współczynnika lepkości i długości kroku czasowego – za pomocą symulowania dyfuzji przez przekazywanie części jego wirowości na wiry sąsiednie zgodnie z równaniem, którego rozwiązanie otrzymuje się metodą różnic skończonych. W miejscach obszaru, w których brakuje wirowości, dostawia się nowe wiry. Zaletą tej metody jest dokładność odwzorowania procesu dyfuzji wirowości, wadą zaś jest bardzo długi czas obliczeń w porównaniu z metodą przypadkowego błędzenia, związany z dużym przyrostem liczby wirów w czasie obliczeń i złożoną procedurą redystrybucji wirowości.

Liczne prace nad metodą wirów dostarczały nowych rozwiązań, między innymi możliwość bezpośredniego rozwiązania równania transportu wirowości, uwzględniającego lepkość cieczy (równanie Helmholtza) bez stosowania jego dekompozycji. Metoda ta zaproponowana po raz pierwszy przez Fishelovą (1990, 1994) polegała na równoczesnym rozwiązaniu dwóch układów równań różniczkowych, z pierwszego jest wyznaczana ewolucja wirowości przez ruch wirów po trajektoriach, a z drugiego wyznacza się zmianę cyrkulacji wirów wynikającą z procesu dyfuzji. Schemat ten szczegółowo opisano w podrozdz. 5.4 niniejszej pracy. Nieco inną technikę zmiany natężenia wirowości dla spełnienia równania dyfuzji przedstawili Ploumhans i Winckelmans (2000). Zaproponowali oni zastąpienie operatora różniczkowania operatorem całkowym, a następnie wprowadzili procedurę generowania lustrzanych obrazów wygenerowanych wirów względem brzegu, aby spełnić warunek zerowego strumienia wirowości przechodzącego przez brzeg. Metoda ta wydaje się mało efektywna w przypadku przepływów ograniczonych brzegiem o złożonej geometrii. Należy także wspomnieć o pracy Dynnikovej (2002), która przedstawiła równania opisujące dyfuzję wirowości w postaci dyfuzyjnego ruchu rurek wirowych z prędkością zależną od iloczynu wektorowego wirowości i rotacji wirowości, jako uogólnienie wyrażenia Cauchy’ego–La-

grange'a. Jednak autorka tego pomysłu nie przytoczyła żadnych wyników obliczeń pozwalających na weryfikację jej metody. Bouferrouk i Chernyshenko (2005) zaproponowali zastosowanie specjalnej regularyzacji rozwiązania, aby uniknąć losowego przemieszczania cząstek wirowych.

W latach osiemdziesiątych XX w. pojawiły się liczne matematyczne opracowania dotyczące analizy zbieżności i dokładności metody wirów, w odniesieniu do równania adwekcji wirowości wyprowadzanego z równania Eulera, z zadaniem warunkiem początkowym. Pierwszym, który podał podstawy analizy zgodności i stabilności rozwiązania metodą wirów w przestrzeni dwuwymiarowej był Hald (1979, 1987), a następnie dla przestrzeni dwu- i trójwymiarowej dowody zbieżności podali Beale i Majda (1982a, 1982b, 1985), Raviart (1985) oraz Nordmarck (1991). Zbieżność rozwiązania metodą wirów zagadnienia ruchu cieczy lepkiej w przypadku metody dekompozycji Chorina została przedstawiona m.in. przez Longa (1988). Ying (1992), Ying i Zhang (1994, 1997), Ying (1998) podjęli się wykazania, że metoda wirów jest również zbieżna w zagadnieniach brzegowo-początkowych. Eldridge i inni (2002) przedstawili zastosowanie metody wirów do przepływu cieczy ściśliwej. Do tej grupy prac zaliczyć także można porównanie obliczeń przepływu lepkiego metodą pseudospektralną z metodą wirów dokonane przez Cotteta i in. (2002) pod kątem zbieżności i dokładności.

Metoda wirów w swoim podstawowym schemacie polega na analizie oddziaływań między wirami na zasadzie każdy z każdym, co sprawia, że na obliczenie jednego kroku czasowego N wirów wymagane jest co najmniej N^2 operacji. Dlatego wiele prac dotyczy metody przyspieszania obliczeń metodą wirów. Stosuje się tu powszechnie technikę łączenia odległych wirów w grupy i traktowania ich oddziaływania łącznie, jak od pojedynczego obiektu. Pozwala to na symulacje z użyciem bardzo dużej liczby wirów, sięgającej miliona cząstek wirowych. Technika najczęściej stosowaną jest algorytm zaproponowany przez Greengarda i Rohklina (1987) przede wszystkim nadający się do zagadnień dwuwymiarowych (Cottet i Koumoutsakos, 2000). Polega on na zastosowaniu rozwinięcia w szereg potęgowy potencjału zespolonego wiru punktowego do zbioru wirów zawartego w okręgu o zadanym promieniu (Styczek i Wald, 1995). Obszar obliczeń jest dzielony siatką o kilku poziomach gęstości, a oddziaływanie wirów jest obliczane w najbliższym sąsiedztwie wiru źródłowego na podstawie formuły dokładnej, a w miarę wzrostu odległości od coraz rzadszej siatki. Liczba operacji w tej metodzie szacowana jest jako $N(N-1)/2$.

Inne podejście zaproponowane zostało przez Andersona (1986), a następnie wykorzystane przez Strain (1996), Rogalę i in., (1995). Wychodząc z właściwości pola prędkości generowanego przez wir punktowy, które jest bezwirowe i bezdywergencyjne, Anderson stwierdził, że składowe prędkości spełniają równanie Laplace'a i w związku z tym można je aproksymować za pomocą funkcji, określonej w węzłach siatki różnicowej. Aproksymowane na siatce składowe prędkości oblicza się z równania Poissona, do ich zaś interpolacji na punkty dyslokacji wirów Anderson zaproponował formułę Lagrange'a. Oddziaływanie wirów znajdujących się w otoczeniu dane-

go punktu (nazywanym obszarem korekcji) podlega modyfikacji zgodnie z dokładną formułą wyznaczania prędkości. Wyznaczenie, które wiry znajdują się w obszarze korekcji może być realizowane za pomocą techniki listy wiążącej (Rogala, Kostecki, Kong, 1995).

Oprócz prac o charakterze teoretycznym, w tym monografii Yinga i Zhanga (1997), Majdy i Bertozziego (2002) i Lewisa (2005), powstało też wiele prac związanych z aplikacją metody wirów do zagadnień inżynierskich. Wielu autorów porównywało wyniki obliczeń metodą wirów z badaniami doświadczalnymi. Przykładem takich obliczeń jest analiza powstawania struktur wirowych w warstwie granicznej (Laitone, 1987), (Knio i Ghoniem, 1991) opływ walca lub prostopadłościanu i analiza tworzenia wirów Kármána za opływającą przeszkodą (Spalarń i Leonard, 1981), (Standby, 1985), (Benson i inni 1989), (Kimura i Tsutahara, 1986), (Styczek i Wald, 1995), (Ploumhans i Winckelmans, 2000, (Ploumhans i inni, 2004). Innym, testowanym zagadnieniem był przepływ w kanale z gwałtownym poszerzeniem, za którym analizowana była strefa recyrkulacji dla różnych liczb Reynoldsa (Ghoniem i Cagnon, 1987), (Ghoniem i Sethian, 1986), (Kudela i Kostecki, 1992), (Kudela, 1995), (Mortazavi i Giovannini, 2001), (Barber i Fonty, 2002). Zastosowanie metody wirów do wyznaczania przepływu wzdłuż cienkiego i elastycznego brzegu było analizowane przez Baker i Beale (2004) oraz Corteza (2000) deterministyczną metodą zaproponowaną przez Fishelovą (1990).

Metoda wirów stosowana też była do badania opływu wiatru nad budynkiem (Bui, 1987), (Hanson i inni, 1985), (Kostecki, 2007), przepływu w kanale z przeszkodą (Rogala, Kostecki, Kong, 1993, 1994), (Kostecki, 2003, 2006) oraz analizy przepływu ze swobodną powierzchnią (Chen i Vorus, 1992).

Wykorzystanie pola prędkości i wirowości określonych za pomocą metody wirów do wyznaczania naporu hydrodynamicznego opisali Chorin (1997), Shirato Matsumoto (1997), Nowakowski i in. (1996), Kostecki (2006, 2007), Protas i in. (2000).

Pewną odmianą metody wirów, którą również opracował Chorin (1978), jest metoda warstw wirowych. Poprzedziły ją rozwiązania numeryczne symulujące ruch warstwy stanowiącej linię wirową (włókno) w przepływie nielepkim, początkowo w postaci punktów wirowych, wykonane przez wspomnianego wcześniej Rosenheada oraz Greengarda i Rokhlina, 1987, następnie jako ruch kropeł wirowych (Lindsay i Krasny, 2001; Krasny, 1986; Christlieb i in., 2004), aż do zagadnień ewolucji nitki (konturu) wirowej (ang. *vortex filament*) (Martin i Meiburg, 1994).

Punktem wyjścia metody warstw wirowych jest równanie Prandtla dla warstwy przyściennej. Warstwa wirowa w tej metodzie jest efektem różnicy między prędkością przy brzegu, na którym zakłada się jej zerową wartość, a prędkością występującą na granicy warstwy przyściennej. W zaproponowanej przez Chorina metodzie warstwę tę aproksymuje się skończoną liczbą odcinków wirowych (płytek wirowych dla trzech wymiarów), których ruch jest analizowany podobnie jak ruch kropli wirowych po trajektoriach. Podobnie jak w metodzie kropeł wirowych dokonuje się tu dekompozycji

równania Helmholtza, jednak obowiązują tu nieco inne zasady wyznaczania pola prędkości i wirowości. Zostały one opisane w niniejszej pracy w punkcie 5.8.

Metoda warstw wirowych pomyślana była jako udoskonalenie opisu przepływu w pobliżu brzegów obszaru w stosunku do metody kropel wirowych i dlatego przez wielu autorów jest ona łączona ze stochastyczną metodą kropel wirowych w ten sposób, że odcinek wirowy po opuszczeniu warstwy przyściennej zamienia się w kroplę, kropla zaś wirowa, wpadająca w obszar warstwy przyściennej, zamienia się w odcinek wirowy. Metodę warstw analizował pod kątem zbieżności Puckett (1989), a stosowało ją wielu autorów, m.in. Bernard (1995), Gharakhani i Ghoniem (1997), Lindsay i Krasny (2001), Motrazavi i Giovannini (2001) w postaci zbliżonej do metody stochastycznej wirów, tzn. równanie adwekcji wykorzystywane było do obliczania ruchu warstw wirowych w układzie Lagrange’a, natomiast dyfuzję aproksymowano metodą przypadkowego błędzenia. Bernard (1995) zaproponował deterministyczne sformułowanie metody warstw wirowych na podstawie algorytmu przedstawionego przez Fishelovą (1990).

Metoda wirów zmieniała się wraz z rozwojem komputerów oraz powstawaniem nowych matematycznych rozwiązań i ma kilka sformułowań, które są dopasowane do uwarunkowań fizycznych modelowanego zjawiska. Przedstawimy podstawowe równania niezbędne w matematycznym formułowaniu metody wirów, a następnie omówimy trzy podstawowe sformułowania tej metody – wirów punktowych, wirów dyskretnych (kropel wirowych) oraz warstw wirowych. Istnieją jeszcze inne warianty tej metody, takie jak hybrydowa, wirowo-siatkowa „metoda wiru w komórce” oraz sformułowanie analogiczne do metody wirów Vlasova–Poissona, które nie będą tu omawiane, nie nadają się bowiem do omawianych tu zagadnień, a których opis można znaleźć w literaturze (Cotett i Koumoutsakos, 2000; Majda i Bertozzi, 2002).

5.2. Podstawy matematyczne – równanie transportu wirowości

Rozważmy zagadnienie przepływu cieczy nieściśliwej w obszarze D , ograniczonym brzegiem ∂D , którego matematyczny opis przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in D, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

z warunkami brzegowymi i początkowymi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_b, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad t > 0, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad t = 0 \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (5.5)$$

gdzie $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_1, u_2, u_3]$ – wektor prędkości, $P = p/\rho$ – ciśnienie kinematyczne, ν – współczynnik lepkości kinematycznej, ρ – gęstość cieczy, \mathbf{f} – pole sił zewnętrznych, ∇^2 – operator Laplace’a; prędkości $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ i $\mathbf{U}_b(\mathbf{x}, t)$ są zadane.

Podstawą metody wirów jest uogólnione równanie Helmholtza (por. 3.3.2), które spełnia wirowość

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (5.6)$$

W pracy rozważamy przypadek przepływu dwuwymiarowego, wówczas wektor prędkości ma postać $\mathbf{u} = [u_1, u_2, 0]$ i nie zależy od współrzędnej x_3 punktu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, a wektor wiru ma postać $\boldsymbol{\Omega} = [0, 0, \omega_3]$, przy czym

$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (5.7)$$

Jedyna niezerowa składowa ω_3 wektora wiru $\boldsymbol{\Omega}$ jest prostopadła do płaszczyzny przepływu i może być traktowana jako wielkość skalarna, którą dalej będziemy oznaczać jako ω . W takim przypadku trzeci składnik równania (5.6) znika: $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv 0$, a pełne równanie wektorowe upraszcza się do następującego równania skalarnego w R^2

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (5.8)$$

wyrażającego adwekcyjno-dyfuzyjny charakter transportu wirowości.

Numerycznie zagadnienie (5.1)–(5.5) sformułowane w terminach wirowości może być rozwiązywane metodami, w których dokonuje się zarówno jego naturalnej dekompozycji na zagadnienie adwekcji i dyfuzji wirowości, jak i metodami, w których takiego podziału się nie przeprowadza. W literaturze angielskiej proces dekompozycji nazywany jest w tym kontekście „splitting method”. Nieco dokładniej, w metodzie „splitting” w każdym kroku czasowym dokonuje się dekompozycji zagadnienia w ten sposób, że w pierwszym etapie tej metody rozwiązujemy zagadnienie adwekcji wirowości:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (5.9)$$

z warunkiem brzegowym (5.3) i odpowiednim warunkiem początkowym, np. (5.4). Następnie wynikowa składowa ω pola wirowości jest modyfikowana na podstawie równania dyfuzji:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (5.10)$$

Można również metodą wirów rozwiązywać samo zagadnienie adwekcji, które jest przedmiotem rozważań przepływu nielepkiego, liczne przykłady można znaleźć na przykład na polu aerodynamiki i geofizyki.

5.3. Metoda wirów punktowych

Za prekursora metody wirów uważa się zwykle, wspomnianego we wstępie, Rosenheada, który w 1931 roku zastosował metodę wirów punktowych do wyznaczenia ewolucji warstwy wirowej aproksymowanej dyskretnymi cząstkami wirowości w postaci wirów punktowych, zanurzonych w przepływie w nieograniczonym obszarze dwuwymiarowym.

Konieczność samodzielnego wykonywania dość znacznej liczby obliczeń stanowiła wówczas istotne ograniczenie stosowania tej metody. W latach dziewięćdziesiątych XX w. Krasny (1986) przeprowadził szczegółowe obliczenia ewolucji warstwy wirowej, opisaną równaniem całkowym z jądrem osobliwym. Odpowiednio regularyzując jądro operatora całkowego, wykazał zbieżność rozwiązań metody wirów punktowych.

Ponieważ wnioski wynikające z zastosowania metody wirów do analizy ewolucji warstwy wirowej mają istotne znaczenie do poznania nowych właściwości tej metody, których nie mają metody siatkowe, przytoczymy w skrócie opis eksperymentu wykonanego przez Resenheada, a następnie Krasnego.

Metodą wirów punktowych rozwiązuje się zagadnienie przepływu cieczy nieściślej i nielepkiej, opisane równaniem Eulera (5.9) w terminach wirowości i prędkości:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad t > 0 \quad (5.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad t > 0 \quad (5.12)$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0, \quad \mathbf{x} \in R^2 \quad (5.13)$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (5.14)$$

gdzie $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_1, u_2]$ – dwuwymiarowe pole prędkości.

Traktując \mathbf{u} w równaniu adwekcji (5.11) jako znaną funkcję wektorową, zauważamy, że równanie adwekcji może być badane metodą charakterystyk. Charakterystyki $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t > 0$ tego równania spełniają wówczas relację:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (5.15)$$

Rozpatrując teraz równanie adwekcji wzdłuż charakterystyk, otrzymujemy:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \omega(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (5.16)$$

Ponieważ każda charakterystyka jest równocześnie trajektorią poruszającej się cząstki cieczy, równanie (5.16) informuje, że wartość wirowości ω jest zachowywana wzdłuż każdej takiej trajektorii. Symbolicznie można to zapisać następująco

$$\omega(\mathbf{X}(t, \alpha), t) = \omega(\alpha, 0) = \omega_0(\alpha), \quad \text{dla każdego } t > 0 \quad (5.17)$$

gdzie $\mathbf{X}(t, \alpha)$ jest trajektorią cząsteczki (punktu wirowego), znajdującej się w chwili początkowej w punkcie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$.

Jak wiadomo każda trajektoria spełnia relacje:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(0, \alpha) = \alpha \quad (5.18)$$

Prędkość cieczy można wyznaczyć za pomocą następującej zależności:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{K} * \omega)(\mathbf{x}, t) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (5.19)$$

gdzie jądro całki ma postać

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \left(-\frac{x_2}{2\pi|\mathbf{x}|^2}, \frac{x_1}{2\pi|\mathbf{x}|^2} \right) \quad (5.20)$$

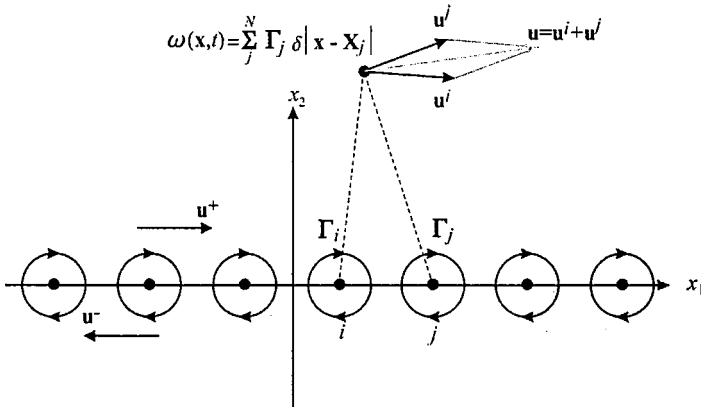
Symbol $*$ oznacza splot funkcji, a pochodzenie tego wzoru zostanie wyjaśnione w podrozdziale 5.4.

Na podstawie relacji (5.18) i (5.19) wnioskujemy (Hald 1987), że zagadnienie (5.11)–(5.14) można sformułować równoważnie w postaci równania całkowo-różniczkowego

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t, \alpha) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{X}(t, \alpha) - \mathbf{X}(t, \alpha')) \omega_0(\alpha') d\alpha', \quad \mathbf{X}(0, \alpha) = \alpha \quad (5.21)$$

Opierając się na twierdzeniu Thomsona (Kelvina) o zachowaniu cyrkulacji w przepływie idealnym, Rosenhead przyjął założenie, że warstwę wirową można aproksy-

mować szeregiem punktów wirowych (rys. 5.1), a indukowane przez nie pole wirowości zapisać w postaci superpozycji rozwiązań pochodzących od poszczególnych wirów (Leonard 1980; Majda i Bertozzi, 2002).



Rys. 5.1. Aproksymacja warstwy wirowej za pomocą wirów punktowych

Ciągłe, dwuwymiarowe pole wirowości $\omega(\mathbf{x}, t)$ może być aproksymowane za pomocą wyrażenia

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_j^N \Gamma_j \delta|\mathbf{x} - \mathbf{X}_j| \quad (5.22)$$

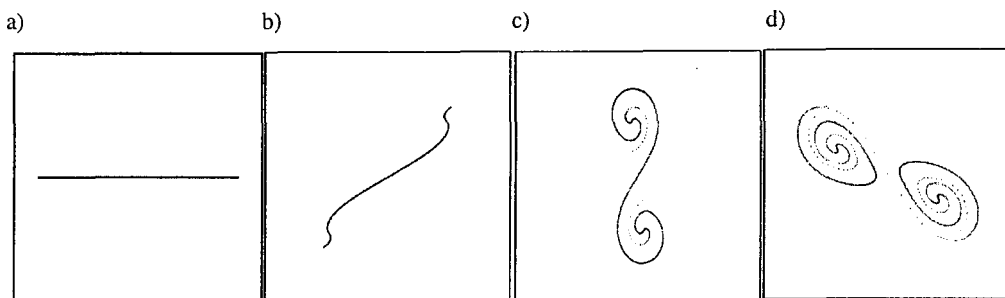
gdzie $\delta|\mathbf{x} - \mathbf{X}_j|$ – dwuwymiarowa funkcja Diraca, \mathbf{X}_j – miejsce położenia j -tego wiru (na trajektorii), Γ_j – cyrkulacja (natężenie wiru).

Po podstawieniu zależności (5.22) i (5.20) do (5.19), a następnie do (5.18), ewolucja punktów wirowych sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Gamma_j \frac{\hat{\mathbf{X}}_i - \hat{\mathbf{X}}_j}{|\hat{\mathbf{X}}_i - \hat{\mathbf{X}}_j|^2}, \quad \hat{\mathbf{X}}_i = \hat{\mathbf{X}}(t, \alpha_i), \quad t > 0 \quad (5.23)$$

Przykład ewolucji warstwy wirowej przedstawiono na rysunku 5.2, dla symulacji której autor przyjął 801 wirów o zwartym nośniku i jednakowej cyrkulacji $\Gamma_i = 0,1$.

Model warstwy polegał na rozmieszczeniu wirów w chwili $t=0$ na płaszczyźnie w prostej linii w równych odstępach co 0,001. Od tej chwili w kolejnych krokach czasowych, równych $\Delta t = 0,05s$, określano nowe położenie wirów zgodnie z zależnością $\hat{\mathbf{X}}_i(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{X}}_i(t) + \Delta t \hat{\mathbf{u}}_i$, gdzie $\hat{\mathbf{u}}_i$ wyznaczano na podstawie równania (5.23). Pole prędkości wytworzone przez wiry punktowe wymusza ruch warstwy wirowej



Rys. 5.2. Symulacja ewolucji warstwy wirowej dla czasów $t = 0,05$ s; $0,75$ s; $2,0$ s i $2,5$ s

wskutek zjawiska adwekcji poszczególnych wirów punktowych. Po 1 kroku czasowym warstwa zachowuje jeszcze swój prostoliniowy kształt (rys. 5.2a). W następnych krokach czasowych warstwa obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, równocześnie zakrzywieniu ulegają jej końce (rys. 5.2b–c). Po czasie $t = 2,5$ s (rys. 5.2d) warstwa ulega praktycznie przerwaniu i tworzą się dwa odrębne centra wirów, które z upływem czasu będą skręcać się i obracać wokół środka obszaru.

Zauważmy, że pole prędkości, opisane zależnościami (5.19) i (5.20), ma lokalnie nieskończoną wartość energii kinetycznej $E_k(r)$

$$E_k(r) = \int_{r \leq R} |\mathbf{u}|^2 dr = \infty, \quad \text{dla każdego } R > 0, \quad r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (5.24)$$

Ta właściwość aproksymacyjnego pola prędkości odbiega od rzeczywistego, fizycznego charakteru takiego pola, dla którego zawsze lokalnie energia kinetyczna jest skończona.

W konsekwencji może to być przyczyną błędnej aproksymacji ewolucji punktów wirowych, pola prędkości i wirowości. Według Cotteta i Koumoutsakosa (2000) oraz Liu i Xin (2000) metoda wirów punktowych jest stabilna i zbieżna do rozwiązania równania Eulera, jednak pod pewnymi warunkami utrudniającymi stosowalność metody. Na stabilność obliczeń wpływa liczba wirów użytych do symulacji przepływu, duża bowiem ich liczba relatywnie zwiększa prawdopodobieństwo spotkania się dwóch punktów wirowych. W miejscu takiego zbliżenia drastycznie zwiększa się prędkość przemieszczania się wirów. Z drugiej strony dokładność rozwiązania zwiększa się wraz ze wzrostem liczby punktów wirowych. Rozbieżność warunków zapewniających z jednej strony zbieżność metody, a z drugiej strony jej dokładność spowodowała, że metoda wirów punktowych nie znajdowała na początku szerszego uznania. Rozwój jej nastąpił dopiero po wprowadzeniu pewnej modyfikacji, polegającej na zastąpieniu punktu wirowego cząstką (kroplą) wirową o ograniczonym nośniku, tzn. na zbiorze wartości.

5.4. Metoda wirów dyskretnych – sformułowanie deterministyczne

Przedstawiona w poprzednim punkcie metoda wirów punktowych dotyczy przepływu cieczy nielepkiej opisanej równaniem Eulera. Rozwiązanie zagadnienia przepływu cieczy lepkiej wiąże się z dodatkową aproksymacją członu dyfuzji wirowości, która może być zrealizowana za pomocą metody stochastycznej lub deterministycznej. Metodę stochastyczną zaproponował Chorin (1973) i stanowi ona klasyczne rozwiązanie metody wirów, które jest stosowane również obecnie przez wielu autorów (por. 5.5). W metodzie tej, w każdym kroku czasowym, wiry podlegają losowemu przemieszczeniu zgodnie z rozkładem normalnym, zachowując swoją cyrkulację.

Podejście deterministyczne wprowadza inny, nielosowy sposób sformułowania zagadnienia dyfuzji wirowości i było przedmiotem kilku prac badawczych. Prezentują one różne metody rozwiązania tego zagadnienia, omówione w punkcie 5.1, w większości różniące się sposobem aproksymacji operatora Laplace'a w równaniu dyfuzji. Spośród nich na uwagę zasługuje podejście zaproponowane przez Fischelovą (1990), a następnie wykorzystane przez innych autorów (Bernard, 1995; Cortez, 2000). W metodzie deterministycznej w sposób naturalny dla rozwiązania zagadnienia adwekcji, rozwiązywane jest zagadnienie dyfuzji wirowości. Aproksymacja operatora Laplace'a jest dokładna dzięki splotowemu połączeniu wirowości z funkcją obcięcia, która jest następnie różniczkowana. Rozwiązanie transportu wirowości polega na równoczesnym rozwiązaniu układu równań różniczkowych opisujących ewolucję wirowości oraz podobnego układu równań do wyznaczenia nowych wartości cyrkulacji wirów. Dalej zamieszczono szczegółowe wyprowadzenie równań metody deterministycznej.

5.4.1. Numeryczne rozwiązanie dwuwymiarowego transportu wirowości

Przedstawimy istotę procesu dyskretyzacji będącego przedmiotem naszego zainteresowania. Zaczniemy od ewolucji wirowości w przestrzeni R^2 , którego matematyczna forma wyraża się następująco:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad t > 0 \quad (5.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad t > 0 \quad (5.26)$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0, \quad \mathbf{x} \in R^2 \quad (5.27)$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (5.28)$$

gdzie $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_1, u_2]$ – dwuwymiarowe pole prędkości.

Równanie (5.26) umożliwia wprowadzenie do rozważań pomocniczej funkcji prądu $\psi(\mathbf{x}, t)$, za pomocą której można wyrazić prędkość jako

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right). \quad (5.29)$$

Z równania (5.28) wynika wówczas, że w każdej chwili $t > 0$ ψ i ω są związane relacją

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad (5.30)$$

którą traktujemy jak równanie Poissona dla funkcji ψ . Jego rozwiązanie można otrzymać w postaci splotowej za pomocą znanego wzoru Biota–Savarta

$$\psi = G * \omega \quad (5.31)$$

$$G(\mathbf{x}) = -(2\pi)^{-1} \ln |\mathbf{x}| \quad (5.32)$$

gdzie $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, symbol $*$ oznacza operację splotu

Prędkość cieczy można wtedy wyznaczyć z zależności (5.9) w podobny sposób jak dla wirów punktowych:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{K} * \omega)(\mathbf{x}, t) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (5.33)$$

gdzie jądro całki ma postać

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}, -\frac{\partial G}{\partial x_1} \right) = \left(-\frac{x_2}{2\pi|\mathbf{x}|^2}, \frac{x_1}{2\pi|\mathbf{x}|^2} \right) \quad (5.34)$$

Rozpatrując trajektorię $\mathbf{X}(t, \alpha)$ cząstki cieczy znajdującej się w chwili początkowej w punkcie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ otrzymujemy relację:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(0, \alpha) = \alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2 \quad (5.35)$$

Ze wzoru (5.33) wynika, że zachodzi związek

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(\alpha, t) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{X}(\alpha, t) - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}', \quad \mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha.$$

Po dokonaniu w całce podstawienia $\mathbf{x}' = \mathbf{X}(\alpha', t)$, $\alpha' \in R^2$, transformujemy obszar cieczy w sposób opisany w rozdziale 3.1.2 i w rezultacie otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(\alpha, t) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{X}(\alpha, t) - \mathbf{X}(\alpha', t)) \omega(\mathbf{X}(\alpha', t), t) |\det(\nabla_{\alpha'} \mathbf{X}(\alpha', t))| d\alpha'$$

$$\mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha$$

Jak wykazano w dodatku A jacobian przekształcenia $|\det \nabla_{\alpha} \mathbf{X}(\alpha, t)| = 1$, co jest konsekwencją nieściśliwości cieczy. Dlatego zagadnienie (5.25)–(5.28) można sformułować równoważnie w postaci równania całkowo-różniczkowego (zob. Hald, 1987)

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(\alpha, t) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{X}(\alpha, t) - \mathbf{X}(\alpha', t)) \omega(\mathbf{X}(\alpha', t), t) d\alpha'$$

$$\mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha \quad (5.36)$$

Ze względu na osobliwość jądra \mathbf{K} , całki w równaniu (5.36) nie będziemy bezpośrednio dyskretyzować, ale zastąpimy ją jej aproksymacją otrzymaną w wyniku zastąpienia jądra \mathbf{K} nowym gładkim jądrem $\mathbf{K}_{\varepsilon} = f_{\varepsilon} * \mathbf{K}$, powstałym w procesie standardowej regularyzacji. Czynniki splotowy f_{ε} jest postaci $f_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-2} f(\varepsilon^{-1} \mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$, gdzie funkcja f jest odpowiednio wybraną gładką funkcją zwaną funkcją obciążenia. Warunki, jakie musi ona spełniać oraz jej wpływ na rozwiązanie otrzymane za pomocą metody wirów, zostały przedstawione w następnym rozdziale. Właściwości aproksymujące $\mathbf{K}_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ wynikają z tego, że f_{ε} aproksymuje dystrybucję δ -Diraca, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$.

W ten sposób proces dyskretyzacji zagadnienia transportu wirowości będziemy opierać na relacji

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(\alpha, t) \approx \int_{R^2} \mathbf{K}_{\varepsilon}(\mathbf{X}(\alpha, t) - \mathbf{X}(\alpha', t)) \omega(\mathbf{X}(\alpha', t), t) d\alpha'$$

$$\mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha \quad (5.37)$$

Rozpatrując ewolucję wirowości wzdłuż dowolnej trajektorii, otrzymujemy z równania (5.25) zależność

$$\frac{d\omega}{dt}(\mathbf{X}(\alpha, t), t) = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = v \nabla^2 \omega \quad (5.38)$$

W celu uniknięcia trudności rachunkowych związanych z numerycznym wyznaczeniem $\nabla^2 \omega$ zastąpimy to wyrażenie jego splotową aproksymacją $\nabla^2 (f_{\varepsilon} * \omega) = (\nabla^2 f_{\varepsilon}) * \omega$, otrzymując relację

$$\frac{d\omega}{dt}(\mathbf{X}(\alpha, t), t) \approx v (\nabla^2 f_{\varepsilon}) * \omega(\mathbf{X}(\alpha, t), t). \quad (5.39)$$

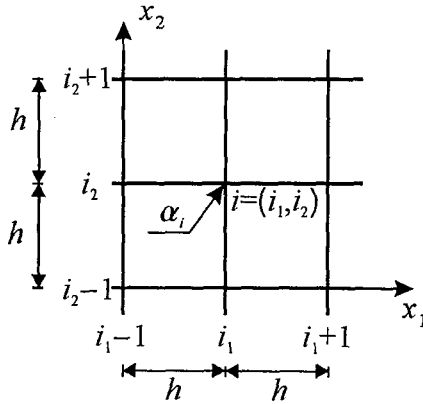
To samo rozumowanie, które doprowadziło nas do (5.36) zastosowane do (5.39) pozwala otrzymać

$$\frac{d\omega}{dt}(\mathbf{X}(\alpha, t), t) \approx v \int_{R^2} \nabla^2 f_\varepsilon(\mathbf{X}(\alpha, t) - \mathbf{X}(\alpha', t)) \omega(\mathbf{X}(\alpha', t), t) d\alpha' \quad (5.40)$$

$$\mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha$$

W kolejnym etapie opierając się na (5.37) i (5.40), będziemy wyznaczać aproksymacje trajektorii $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{X}(\alpha_i, t)$ i wartości wirowości $\omega_i(t) = \omega(\mathbf{X}(\alpha_i, t), t)$ cząstek ciecuchy znajdujących się w chwili początkowej $t=0$ w punktach α_i .

W celu dyskretyzacji rozważanego zagadnienia wprowadzamy siatkę punktów $\Lambda^h = \{\alpha_i : \alpha_i = h \cdot i = h \cdot (i_1, i_2), i \in Z^2\}$, gdzie Z jest zbiorem liczb całkowitych, tworzących siatkę kwadratów o boku $h > 0$. Schemat siatki przedstawiono na rysunku 5.3.



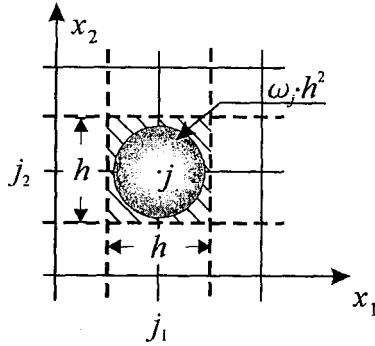
Rys. 5.3. Siatka podziału obszaru przepływu Λ^h

Ciągłe pole wirowości dyskretyzujemy na siatce, zamieniając go na zbiór kropeł wirowych o cyrkulacjach odpowiadających iloczynowi powierzchni kwadratu siatki i wartości wirowości w środku tego kwadratu, zgodnie z zależnością $\Gamma_j = \tilde{\omega}_j(t)h^2$, co ilustruje rysunek 5.4.

Relacje (5.37) i (5.40) usprawiedliwiają poszukiwanie przybliżonych trajektorii $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$ i wirowości $\tilde{\omega}_i(t)$ jako rozwiązań układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}_i(t)}{dt} = \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_j(t) h^2, \quad (5.41)$$

$$\frac{d\tilde{\omega}_i(t)}{dt} = v \sum_j \nabla^2 f_\varepsilon(\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_j(t) h^2, \quad i, j \in \Lambda^h$$



Rys. 5.4. Dyskretyzacja pola wirowości kroplami wirowymi

Sumy występujące po prawej stronie równań tego układu odpowiadają przybliżonym sumom całkowym dla całek występujących odpowiednio w relacjach (5.37) i (5.40). W eksperymentach numerycznych ten układ rozwiązujemy w sposób przybliżony, np. metodą Rungego-Kutty.

Na podstawie wzorów (5.11) i (5.33) wyznaczamy przybliżoną funkcję prądu oraz przybliżone pole prędkości:

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon;h}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j \in \Lambda^h} G_\varepsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_j(t) h^2 \quad (5.42)$$

$$G_\varepsilon = G * f_\varepsilon \quad (5.43)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon;h}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j \in \Lambda^h} \mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_j(t) h^2 \quad (5.44)$$

określone dla wszystkich $\mathbf{x} \in R^2$ i $t > 0$.

Ponieważ $\nabla^2 G_\varepsilon = -\delta * f_\varepsilon = -f_\varepsilon$, gdzie symbol δ oznacza δ -Diraca, właściwe przybliżone pole wirowości określone na podstawie wzorów (5.31) i (5.43) przyjmuje postać

$$\tilde{\omega}_{\varepsilon;h}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{j \in \Lambda^h} f_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)) \tilde{\omega}_j(t) h^2 \quad (5.45)$$

Oczekujemy, że $\tilde{\omega}_{\varepsilon;h}(\mathbf{x}, t)$ dąży do $\omega(\mathbf{x}, t)$ (podobnie dla $\tilde{\psi}_{\varepsilon;h}(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon;h}(\mathbf{x}, t)$), gdy oba parametry ε i h dążą jednocześnie do zera – jeżeli przyjmuje się dodatkową relację między tymi parametrami (Beale i Majda 1982a, 1982b). Uzasadnia to również stosowanie zamiast indeksów ε i h tylko jednego z nich, autor zdecydował się na indeks ε dla wirowości i pozostałych wielkości w dalszej części pracy.

Zbieżność rozumiana tu jest w sensie całkowym, co oznacza, że funkcje $\tilde{\omega}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ mogą różnić się od funkcji $\omega(\mathbf{x}, t)$ nawet znacznie, ale tylko na zbiorach

punktów, których miara dąży do zera, gdy parametry dyskretyzacji dążą do zera. Jak wskazują symulacje komputerowe potwierdzone danymi literaturowymi, postać wspomnianej relacji między h i ε wpływa na regularność pól $\tilde{\omega}_\varepsilon(x, t)$, $\tilde{\psi}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ (dla większych wartości ε pola te są bardziej gładkie).

5.4.2. Wybór funkcji wygładzającej

Podstawową rolę w metodzie wirów pełni funkcja f nazywana funkcją obciążenia. Jej użycie w konstrukcji aproksymacji pola wirowości prowadzi do określenia przybliżonego pola wirowości za pomocą skończonej liczby tak zwanych kropli wirowych o określonym kształcie wynikającym z postaci f . Ponadto, wybierając jako f funkcję regularną, pozwala uniknąć trudności rachunkowych związanych z osobliwością jądra \mathbf{K} przy numerycznym wyznaczaniu pola prędkości i wirowości oraz funkcji prądu. Z tego powodu funkcja f nazywana jest funkcją wygładzającą.

Ze względu na zbieżność i dokładność metody wirów wymaga się, aby funkcja f spełniała istotne warunki:

1. Konsekwencją aproksymowania δ -Diraca jest spełnienie warunku:

$$\int_{R^2} |f| dx = 1 \quad (5.46)$$

2. Dla zapewnienia zbieżności rozwiązania przybliżonego przyjmuje się, że funkcja wygładzająca jest ciągła, ograniczona i różniczkowalna w R^2 oraz ona i jej pochodne muszą odpowiednio „szybko” znikać w nieskończoności zgodnie z oszacowaniem:

$$f \in C^\infty(R^2), \quad |D^\beta f(\mathbf{x})| \leq C_{\beta_j} (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-j}, \quad j=1, 2, \dots \quad (5.47)$$

gdzie β – dowolny multiindeks, C_{β_j} – stałe.

Ponadto zakłada się, że znikają jej momenty

$$\int_{R^2} \mathbf{x}^\beta f dx = 0, \quad |\beta| \leq m-1 \quad (5.48)$$

gdzie m jest pewną liczbą naturalną.

3. Warunkiem stabilności jest to, aby transformata Fouriera funkcji f była dodatnia (Beale i Majda, 1982a, 1982b):

$$\hat{f}(\mathbf{s}) > 0, \quad \mathbf{s} \in R^2 \quad (5.49)$$

Założenia (5.46) i (5.47) zapewniają, że parametr $\varepsilon > 0$ w wyrażeniu

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-2} f\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

nazywany promieniem obcięcia, skaluje funkcję wygładzającą, w ten sposób, że dąży ona do dystrybucji δ -Diraca, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Rozwiązania przybliżone konstruowane w metodzie wirów zależą od dwóch parametrów $\varepsilon, h > 0$. Jak już wspomniano wcześniej, aby proponowane metody przybliżone były zbieżne, musi zachodzić odpowiednia relacja między ε i h . Najczęściej przyjmuje się zależność w postaci

$$\varepsilon = Ch^\gamma$$

gdzie $C > 0$ jest stałą. Wartość wykładnika $\gamma > 0$ dobiera się eksperymentalnie w zależności od przyjętej postaci funkcji wygładzającej f i rodzaju rozwiązywanego zagadnienia. W większości prac (Lewis, 2005) przyjmowano $0,5 < \gamma < 1$. Należy jednak podkreślić, że niewłaściwy dobór wartości γ może spowodować istotny wzrost średnicy kropli wirowych, które zachodzą na siebie i przyczyniają się do wygładzania rozwiązania. Autor pracy z powodzeniem stosował $\gamma = 0,75-0,95$.

W literaturze można spotkać kilka różnych funkcji wygładzających. Zazwyczaj są one wybierane spośród funkcji osiowo-symetrycznych. Pierwszy przykład takiej funkcji został podany przez Chorina (1973) jako:

$$f_\delta = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\varepsilon|\mathbf{x}|} & |\mathbf{x}| \leq \varepsilon \\ 0 & |\mathbf{x}| > \varepsilon \end{cases}$$

Funkcja ta nie jest ciągła, a zatem nie spełnia wszystkich przytoczonych wcześniej kryteriów i według Halda (1987) jest to przyczyną, że metoda wirów jest w tym przypadku wolnozbieżna.

Często przyjmowana jest postać wykładnicza, którą proponują Leonard (1980), Beale i Majda (1982a, 1982b) oraz Eldredge (2002) dla zagadnienia dwuwymiarowego, która zapewnia, że rząd zbieżności metody jest równy dwa:

$$f = \frac{1}{\pi} e^{-r^2} \text{ oraz } f_\varepsilon = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} e^{-r^2/\varepsilon^2}$$

gdzie $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

W celu zwiększenia rzędu zbieżności metody Beale i Majda (1985) badali również kombinację liniową kilku funkcji wykładniczych. Hald (1987) z kolei zaproponował wykorzystanie funkcji Bessela II rodzaju do utworzenia funkcji wygładzającej, dla której można konstruować schematy numeryczne o z góry zadany, dowolnym rzędzie zbieżności:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{3\pi|\mathbf{x}|^2} [4J_2(2\mathbf{x}) - J_2(\mathbf{x})]$$

Inni autorzy, m.in. Fishelov (1990), Nordmark (1991), stosowali kombinacje różnych funkcji Bessela. Funkcje wykładnicze oraz funkcje Bessela mają jednak tę wadę, że ich całkowanie musi być wykonywane numerycznie. W praktycznych obliczeniach lepiej jest zastosować funkcje, które można całkować bezpośrednio, np. w postaci wielomianu. Nordmark (1991) porównał szybkość zbieżności schematu w przypadku funkcji złożonej z kombinacji Funkcji Bessela III rodzaju oraz wielomianu stopnia 9 i uzyskał porównywalne wyniki.

Gharakhani i Ghoniem (1996) stwierdzili niestabilność rozwiązania z zastosowaniem funkcji $\frac{1}{\pi}e^{-r^2}$ i dlatego dla trójwymiarowego zagadnienia adwekcji wirów zamiast niej zaproponowali zastosowanie funkcji $f(x) = \tanh(r^3)$, która, jak wykazały ich badania, pozwala na osiągnięcie zbieżności rzędu 2.

W niniejszej pracy testowano kilka postaci funkcji Cauchy'ego o różnym wykładniku potęgowym i w efekcie przyjęto funkcję zaproponowaną przez Shankara i van Dommelena (1996), która zapewnia, że zbieżność metody jest rzędu 2

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)^{-2} \quad \text{oraz} \quad f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \left(1 + \left|\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right|^2\right)^{-2} \quad (5.50)$$

Funkcja ta spełnia warunki (5.46)–(5.49). W tym przypadku

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = \frac{e^{-s\left(\frac{s}{|s|}\right)} \left(1 + s \cdot \left(\frac{s}{|s|}\right)\right)}{2\sqrt{2\pi}} \geq 0 \quad (5.51)$$

Obliczenie postaci jądra G_ε rozwiązania równania Poissona dla przyjętej funkcji wygładzającej Cauchy'ego (5.50) może przebiegać w podany sposób

$$\nabla^2 G_\varepsilon = \nabla^2 (G * f_\varepsilon) = -f_\varepsilon \quad (5.52)$$

Uwzględniając postać laplasjanu dla funkcji osiowo-symetrycznej równanie (5.52) przekształca się do postaci:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} G_\varepsilon \right) = -f_\varepsilon \quad (5.53)$$

Pierwsze całkowanie równania (5.53) daje w rezultacie następujące wyrażenie:

$$r \frac{\partial}{\partial r} G_\varepsilon = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_0^r \frac{x dx}{\left(1 + \frac{|x|^2}{\varepsilon^2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \frac{r^2}{\varepsilon^2}} - 1 \right) = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{-r^2}{\varepsilon^2 + r^2} \right) \quad (5.54)$$

które można wykorzystać do obliczenia postaci jądra \mathbf{K}_ε , mianowicie:

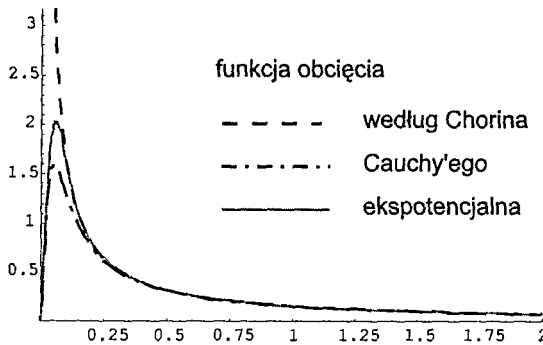
$$\mathbf{K}_\varepsilon = (\partial_{x_2}, -\partial_{x_1}) G_\varepsilon = (\partial_{x_2}, -\partial_{x_1}) \left[\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{-r^2}{\varepsilon^2 + r^2} \right) \right] = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi(r^2 + \varepsilon^2)} \quad (5.55)$$

Kolejne całkowanie (5.54) umożliwia obliczenie wyrażenia:

$$G_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 + \frac{|x|^2}{\varepsilon^2}} - 1 \right) dx = \frac{1}{4\pi} \ln(\varepsilon^2 + |x|^2) \Big|_0^r = \frac{1}{4\pi} [\ln(\varepsilon^2 + r^2) - 2 \ln \varepsilon] \quad (5.56)$$

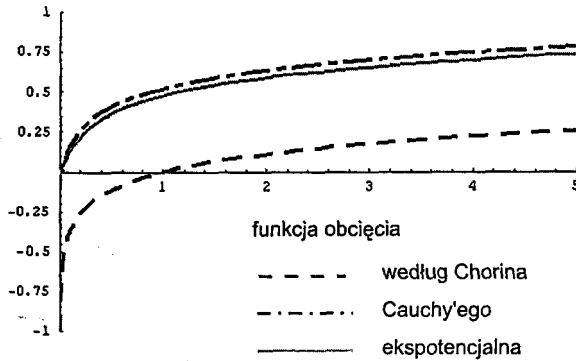
G_ε oraz \mathbf{K}_ε są wyrażone prostymi funkcjami i dzięki temu są wygodne do zastosowań numerycznych.

Na rysunkach 5.5 i 5.6 przedstawiono porównanie rozkładów prędkości wewnątrz kropli wirowej i rozkładów wirowych funkcji prądu dla trzech różnych postaci funkcji wygładzającej: według Chorina, Cauchy'ego i wykładniczej. W przykładach tych przyjęto wartość promienia obcięcia $\varepsilon = 0,05$.



Rys. 5.5. Rozkład prędkości wewnątrz kropli wirowej dla różnych funkcji obcięcia

Porównanie tych wykresów wskazuje, że przyjęta funkcja Cauchy'ego nie odbiega pod względem kształtu oraz wartości od wykładniczej funkcji wygładzającej. Różnice polegają na tym, że prędkości wyliczone dla wiru o tej samej cyrkulacji będą dla funkcji Cauchy'ego nieznacznie mniejsze niż dla funkcji wykładniczej, co w praktycznych obliczeniach metodą kropli wirowych nie ma istotnego znaczenia.



Rys. 5.6. Funkcje prądu dla różnych funkcji obciążenia

5.5. Sformułowanie stochastyczne metody kropek wirowych

5.5.1. Metoda dekompozycji w zagadnieniu transportu wirowości

W metodzie „splitting” w każdym kroku czasowym równanie (5.25) podlega dekompozycji na równanie adwekcji i dyfuzji. Zakładamy, że dla kroku czasowego Δt ewolucja pola wirowości najpierw podlegać będzie adwekcji, a następnie w tym samym kroku czasowym wirowość będzie modyfikowana w procesie dyfuzji. Takie podejście ma istotne konsekwencje w fizycznej interpretacji równań ruchu oraz wpływa na algorytm obliczania metodą wirów.

5.5.1.1. Przybliżone rozwiązanie problemu adwekcji wirowości

Zauważmy, że w przypadku równania adwekcji odpowiednikiem równania (5.38) jest równanie

$$\frac{d\omega}{dt}(\mathbf{X}(\alpha, t), t) = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (5.57)$$

Z tego wynika, że $\omega(\mathbf{X}(\alpha, t), t) = \omega(\mathbf{X}(\alpha, 0), 0) = \omega_0(\alpha)$, gdzie $\omega_0(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$ jest rozkładem wirowości w chwili początkowej. Wtedy wyrażenie (5.41), stanowiące dwa układy równań różniczkowych zwyczajnych redukuje się do jednego

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}_i(t)}{dt} = \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \omega_0(\alpha_j) h^2, \quad i, j \in \Lambda^h \quad (5.58)$$

Otrzymane wyrażenie (5.58) posłuży nam do wyznaczenia przybliżonych trajektorii $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$. Układ ten można w sposób przybliżony rozwiązywać dowolną metodą, np. jawną metodą Eulera. Wówczas ewolucja pola wirowości, wyrażona przemieszczaniem kropeł wirowych, będzie obliczana zgodnie ze schematem krokowym:

$$\tilde{\mathbf{X}}_i(t + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t) + \Delta t \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (5.59)$$

gdzie
$$\tilde{\mathbf{u}}_i(t) = \sum_j \mathbf{K}_\epsilon (\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_0(\alpha_j) h^2$$

Dokładniejsza procedura całkowania względem czasu układu równań różniczkowych (5.58), np. metodą Rungego–Kutty, prowadzić będzie do dokładniejszych wyników przemieszczeń wirów w czasie i wszystkich pozostałych wartości pól wektorowych – prędkości, funkcji prądu i wirowości.

Wyznaczone w ten sposób przybliżone trajektorie wykorzystywane są następnie do określenia wirowości, zgodnie z drugim równaniem w układzie (5.41), odpowiadającym teraz procesowi dyfuzji wirowości.

Korzystając z wyprowadzonych równań możemy wyznaczyć przybliżone wartości prędkości w dowolnym punkcie obszaru wynikające z adwekcji wirowości

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{K}_\epsilon (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_0(\alpha_j) h^2 \quad (5.60)$$

Podobnie wyznaczmy przybliżoną wartość pola wirowości

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_j f_\epsilon (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_0(\alpha_j) h^2 \quad (5.61)$$

i przybliżonej funkcji prądu

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_j G_\epsilon (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_0(\alpha_j) h^2 \quad (5.62)$$

5.5.1.2. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia dyfuzji wirowości

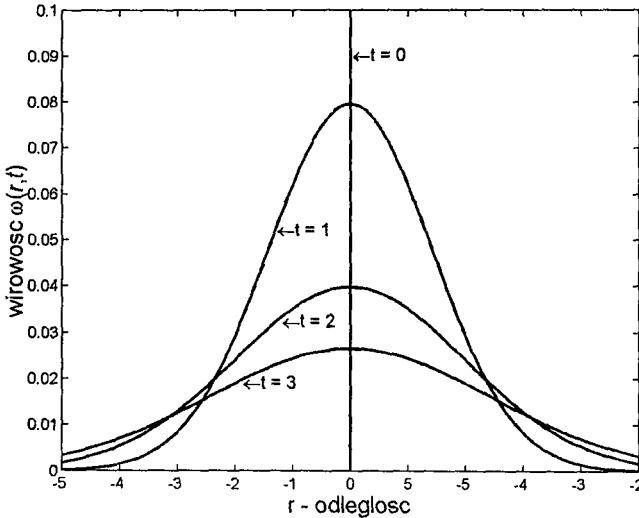
W przypadku równania adwekcji stwierdziliśmy, że wirowość cząstki jest zachowywana podczas przemieszczania się wzdłuż trajektorii. Tak jednak nie jest, jeśli rozważa się występowanie dyfuzji wirowości. Chorin (1973) zaproponował metodę rozwiązywania zagadnienia dyfuzji, w której wirowość ma charakter korpuskularny i trajektorie cząstek wirowych oraz materialnych są różne. Podstawą tej metody jest przyjęcie założenia, że cząstki wirowe podlegają w procesie dyfuzji ruchom Browna, podobnie jak to ma miejsce w gazach. Takie przyjęcie będzie wymagało stochastycznej interpretacji równania dyfuzji danego wzorem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (5.63)$$

Uwzględniając postać laplasjanu we współrzędnych biegunowych, osiowo-symetrycznych $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$, $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, rozwiązaniem fundamentalnym (5.63) w obszarze nieograniczonym jest funkcja Greena (Batchelor, 1967):

$$\omega(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi vt} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4vt}} = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi vt}} e^{-\frac{x_1^2}{4vt}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi vt}} e^{-\frac{x_2^2}{4vt}} \right) = G_1(x_1, t) G_1(x_2, t) \quad (5.64)$$

W chwili początkowej ($t = 0$) ω jest δ -Diraca i jest skupiona wokół punktu o współrzędnej $\mathbf{x} = 0$. Wraz ze wzrostem wartości t kształt funkcji $\omega(x_1, x_2, t)$ zmienia się na coraz bardziej płaski, co odpowiada dyfuzji wirowości w kierunku promienia $r = |\mathbf{x}|$. Kształt funkcji rozkładu wirowości dla kilku różnych wartości t przedstawiono na rysunku 5.7.



Rys. 5.7. Funkcje dyfuzji wirowości dla czasu $t = 0, 1, 2, 3$

Zauważmy, że (5.64) jest jednocześnie gęstością prawdopodobieństwa zmiennych losowych rozkładu normalnego Gaussa, o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji $2vt$. Można więc wyrazić rozwiązanie równania (5.63) w postaci losowego przemieszczenia cząstek wirowych $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$, które zależy teraz od wartości współczynnika lepkości kinematycznej ν .

Pokażemy na przykładzie wiru punktowego, że korzystając z metody przypadkowego błędzenia można symulować dyfuzję opisaną równaniem (5.64). W tym celu podzielmy wir punktowy o cyrkulacji (natężeniu wirowości) równej 1 na $N = 1000$ cząstek wirowych o cyrkulacji $1/1000$, a następnie każdej z nich nadajmy przemiesz-

czenie losowe η . Przemieszczenie losowe może być wyznaczone za pomocą maszynowych liczb pseudolosowych p_i z przedziału $(0,1)$ według wzoru (Lewis, 2005):

$$r_i = 2\sqrt{-vt \ln(p_i)} \quad (5.65)$$

Rozkład wirowości zbadajmy przez obliczenie liczby wirów N_j w pierścieniach wyznaczonych promieniami zależnymi od odległości od centrum wiru punktowego po czasie $t = 1$. Rozkład wirowości w poszczególnych pierścieniach będzie wyrażony wzorem:

$$\omega(r) = \frac{N_j}{N\pi(r_{j+1}^2 - r_j^2)} \quad (5.66)$$

gdzie N_j – liczba wirów, które znajdują się w pierścieniu pomiędzy promieniami r_j i r_{j+1} .

Dyfuzję wirowości określimy po czasie $t = 1$ dla dwóch sposobów przemieszczenia cząstek. W pierwszym sposobie cząstki będą przemieszczone w jednym kroku czasowym $dt = 1$, a w drugim w 10 krokach $dt = 0,1$. Na rysunku 5.8a przedstawiono położenie cząstek na płaszczyźnie w chwili $t = 0$, w której cząstki skupione są w początku układu współrzędnych (schemat górny) oraz po ich losowym przesunięciu w jednym kroku czasowym $dt = 1$ (schemat dolny). Wyniki eksperymentu przedstawiono na rysunku 5.8b w postaci rozkładu wirowości wyznaczonego ze wzoru (5.66) dla obydwu sposobów przemieszczenia cząstek – w jednym i dziesięciu krokach.

Na tym prostym przykładzie osiągnięto dobrą zgodność między rozwiązaniem teoretycznym a stochastycznym, przy czym im większa będzie liczba kroków, tym dokładniejszy będzie wynik symulacji. Zagadnienie zbieżności metody stochastycznej obliczania równania dyfuzji przedstawiono w punkcie 5.6.2.

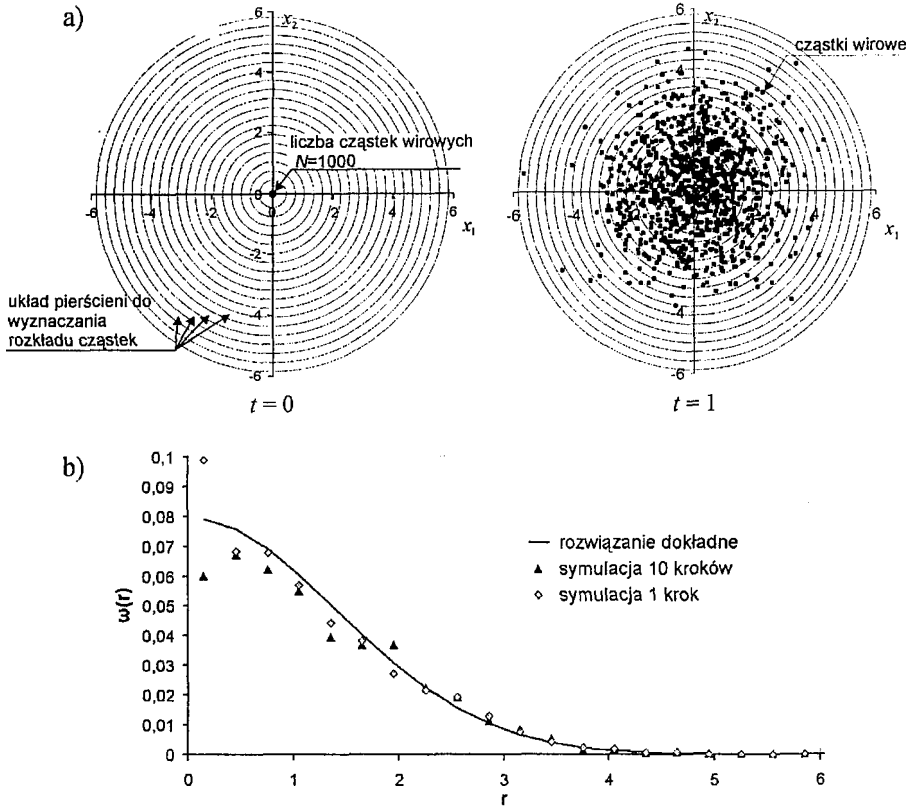
W celu uwzględnienia, że zachodzą jednocześnie dwa procesy – adwekcji i dyfuzji, wyznaczenie ewolucji pola wirowości w przedziale $(t, t + \Delta t)$ podzielimy na dwa etapy. W pierwszym wyznaczamy przemieszczenie cząstek wirowych zgodnie z procesem adwekcji. Traktujemy to przemieszczenie jako pośrednie, oznaczane przez $\tilde{\mathbf{X}}^*(t + \Delta t)$. Zgodnie ze wzorem (5.59) mamy wówczas:

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^*(t + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t) + \Delta t \tilde{\mathbf{u}}_i$$

Dalej możemy teraz w metodzie wirów obliczać ewolucję pola wirowości z uwzględnieniem dyfuzyjnego przemieszczenia cząstek wirowych $\eta = (\eta_1, \eta_2)$:

$$\tilde{\mathbf{X}}_i(t + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i^*(t + \Delta t) + \eta \quad (5.67)$$

Na podstawie wzoru (5.64) widać, im bardziej turbulentny będzie charakter ruchu tym mniejsza będzie wartość wariancji rozkładu normalnego i mniejszy będzie wpływ dyfuzji wirowości na trajektorie ruchu cząstek (kropel) wirowych.



Rys. 5.8. Dyfuzja wiru punktowego (a) symulowanego rozkładem 1000 cząstek wirowych po czasie $t = 1$ (1 krok czasowy), (b) porównanie obliczeń dyfuzji z równania (5.64) z metodą przypadkowego błędzenia z równania (5.66) dla czasu $t = 1$ osiągniętego po 1 i 10 krokach czasowych

Gdy znamy przybliżone trajektorie $\tilde{\mathbf{X}}_j(t)$, przybliżone wartości w całej przestrzeni R^2 pola wirowości funkcji prądu i pola prędkości zadajemy następująco:

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}, t) = -\sum_j f_\varepsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_0(\alpha_j) h^2 \quad (5.68)$$

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_j G_\varepsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_0(\alpha_j) h^2, \quad G_\varepsilon = G * f_\varepsilon \quad (5.69)$$

gdzie * oznacza operację splotu

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \tilde{\omega}_0(\alpha_j) h^2 \quad (5.70)$$

Przedstawiony algorytm przypadkowego błędzenia nie jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia dyfuzji za pomocą metody dekompozycji. Można bowiem zastosować

sposoby deterministyczne. Jeśli oznaczymy przez t czas, jaki upłynął od początku ewolucji pola wirowości aproksymowanego metodą wirów, to odpowiednie zagadnienie brzegowo-początkowe możemy sformułować następująco:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (5.71)$$

$$\omega(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\omega}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad \text{na brzegu } S \quad (5.73)$$

którego rozwiązanie w chwili Δt stanowi poszukiwaną wartość $\omega(t + \Delta t)$. Jako warunek początkowy w tym zagadnieniu występuje wirowość otrzymana z rozwiązania zagadnienia adwekcji wirowości, na przykład korzystając ze wzoru (5.61). Przybliżone rozwiązanie zagadnienia (5.71)–(5.73) można wyznaczać dowolną numeryczną metodą, kolejno dla każdego kroku czasowego metody wirów.

Suma rozwiązań adwekcji i dyfuzji stanowi rozwiązanie zagadnienia transportu wirowości, które można wykorzystać do określania zmiennego w czasie ciśnienia w całym obszarze przepływu. Wyznaczanie rozkładu ciśnienia stanowi podstawowy cel pracy.

5.5.2. Zagadnienia transportu wirowości w obszarach ograniczonych

W poprzednich punktach zagadnienie transportu wirowości było rozważane z założeniem, że adwekcja i dyfuzja wirowości występuje w całej płaszczyźnie (dwuwymiarowej przestrzeni), gdzie cząsteczki cieczy, będące nośnikami wirowości (krople wirowe) mogą się swobodnie przemieszczać. To ostatnie założenie nie jest spełnione w zagadnieniach przepływu w obszarach ograniczonych, jak np. w zagadnieniu (5.1)–(5.4), gdzie składowe prędkości na brzegu obszaru spełniają określone warunki. Z tego powodu musimy wprowadzić do przedstawionej metody rozwiązywania pewne modyfikacje. W tym celu posłużymy się pomysłem Helmholtza, polegającym na dekompozycji pola prędkości \mathbf{u} na dwie składowe

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v} \quad (5.74)$$

gdzie składowa \mathbf{w} ma zerową dywergencję, jest gładka i określona w całej przestrzeni, a składowa $\mathbf{v} = \nabla \phi$, jako gradientowa, jest bezwirowa. Ponieważ zarówno pole \mathbf{u} , jak i \mathbf{w} jest bezdywergencyjne, działając operatorem dywergencji na równanie (5.74), otrzymujemy:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.75)$$

Zastosujemy tę formułę do naszych rozważań ewolucji pola prędkości w przedziale $(t, t + \Delta t)$

1. Z danych początkowych w chwili t pola przepływu, generujemy za pomocą metody wirów pomocnicze, gładkie pole prędkości \mathbf{w} (określone w całej płaszczyźnie), które w rzeczywistości stanowi pierwszą składową wynikającą z rozkładu Helmholtza pola \mathbf{u} .
2. W chwili $t + \Delta t$ modyfikujemy to gładkie pole dodając pole gradientowe $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, gdzie φ spełnia równanie Laplace'a tak, aby wynikowe pole prędkości przepływu spełniało warunek brzegowy:

$$(\mathbf{w} + \nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} \quad \text{na brzegu } \partial D \quad (5.76)$$

gdzie \mathbf{n} – wektor normalny zewnętrzny do brzegu.

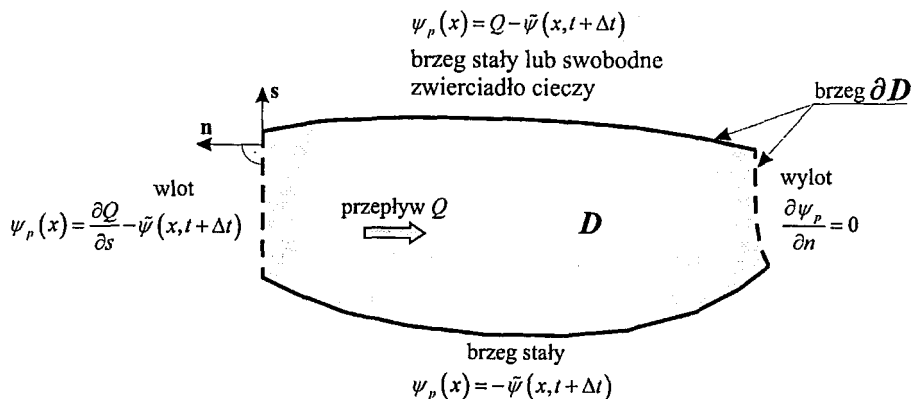
Rozwiązanie transportu wirowości wymaga teraz dodatkowo wyznaczenia potencjału ϕ pola prędkości w obszarze przepływu z warunkiem brzegowym $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = (\mathbf{U}_b - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}$.

Alternatywnym podejściem jest obliczanie potencjalnej funkcji prądu, która ma tę właściwość, że różnica wartości funkcji prądu pomiędzy dwoma punktami obszaru wyznacza wielkość strumienia cieczy przepływającego pomiędzy tymi punktami (por. równ. (3.73)). Podobnie jak dla funkcji potencjału rozumowanie prowadzi wówczas do rozwiązywania równania Laplace'a z warunkiem brzegowym Dirichleta:

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi_p &= 0 \quad \text{w obszarze } D \\ \psi_p(\mathbf{x}) &= -\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad \text{na brzegu } \partial D \end{aligned} \quad (5.77)$$

gdzie $\tilde{\psi}$ jest znaną wartością funkcji prądu na brzegu obszaru, wyznaczoną za pomocą równania (5.69); w metodzie deterministycznej wirów jest to równanie (5.42).

Przykład warunków brzegowych dla funkcji prądu przedstawiono na rysunku 5.9.



Rys. 5.9. Warunki brzegowe rozwiązania równania Laplace'a funkcji prądu

W efekcie, końcowe rozwiązanie trajektorii ewoluujących wirów otrzymujemy w postaci

$$\tilde{\mathbf{X}}_i(t + \frac{1}{2}\Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t) + \frac{1}{2}\Delta t(\mathbf{w}_i + \mathbf{v}_i) \quad (5.78)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_i(t + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t + \frac{1}{2}\Delta t) + \boldsymbol{\eta} \quad (5.79)$$

gdzie \mathbf{w}_i i \mathbf{v}_i – odpowiednio potencjalna i wirowa składowa prędkości, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ – dyfuzyjne przemieszczenie cząstek.

Jeżeli brzeg obszaru jest nieprzepuszczalny i nieruchomy, to dodatkowe potencjalne pole prędkości pozwala wyzerować normalną do brzegu składową prędkości.

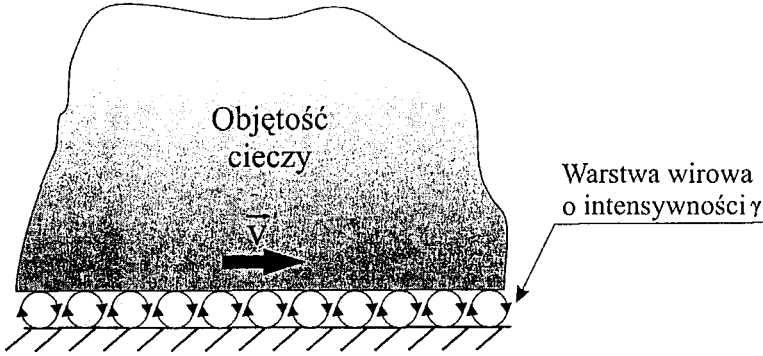
5.5.3. Generowanie wirowości wzdłuż brzegów

Generowanie wirów na ścianach kanału stanowiących brzeg nieruchomy i nieprzepuszczalny, występuje podczas przepływu cieczy nielepkiej modelowanych równaniem adwekcji wirowości oraz w przepływie cieczy lepkiej modelowanych równaniem adwekcji i dyfuzji wirowości. W tym pierwszym przypadku rozpatrywany jest zazwyczaj opływ ciała sztywnego i formowanie się śladu – ścieżki wirowej, która jest warstwą skoncentrowanej wirowości (Nagao i inni, 1997) za opływającą przeszkodą, np. walcem zanurzonym w przepływie, lub formowanie się innej postaci warstwy granicznej spływającej z ostrej krawędzi, np. płata skrzydła (Katz, 1981), (Kandil i inni, 1984), (Vezza i Galbraith, 1985), (Błażewicz i Styczek, 1993a, 1993b) lub łopatki turbiny. W zagadnieniach tych często dodatkowym zadaniem jest obliczanie siły oporu i unoszenia jako efektu powstającego gradientu ciśnienia. Szerszy opis tego zagadnienia podał w swojej pracy Lewis (2005).

Przypadek drugi, który tutaj omówimy w kontekście metody wirów, dotyczy przede wszystkim fizycznego zjawiska przylegania (adhezji) cieczy do nieprzepuszczalnego brzegu.

Lepkość cieczy powoduje, że brzeg obszaru ma istotny wpływ na pole prędkości. W miarę zbliżania się do brzegów mamy do czynienia z dużym gradientem prędkości w kierunku normalnym, aż do znikania prędkości na samym brzegu. Sprawia to, że elementy cieczy w bezpośrednim sąsiedztwie brzegu wprawiane są w ruch obrotowy i wspólnie tworzą warstwę wirową, co schematycznie przedstawiono na rysunku 5.10. Warstwa wirowa zmienia się z czasem, przenosząc wirowość do wnętrza obszaru zgodnie z przebiegiem zjawiska adwekcji-dyfuzji.

W równaniach przepływu (5.1)–(5.5) warunek określony na brzegu stałym jest warunkiem naturalnym jako efekt lepkości molekularnej, która zapewnia zerowanie prędkości na brzegu. W przypadku brzegu ruchomego warunek znikania prędkości zastępujemy warunkiem zgodności prędkości cieczy i brzegu.



Rys. 5.10. Model powstawania wirowości wzdłuż opływanego brzegu

W zagadnieniach transportu wirowości w obszarach ograniczonych równania (5.11)–(5.14) należy uzupełnić dodatkowym warunkiem brzegowym. Jednym z możliwych rozwiązań jest założenie znikania prędkości na brzegu, niestety taki rodzaj warunku z zastosowaniem metody wirów stwarza poważne trudności rachunkowe. Bardziej odpowiednie dla tej metody jest więc przyjęcie warunku, który fizycznie wynikałoby z faktu tworzenia się warstwy wirowej wzdłuż brzegu. W rozwiązaniach przybliżonych najczęściej jako warunek brzegowy występuje model generowania wirowości na brzegu i jej wprowadzania do obszaru przepływu.

W klasycznym sformułowaniu warstwa wirowa jest linią, wzdłuż której pole prędkości jest nieciągłe, występuje skok prędkości $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$, gdzie \mathbf{u}_+ i \mathbf{u}_- są prędkościami po obu stronach warstwy. Prowadzi to do koncentrowania się wirowości na warstwie, a równania różniczkowe Eulera opisujące przepływ rozumie się w sensie słabym.

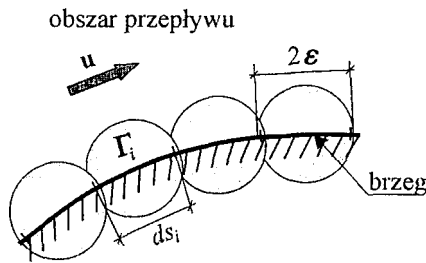
Pojęciem charakteryzującym natężenie wirowości warstwy jest tu jej intensywność $\gamma(\mathbf{x}, t)$, utożsamiana z gęstością wirowości. Jak to wyjaśniono w punkcie 5.8, natężenie warstwy wirowej, wyrażone w terminach cyrkulacji Γ pola prędkości, spełnia zależność $d\Gamma = \gamma ds$, gdzie ds jest długością infinytezymalną odcinka krzywej, a $d\Gamma$ jest cyrkulacją pola prędkości w otoczeniu odcinka tej krzywej. Wykażemy dalej, że można ją również wyrazić jako $\gamma = [\mathbf{u}_s]$, tzn. jako skok wektora \mathbf{u}_s prędkości stycznej do odcinka krzywej ds .

Ważną okolicznością, ze względu na poszukiwany model generowania wirowości jest to, że intensywność warstwy jest zachowywana (w sensie słabym) podczas jej unoszenia. Korzystając dalej z przyjętego modelu generowania warstwy wirowej jako podstawy w opisie zachowania się przepływu w okolicy brzegu, należy zauważyć, że po stronie brzegu prędkość styczna do warstwy będzie równa zero (jest to przyjmowany warunek brzegowy), a prędkość po stronie obszaru będzie wynikała z ogólnych równań opisujących przepływ i obliczana metodą wirów. Wyjaśnia to między innymi powstawanie dużego gradientu prędkości w pobliżu brzegu.

Pierwszym autorem modelu generowania wirowości wzdłuż brzegu był Chorin (1973), który zaproponował dyskretyzację warstwy wirowej odcinkami o określonej długości. Według jego metody w środkach odcinków zakłada się istnienie cząstek wirowych o cyrkulacji odpowiadającej długości danego odcinka warstwy, co przedstawiono na rysunku 5.11.

$$\Gamma_i = -[\mathbf{u}_{si}] \cdot ds_i \quad (5.80)$$

gdzie Γ_i jest cyrkulacją kropki wirowej utworzonej z warstwy wirowej odcinka brzegu ds_i i występującej na nim średniej składowej stycznej skoku prędkości $[\mathbf{u}_{si}]$. Wygenerowane w ten sposób cząstki podlegają adwekcji wzdłuż trajektorii cząstek cieczy, a następnie dyfuzji, zgodnie z jednym z przyjętych jej modeli.



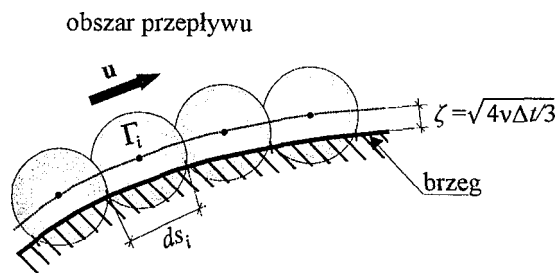
Rys. 5.11. Generowanie wirów na brzegach

W praktycznych obliczeniach obszar przepływu jest ograniczony przez wlot, wylot i ściany boczne obszaru. Jeśli wir przekroczy granicę wylotu, to zwykle jest eliminowany z obliczeń, można też zakładać warunek periodyczności prędkości (zgodności prędkości na wlocie i wylocie), który powoduje powracanie wirów do wnętrza obszaru przez wlot. Wiry, które przekroczą ściany boczne mogą być eliminowane lub odbijane do wnętrza obszaru, chociaż to drugie podejście może prowadzić do pojawiania się nadmiernej wirowości w obszarze. Należy jeszcze wspomnieć o brzegu mającym postać swobodnego zwierciadła wody. Ma on wtedy właściwość brzegu śliskiego, na którym nie występuje skok prędkości, a tym samym nie tworzy się na nim warstwa wirowa. Jedynie, gdy nad taką powierzchnią swobodną występuje obszar poruszający się z dużą prędkością gazu, można na nim rozważać występowanie naprężeń stycznych, których efektem jest pojawienie się warstwy wirowości.

Jeśli rozwiązujemy w sposób przybliżony zagadnienie transportu wirowości metodą dekompozycji, a jednym z jej etapów jest metoda przypadkowego błędzenia, to nowe wiry po wygenerowaniu na brzegu, w tym samym kroku obliczeniowym, są poddawane przemieszczeniom losowym, zgodnie z równaniem (5.67). Po przemieszczeniu szacunkowo połowa z nich wypadnie z obszaru. W konsekwencji utracona zostanie zero-wa wartość prędkości stycznej. Chorin (1978) zaleca w takim przypadku podwojenie cyrkulacji wszystkich wirów, aby zachować sumaryczną ilość wygenerowanej wirowości.

wości. Innym sposobem zachowania wirowości stosowanym m.in. przez Ghonia i in., (1982) jest zapobieżenie wypadaniu wirów ich odbiciem od brzegu obszaru. Kolejny sposób podał Porthouse i Lewis (1981), którzy zalecają dla tej metody generowanie wirów w obszarze w odległości od brzegu stanowiącej $2/3$ odchylenia standardowego występującego w metodzie przypadkowego błędzenia wynoszącego $\zeta = \sqrt{4\nu\Delta t/3}$ (Lewis 2005). Zabezpiecza to zdecydowaną ich większość przed wypadnięciem z obszaru.

Autor niniejszej pracy wykonał wiele testów, aby zbadać wpływ metody generowania wirowości i traktowania wirów przekraczających brzeg na gładkość rozwiązania pól wirowości i prędkości. Testy zostały wykonane na przykładzie płaskiego ustalonego przepływu przez pryzmatyczny kanał dla liczb Reynoldsa 100 i 10000. Wyznaczano wariancję całkowitej wirowości w obszarze przepływu i jej dodatniej i ujemnej składowej oraz wariancję pola wirowości i prędkości w wybranych punktach wewnątrz obszaru dla 1500 kroków czasowych. W wyniku tych badań autor stwierdził, że zastosowanie podwojonego natężenia wirowości generowanych wirów powoduje nadmierny wzrost wirowości w obszarze. W tej metodzie występuje również niestabilność procesu transportu wirowości, związana z pojawianiem się wirów o dużej wartości cyrkulacji, co z kolei niekorzystnie wpływa na gładkość obserwowanych pól prędkości i wirowości. Metoda odbijania wirów przekraczających brzeg do wnętrza obszaru zawsze prowadzi do nadmiernego wzrostu wirowości i deformacji pola prędkości w sąsiedztwie brzegu. Stosunkowo najlepszym sposobem jest generowanie wirów w pewnej odległości od brzegów w sposób zalecany przez Porthouse'a (rysunek 5.12). Ten zabieg także powoduje nadmierny wzrost wirowości (choć nie tak duży jak przy odbijaniu wirów) przejawiający się zwiększeniem prędkości wzdłuż osi przewodu kosztem jej wartości przy brzegach.



Rys. 5.12. Generowanie wirów w odległości od brzegu, wynoszącej $\zeta = \sqrt{4\nu\Delta t/3}$

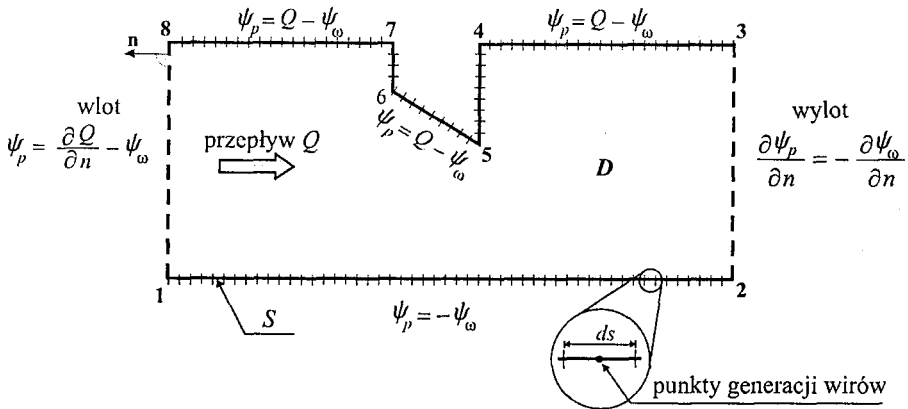
Autor niniejszej pracy zaproponował własną oryginalną metodę zachowania wirów wzdłuż brzegów, która wydaje się być najbardziej zgodna z istotą mechanizmu rozpatrywanego procesu dyfuzji. Wiry generowane są na brzegu, gdzie tworzy się warstwa wirowa, a następnie podlegają losowemu przemieszczeniu η . Cyrkulacja wirów, które

przekroczą brzeg, jest uwzględniana w obliczeniach przez czas trwania jednego kroku obliczeniowego, a następnie wir jest eliminowany. Takie podejście ma następujące zalety – rozwiązanie jest gładkie nie ma bowiem gwałtownych zmian wirowości związanych z wypadaniem wirów oraz zapewnia lepszą aproksymację prędkości stycznej do brzegu (badania wariancji wirowości podczas przepływu wykazały, że jest ona około dwa razy mniejsza niż w przypadku obliczeń metodą zalecaną przez Porthouse'a).

Podstawowy algorytm obliczeń metody wirów na przykładzie opływu zamknięcia zasuwowego:

Przez obszar D otoczony brzegiem S , przedstawiony na schemacie obliczeniowym (rys. 5.13), odbywa się przepływ Q .

Algorytm polega na wyznaczeniu z danych wejściowych, którymi są lokalizacje kropek wirowych $\tilde{\mathbf{X}}_j(t_k)$ o cyrkulacji Γ_j^k w chwili t_k , tych samych wielkości w chwili t_{k+1} według następującego schematu:



Rys. 5.13. Przykładowy schemat obliczeniowy dla metody wirów

1. Obliczenie brzegowych wartości funkcji prądu:

$$\tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k) = \sum_j G_\varepsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t_k)) \Gamma_j^k, \quad \mathbf{x} \in S \quad (5.81)$$

na podstawie lokalizacji kropek wirowych $\tilde{\mathbf{X}}_j(t_k)$ o cyrkulacji Γ_j^k w chwili t_k , niezbędnych do obliczenia na brzegach i wewnątrz obszaru składowej potencjalnej $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k)$ pola prędkości.

2. Potencjalne pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k)$ wyznaczamy w dwóch etapach:

Etap I. Rozwiązanie zagadnienia Laplace'a:

$$\nabla^2 \psi_p = 0 \quad \text{w obszarze } D \quad (5.82)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\left. \begin{aligned} \psi_p(\mathbf{x}) &= -\tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k), \quad \mathbf{x} \in S_{1-2} \\ \psi_p(\mathbf{x}) &= Q - \tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k), \quad \mathbf{x} \in S_{3-4-5-6-7-8} \\ \psi_p(\mathbf{x}) &= \frac{\partial Q}{\partial n} - \tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k), \quad \mathbf{x} \in S_{8-1} \end{aligned} \right\} \text{warunek Dirichleta} \quad (5.83)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_p(\mathbf{x})}{\partial n} = -\frac{\partial \tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k)}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S_{2-3} \right\} \text{warunek Neumanna}$$

Obliczenia $\psi_p(\mathbf{x}, t_k)$ wykonano metodą elementów brzegowych, zgodnie z relacją

$$\psi_p(\mathbf{x}, t_k) = \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi_p(\mathbf{y}, t_k) dy + \int_S G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \psi_p(\mathbf{y}, t_k) dy \quad (5.84)$$

Etap II. Wyznaczenie $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k)$ jako gradientu:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k) = \nabla_{\mathbf{x}} \psi_p, \quad \mathbf{x} \in D \cup S$$

za pomocą różniczkowania wyrazów po prawej stronie wzoru (5.84).

3. Wyznaczenie składowej wirowej $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k)$ pola prędkości na podstawie kropli wirowych. Obliczenia wykonywane są wewnątrz obszaru ($\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{X}}_i(t_k)$) i w środkach odcinków brzegowych ($\mathbf{x} \in S$) za pomocą wzoru:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t_0) = \sum_j \mathbf{K}_\epsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t_0)) \Gamma_j, \quad \tilde{\mathbf{X}}_j(t_0) - \text{położenie } j\text{-tej kropli wirowej} \quad (5.85)$$

4. Przemieszczenie „starych” wirów wynikające z etapu adwekcji, polegające na obliczeniu nowych lokalizacji wirów na podstawie składowych wirowej i potencjalnej pola prędkości, zgodnie z równaniem:

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^*(t_k + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t_k) + \Delta t(\mathbf{w}_i + \mathbf{v}_i) \quad (5.86)$$

gdzie \mathbf{w}_i i \mathbf{v}_i – składowe w punktach $\tilde{\mathbf{X}}_i(t_0)$

5. Wyznaczenie cyrkulacji Γ_i^{*k} „nowych” wirów, zapewniających spełnienie warunku zerowania składowej stycznej \mathbf{u}_s prędkości $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ na brzegu obszaru. W tym celu obliczamy:

$$\Gamma_i^{*k} = -\mathbf{u}_{si} \cdot d\mathbf{s}_i \quad (5.87)$$

gdzie \mathbf{u}_{si} – wektor prędkości \mathbf{u}_s w środku elementu brzegowego $d\mathbf{s}_i$.

6. Przemieszczenie wszystkich wirów („nowych” i „starych”) wynikające z etapu dyfuzji wirowości zgodnie z równaniem:

$$\tilde{\mathbf{X}}_i(t_{k+1}) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t_k + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i^* + \boldsymbol{\eta} \quad (5.88)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{X}}_i^* = \tilde{\mathbf{X}}_i^*(t_k + \Delta t)$ w przypadku „starych” wirów, $\tilde{\mathbf{X}}_i^*$ – środek odcinka $d\mathbf{s}_i$ w przypadku „nowych” wirów.

7. Eliminację wirów, które wypadły poza obszar D .
8. Powrót do punktu 1 z warunkiem początkowym, którym jest lokalizacja wirów $\tilde{\mathbf{X}}_j(t_{k+1})$ o cyrkulacji Γ_j^{k+1} .

W chwili $t_0 = 0$, od której rozpoczynają się obliczenia, można przyjąć założenie, że w obszarze D zaczął się nagle przepływ potencjalny \mathcal{Q} . Wówczas dla $t_0 = 0$ w obszarze przepływu nie ma wirów i kroki 1–4 algorytmu się pomija.

5.5.4. Brzeg ruchomy

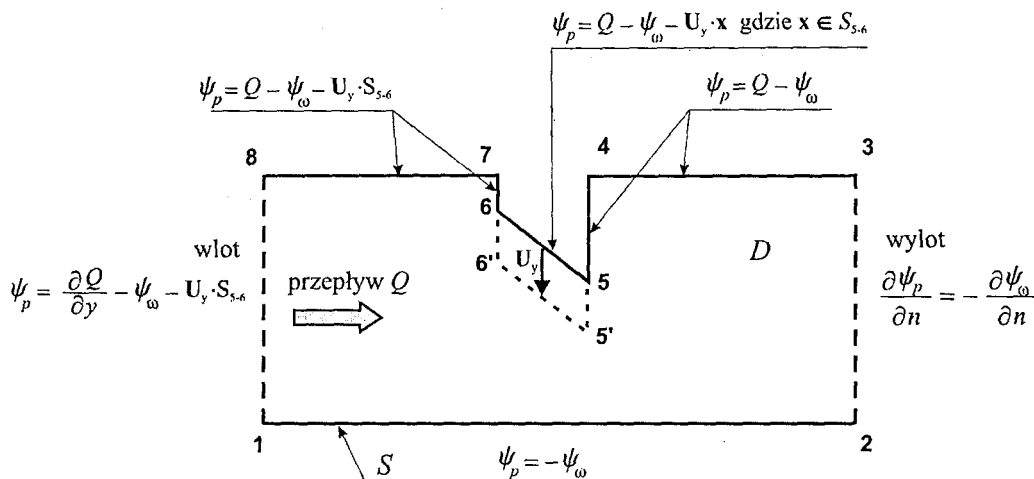
Dla większości rozważanych w niniejszej pracy przykładów obliczeniowych prędkość brzegu \mathbf{U}_b jest równa zeru. Analizując zagadnienie przepływu przez budowlę hydrotechniczną, musimy uwzględnić przypadek ruchomego brzegu, na którym $\mathbf{U}_b \neq 0$. Warunek ten dotyczy części brzegu, stanowiącego ruchome zamknięcie budowli wodnej. Zamknięcie znajduje się w ruchu wynikającym z zamykania lub otwierania otworu spustowego. Ruch ten traktować będziemy jako ruch bryły sztywnej składający się w ogólnym przypadku z przemieszczenia i obrotu zamknięcia, wobec czego prędkość brzegu $\mathbf{U}_b(\mathbf{x}_b, t)$ można wyrazić następującą relacją:

$$\mathbf{U}_b(\mathbf{x}_b, t) = \mathbf{U}_0(t) + (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_0) \boldsymbol{\Omega}_0(t) \quad (5.89)$$

gdzie \mathbf{x}_0 – środek obrotu bryły sztywnej, \mathbf{U}_0 – wektor prędkości liniowej przemieszczającego się zamknięcia, $\boldsymbol{\Omega}_0$ – prędkość kątowa względem środka obrotu, \mathbf{x}_b – współrzędna należąca do brzegu zamknięcia.

W zależności od rodzaju, zamknięcie hydrotechniczne porusza się albo ruchem postępowym, albo obrotowym, dlatego w obliczeniach należałoby uwzględniać tylko jeden składnik prawej strony równania (5.89). Przedstawimy to na przykładzie opływu zamknięcia zasuwowego poruszającego się ruchem postępowym, skierowanym pionowo z prędkością U_y . Algorytm obliczeń jest w tym przypadku następujący:

Przez D oznaczamy obszar otoczony przez brzeg $S = 1-2-3-4-5-6-7-8$, przez D' nowy obszar otoczony brzegiem $S' = 1-2-3-4-5'-6'-7-8$ wynikający z ruchu zamknięcia, zgodnie z rysunkiem 5.14.



Rys. 5.14. Schemat obliczeniowy metody wirów z warunkiem brzegu ruchomego

Punkty 5 i 6 przemieszczają się z prędkością U_y , osiągając po czasie Δt położenie $5'$ i $6'$. W konsekwencji tego ruchu, obliczając lokalizacje kroplek wirowych $\tilde{X}_j(t_{k+1})$ o cyrkulacji Γ_j^{k+1} w chwili t_{k+1} , na podstawie danych w chwili t_k , uwzględniamy:

- prędkość U_y na odcinku S_{4-5} , S_{5-6} , S_{6-7}
- zmianę geometrii obszaru przepływu z D na D'

1. Obliczenie brzegowych wartości funkcji prądu:

$$\tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k) = \sum_j G_\varepsilon(\mathbf{x} - \tilde{X}_j(t_k)) \Gamma_j^k, \quad \mathbf{x} \in S \quad (5.90)$$

odpowiadającej lokalizacji wirów $\tilde{X}_j(t_k)$ o cyrkulacji Γ_j^k w chwili t_k , niezbędnych do obliczenia na brzegach i wewnątrz obszaru składowej potencjalnej $v(\mathbf{x}, t_k)$ pola prędkości.

2. Potencjalne pole prędkości $v(\mathbf{x}, t_k)$ wyznaczamy w dwóch etapach:

Etap III. Rozwiązanie zagadnienia Laplace'a:

$$\nabla^2 \psi_p = 0 \quad \text{w obszarze } D \quad (5.91)$$

z warunkami brzegowymi przedstawionymi na schemacie obliczeniowym uwzględniającymi prędkość brzegu u_y na odcinku 5-6:

$$\begin{aligned}
 \psi_p(\mathbf{x}) &= -\tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k), \quad \mathbf{x} \in S_{1-2} \\
 \psi_p(\mathbf{x}) &= Q - \tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k), \quad \mathbf{x} \in S_{3-4} \cup S_{4-5} \\
 \psi_p(\mathbf{x}) &= Q - \tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k) - \mathbf{U}_y \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in S_{5-6} \\
 \psi_p(\mathbf{x}) &= Q - \tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k) - \langle \mathbf{U}_y, \bar{S}_{5-6} \rangle, \quad \mathbf{x} \in S_{6-7} \cup S_{7-8} \\
 \psi_p(\mathbf{x}) &= \frac{\partial Q}{\partial y} - \tilde{\psi}_\omega(\mathbf{x}, t_k) - \langle \mathbf{U}_y, \bar{S}_{5-6} \rangle \text{ dla } \mathbf{x} \in S_{8-9}
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

gdzie $\langle \mathbf{U}_y, \bar{S}_{5-6} \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów \mathbf{U}_y i \bar{S}_{5-6} .

Obliczenia $\psi_p(\mathbf{x}, t_k)$ wykonano metodą elementów brzegowych zgodnie z relacją

$$\psi_p(\mathbf{x}, t_k) = \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi_p(\mathbf{y}, t_k) dy + \int_S G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \psi_p(\mathbf{y}, t_k) dy \tag{5.93}$$

Etap IV. Wyznaczenie $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k)$ jako gradientu

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k) = \nabla_{\mathbf{x}} \psi_p, \quad \mathbf{x} \in D \cup S$$

za pomocą różniczkowania wyrazów po prawej stronie wzoru (5.93).

3. Wyznaczenie składowej wirowej $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k)$ pola prędkości odpowiadającej wirom za pomocą wzoru:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t_0) = \sum_j \mathbf{K}_\epsilon(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t_0)) \Gamma_j, \quad \tilde{\mathbf{X}}_j(t_0) - \text{położenie } j\text{-tej kropli wirowej} \tag{5.94}$$

wewnątrz obszaru ($\mathbf{x} = \mathbf{X}_i(t_k)$) i w środkach odcinków brzegowych ($\mathbf{x} \in S$).

4. Przemieszczenie „starych” wirów wynikające z etapu adwekcji polegające na obliczeniu nowych lokalizacji wirów na podstawie składowych wirowej i potencjalnej pola prędkości, zgodnie z równaniem:

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^*(t_k + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t_k) + \Delta t(\mathbf{w}_i + \mathbf{v}_i) \tag{5.95}$$

gdzie \mathbf{w}_i i \mathbf{v}_i – składowe w punktach $\tilde{\mathbf{X}}_i(t_0)$

5. Wyznaczenie cyrkulacji Γ_i^{**k} „nowych” wirów, zapewniających spełnienie warunku zerowania składowej stycznej \mathbf{u}_s prędkości $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ na brzegu obszaru, z dodaniem do niej prędkości \mathbf{U}_y na brzegach S_{4-5} i S_{6-7} oraz $\mathbf{U}_y \sin \alpha$ na brzegu S_{5-6} . W tym celu obliczamy:

$$\Gamma_i^{**k} = -\mathbf{u}_{si} \cdot ds_i \tag{5.96}$$

gdzie \mathbf{u}_{si} – wektor prędkości \mathbf{u}_s w środku elementu brzegowego ds_i .

6. Przemieszczenie wszystkich wirów („nowych” i „starych”), wynikające z etapu dyfuzji wirowości, zgodnie z równaniem

$$\tilde{\mathbf{X}}_i(t_{k+1}) = \tilde{\mathbf{X}}_i(t_k + \Delta t) = \tilde{\mathbf{X}}_i^* + \boldsymbol{\eta} \quad (5.97)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{X}}_i^* = \tilde{\mathbf{X}}_i^*(t_k + \Delta t)$ w przypadku „starych” wirów, $\tilde{\mathbf{X}}_i^*$ – środek odcinka ds_i w przypadku „nowych” wirów.

7. Eliminację wirów, które wypadły poza obszar D' , uznajemy bowiem, że w czasie Δt brzeg przemieścił się do nowego położenia wyznaczonego przez kontur $S' = 1-2-3-4-5'-6'-7-8$.
8. Powrót do punktu 1 z warunkiem początkowym, którym jest lokalizacja wirów $\tilde{\mathbf{X}}_j(t_{k+1})$ o cyrkulacji Γ_j^{k+1} w obszarze D' .

Interesującym przypadkiem związanym z eksploatacją zamknięć hydrotechnicznych jest ich ruch drgający spowodowany przepływem wody. W przypadku zasuwy płaskiej, dla której możliwe są drgania pionowe spowodowane sprężystym odkształceniem podwieszenia zamknięcia oraz poziome wynikające z jego ugięcia jako sprężystej płyty podpartej przegubowo w filarach, odpowiednie warunki brzegowe (5.89) można przedstawić w postaci funkcji trygonometrycznych:

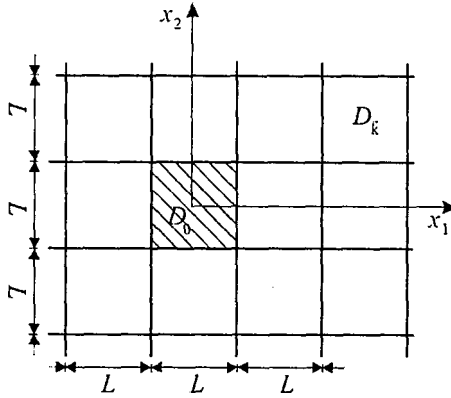
$$\begin{aligned} U_{b1}(t) &= 2\pi f_1 A_1 \cos(2\pi f_1 t) \\ U_{b2}(t) &= 2\pi f_2 A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta) \end{aligned} \quad (5.98)$$

gdzie A_i i f_i – amplitudy drgań zasuwy i ich częstotliwość (z uwzględnieniem masy towarzyszącej wody) w kierunku osi x_i , θ – przesunięcie fazowe między drganiami w obu kierunkach.

5.5.5. Brzeg periodyczny

Warunek periodycznego brzegu może być istotny w pewnych szczególnych przypadkach przepływu. Przykładem jest przepływ przez „komórkę” stanowiący powtarzalną strukturę większego obszaru, w którym przepływ jest wynikiem działania siły zewnętrznej, np. zewnętrznego gradientu ciśnienia. Wówczas zakłada się również periodyczność wszystkich fizycznych wielkości związanych z przepływem wraz z periodycznością warunków brzegowych wszystkich komórek w obszarze przepływu. Taki model powtarzalnej struktury stanowi podstawę teorii homogenizacji w ośrodkach periodycznych. Rozwiązanie analityczne lub numeryczne zagadnienia przepływu w pojedynczej komórce daje możliwość określenia parametrów efektywnych dla całego obszaru odpowiadających parametrom fizycznym pojedynczej komórki. Szczegóły dotyczące teorii homogenizacji można znaleźć m.in. w monografiach (Auriault i in., 1994, Strzelecki i in., 2007).

Zastosowanie warunku periodyczności w odniesieniu do stochastycznej metody wirów dyskretnych omówiono na przykładzie dwuwymiarowej struktury periodycznej. Przyjmijmy strukturę periodyczną składającą się z kwadratowych komórek o boku L przedstawioną na rysunku 5.15, przez którą odbywa się przepływ ciecży lepkiej opisany równaniem Helmholtza (podrozdz. 5.5).



Rys. 5.15 Struktura obszaru złożonego z periodycznych „komórek”

Periodyczność pola wirowości zapiszemy w postaci relacji

$$\omega(\mathbf{y}, t) = \omega(\mathbf{y} + \mathbf{k}L, t) \quad (5.99)$$

gdzie $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ – wektor położenia punktu w komórce D_0 , $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ wektor określający liczbę komórek o boku L w kierunku obu osi od początku układu współrzędnych (komórki 0).

Prędkość w dowolnym punkcie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ struktury wyznaczymy za pomocą wzoru Biota–Savarta (5.19)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \omega(\mathbf{z}, t) d\mathbf{z} \quad (5.100)$$

Dzięki periodyczności pola wirów, wyrażonej w (5.99) wzór (5.100) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \omega(\mathbf{z}, t) d\mathbf{z} = \sum_{\mathbf{k}} \int_{D_0} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{k}L) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ &= \int_{D_0} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{k}L) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Można wykazać (Cotet, 2000), że suma pod całką jest jednostajnie zbieżna dla $\mathbf{y} \in D_0$. W dowodzie wykorzystuje się symetrię jądra \mathbf{K} oraz następujący fakt

$$\begin{aligned} \int_{D_0} \omega(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \int_{D_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{-L/2}^{L/2} dx_2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 - \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ &= L \left[u_2 \left(\frac{L}{2}, t \right) - u_2 \left(-\frac{L}{2}, t \right) - u_1 \left(\frac{L}{2}, t \right) + u_1 \left(-\frac{L}{2}, t \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Wprowadzenie warunku periodyczności do metody wirów wymaga teraz dokonania niewielkich zmian. Przyjmujemy we wzorze (5.101)

$$\mathbf{K}^*(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{K}(\mathbf{x} + \mathbf{k}L) \quad (5.102)$$

dalej można postępować jak w opisanej wcześniej metodzie wirów, gdzie początkowe pole wirowe było niezerowe w obszarze ograniczonym (miało zwarty nośnik). Na przykład obliczenia stochastyczną wersją metody wirów dyskretnych w obszarze ograniczonym przeprowadzamy, zaczynając od regularyzacji jądra \mathbf{K}^* za pomocą funkcji wygładzającej f_ϵ , w wyniku czego otrzymujemy \mathbf{K}_ϵ^* , które po wstawieniu do równania (5.59) umożliwia obliczenie wartości prędkości w punktach dyslokacji wirów

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(t) = \sum_j \mathbf{K}_\epsilon^* \left(\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t) \right) \Gamma_j \quad (5.103)$$

Algorytm obliczeń dla obszaru periodycznego nie będzie różnić się w zasadzie od przedstawionego w punkcie 5.5.2. Jedyna różnica pojawi się w traktowaniu kropki wirowej, która opuszcza obszar obliczeniowy D_0 . Należy ją teraz wprowadzić ponownie do obszaru

$$\tilde{\mathbf{X}}_j(t) + \mathbf{k}L = \tilde{\mathbf{X}}_j^*(t) \quad (5.104)$$

dobierając wektor \mathbf{k} , zależnie od boku, przez który opuszcza ona obszar.

5.6. Uwagi dotyczące zbieżności stochastycznej metody wirów

Podstawowe znaczenie dla przybliżonego rozwiązywania zagadnień ma analiza błędu aproksymacji zastosowanej metody. W metodzie wirów stosowanej dla aproksymacji równania Naviera–Stokesa, temu problemowi poświęca się ciągle bardzo wiele uwagi, zob. Chorin i Marsden (1990), Beale i Majda (1982a, 1982b, 1985), (Majda i Bertozzi, 2002). Najlepsze właściwości aproksymacyjne w tej klasie metod ma metoda losowa, zaproponowana po raz pierwszy przez Chorina (1973). Tutaj dyskretyzację zagadnienia po zmiennej czasowej przeprowadza się w dwóch etapach.

W pierwszym etapie dyskretyzuje się równanie Eulera, modelujące zjawiska adwekcji wirowości, a w drugim etapie równanie przewodnictwa ciepła, modelujące tu zjawiska dyfuzji wirowości. Równania Eulera, odpowiadające przypadkowi braku lepkości w równaniu ogólnym, dyskretyzuje się za pomocą deterministycznych metod wirów, natomiast równanie przewodnictwa ciepła symulowane jest za pomocą losowych, niezależnych gaussowskich ruchów wirowości. Cały proces postępowania, z zastosowaniem losowych metod wirów można uważać za uogólnienie deterministycznych metod dla równania Eulera, polegające na dodawaniu wyrazu losowego – gaussowskiego ruchu losowego wirowości. Zagadnienie wyznaczenia rzędu zbieżności tych metod jest ciągle intensywnie badane. Najbardziej znaczące wyniki na tym polu uzyskali Hald (1987), Beale i Majda (1985), Majda i Bertozzi (2002). Z powodu nieliniowego charakteru równań, opisujących przepływ cieczy lepkiej, analiza błędu aproksymacji jest trudna i wymaga stosowania zaawansowanych pojęć, technik i twierdzeń matematycznych, między innymi: teorii przestrzeni Sobolewa, dystrybucji, metod analizy harmonicznej, twierdzenia Calderona–Zygmunda.

5.6.1. Adwekcja wirowości

W niniejszej pracy na przykładzie wybranego zagadnienia

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \omega &= \nu \Delta \omega \\ \omega(\mathbf{x}, 0) &= \omega_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.105)$$

gdzie $\omega(\mathbf{x}, t)$ – wirowość przepływu w R^2 , $\omega_0(\mathbf{x})$ – rozkład wirowości w chwili $t = 0$ o zwartym nośniku.

W pierwszym etapie zajmujemy się dyskretyzacją równania Eulera związanego z zagadnieniem (5.105)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \omega = 0$$

Ten proces był opisany w rozdziałach 5.3 i 5.5 i zaczynał się od sformułowania równoważnego równania różniczkowo-całkowego dla trajektorii cząstek

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\alpha, t) = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{X}(\alpha, t) - \mathbf{X}(\alpha', t)) \omega_0(\alpha') d\alpha'$$

z warunkiem początkowym $\mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha \in R^2$.

Metoda wirów polega teraz na dyskretyzacji tego równania z jednoczesnym zastąpieniem całkowego jądra \mathbf{K} , jądrem zregulowanym. W rezultacie otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}_i(t)}{dt} = \sum_{j \in \Lambda^h} \mathbf{K}_\varepsilon (\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \omega_j h^2 \quad (5.106)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \mathbf{K} * f_\varepsilon, \quad f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-2} f\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad \int_{R^2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad \omega_j = \omega_0(\alpha_j)$$

a $\Lambda^h = \{\alpha_i : \alpha_i = h \cdot i = (i_1, i_2)h, \quad i = (i_1, i_2) \in Z^2\}$ jest przyjętą siatką w R^2 .

Ponieważ początkowy rozkład wirowości $\omega_0(\mathbf{x})$ ma zwarty nośnik, więc układ ma skończoną liczbę równań. Wyznaczone z układu (5.106) $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$ traktujemy dalej jako przybliżone trajektorie cząstek $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{X}(\alpha_i, t)$.

W dalszym etapie konstruujemy ciągłe i dyskretne pola prędkości za pomocą wzorów

$$\tilde{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \omega_j h^2, \quad \tilde{\mathbf{u}}^h(t) = \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon (\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \omega_j h^2$$

Jak zasygnalizowano już w rozdziale 5.4.2, wybór odpowiednio regularnej funkcji wygładzającej f ma podstawowe znaczenie dla dokładności metody. Zwykle takich funkcji poszukuje się w klasach $M^{L,m}$ zdefiniowanych za pomocą warunków:

- (i) $\int_{R^2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1,$
- (ii) $\int_{R^2} \mathbf{x}^\beta f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad 1 \leq |\beta| \leq m-1,$
- (iii) $f \in C^L(R^2),$
- (iv) $f(\mathbf{x}) (1 + |\mathbf{x}|^2)^m \rightarrow 0, \quad \text{gdy } \mathbf{x} \rightarrow \infty, \quad 0 \leq i \leq L, \quad j \geq 0.$

Analiza numeryczna zbieżności metody wirów, podobnie jak dla innych metod numerycznych, składa się z dwóch elementów: analizy zgodności i stabilności. W tym celu wprowadza się do rozważań pomocnicze pole prędkości zwane polem odniesienia, określone wzorem

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon (\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)) \omega_j h^2.$$

Jego dyskretnym odpowiednikiem jest wtedy pole

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i(t), t) = \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_j(t)) \omega_j h^2$$

Interesujący nas błąd metody, różnicę między polem dokładnym $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a przybliżonym, rozkładamy na dwa składniki

$$\text{err}(\mathbf{x}, t) = |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| \leq |\tilde{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)| + |\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|$$

z których pierwszy jest związany z właściwością stabilności metody, a drugi z jej zgodnością. Dla części odpowiedzialnej za zgodność, jedno z najlepszych znanych oszacowań jest postaci:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \max_{\mathbf{x} \in R^2} |\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| \leq C \left[\varepsilon^m + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^L \varepsilon \right]$$

jeżeli funkcja wygładzająca $f \in M^{L,m}$ (Anderson i Greengard, 1988).

Natomiast dla części odpowiedzialnej za stabilność, istotne jest następujące oszacowanie.

Jeżeli

$$\max_{j: t \in \Lambda^h} |\tilde{\mathbf{X}}_j(t) - \mathbf{X}_j(t)| \leq \varepsilon$$

dla wszystkich t , $0 \leq t \leq T_* \leq T$, to

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_i^h(t) - \mathbf{u}_i^h(t)\|_{L^p_h} &\leq C \|\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \mathbf{X}_i(t)\|_{L^p_h} \\ \|\tilde{\mathbf{u}}^h(\cdot, t) - \mathbf{u}^h(\cdot, t)\|_{L^p_i(B(R_0))} &\leq C \|\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \mathbf{X}_i(t)\|_{L^p_h} \end{aligned}$$

jednocześnie dla $t \in [0, T_*]$, gdzie dyskretna norma L^p , $\|\mathbf{v}_i\|_{L^p_h} = \left(\sum |\mathbf{v}_i|^p h^2 \right)^{1/p}$ i $B(R_0)$ jest kołem o promieniu R_0 .

Dowody podanych faktów są trudne, uciążliwe rachunkowo i jak wspomniano wcześniej wymagają zaawansowanych technik matematycznych.

Łącząc te dwa fakty, nietrudno już teraz uzasadnić podstawowe dla określenia rzędu zbieżności metody wirów twierdzenie:

Twierdzenie 1

Załóżmy, że pole prędkości $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ jest dostatecznie gładkie, początkowa wirowość ma ograniczony nośnik oraz funkcja wygładzająca $f \in M^{L,m}$. Wtedy dla dostatecznie małych h i ε , $\varepsilon \geq h^q$, $q < 1$, mamy:

(i) zbieżność trajektorii

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \mathbf{X}_i(t)\|_{L^p_h} \leq C \left[\varepsilon^m + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^L \varepsilon \right]$$

(ii) zbieżność dyskretnego pola prędkości

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \tilde{\mathbf{u}}_i^h(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_i(t), t) \right\|_{L_i^p} \leq C \left[\varepsilon^m + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^L \varepsilon \right]$$

(iii) zbieżność ciągłego pola prędkości

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \tilde{\mathbf{u}}(\cdot, t) - \mathbf{u}(\cdot, t) \right\|_{L(B(R_0))} \leq C \left[\varepsilon^m + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^L \varepsilon \right]$$

Tutaj $R_0 > 0$ jest dowolnym skończonym promieniem, stała C zależy jedynie od T , L , m , p , q , R_0 , średnicy nośnika wirowości $\omega_0(x)$ i od założonej liczby pochodnych (rzędu gładkości) pola prędkości $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

5.6.2. Zbieżność metody przypadkowego błędzenia

Drugi etap dyskretyzacji równań N-S, uwzględniający wpływ dyfuzji, opiera się na probabilistycznej interpretacji tego zjawiska jako współdziałających procesów dyfuzji. Punktem wyjścia do rozważań jest spostrzeżenie, że wyjściowe zagadnienie (5.105), sformułowane w terminach wirowości, można również zapisać w postaci (Long, 1988)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = \nu \nabla^2 \omega \quad (5.107)$$

W teorii procesów stochastycznych równanie (5.107) ma ważną interpretację. W celu jej przedstawienia rozważamy uogólnienia trajektorii cząstek $\mathbf{X}(t, \alpha)$, $\alpha \in R^2$ odpowiadających równaniu (5.107) w postaci procesu stochastycznego dyfuzji $\mathbf{X}(t, \alpha, \sigma)$, $t > 0$, $\alpha \in R^2$, określonego na pewnej przestrzeni probabilistycznej Ω ($\sigma \in \Omega$), a zdefiniowanego za pomocą równania stochastycznego

$$d\mathbf{X}(t, \alpha) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \alpha), t) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{W}(t) \quad (5.108)$$

gdzie $\mathbf{W}(t)$ jest standardowym procesem Wienera (ruchem Browna) w R^2 , Ω jest przestrzenią probabilistyczną. Dla uproszczenia zapisu tam, gdzie to nie prowadzi do nieporozumień, nie piszemy argumentu probabilistycznego σ w oznaczeniach procesów.

Z uwagi na prostą formę składnika niedeterministycznego równanie to można przedstawić w formie całkowej

$$\mathbf{X}(t, \alpha) = \alpha + \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \alpha), s) ds + \sqrt{2\nu} \mathbf{W}(t) \quad (5.109)$$

prościej niż w przypadku ogólnego równania stochastycznego, nie ma bowiem potrzeby korzystania z całki stochastycznej Ito lub innych podobnych całek stochastycznych. Ponieważ proces Wienera ma ciągłe trajektorie z prawdopodobieństwem jeden, ostatecznie równanie może być rozwiązywane deterministycznie dla każdej poszczególnej ciągłej trajektorii $\xi(t)$ procesu $\mathbf{W}(t)$ z osobna, co prowadzi do deterministycznego równania całkowego typu Volterra

$$\xi(t, \alpha) = \alpha + \int_0^t \mathbf{u}(\xi(s, \alpha), s) ds + \sqrt{2\nu} \xi(t) \quad (5.110)$$

gdzie $\xi(t, \alpha) = \mathbf{X}(t, \alpha; \sigma)$, dla $\sigma \in \Omega$, jest trajektorią procesu dyfuzji.

Zakładając dostateczną dla tego typu równań regularność pola prędkości \mathbf{u} , równanie całkowe (5.110) ma dokładnie jedno ciągłe rozwiązanie. Ta szczególna właściwość trajektorii procesu dyfuzji $\mathbf{X}(t, \alpha)$, jako ciągłych rozwiązań odpowiedniego równania całkowego ma podstawowe znaczenie dla zbieżności metody przybliżonej.

Podstawowa relacja między równaniem parabolicznym (5.107), a równaniem stochastycznym (5.108) polega na tym, że rozwiązanie podstawowe $G(\mathbf{x}, t; \alpha, 0)$ równania (5.107) jest jednocześnie gęstością prawdopodobieństwa przejścia dla procesu dyfuzji $\mathbf{X}(t, \alpha)$, tzn. $G(\mathbf{x}, t; \alpha, s)$ jest gęstością prawdopodobieństwa, że cząstka znajdująca się w chwili s w punkcie $\alpha \in R^2$ osiągnie punkt \mathbf{x} w czasie $t > 0$.

Można to zilustrować jeszcze nieco inaczej. Rozważmy mianowicie gęstość rozkładu N cząstek w przestrzeni R^2 w chwili $t=0$, $p_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^2$, tzn. dla dowolnego małego kwadratu o środku w punkcie \mathbf{x} i boku $\Delta\mathbf{x}$ liczba cząstek ΔN w kwadracie spełnia relację

$$p_0(\mathbf{x})(\Delta\mathbf{x})^2 \approx \frac{\Delta N}{N} \quad (5.111)$$

Jeśli te cząstki są poddane procesowi dyfuzji zgodnie z procesem $\mathbf{X}(t, \alpha)$ zadany równaniem (5.108), to gęstość rozkładu cząstek w chwili $t > 0$ ma postać

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{R^2} G(\mathbf{x}, t; \alpha, 0) p_0(\alpha) d\alpha \quad (5.112)$$

Z drugiej strony $p(\mathbf{x}, t)$ jest jedynym rozwiązaniem równania deterministycznego (5.107) z warunkiem początkowym $p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x})$. Spostrzeżenia te sugerują możliwość wyznaczania funkcji $p(\mathbf{x}, t)$ i innych jej transformacji, jak na przykład $\mathbf{K}_\epsilon^* p(\mathbf{x}, 0)$ w sposób przybliżony za pomocą symulacji procesów stochastycznych.

Jedyną różnicą, z którą się spotykamy porównując interpretację probabilistyczną z rzeczywistym procesem transportu wirowości, jest to, że teraz wirowość, w odróż-

nieniu od gęstości prawdopodobieństwa, może przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Nie ma to jednak żadnego wpływu na tok rozumowania. Wystarczy w odpowiadających wzorach zamienić $p(\mathbf{x}, t)$ na $\omega(\mathbf{x}, t)$, aby otrzymać poszukiwane rozwiązanie dla dyfuzji wirowości.

Jeżeli trajektorie są wyznaczone za pomocą równania stochastycznego, to pole prędkości jest następujące

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\
 &= \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{R^2} G(\mathbf{y}, t; \boldsymbol{\alpha}, 0) \omega(\boldsymbol{\alpha}, 0) d\boldsymbol{\alpha} d\mathbf{y} \\
 &= \int_{R^2} \left[\int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) G(\mathbf{y}, t; \boldsymbol{\alpha}, 0) d\mathbf{y} \right] \omega(\boldsymbol{\alpha}, 0) d\boldsymbol{\alpha} \\
 &= \int_{R^2} E[\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}))] \omega(\boldsymbol{\alpha}, 0) d\boldsymbol{\alpha},
 \end{aligned} \tag{5.113}$$

gdzie EY oznacza wartość oczekiwaną wektora losowego $Y(\boldsymbol{\sigma})$.

W ten sposób równanie stochastyczne (5.108) może być teraz zapisane w postaci

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}), t) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{W}(t) \\
 &= \left\{ \int_{R^2} E'[\mathbf{K}(\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}'))] \omega(\boldsymbol{\alpha}', 0) d\boldsymbol{\alpha}' \right\} dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{W}(t)
 \end{aligned} \tag{5.114}$$

gdzie $E'[\mathbf{K}(\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}'))]$ jest równe wartości oczekiwanej $E[\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha}'))]$ obliczonej dla $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\alpha})$.

Równanie (5.114) odpowiada podstawowemu równaniu różniczkowo-całkowemu dla cieczy nielepkiej ($\nu = 0$). Prowadzi to w naturalny sposób do sformułowania metody przybliżonej dla przypadku cieczy lepkiej. Wystarczy tylko trajektorie deterministyczne $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$ i $\mathbf{X}_i(t)$ w równaniach (5.41)–(5.45) zamienić odpowiednimi procesami dyfuzji, oznaczanymi dalej tymi samymi symbolami $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$ i $\mathbf{X}_i(t)$. W ten sposób $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$ jest rozwiązaniem układu równań stochastycznych

$$d\tilde{\mathbf{X}}_i(t) = \left\{ \sum_j \mathbf{K}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \tilde{\mathbf{X}}_j(t)) \omega_j h^2 \right\} dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{W}_i(t) \tag{5.115}$$

z warunkami początkowymi $\mathbf{X}_i(0) = \boldsymbol{\alpha}_i = h \cdot i$, $i \in \Lambda^h$, a $\mathbf{X}_i(t)$ jest rozwiązaniem układu równań stochastycznych

$$d\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_i(t), t)dt + \sqrt{2\nu}d\mathbf{W}_i(t) \quad (5.116)$$

z warunkami początkowymi $\mathbf{X}_i(0) = \boldsymbol{\alpha}_i = h \cdot i \in \Lambda^h$, gdzie $\mathbf{W}_i(t) = \mathbf{W}(t, \boldsymbol{\alpha}_i; \sigma)$ są niezależnymi, standardowymi procesami Wienera w R^2 .

Dalej prezentujemy jeden z najlepszych wyników dotyczących oszacowania błędów aproksymacji metodą stochastyczną (Long, 1988)

Twierdzenie 2

Niech będą spełnione założenia **twierdzenia 1**. Wtedy istnieją stałe C' , $C'' > 0$, które zależą jedynie od parametrów wymienionych w **twierdzeniu 1** takie, że następujące oszacowania:

(i) dla trajektorii cząstek

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \tilde{\mathbf{X}}_i(t) - \mathbf{X}_i(t) \right\|_{L_h^p} \leq C \left[\varepsilon^m + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^L \varepsilon + h |\ln h| \right]$$

(ii) dla dyskretnego pola prędkości

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \tilde{\mathbf{u}}_i^h(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_i(t), t) \right\|_{L_h^p} \leq C \left[\varepsilon^m + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^L \varepsilon + h |\ln h| \right]$$

(iii) dla ciągłego pola prędkości

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \tilde{\mathbf{u}}(\cdot, t) - \mathbf{u}(\cdot, t) \right\|_{L_h^p(B(R_0))} \leq C \left[\varepsilon^m + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^L \varepsilon + h |\ln h| \right]$$

zachodzą na zbiorach o mierze prawdopodobieństwa większej niż $1 - h^{C''}$, o ile $C \geq C''$.

Uwaga. W wyborze stałej C jest pewna dowolność. Przyjmując w podanych wzorach większą wartość stałej $C > 0$, otrzymujemy zbieżność metody przybliżonej na zbiorach o większej mierze. Jednocześnie pogarszają się wtedy oszacowania błędu. Stąd w praktycznych obliczeniach w wyborze tej stałej musimy podjąć kompromis między prawdopodobieństwem a dokładnością metody.

Dowód zbieżności metody stochastycznej obliczania równania dyfuzji można znaleźć w pracach (Majda i Bertozzi, 2002) i (Ying i Zhang, 1997).

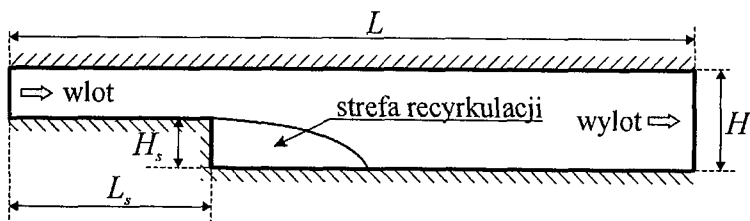
5.7. Przykłady obliczeń pól prędkości i wirowości metodą kropel wirowych

Przykładowe obliczenia wykonano na podstawie autorskich algorytmów i programów komputerowych. Program metody wirów o nazwie MetVir napisany został w języku Fortran 95 pod kompilatorem początkowo firmy Lahey wersja 5.6, a następnie firmy Intel wersja 8. Procedury służące wizualizacji wyników obliczeń w postaci wykresów położenia wirów, położenia linii prądu, rozkładów pola wirowości i prędkości napisano w programie MatLab wersja R2007a.

Działanie metody wirów sprawdzono przez porównanie z wynikami badań eksperymentalnych i obliczeń numerycznych innych autorów. Do porównania wybrano dwa najczęściej analizowane przypadki przepływu, w których występuje strefa recyrkulacji i niestabilność warstwy granicznej. Pierwszym z nich jest przepływ przez stopień (kanał z nagłym poszerzeniem), a drugim swobodny opływ walca. Oba rodzaje przepływów były wielokrotnie badane eksperymentalnie ze względu na ich istotne znaczenie w zagadnieniach inżynierskich i dlatego nadają się do weryfikacji metody numerycznej.

5.7.1. Strefa recyrkulacji w kanale ze stopniem

Analiza zjawiska przepływu przez kanał ze stopniem (rys. 5.16), za którym powstaje strefa recyrkulacji, stanowi punkt odniesienia do weryfikacji metod obliczeniowych wielu inżynierskich obszarów, takich jak: hydraulika obiektów piętrzących, przewodów zamkniętych i mechanika maszyn przepływowych. Zagadnienie kontroli odrywania strumienia i jego powtórnego przylegania do ściany przewodu oraz znajomość długości powstającej strefy w całym zakresie liczb Reynoldsa ma niebagatelne znaczenie ze względu na trwałość, wydajność i bezpieczeństwo urządzeń hydrotechnicznych.



Rys. 5.16. Schemat kanału ze stopniem

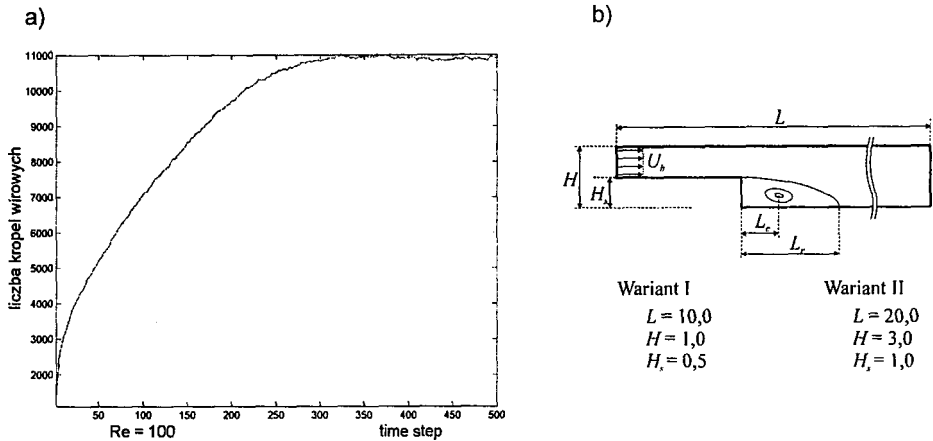
Przepływ przez stopień (ang. *backward-facing step*) był przedmiotem licznych badań eksperymentalnych dotyczących długości strefy recyrkulacji i profili prędkości poniżej stopnia, wykonywanych początkowo w przypadku przepływu laminarnego do

wartości liczb $Re = 229$ (Denham i Patrick, 1974) i $Re = 400$ (Hojni, 1974), a następnie wraz z rozwojem urządzeń pomiarowych dla liczb Reynoldsa odpowiadających ruchowi przejściowemu i turbulentnemu. Armaly i inni (1982) przeprowadził badania dla liczb $Re = 100-8000$, a Yoshioka i inni (2001) określał wpływ zaburzeń periodycznych przepływu na długość strefy oraz wielkość naprężeń turbulentnych dla $Re = 3700$. Wyniki badań eksperymentalnych, dotyczących m.in. rozkładu ciśnienia na ścianach przewodu za stopniem, zostały podane w pracy Auret i inni (1987) dla $Re = 42000$.

Zagadnienie powstawania strefy recyrkulacji oraz występujących za stopniem rozkładów prędkości badane było również różnymi metodami numerycznymi, a wyniki porównywano do wyników przedstawionych badań eksperymentalnych. Metodę wirów zastosowali Ghoniem i Sethian (1986), Sethian i Ghoniem (1987), Kudela i Kostecki (1992) dla liczb $Re = 100-5000$, metodę elementów skończonych z wykorzystaniem modelu ruchu turbulentnego $K-\varepsilon$ Auret i inni (1987), ten sam model oraz metodę LES, ale rozwiązywaną według metody objętości skończonych dla liczb $Re = 6000$ i 38000 zastosował Neto i inni (1993). Vellando i inni (2002) wykorzystał metodę elementów skończonych oraz zlinearyzowaną postać równań Naviera–Stokesa do wyznaczenia przepływu przez stopień dla $Re = 100-1400$. Barber i Fonty (2002) przedstawili zastosowanie deterministycznej metody wirów do określenia rozkładów prędkości w przypadku ruchu laminarnego dla $Re = 229$.

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki numerycznego modelowania przepływu przez stopień dla dwóch przypadków: długości strefy recyrkulacji i rozkładów prędkości. Model numeryczny przedstawiono w układzie bezwymiarowym, przyjmując nowe bezwymiarowe zmienne wektora prędkości \mathbf{u} znormalizowane względem jednostkowej prędkości U na wlocie do kanału, współrzędne kartezjańskie $\mathbf{x} = (x, y)$ odniesiono do charakterystycznej wysokości stopnia H_s , liczbę Reynoldsa określono za pomocą wyrażenia $Re = Uh_s/\nu$, gdzie ν jest kinematycznym współczynnikiem lepkości.

Obliczenia wykonano stochastyczną metodą wirów według zasad opisanych w punkcie 5.5.3. Rozkład potencjalnej prędkości wyznaczano na podstawie funkcji prądu metodą elementów brzegowych, zgodnie z założeniami przedstawionymi w punkcie 5.5.2. W obliczeniach przyjmowano, że w kanale, w chwili $t_0 = 0$, zaczął się nagle przepływ potencjalny z prostokątnym profilem prędkości U_b na wlocie. Wówczas dla $t_0 = 0$ w obszarze przepływu nie ma wirów, które podlegają generacji wzdłuż brzegów kanału w następnym kroku czasowym na podstawie składowej stycznej prędkości. W kolejnych krokach czasowych następuje wzrost liczby kropel wirowych o ujemnej i dodatniej cyrkulacji, które przemieszczają się pod wpływem pola prędkości. Jednocześnie część wirów podlegała eliminacji, gdy wskutek przemieszczenia znalazły się poza brzegami obszaru przepływu, zgodnie z opisem zamieszczonym w punkcie 5.5.3. Obliczenia kończono, gdy liczba wirów ustalała się na pewnym poziomie, wykazując tylko niewielkie wokół niego fluktuacje (rys. 5.17 a), co oznaczało ustalenie warunków przepływu.



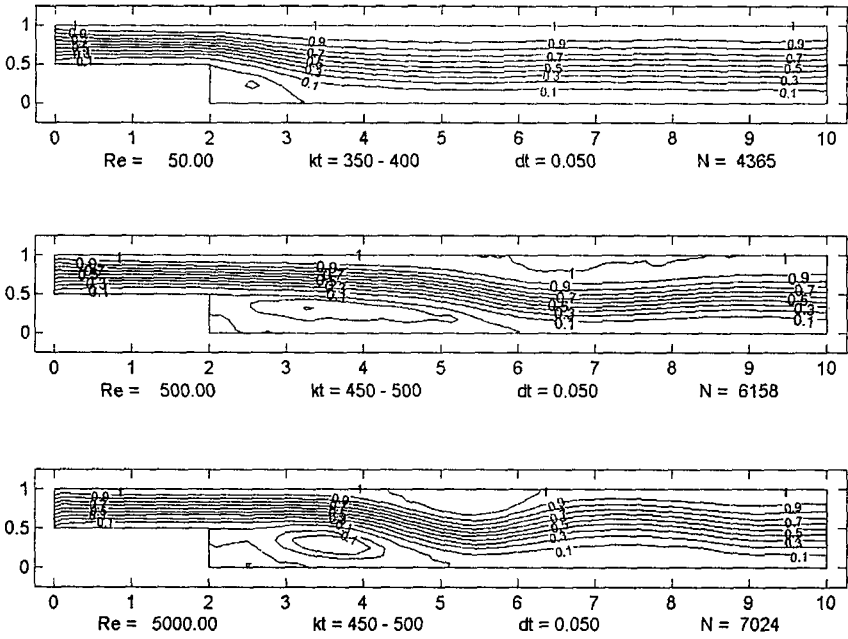
Rys. 5.17. Krzywa liczby kropeł wirowych w obszarze przepływu za stopniem dla $Re = 100$ (a), schemat kanału ze stopniem (b)

Porównanie zasięgu strefy recyrkulacji wykonano dla przepływów w kanale za stopniem w zakresie liczb Reynoldsa 100–10000. Rozważano dwa schematy, w których stosunek wysokości kanału H do wysokości stopnia H_s wynosił 2:1 i 3:1, aby porównać wyniki z badaniami Denham i Patrick (1974) i Armaly i inni (1982), Yoshioka i inni (2001) i obliczeniami numerycznymi metodą warstw wirowych wykonanych przez Sethian i Ghoniem (1987). Nie stwierdzono istotnego wpływu geometrii na długość strefy recyrkulacji za stopniem. Schemat kanału przedstawiono na rysunku 5.17b.

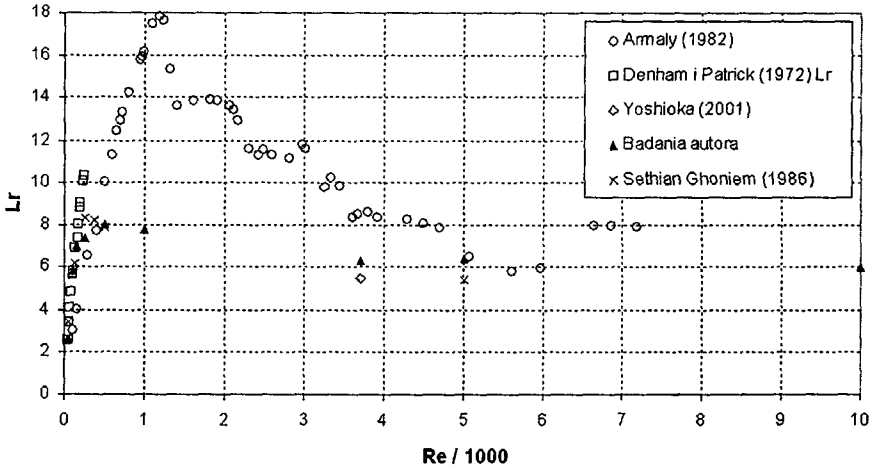
Wizualizację długości strefy wykonano na podstawie obliczeń funkcji prądu, a zasięg strefy recyrkulacji L_r wyznaczało położenie pierwszej linii prądu, której wartość wynosiła 0,0. Krok czasowy w tych eksperymentach wynosił 0,05, brzeg podzielono na odcinki długości 0,1, na których warstwa wirowa zamieniana była na krople wirowe. Położenie linii prądu było określane w punktach kwadratowej siatki pokrywającej obszar przepływu o boku 0,1. Położenie linii prądu było uśredniane po czasie odpowiadającym 50 krokom czasowym, aby zmniejszyć statystyczny błąd wynikający z zastosowania stochastycznej metody wirów. Wyniki obliczeń położenia linii prądu dla kanału o długości $L = 10$, wysokości $H = 1$ oraz wysokości stopnia $H_s = 0,5$, dla wybranych trzech wartości liczby Reynoldsa, przedstawiono na rysunku 5.18.

Na rysunku 5.19 przedstawiono wyznaczone długości strefy recyrkulacji dla różnych liczb Re i porównanie z wynikami trzech różnych badań doświadczalnych.

Metoda wirów bardzo dobrze odtwarza warunki przepływu ruchu laminarnego $Re < 500$ uzyskane przez Denhama i Patricka (1974) (rys. 5.18). W ruchu przejściowym długość strefy nie zwiększa się, mimo iż badania eksperymentalne wskazują jej



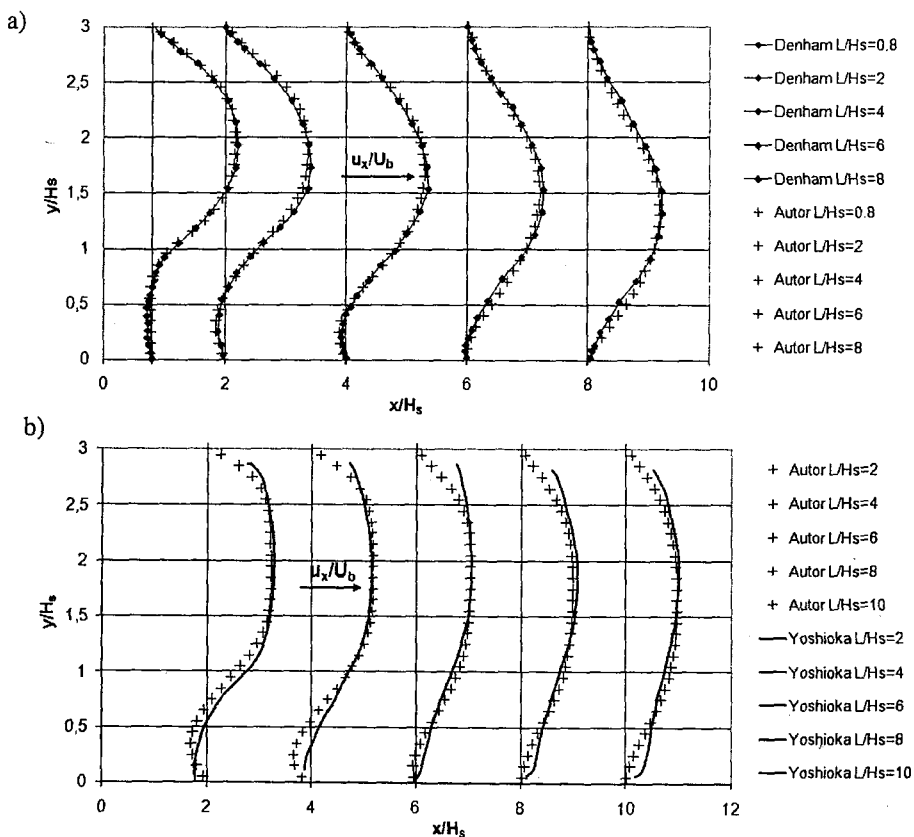
Rys. 5.18. Uśrednione linie prądu do obliczenia długości strefy recyrkulacji

Rys. 5.19. Długości strefy recyrkulacji x_r dla liczb Reynoldsa 50–10000

zwiększenie aż do $Re \approx 1000$. Wyniki innych symulacji metodą wirów również wykazują tę niezgodność (Sethian i Ghoniem, 1986). Przyczyną tego są trudności odwzorowania charakterystyki ruchu przejściowego cieczy, w którym intensywnie tworzą się

i odrywają struktury wirowe za stopniem, które są następnie unoszone wzdłuż kanału. Dla ruchu turbulentnego, $Re > 3000$, długość strefy się stabilizuje i jest zgodna z wynikami badań prezentowanych przez Armaly i innych (1983) oraz Yoshioka i innych (2001).

Metodę wirów sprawdzano również przez porównanie profili prędkości dla dwóch liczb Reynoldsa: $Re = 125$ na podstawie wyników Denham i Patrick (1974) oraz $Re = 3700$ według pracy Yoshioka i inni (2001). Parametry obliczeniowe zastosowane w tym eksperymencie były takie same jak opisane poprzednio. Prędkości poziome u_x w poszczególnych pionach normalizowane były w odniesieniu do prędkości wlotowej U_b . Współrzędne położenia wektorów prędkości normalizowane były względem wysokości stopnia H_s . Wyniki porównania przedstawiono na rysunku 5.20.



Rys. 5.20. Porównanie obliczonych profili prędkości w kanale za stopniem z wynikami pomiarów: a) $Re = 125$, b) $Re = 3700$

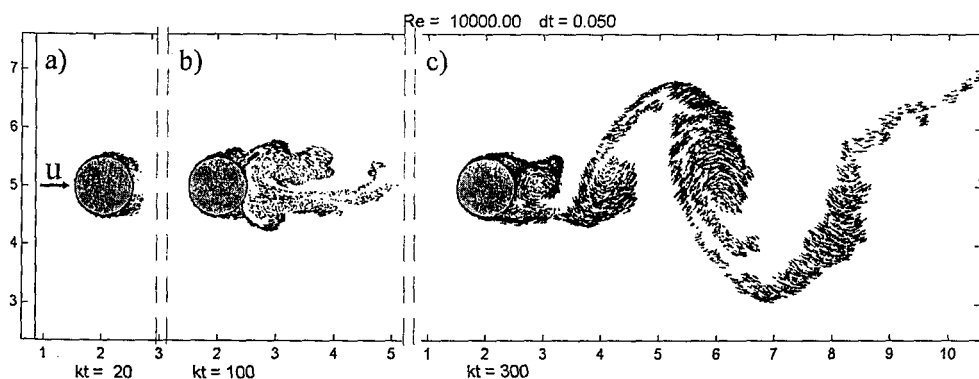
Z przedstawionego porównania wynika, że uśrednione profile prędkości dla $Re = 125$, obliczone na podstawie proponowanej metody numerycznej, odpowiadają kształt-

tem profilom uzyskanym eksperymentalnie. Świadczy to o dobrej aproksymacji przepływu metodą wirów. Dobrą zbieżność z doświadczeniem uzyskano również dla liczby $Re = 3700$.

5.7.2. Opływ przeszkody – metoda wirów deterministyczna i stochastyczna

Przedmiotem wielu prac eksperymentalnych i symulacji numerycznych jest dwuwymiarowy opływ walca cieczą lepką i nieściśliwą. Niestabilność opływu i tworzenie się śladu za opływającym walcem jest bowiem nie tylko jednym z fundamentalnych problemów mechaniki płynów, ale dotyczy także dużej liczby różnych inżynierskich rozwiązań. Większość prac fizycznych i numerycznych omawiających to zagadnienie skupia się na kilku wybranych aspektach, takich jak położenie punktu oderwania ścieżki wirowej, wzajemne oddziaływanie między polem prędkości a ciśnienia, tworzenie się różnych struktur wirowych w obszarze śladu (Gryboś, 1998), (Jeżowiecka-Kabsch i Szewczyk, 2001), (Batchelor, 1967), (Braza i inni 1985), (Cheer, 1988), (Styczek i Wald, 1995), (Kida i inni, 1999), (Nakanishi, 1999).

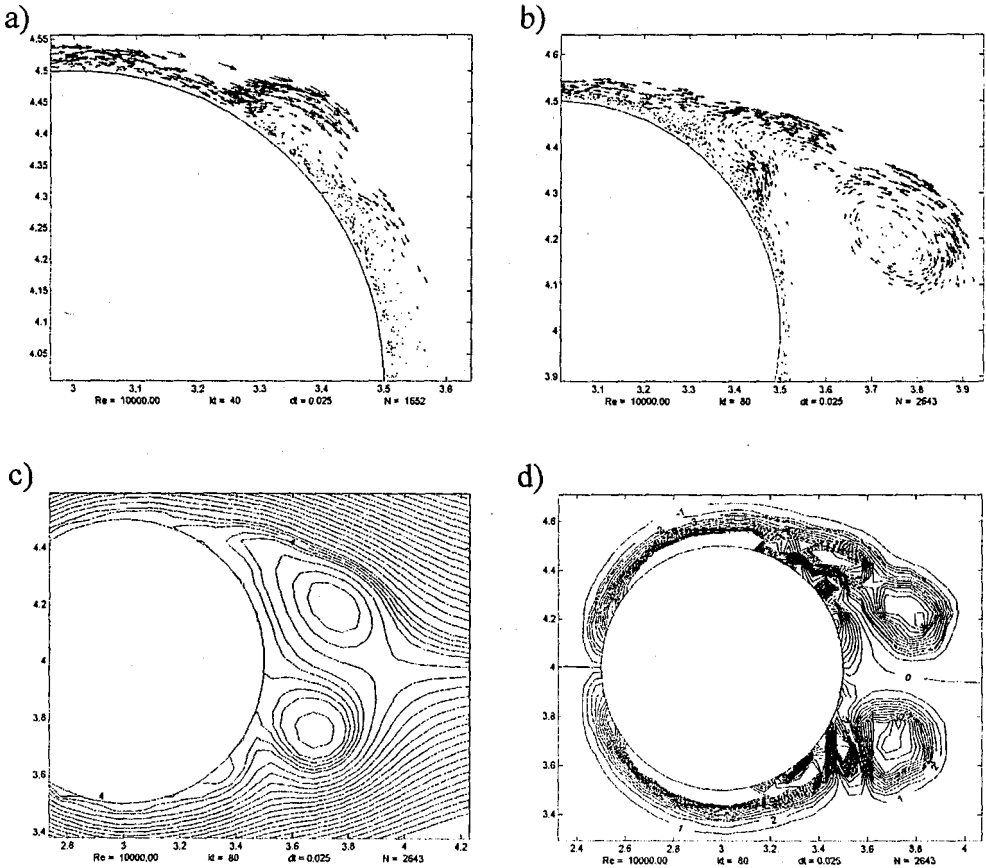
Jako przykład obliczeń metodą wirów przedstawiono wizualizację dwuwymiarowego opływu pojedynczego walca dla liczby Reynoldsa $Re = 10^4$. Na rysunku 5.21 przedstawiono ścieżkę wirową z typowymi dla tego zjawiska strukturami wirowymi uformowanymi z pojedynczych kropelek wirowych dla kilku wybranych czasów. W początkowej fazie przepływu wiry, które generują się na obwodzie walca (rys. 5.22a, b), gromadzą się za walcem symetrycznie względem osi zgodnej z kierunkiem przepływu (rys. 5.21a). Po około 40 krokach czasowych, odpowiadających $t = 2$, następuje utrata symetrii, co ilustruje obraz linii prądu oraz wirowości za walcem (rys. 5.22c, d). W konsekwencji utraty symetrii struktury wirów tworzą się naprzemiennie po obu



Rys. 5.21. Ścieżka wirowa za walcem dla trzech różnych czasów: a) $t = 1$, b) $t = 5$, c) $t = 15$

stronach walca (rys. 5.21b), odrywają się i są unoszone z przepływem, tworząc ścieżkę wirową Kármána (rys. 5.21c). Szerokość ścieżki zwiększa się wraz z odległością od walca.

Sposób formowania się ścieżki wirowej, odrywającej się od powierzchni walca, oraz kształty pola prędkości i funkcji prądu są porównywalne z przedstawionymi podobnymi wynikami uzyskanymi przez Cheer (1988) i Nakanishi (1999).

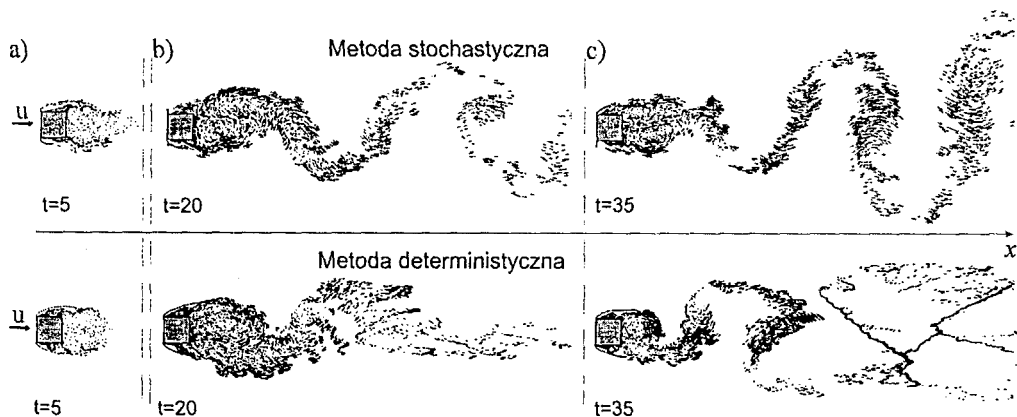


Rys. 5.22 Odrywanie wirów od powierzchni walca:

a) $t = 1$, b) $t = 2$, c) linie prądu $t = 2$, d) linie wirowości $t = 2$

Przedstawione przykłady przepływu przez stopień oraz opływu walca obliczone zostały stochastyczną metodą wirów. Autor wykonał także symulacje z zastosowaniem przedstawionej w podrozdziale 5.4 metody deterministycznej oraz porównał wyniki obliczeń obiema metodami. Obiektem modelowania był w tym przypadku dwuwymiarowy opływ kwadratowej przeszkody o długości boku równej 1,0 w układzie bezwymiarowym. Obliczenia wykonano dla liczby Reynoldsa 10^4 oraz zerowej początkowej

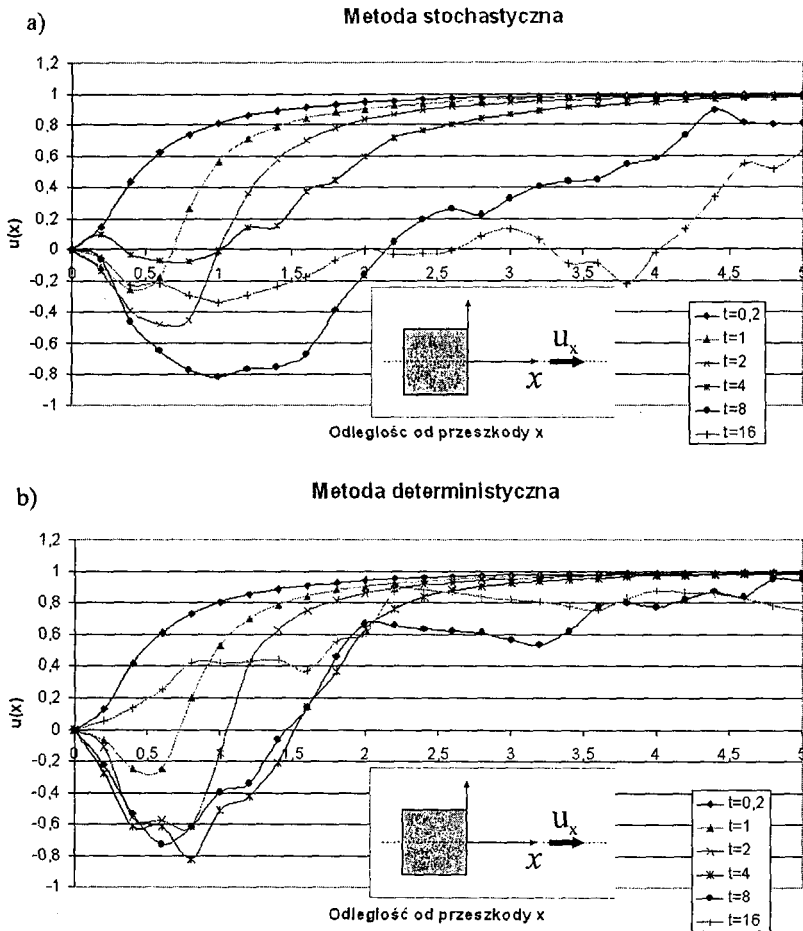
wirowości obszaru. Na rysunku 5.23 przedstawiono wizualizację opływu dla wybranych kroków czasowych. Z przedstawionego porównania widać, że metoda stochastyczna dokładniej odtwarza na całej długości obszaru obliczeniowego zjawisko ścieżki wirowej, z typową strukturą wirów właściwą wirom Kármána. Obliczając zjawisko opływu metodą deterministyczną, otrzymano zbliżony kształt ścieżki wirowej tylko w bliskości przeszkody, w większej odległości następuje deformacja ścieżki. W obu przypadkach obliczeń częstość odrywania wirów od przeszkody była zbliżona i wynosiła około 10 bezwymiarowego czasu.



Rys. 5.23. Ścieżka wirowa za opływającą przeszkodą w kształcie kwadratu obliczona metodą wirów stochastyczną i deterministyczną dla czasu $t = 5, 20, 35$

Analiza profilu składowej prędkości wzdłuż osi przeszkody równoległej do kierunku przepływu (oś x) przedstawiona została na rysunku 5.24. Długość strefy recyrkulacji wyznaczona jest przez odległość mierzoną od tylnej ściany przeszkody do punktu, w którym wartość prędkości zmienia znak na dodatni. W symulacji metodą stochastyczną długość tej strefy początkowo zwiększa się, a później oscyluje w granicach 2. Najmniejszą wartość prędkości uzyskano w odległości 1 od przeszkody. Otrzymane wyniki są zbliżone z rezultatami prezentowanymi w pracy Otsuka i inni (1999). W obliczeniach metodą deterministyczną obydwie te wielkości są zdecydowanie mniejsze, chociaż wartość najmniejsza prędkości jest taka sama i wynosi $-0,8$.

Deformacja ścieżki w obliczeniach deterministycznych wynika zaniem autora ze sposobu aproksymacji wirowości kropli wirowej wyrażeniem splotowym z funkcją obcięcia (5.39). Ze względu na ogólną postać tej funkcji, danej wzorem $f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-2} f(\varepsilon^{-1} \mathbf{x})$, oraz małą wartość promienia obcięcia ε , jej dwukrotne różniczkowanie spowoduje, że aproksymacja laplasjanu we wzorze (5.40) będzie bliska funkcji δ -Diraca, pojawia się bowiem w równaniu czynnik ε^{-4} . Zwiększenie stabilności tej metody



Rys.5.24. Profil składowej prędkości u_x za opływającą przeszkodą w kształcie kwadratu obliczony metodą wirów: a) stochastyczną, b) deterministyczną dla czasu $t = 1, 2, 4, 8, 16$

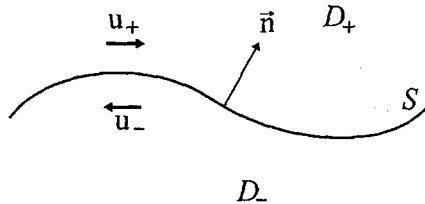
uzyska się, zwiększając dokładność rozwiązania układu równań (5.41), na przykład przez zastosowanie metody Rungego–Kutty (w prezentowanym przykładzie zastosowano prostą aproksymację metodą Eulera) lub zastosowanie innego sposobu aproksymacji wirowości na przykład zaproponowanego w pracy (Ploumhans i Winckelmans, 2000).

Takich problemów nie stwarza rozwiązanie stochastyczne. Mimo iż ślad za opływającą przeszkodą jest bardziej rozmyty, zjawisko opływu jest dobrze odtworzone i jeśli zachowane są rygory nałożone na funkcję obciążenia, to metoda jest stabilna.

Przedstawioną stochastyczną metodę wirów można stosować do rozwiązywania praktycznych zagadnień przepływu z dużą liczbą Reynoldsa. Wyniki obliczeń stanowią mogą dane wyjściowe do wyznaczania pola ciśnienia, co przedstawiono w rozdziale 6 monografii.

5.8. Metoda warstw wirowych

Genezy metody warstw wirowych należy poszukiwać w pracy Rosenheada (1931) poświęconej przybliżonemu rozwiązywaniu zagadnienia ruchu warstwy wirowej, znanego pod nazwą niestabilności Helmholtza–Kelwina. Idee Rosenheada były dalej rozwijane i z powodzeniem stosowane przez Krasnego (1986) oraz Martina i Meiburga (1994) w badaniu zjawiska ewolucji dwuwymiarowej nitki wirowej. Zagadnienie to ma głęboki sens fizyczny, w przepływach bowiem z dużą liczbą Reynoldsa, zwłaszcza w zagadnieniach opływu będących przedmiotem niniejszej pracy, prawie zawsze mamy do czynienia ze zjawiskiem odrywania się strumienia od powierzchni lub krawędzi opływanej przeszkody. W opisie matematycznym taki oderwany strumień w przypadku przepływu dwuwymiarowego stanowi warstwę wirową, a dla trzech wymiarów powierzchnię wirową, którą można z powodzeniem opisywać, korzystając z równania Eulera dla cieczy nieściśliwej (Krasny, 1986). Dla uproszczenia analizy przyjmijmy dwuwymiarowość zjawiska. Wówczas warstwa wirowa jest linią krzywą, na której skoncentrowana jest cała wirowość pola wirowego. Po obu jej stronach w obszarach D_- i D_+ , dalej oznaczanych jednym wspólnym symbolem D_{\pm} , pole wirowe jest zerowe. Sprawia to, że pole prędkości przepływu przestaje być gładkie w miejscu występowania warstwy. Mamy tu do czynienia z nieciągłością pola prędkości. Co prawda wektory prędkości w punktach warstwy S mają ten sam kierunek, ale różne wartości. W taki sposób na warstwie powstaje skok prędkości $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$, co zostało przedstawione na rysunku 5.25.



Rys. 5.25. Warstwa wirowa S w obszarze $D \in \mathbb{R}^2$

W takich osobliwych przepływach pole prędkości w dalszym ciągu spełnia podstawowe równania opisujące przepływ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2) \quad (5.117)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.118)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad (5.119)$$

przy czym w punktach warstwy S spełnia je w sensie słabym, dystrybucyjnym (Majda i Bertozzi, 2002).

Natężenie wirowości warstwy S , nazywanej także intensywnością warstwy wirowej, można wyrazić w terminach cyrkulacji Γ pola prędkości

$$\gamma = \frac{d\Gamma}{ds} \quad (5.120)$$

Wynika z tego, że

$$\gamma = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{s} \quad (5.121)$$

gdzie \mathbf{s} – wektor styczny do S .

Zgodnie z teorią Kelvina wirowość jest zachowywana wzdłuż trajektorii cząstki wirowej: $\Gamma_{C(t)} = \text{const}$ (równanie (3.101)). Tę samą zasadę możemy odnieść do intensywności warstwy wirowej dla dowolnego przedziału czasowego. Wykażemy to, posługując się teorią potencjału (Majda i Bertozzi, 2002). Z przyjętych na wstępie założeń o nieściśliwości i bezwirowości cieczy w obszarach D_{\pm} wynika, że w każdym z tych obszarów istnieje potencjalna funkcja prądu Ψ_{\pm} spełniająca relacje

$$\nabla^2 \Psi_{\pm} = 0 \quad (5.122)$$

$$\nabla \Psi_{\pm} = \mathbf{u}_{\pm} \quad (5.123)$$

$$[\Psi] = \Psi_+ - \Psi_- \quad (5.124)$$

Korzystając ze znanej tożsamości wektorowej $\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$, zastosowanej do \mathbf{u}_{\pm} i uwzględniając fakt, że wirowość poza warstwą S jest równa zero, możemy zapisać równanie Eulera w terminach funkcji Ψ_{\pm}

$$\nabla \left(\frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Psi_{\pm}|^2 + \frac{p_{\pm}}{\rho} \right) = 0$$

lub po opuszczeniu operatora gradientu

$$\frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Psi_{\pm}|^2 + \frac{p_{\pm}}{\rho} = C_{\pm} \quad (5.125)$$

Można założyć, że stałe $C_{\pm} = 0$. W przeciwnym razie wystarczyłoby nieco zmodyfikować funkcję prądu i przyjąć ją w postaci $\Psi_{\pm} + C_{\pm} t$. Ostatnie równanie stanowi prawo Bernoulliego dla linii prądu w ruchu nieustalonym. Ciśnienie w przepływie jest funkcją ciągłą, a zatem ma taką samą wartość po obu stronach warstwy.

Obliczmy różnicę wyrażeń dla lewej i prawej strony warstwy z równania (5.125). Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi_+}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_-}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Psi_+|^2 - \frac{1}{2} |\nabla \Psi_-|^2 + \frac{p_+}{\rho} - \frac{p_-}{\rho} \\ &= \frac{\partial [\Psi]}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Psi_+ + \nabla \Psi_-) (\nabla \Psi_+ - \nabla \Psi_-) \\ &= \frac{\partial [\Psi]}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_-) [\nabla \Psi] = \frac{\partial [\Psi]}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} [\nabla \Psi] = 0 \end{aligned} \quad (5.126)$$

W obliczeniach wprowadziliśmy nową wielkość, będącą średnią prędkością cząstek na warstwie wirowej $\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_-)$. Ostatnią równość w (5.126) można zapisać w postaci pochodnej zupełnej:

$$\frac{d[\Psi]}{dt} = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.127)$$

co wyraża fakt, że skok funkcji prądu $[\Psi]$ jest zachowywany wzdłuż trajektorii warstwy poruszającej się z prędkością $\bar{\mathbf{u}}$. Ponieważ

$$[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{s} = \frac{d[\Psi]}{ds} \quad (5.128)$$

z (5.120) wynika, że

$$\gamma = \frac{d\Gamma}{ds} = \frac{d[\Psi]}{ds} \quad (5.129)$$

Z równania (5.127) wynika, że $d\Gamma = \gamma ds$ jest zachowywane wzdłuż trajektorii cząstki na warstwie. Inaczej

$$\gamma(z(\boldsymbol{\alpha}, t), t) |z'_\alpha(\boldsymbol{\alpha}, t)| d\boldsymbol{\alpha} = \gamma(z(\boldsymbol{\alpha}, 0), 0) |z'_\alpha(\boldsymbol{\alpha}, 0)| d\boldsymbol{\alpha}, \quad t > 0 \quad (5.130)$$

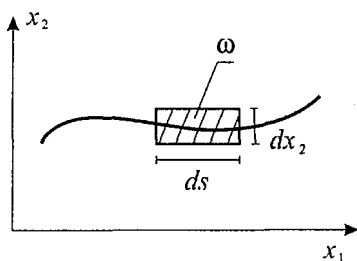
gdzie $z(\boldsymbol{\alpha}, t)$ jest opisem parametrycznym warstwy S w chwili $t > 0$, jako krzywej w przestrzeni R^2 .

Ponadto dla infinitezimalnego prostokąta wokół punktu \mathbf{x} na warstwie zachodzi relacja (rys. 5.26):

$$d\Gamma = \omega ds dx_2 \quad (5.131)$$

Z równości (5.129) wynika związek wirowości z jej intensywnością γ

$$\gamma(x, t) = \lim_{dx_2 \rightarrow 0} \omega(x, t) dx_2 \quad (5.132)$$



Rys. 5.26. Schemat wyznaczania cyrkulacji warstwy wirowej

Na podstawie otrzymanej relacji widać, że $\omega(\mathbf{x}, t)$ nie jest regularną funkcją, ale ma charakter miary.

Metoda warstw wirowych została zaproponowana przez Chorina (1978) jako nowa generacja metody wirów, która pozwoliłaby ominąć trudności związane głównie z wolną zbieżnością metody wirów dyskretnych oraz dużą liczbą kropek wirowych wymaganą do symulacji, skutkującą długim czasem obliczeń.

Fizyczną podstawę tej metody stanowi występujący w warunkach naturalnego przepływu proces tworzenia się wirowości na brzegu opływającego ciała. Zjawisko to zostało po raz pierwszy opisane przez Lighthilla w 1963 roku. Koncepcja ta była następnie rozwijana, zwłaszcza w kontekście zastosowań metody warstw wirowych (Kudela, 1984), (Bernard, 1995), (Gharakhani i Ghoniem, 1996) oraz określania zbieżności tej metody (Puckett, 1989), (Cottet i Koumoutsakos, 2000), (Saprakaya, 2001), (Majda i Bertozzi, 2002). Generowanie wirów zostało szerzej omówione w rozdziale 5.5.3. Należy tu jednak podkreślić, że jego celem jest pokonanie trudności w sformułowaniu odpowiednich warunków brzegowych dla zagadnienia transportu wirowości opisanego równaniami (5.11)–(5.14). W zaproponowanych przez Chorina metodach: warstw wirowych oraz kropek wirowych do zagadnienia opływu przeszkody obliczenia wykonuje się w dwóch etapach. Najpierw aproksymowana jest adwekcja, a następnie dyfuzja wirowości. Rozwiązanie zagadnienia adwekcji umożliwia spełnienie warunku znikania składowej normalnej do brzegu. Równanie dyfuzji jest rozwiązywane u Chorina metodą przypadkowego błędzenia bez uwzględnienia warunków brzegowych. W ten sposób pojawia się problem skompensowania składowej prędkości stycznej do brzegu, który rozwiązuje się za pomocą procesu generowania wirów.

Od strony matematycznej zagadnienie przepływu z uwzględnieniem obszaru w pobliżu brzegu, gdzie tworzy się warstwa wirowa, można opisywać za pomocą równań Naviera-Stokesa. Jednak ze względu na charakter przepływu, który w tej warstwie jest równoległy do brzegu, można zagadnienie uprościć, korzystając z równania Prandtla. Równanie to zostało szczegółowo opisane w rozdziale 3.3.1.

Przedstawimy to podejście na prostym przykładzie transportu wirowości w warstwie przyściennej, w którym brzeg pokrywa się z osią x_1 . Po wykonaniu operacji rotacji na równaniu Prandtla (por. rozdz. 3.3.1) otrzymamy następującą postać zagadnienia

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad t > 0 \quad (5.133)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad t > 0 \quad (5.134)$$

$$\omega = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (5.135)$$

Przyjmując, że grubość tej warstwy wynosi b , możemy sformułować następujące warunki brzegowe:

- znikanie składowej prędkości normalnej do brzegu

$$u_2 = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 = 0 \quad (5.136)$$

- określona wartość prędkości na granicy warstwy przysciennej, tj. w odległości b od brzegu

$$\mathbf{u}(x_1, x_2 = b, t) = u_1(x_1, x_2 = b, t) = U_b(x_1, t), \quad t \geq 0 \quad (5.137)$$

Ponadto żądamy, aby na brzegu spełniony był warunek adhezji – znikanie składowej stycznej prędkości do brzegu

$$u_1(x_1, 0, t) = u_1^-(x_1, 0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.138)$$

Z równania (5.135) i warunku (5.137) otrzymujemy

$$u_1(x_1, x_2, t) = U_b(x_1, t) - \int_{x_2}^b \omega(x_1, x'_2, t) dx'_2 \quad (5.139)$$

Równanie ciągłości (5.134) pozwala wyznaczyć prędkość w kierunku normalnym do brzegu

$$u_2(x_1, x_2, t) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} u_1(x_1, x'_2, t) dx'_2 \quad (5.140)$$

Rozkład wirowości wewnątrz obszaru powoduje, że na brzegu nieruchomym i nieprzepuszczalnym powstaje składowa styczna prędkości, różna od założonego warunku (5.136). Jeśli oznaczymy prędkość jako u_1^+ , to skok prędkości $[\bar{u}_1] = \bar{u}_1^+ - \bar{u}_1^-$ w kierunku normalnym do brzegu generuje warstwę wirową leżącą wzdłuż brzegu.

W numerycznej metodzie warstw wirowych, powstająca na brzegu ciągła warstwa jest aproksymowana elementami – odcinkami wirowymi. W tym celu należy dokonać podziału brzegu na odcinki, na których generowane będą warstwy. Każdy odcinek warstwy ma określoną, najczęściej stałą długość (Bernard, 1995) oraz następującą intensywność, wyznaczoną na podstawie równania (5.132)

$$\hat{\gamma}(x_1, 0, t) = \sum_{i=1}^M (\bar{u}_1^+ - \bar{u}_1^-)_i \Lambda^h(\alpha_i, h) = \sum_{i=1}^M [\bar{u}_1]_i \Lambda^h(\alpha_i, h) \quad (5.141)$$

gdzie $\Lambda^h = \{\alpha_i : \alpha_i = h \cdot i, i \in Z, i = 1, \dots, M\}$ jest założonym podziałem warstwy na odcinki o długości $h > 0$, α_i są środkami odcinków warstwy, tutaj utożsamianymi z ich początkowym położeniem, $\Lambda^h(\alpha_i, h)$ jest funkcją przyjmującą wartość 1 w punktach odcinka o środku α_i , a poza tym odcinkiem przyjmuje wartość 0, $[\bar{u}_1]_i = (\bar{u}_1^+ - \bar{u}_1^-)_i$ jest uśrednionym skokiem prędkości na długości i -tego odcinka warstwy.

Wirowość w warstwie przyściennej może być wyznaczana przez dekompozycję równania Prandtla, na składnik adwekcyjny i lepkościowy (podobnie jak dla równań (5.9) i (5.10)):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0, \quad \omega = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad t > 0, \quad (5.142)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}, \quad \omega = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad t > 0, \quad (5.143)$$

Odcinki warstwy wirowej będą się przemieszczać wzdłuż swoich trajektorii pod wpływem adwekcji w sposób podobny jak to przedstawiono dla metody kropel wirowych:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\alpha, t), t), \quad \mathbf{X}(0, \alpha) = \alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, 0) \in R^2 \quad (5.144)$$

Zgodnie ze wzorem (5.130) również całkowita wirowość każdego odcinka I_i warstwy wirowej, unoszonej przez przepływ, podobnie jak w przypadku kropel wirowych będzie zachowywana w czasie

$$\int_{\mathbf{X}(t, I_i)} \hat{\gamma}(s, t) ds = \int_{I_i} \hat{\gamma}(s, 0) ds = \int_{I_i} \hat{\gamma}_0(s) ds, \quad \text{dla każdego } t > 0 \quad (5.145)$$

gdzie $\mathbf{X}(t, I_i)$ jest trajektorią i -tego odcinka warstwy wirowej.

Aby określić składowe prędkości odcinka, należy zdefiniować sposób liczenia wirowości w obszarze warstwy przyściennej, na podstawie dyskretnych elementów (odcinków) warstwy wirowej i ich intensywności $\hat{\gamma}(\mathbf{X}(t, \alpha), t)$.

Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (5.139) na prędkość styczną przypadającą na odcinek warstwy, ma wpływ wirowość obszaru ograniczonego wyłącznie do strefy leżącej bezpośrednio nad odcinkiem warstwy (niekiedy używa się pojęcia „strefy cienia warstwy”; rys. 5.27a). Prześledzimy to dokładniej, zaczynając od dyskretyzacji pola

wirowości wewnątrz warstwy przyściennej, co wyraża wzór zaproponowany przez (Gharakhani i Ghoniem, 1997):

$$\hat{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^M \hat{\gamma}(x_1^i, x_2^i, t) \beta(x_1, x_1^i, t) \delta(x_2 - x_2^i) \quad (5.146)$$

gdzie $\beta(\mathbf{x}, x_i, t) = H\left[x_1 - \left(x_1^i - \frac{h}{2}\right)\right] - H\left[x_1 - \left(x_1^i + \frac{h}{2}\right)\right]$, a H jest funkcją Heaviside'a.

Postać wzorów (5.139) i (5.140) oznacza, że w dowolnym punkcie o współrzędnych (x_1, x_2) na prędkość (w ten sposób pośrednio i na wirowość) będą miały wpływ te składniki sumy (5.146), które odpowiadają odcinkom leżącym nad i pod tym punktem. Jest to okoliczność korzystna ze względu na czas obliczeń metodą warstw wirowych, który jest proporcjonalny do liczby odcinków warstwy w pierwszej potędze, a nie jak w przypadku kropel wirowych w drugiej (liczba oddziaływań można jeszcze bardziej ograniczyć wprowadzając okrąg o środku leżącym w połowie długości warstwy i zadanym promieniu – rys. 5.27b), poza którym interakcje pomiędzy tą warstwą, a sąsiednimi warstwami nie będą uwzględniane (Bernard, 1995). Prędkość, z jaką przemieszczać się będzie i -ty odcinek warstwy w polu prędkości wyznaczonym przez pozostałe odcinki warstw wirowych, otrzymamy, wstawiając najpierw wirowość wyznaczoną w (5.146) do wynikającej z równania Prandtla relacji (5.139). Następnie tak obliczoną pierwszą składową prędkości różniczkujemy w sposób dyskretny i za pomocą wzoru (5.140) wyznaczamy drugą składową. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(x_1^i, x_2^i, t) = & U_b(x_1, t) - \frac{1}{2} \hat{\gamma}(x_1^i, x_2^i, t) \\ & - \sum_{\substack{j=1 \\ x_2^j > x_2^i}}^M \hat{\gamma}(x_1^j, x_2^j, t) \beta(x_1^i, x_1^j, t), \quad i, j \in \Lambda^h(\alpha_i, h), \quad \alpha_i = (\alpha_1, 0) \in R^2 \end{aligned} \quad (5.147)$$

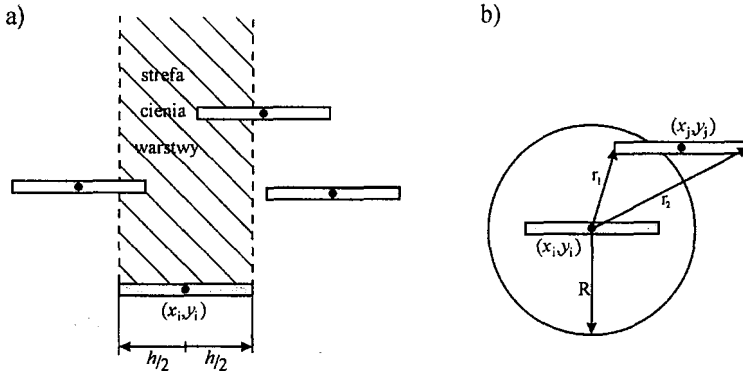
$$\hat{u}_2(x_1, x_2, t) = -\frac{I_x^+ - I_x^-}{h_j}, \quad i = 1, \dots, M \quad (5.148)$$

gdzie $I_x^\pm = U_b\left(x_1^i \pm \frac{h_i}{2}, x_2^i, t\right) x_2^i - \sum_{j=1}^M \hat{\gamma}(x_1^j, t) \cdot \Lambda\left(x_1^i \pm \frac{h_i}{2}, x_1^j, h_j, t\right) \cdot \min(x_2^i - x_2^j)$

Przybliżone trajektorie odcinków wirowych możemy teraz wyznaczyć za pomocą wzoru (5.144), co prowadzi do układu równań

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}_i(t)}{dt} = \hat{\mathbf{u}}_i(\hat{\mathbf{X}}_i(t), t), \quad i = 1, \dots, M \quad (5.149)$$

gdzie składowe wektora $\hat{\mathbf{u}}^i = (u_1^i, u_2^i)$ wyznacza się z (5.147) i (5.148).



Rys. 5.27. Zasięg oddziaływań pomiędzy warstwami wirowymi:
a) „strefa ciśnienia warstwy”, b) okrąg o promieniu R

Układ równań (5.149) można rozwiązać w sposób przybliżony dowolną metodą, np. jawną metodą Eulera lub w dokładniejszy sposób, np. metodą Rungego–Kutty wyższego rzędu. Ewolucja pola wirowości w metodzie Eulera będzie wyrażona przemieszczaniem odcinków wirowych

$$\hat{\mathbf{X}}_i(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{X}}_i(t) + \Delta t \hat{\mathbf{u}}_i \quad (5.150)$$

Należy jeszcze zmodyfikować trajektorie zgodnie z równaniem dyfuzji dla odcinków warstwy wirowej dane wzorem (5.143). Można to zrobić za pomocą metody przypadkowego błędzenia. Analizując równanie (5.143) zauważymy, że zależy ono tylko od współrzędnej x_2 , a zatem przemieszczenie losowe również będzie działać tylko w tym jednym kierunku. Stąd mamy następującą postać układu równań stanowiącego rozwiązanie równania Prandtla:

$$\hat{X}_1^i(t + \Delta t) = \hat{X}_1^i(t) + \Delta t \hat{u}_1^i \quad (5.151)$$

$$\hat{X}_2^i(t + \Delta t) = \hat{X}_2^i(t) + \Delta t \hat{u}_2^i + \eta_2^i(\Delta t) \quad (5.152)$$

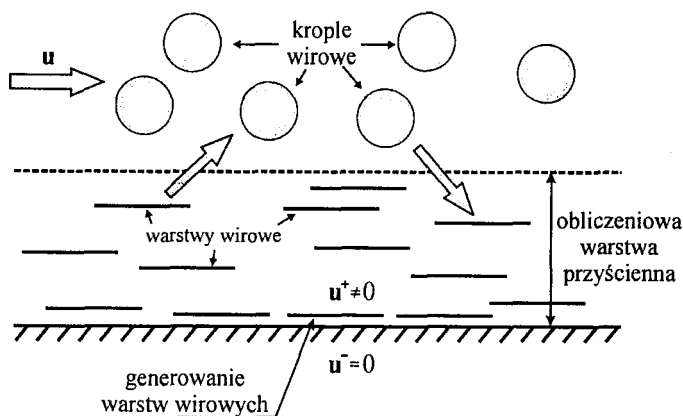
gdzie $\eta_2^i(\Delta t)$ jest znanym z punktu 5.5.1.2 przybliżonym rozwiązaniem równania dyfuzji wirowości dla warstwy wirowej.

Metoda warstw wirowych znalazła zastosowanie nie tylko do analizy przepływu w warstwie przyściennej, ale również jest często łączona z metodą kropek wirowych stanowiąc metodę hybrydową wirów (Gharakhani i Ghoniem, 1997), (Kamemoto i Tsutahara, 1999). W metodzie hybrydowej zakłada się wykonywanie obliczeń w dwóch obszarach jednocześnie – w „obliczeniowej warstwie przyściennej” o zadanej grubości, w której symuluje się ewolucję warstw wirowych oraz we właściwym obszarze przepływu leżącym poza nią, w którym wyznacza się ewolucję kropek wirowych. Pole prędkości, wirowości i funkcji prądu są wyznaczone w obu obszarach jednocześnie.

śnie. Zasadą tych obliczeń jest to, że warstwa wirowa po opuszczeniu obszaru warstwy przyściennej zamienia się w kroplę wirową o cyrkulacji równej

$$\Gamma_j(\alpha_j, t) = \hat{\gamma}(\alpha_j, t) h_1$$

gdzie h_1 – parametr siatki wewnątrz właściwego obszaru. Odwrotnie – kropla wirowa przechodząca do warstwy przyściennej zamieniana jest na warstwę wirową. Schemat tej wymiany został przedstawiony na rysunku 5.28.



Rys. 5.28. Zamiana warstwy w kroplę wirową i odwrotnie

Należy zaznaczyć, że w metodzie hybrydowej przyjmuje się dowolnie szerokość „obliczeniowej warstwy przyściennej”, która nie ma znaczenia fizycznego – jest tylko cienką warstwą wzdłuż brzegu obszaru, gdzie wirowość jest aproksymowana za pomocą warstw wirowych lepiej niż w przypadku kropli wirowych.

Jest to zaletą metody warstw wirowych w stosunku do metody wirów dyskretnych, w której fakt przekraczania przez krople wirowe brzegu powoduje deficyt wirowości w tym punkcie obszaru. Problem ten może być jednak z powodzeniem rozwiązany innymi metodami, opisanymi w punkcie 5.5.2. Ograniczeniem stosowalności metody warstw wirowych jest występowanie wzdłuż brzegu miejsc, w których następuje oderwanie warstwy przyściennej od brzegu i jej adwekcja do obszaru przepływu. Od punktu oderwania bowiem w obszarze przepływu składowa normalna prędkości u_n do brzegu przestaje być mała w porównaniu ze składową styczną u_s i staje się wielkością przynajmniej tego samego rzędu (Landau i Lifszyc, 1994). Opierając się na przedstawionych w rozdziale 3.3.1 rozważaniach, dotyczących rzędu wielkości składowych prędkości i relacji $\delta \sim L/\sqrt{Re}$, możemy przyjąć, że $u_s/u_n \sim 1/\sqrt{Re}$, a oderwanie strumienia oznacza wówczas wzrost składowej normalnej równej w przybliżeniu \sqrt{Re} razy i równania Prandtla przestają obowiązywać. Rzeczywiście, jedyny znany autorowi dowód istnienia i zbieżności metody warstw wirowych, wykonany przez

Pucketta (1989), odnosi się wyłącznie do przypadku przepływu płaskiego, wzdłuż prostoliniowego brzegu ograniczającego półprzestrzeń.

W metodzie hybrydowej warunek brzegowy (5.137) odnosi się nie do nieskończoności, ale do grubości numerycznej warstwy przyściennej. W rezultacie na granicy warstwy przyściennej jest zapewniona ciągłość prędkości stycznej po jej obu stronach na podstawie równana Biota–Sawarta, ale występują trudności w uzyskaniu zgodności składowej normalnej do tej warstwy, skutkujące pojawiającymi się oscylacjami pola prędkości w tym obszarze (Cottet i Koumoutsakos, 2000).

Mimo tych trudności w literaturze można znaleźć przykłady rozwiązań metodą warstw/kropel wirowych, m.in. do analizy przepływu trójwymiarowego w kanale pryzmatycznym o przekroju prostokątnym oraz zagadnienia opływu kostki sześcienniej (Gharakhani i Ghoniem, 1997; Kamemoto i Tsutahara, 1999).

6. Wyznaczanie siły hydrodynamicznej metodą elementów brzegowych i metodą wirów

6.1. Wprowadzenie

W rozdziale drugim przedstawiono opis powstawania siły hydrodynamicznej w różnych warunkach opływu konstrukcji hydrotechnicznych. Opisywane tam zjawiska są wynikiem przede wszystkim badań modelowych i eksperymentalnych, jak wskazano bowiem w rozdziale 4. rozwiązanie analityczne lub numeryczne zjawiska opływu w warunkach występowania recyrkulacji jest trudne do osiągnięcia. W ostatnich latach nastąpił znaczny rozwój metod numerycznych w mechanice płynów i wyznaczanie siły hydrodynamicznej z ich pomocą jest obecnie łatwiej osiągalne, nawet dla dużych liczb Reynoldsa.

6.2. Podstawowe definicje i równania

Siłę hydrodynamiczną, powstającą podczas opływu ciała strumieniem płynu lepkiego, definiujemy w postaci całki z naprężeń stycznych i normalnych działających na jego powierzchnię. Siła wynikająca z naprężeń stycznych jest skierowana przeciwnie do ogólnego kierunku prędkości i jest nazywana oporem tarcia lepkiego, zależy bowiem ona od współczynnika lepkości i prędkości cieczy. Siłę pochodzącą od naprężeń normalnych dzieli się na siłę unoszenia, której kierunek jest prostopadły do kierunku przepływu; siła ta dla odpowiednich kształtów ciała i dużych prędkości może osiągać znaczne wartości (płat skrzydła, łopatka turbiny) oraz siłę oporu wynikającą z różnicy ciśnienia działającego na opływającą powierzchnię ciała w kierunku prędkości i o zwrocie do niej przeciwnym. W aerodynamice wprowadza się jeszcze pojęcie oporu indukowanego powstającego wskutek dyssypacji energii w cienkim śladzie aerodynamicznym za opływającym płatem skrzydła, jednak w przypadku obciążeń zamknięć hydro-

technicznych, gdy mamy do czynienia z dużo mniejszymi prędkościami zjawisko to nie jest rozważane.

Śluszność tej definicji wykażemy, wyznaczając strumień pędu przechodzącego przez opływającą powierzchnię. Zmiana pędu jest bowiem czynnikiem sprawczym pojawienia się reakcji hydrodynamicznej na opływającej powierzchni (Landau i Lifszyc, 1994).

Rozważmy w ogólnym przypadku zmianę pędu objętości kontrolnej $V(t)$ daną równaniem (3.33) w rozdziale 3.1.6, z pominięciem siły masowej, która nie wpływa na zjawisko powstawania siły hydrodynamicznej

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{s(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS \quad (6.1)$$

gdzie: \mathbf{u} – wektor prędkości, ρ – gęstość cieczy, $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ – wektor naprężenia, \mathbf{n} – wektor normalny do S , skierowany na zewnątrz V .

Zgodnie z (3.39) i (3.42) wyrażenie po lewej stronie równania możemy przekształcić następująco

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{v(t)} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_{v(t)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) dV = \int_{v(t)} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_{s(t)} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} dS$$

Po zastąpieniu wektora naprężenia w równaniu (6.1) tensorem naprężeń, zgodnie ze wzorem (3.34) i przeniesieniu całki powierzchniowej na prawą stronę, otrzymujemy

$$\int_{v(t)} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = \int_{s(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{s(t)} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.2)$$

W przypadku przepływu nieściśliwej cieczy Newtona możemy teraz przedstawić tensor naprężeń wzorem (3.57). Wtedy równanie (6.2) przekształci się do postaci

$$\int_{v(t)} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = \int_{s(t)} \left(-p \mathbf{n} + \mu \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} - \rho (\mathbf{u} \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} \right) dS \quad (6.3)$$

gdzie $\mu \mathbf{\Pi} = 2\mu \mathbf{D}$ – tensor naprężeń lepkich o składowych $\mu (\mathbf{\Pi})_{i,j} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$,

p – ciśnienie, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – jednostkowy, zewnętrzny wektor normalny do powierzchni ciała, μ – współczynnik lepkości dynamicznej.

Lewa strona równania (6.3) wyraża zmianę pędu objętości kontrolnej w jednostce czasu. Występująca po prawej stronie całka powierzchniowa wyraża pęd wypływający przez powierzchnię ograniczającą rozważaną objętość kontrolną. Wyrażenie pod całką powierzchniową jest nazywane tensorem gęstości strumienia pędu.

Zgodnie z podaną definicją, siła hydrodynamiczna działająca na powierzchnię opływającego ciała jest wyrażona przez prawą stronę równania (6.3). Wobec zanikania z warunku adhezji prędkości na powierzchni ciała siłę hydrodynamiczną cieczy określa wzór

$$\mathbf{F} = \int_{s(t)} (-p\mathbf{n} + \mu\Pi \cdot \mathbf{n}) dS \quad (6.4)$$

Siłę hydrodynamiczną możemy przedstawić w postaci sumy

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t \quad (6.5)$$

Składowe poszczególnych jej składników wyrażają się następująco

$$F_{ni} = \int_{s(t)} p n_i dS, \quad F_{ti} = - \int_s \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) n_k dS \quad (6.6)$$

Siła hydrodynamiczna jest więc całką powierzchniową z sumy składowej normalnej ciśnienia i naprężeń stycznych wynikających z tarcia lepkiego.

W przepływach z dużą liczbą Reynoldsa siła wywołana tarcielem lepkiem jest pomijalnie mała w stosunku do siły wynikającej z ciśnienia i w większości zagadnień praktycznych może być pominięta. Gdyby zachodziła taka konieczność, można ją obliczać lokalnie na podstawie pochodnych prędkości dla danego elementu powierzchni ciała. Dominującym składnikiem siły hydrodynamicznej, działającej na opływającą konstrukcję hydrotechniczną, jest ciśnienie

Zaniedbując w równaniu (6.6) oddziaływanie lepkie, wartość siły hydrodynamicznej przedstawia relacja:

$$\mathbf{F} = - \int_s p \mathbf{n} dS \quad (6.7)$$

lub w postaci składowych

$$F_i = - \int_s p n_i dS \quad (6.8)$$

W następnych punktach tego rozdziału przedstawiono efektywną metodę wyznaczania wartości ciśnienia na opływającej konstrukcji o zadanych polach prędkości i wirowości, wyznaczonych na podstawie metody wirów.

6.3. Matematyczne zagadnienie rozkładu ciśnienia

Rozważmy ponownie przypadek przepływu cieczy nieściśliwej w obszarze D ograniczonym brzegiem $S = S_D \cup S_N$, $S_D \cap S_N = \emptyset$, opisany równaniem Naviera–Stokesa i równaniem ciągłości, w którym pominięto oddziaływanie pola sił masowych

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (6.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6.10)$$

Ogólne sformułowanie warunków brzegowo-początkowych uzupełniających podane równania przedstawia się jako:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_b \quad \text{na brzegu } S_D \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{q}_b \quad \text{na brzegu } S_N \quad (6.12)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{dla } t = 0 \quad (6.13)$$

gdzie: \mathbf{u} – wektor prędkości, P – ciśnienie kinematyczne, tzn. podzielone przez stałą gęstość cieczy $P = p/\rho$, ν – współczynnik lepkości kinematycznej, S_D i S_N – odcinki brzegu, na którym są spełnione warunki typu Dirichleta i Neumanna.

Ponadto wymaga się, aby

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (6.14)$$

w przeciwnym razie zadanie może okazać się matematycznie źle postawione.

W niniejszym rozdziale rozważamy przypadek wyznaczania ciśnienia przy danym polu prędkości, a zatem równanie (6.9) zapiszmy we właściwej do tego celu postaci

$$\nabla P = - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \quad (6.15)$$

Oznaczmy prawą stronę (6.15) jako \mathbf{B} , wówczas

$$\nabla P = -\mathbf{B} \quad (6.16)$$

Warunkiem istnienia jednoznacznego i poprawnego rozwiązania jest, aby

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (6.17)$$

co wynika ze znanej tożsamości matematycznej znikania rotacji gradientu pola wektorowego. Wykonanie operacji rotacji na równaniu (6.9) z jednoczesnym wprowadzeniem wektora wiru $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, powoduje, że transformuje się ono do postaci równania Helmholtza

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (6.18)$$

Dla przepływu dwuwymiarowego $\omega \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$ wektor wiru $\omega = [0, 0, \omega]$ jest prostopadły do płaszczyzny przepływu i równanie wektorowe przekształca się w równanie skalarne, opisujące konwekcyjny i dyfuzyjny transport wirowości

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (6.19)$$

Równanie to rozwiązywane jest przez autora niniejszej pracy metodą wirów (por. 5.5) i za pomocą tej metody zostają określone zmienne w czasie: pole wirowości, prędkość i funkcja prądu w każdym punkcie obszaru $D \cup S$.

Ciśnienie może być wyznaczane przez rozwiązanie (6.15). Postać gradientowa równania różniczkowego nie jest dogodna w poszukiwaniu przybliżonego rozwiązania metodą numeryczną, podstawowe bowiem schematy numeryczne dla tego typu zagadnień są bardzo niestabilne. Przez stabilność rozumiemy tu małą wrażliwość metody numerycznej na zaburzenia danych. W związku z tym niewielkie odstępstwa od spełnienia warunku (6.17) będą generowały duże błędy w wyznaczaniu ciśnienia.

Dlatego alternatywnie stosuje się równanie Poissona dla ciśnienia (Gresho i inni, 1984; Gresho i Sani, 1987; Peterson 2001), które otrzymuje się bezpośrednio z równania (6.15) przez zastosowanie operatora dywergencji:

$$\nabla^2 P = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \quad (6.20)$$

Równanie (6.20) należy uzupełnić warunkami brzegowymi, na przykład typu mieszanego, gdzie na części brzegu zadajemy wtedy warunek typu Neumanna, do wyznaczenia którego można zastosować następującą zależność wynikającą z równania Naviera–Stokesa:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} \text{ na brzegu } S'_N \text{ dla } t \geq 0 \quad (6.21)$$

gdzie \mathbf{n} – zewnętrzny wektor normalny do brzegu, S'_N – część brzegu, na którym zadany jest warunek Neumanna dla ciśnienia, przez analogię do S_N – oznaczającego brzeg, na którym spełniony jest warunek (6.12), sformułowany dla pochodnej normalnej prędkości.

Na pozostałej części brzegu zadajemy natomiast warunek typu Dirichleta. Warunku tego nie można jednak wyznaczyć w sposób bezpośredni. Najpierw wyznaczamy pochodną ciśnienia w kierunku stycznym do brzegu według wzoru:

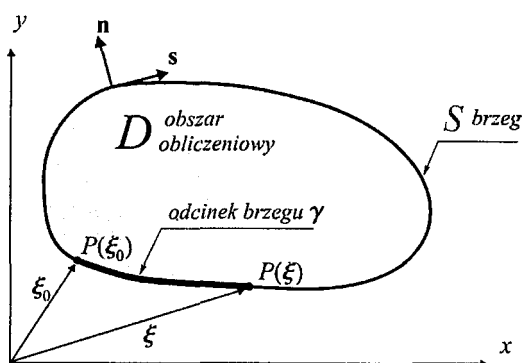
$$\frac{\partial P}{\partial s} = - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{s} \quad \text{na brzegu } S'_D \text{ dla } t > 0 \quad (6.22)$$

gdzie \mathbf{s} – wektor styczny do brzegu, S'_D – część brzegu, na którym zadany jest warunek Dirichleta dla ciśnienia.

Następnie całkujemy wynik obliczeń wzdłuż brzegu, zakładając znane ciśnienie w jego początkowym, wstępnie wybranym punkcie ξ_0 . Na przykład, poszukiwane ciśnienie brzegowe P w punkcie ξ wyznaczamy z równości

$$P(\xi) = P(\xi_0) + \int_{\gamma} \frac{\partial P}{\partial s} d\gamma = P(\xi_0) - \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{s} d\gamma, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in S'_D \quad (6.23)$$

gdzie γ – fragment brzegu łączący punkty ξ_0 i ξ (rys. 6.1).



Rys. 6.1. Wyznaczanie wartości ciśnienia brzegowego z równania (6.23)

W ten sposób równania (6.20), (6.21) i (6.23) formułują kompletne zagadnienie brzegowe dla pola ciśnienia.

W wielu przypadkach obliczeń inżynierskich mamy do czynienia ze stałym i nieprzepuszczalnym brzegiem. Prędkość przepływu jest wtedy równa zero (w równaniu (6.1) $\mathbf{U}_b = 0$), co znacznie upraszcza wyrażenie (6.23) – pod całką pozostaje tylko człon związany z dyfuzją.

Poruszone zagadnienie może być rozwiązywane m.in. metodą różnic skończonych (Fortuna i inni, 2005). Można też, korzystając ze znanych przekształceń matematycznych, formułować je w różnych równoważnych postaciach, gdzie wektor prędkości jest zastępowany innymi wielkościami fizycznymi, np. wirowością.

6.4. Rozwiązanie słabe zagadnienia różniczkowego rozkładu ciśnienia

Zastosowanie rachunku wariacyjnego jest alternatywnym podejściem do wyznaczania ciśnienia, które zostało zastosowane m.in. przez Nowakowskiego (Nowakowski i inni, 1996) i w pewnym sensie przez Ni (1995, 1998).

Ciśnienie wyznacza się z równania (6.20), które po uwzględnieniu (6.16) przyjmuje postać

$$-\nabla^2 P = \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad \text{w obszarze } D \quad (6.24)$$

a warunek brzegowy (6.21) jest postaci

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{na brzegu } S \quad (6.25)$$

gdzie \mathbf{n} – wektor normalny do brzegu, skierowany na zewnątrz obszaru ograniczonego D .

Postępujemy tak jak w metodzie wariacyjnej (Marcinkowska, 1990), słabe rozwiązanie P zagadnienia (6.24)–(6.25) można określić jako funkcję spełniającą równość

$$\int_D \nabla P \cdot \nabla w dD = - \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \cdot w dS + \int_D (\nabla \cdot \mathbf{B}) w dD \quad (6.26)$$

dla dowolnej funkcji $w \in W_2^1(D)$.

Korzystając z właściwości dywergencji, drugą całkę po prawej stronie (6.26) możemy przekształcić następująco

$$\int_D (\nabla \cdot \mathbf{B}) w dD = \int_D \nabla \cdot (\mathbf{B} w) dD - \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla w dD \quad (6.27)$$

Stosując następnie twierdzenie Gaussa–Ostrogradskiego do pierwszej całki po prawej stronie znaku równości równanie (6.27) przekształca się do postaci:

$$\int_D (\nabla \cdot \mathbf{B}) w dD = \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) w dS - \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla w dD \quad (6.28)$$

Po podstawieniu następnie zależności (6.28) do równania (6.26) otrzymujemy

$$\int_D \nabla P \cdot \nabla w dD = - \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) w dS + \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \cdot w dS - \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla w dD \quad (6.29)$$

a po uproszczeniu

$$\int_D \nabla P \cdot \nabla w dD = - \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla w dD \quad (6.30)$$

W podsumowaniu równość (6.30) ma być spełniona dla dowolnej funkcji $w \in W_2^1$.

W ten sposób otrzymaliśmy równoważną postać (6.26). Oznacza to, że funkcja P jest rozwiązaniem w sensie słabym zagadnienia (6.24) z warunkiem brzegowym (6.25), jeśli spełnia (6.30). Zagadnienie ma dokładnie jedno (z dokładnością do stałej addytywnej) słabe rozwiązanie (Marcinkowska, 1990).

Z przedstawionych rozważań wynika, że zagadnienie wyznaczenia ciśnienia dla danego pola prędkości, a także na podstawie pola wirowości lub funkcji prądu może być z powodzeniem rozwiązywane metodą numeryczną. Metoda różnic skończonych w obszarze o złożonej geometrii jest stosunkowo małoefektywna oraz najmniej dokładna. Ponadto wymaga określenia na całym brzegu ciśnienia lub jego pochodnej wielkości, które nie są a priori znane. Wymaga to więc wykonania dodatkowych obliczeń wartości brzegowych na podstawie wzorów (6.21) i (6.22)–(6.23), co wpływa negatywnie na dokładność wyników.

Metoda elementów skończonych lub metoda elementów brzegowych zastosowana do rozwiązania równania (6.30) ma tę zaletę, że w sposób jawny nie występuje warunek brzegowy dla ciśnienia, chociaż z postaci równania (6.30) wynika, że odpowiada ono zagadnieniu z warunkiem typu Neumanna. Oznacza to, że dla jednoznaczności rozwiązania, trzeba z góry w jednym wybranym punkcie brzegu przyjąć jego wartość, rozwiązanie bowiem równania (6.30) jest określone z dokładnością do stałej addytywnej. Wadą obliczeń metodą elementów skończonych jest konieczność rozwiązywania dużych układów równań, aby obliczyć ciśnienie w całym obszarze łącznie z jego brzegiem.

Zastosowanie metody elementów brzegowych umożliwi obliczenie ciśnienia tylko na brzegu, co w rozważaniach obciążenia hydrodynamicznego na konstrukcję opływającą stanowi poszukiwane rozwiązanie problemu. Zaletą w tym przypadku jest mniejszy wymiar zadania – o jeden i znacznie mniejszy układ równań algebraicznych.

6.5. Sformułowanie równań całkowych metody elementów brzegowych

W rozdziale 4.2.4 przedstawiono sposób formułowania równań całkowych metody elementów brzegowych dla operatora Laplace'a, który wykorzystamy w niniejszym punkcie do odpowiedniego przekształcenia równania Poissona dla ciśnienia w układ równań algebraicznych.

Jeżeli w miejsce \mathbf{u} w relacji (4.38) podstawimy ciśnienie P , a wyrażenie $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \xi)$, oznaczające rozwiązanie fundamentalne równania Laplace'a, zastąpimy przez $P^*(\mathbf{x}, \xi)$, to otrzymamy:

$$\int_D \left(P^*(\mathbf{x}, \xi) \nabla^2 P - P \nabla_{\mathbf{x}}^2 P^*(\mathbf{x}, \xi) \right) dD = \int_S \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} P^*(\mathbf{x}, \xi) - P \frac{\partial P^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS(\mathbf{x}) \quad (6.31)$$

gdzie

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 P^*(\mathbf{x}, \xi) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) P^*(\mathbf{x}, \xi) = -\delta(\mathbf{x}, \xi), \quad \xi \in D, \quad (6.32)$$

Podstawiając następnie do równania (6.31) słabe rozwiązanie zagadnienia (6.24)–(6.25) dla ciśnienia oraz relację (6.32), otrzymamy wyrażenie z dodatkową całką po obszarze D wynikającą ze składnika równania (6.24) stojącego po prawej stronie znaku równości

$$P(\xi) = \int_S \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} P^*(\mathbf{x}, \xi) - P \frac{\partial P^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS(\mathbf{x}) + \int_D (\nabla \cdot \mathbf{B}) P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} \quad (6.33)$$

Równość (6.33) jest punktem wyjścia do zastosowania metody elementów brzegowych.

Punkt źródłowy ξ , w którym poszukiwane jest rozwiązanie, należy do obszaru D , a nie należy do brzegu S . Znalezienie wartości ciśnienia na brzegu, np. w punkcie $\xi_0 \in S$ wymaga dokonania w (6.33) przejścia granicznego $\xi \rightarrow S$. Wówczas (6.33) przyjmie postać

$$c(\xi) P(\xi) + \int_S P \frac{\partial P^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}} dS(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} P^*(\mathbf{x}, \xi) dS(\mathbf{x}) + \int_D (\nabla \cdot \mathbf{B}) P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x}, \quad (6.34)$$

gdzie $c(\xi)$ – parametr, który zależy od kąta zewnętrznego, jaki tworzą styczne do brzegu w punkcie ξ .

Równanie (6.34) będziemy dalej przekształcać, korzystając z wcześniej wyprowadzonych zależności. Pierwszą całkę po prawej stronie zamieniamy zgodnie z równaniem (6.25), drugą zaś zastępujemy zgodnie z relacją (6.28). Po uproszczeniu dostajemy podstawową postać równania dla metody elementów brzegowych, umożliwiającą wyznaczanie ciśnienia na brzegu wyłącznie na podstawie znajomości funkcji \mathbf{B} w całym obszarze D

$$c(\xi) P(\xi) + \int_S P \frac{\partial P^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}} dS(\mathbf{x}) = - \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} \quad (6.35)$$

Funkcja P^* zależy od wymiarów przestrzeni, w przypadku przestrzeni dwuwymiarowej postać tej funkcji jest określona wzorem

$$P^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \xi| = -\frac{1}{2\pi} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (6.36)$$

a jej pochodna normalna:

$$\frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad (6.37)$$

gdzie $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$.

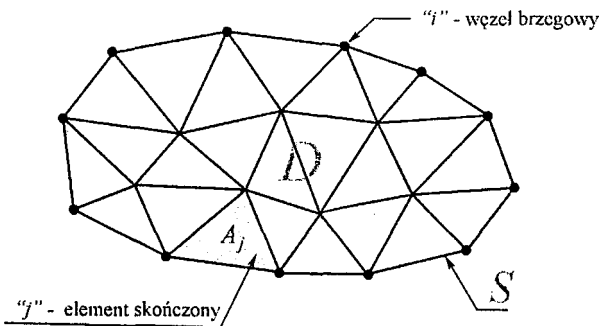
Kolejnym etapem rozwiązania jest zastosowanie metody przybliżonej do wyznaczenia wartości brzegowych P . W tym celu dokonuje się podziału brzegu oraz, ze względu na ostatni składnik równania (6.34), wnętrza obszaru na elementy skończone. Rozwiązania przybliżone poszukujemy w przestrzeni aproksymant V_h z zastosowaniem tych samych funkcji próbnych, które zostały opisane w punkcie 4.2.4. Prowadzi to do relacji

$$c(\mathbf{x}_i)P_h(\mathbf{x}_i) + \int_S P_h(\mathbf{x}) \frac{\partial P^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{n}} dS(\mathbf{x}) = - \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla P^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.38)$$

Korzystając z tych samych przekształceń do całki po lewej stronie znaku równości, jakie zastosowano we wzorze (4.50) i dalszych, otrzymujemy jej dogodną do obliczeń numerycznych postać

$$\int_S P_h(\mathbf{x}) \frac{\partial P^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{n}} dS(\mathbf{x}) = \sum_j h_{ij} P_j \quad (6.39)$$

Do przekształcenia zostaje jeszcze całka obszarowa po prawej stronie równania (6.35), która wymaga całkowania funkcji \mathbf{B} po całym obszarze D . W tym celu należy obszar przepływu podzielić na elementy skończone (rys. 6.2), a całka po obszarze zostanie zastąpiona sumą całek po elementach skończonych.



Rys. 6.2. Podział obszaru obliczeniowego na wewnętrzne elementy

Całkę sił masowych w punkcie i wyznacza się numerycznie. Jej przybliżoną wartość można przedstawić następująco:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_i) = \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla P^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^{N_g} [(\mathbf{B} \cdot \nabla P^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))_k w_k^m] A_m \right\}, \quad \mathbf{x} \in D \quad (6.40)$$

gdzie M – liczba powierzchniowych elementów skończonych, na które został podzielony obszar D , N_g – liczba punktów (węzłów) całkowania numerycznego dla każdego elementu, w_k^m – wagi kwadratury numerycznej w m -tym elemencie, A_m – pole powierzchni m -tego elementu.

Po uwzględnieniu (6.40) w (6.35) otrzymujemy postać równania, która może być już rozwiązywana metodą elementów brzegowych:

$$c_i P_i + \sum_j h_{ij} P_j = - \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^{N_g} [(\mathbf{B} \cdot \nabla P^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))_k w_k^m] A_m \right\} \quad (6.41)$$

Równanie (6.41) można zapisać w dogodnej do obliczeń postaci macierzowej:

$$[\mathbf{H}] \cdot \{P\} = \{\mathbf{B}\} \quad (6.42)$$

gdzie macierz \mathbf{H} ma postać wynikającą z lewej strony równania (6.41)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} + c_1 & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} + c_2 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{NN} + c_N \end{bmatrix}$$

gdzie N – liczba węzłów brzegowych należących do S .

W przypadku gdy na brzegu obszaru występują punkty kątowe współczynniki c_i należy wyznaczać zgodnie ze wzorem

$$\begin{aligned} c(\xi) &= 1 - \alpha/2\pi, & \xi \in S, & \quad \text{w punkcie kątowym, gdzie } \alpha \text{ jest rozwarciem kąta zewnętrznego} \\ c(\xi) &= 1/2, & \xi \in S, & \quad \text{jeżeli należy do regularnego brzegu,} \\ c(\xi) &= 1 & \xi \in D, & \quad \text{wewnątrz obszaru,} \\ c(\xi) &= 0 & \xi \notin S \cup D, & \quad \text{na zewnątrz obszaru.} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Trzeba pamiętać, że zagadnienie nie jest jednoznacznie rozwiązywalne, tzn. razem z rozwiązaniem P , takim rozwiązaniem jest również $P + \text{const}$. Oznacza to, że macierz \mathbf{H} w takim przypadku jest osobliwa, a jej jądro jest jednowymiarową przestrzenią z wektorem bazowym postaci $[1, 1, 1, \dots, 1]$. Wtedy układ (6.42) należy rozwiązywać w przestrzeni dopełniającej do jądra macierzy \mathbf{H} , a niejednoznaczność zadania usunąć przyjmując określoną wartość ciśnienia w jednym wybranym punkcie na brzegu.

6.6. Modyfikacje równań poprawiające efektywność metody przybliżonej wyznaczania ciśnienia

Wektor sił obszarowych, wynikający z równości (6.15) o postaci

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) - \nu \nabla^2 \mathbf{u},$$

składa się z wyrażenia nieliniowego – pochodnej konwekcyjnej oraz pierwszych i drugich pochodnych pola prędkości. Prawa strona (6.30) i (6.35) może więc zostać rozpisana jako suma następujących całek:

$$\begin{aligned} - \int_D \mathbf{B} \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} &= - \underbrace{\int_D \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x}}_{I_1(\xi)} \\ &+ \underbrace{\int_D (\mathbf{u} \cdot (\nabla_x \mathbf{u})) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x}}_{I_2(\xi)} + \underbrace{\int_D \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x}}_{I_3(\xi)} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Wyznaczenie ciśnienia wymaga obliczenia całek $I_1(\xi)$, $I_2(\xi)$, $I_3(\xi)$, które zależą od pochodnych pola prędkości \mathbf{u} . Mając na uwadze obliczenia numeryczne, będziemy starali się przekształcić te całki do postaci sprawiających mniejsze trudności rachunkowe. Będzie polegać to na zamianie całkowania po obszarze na całkowanie po brzegu oraz na obniżeniu rzędu pochodnej \mathbf{u} . Ponieważ

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} P^*(\mathbf{x}, \xi) \right) &= P^*(\mathbf{x}, \xi) \operatorname{div}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \\ + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi), \end{aligned} \quad (6.45)$$

pierwszą całkę można zamienić na całkę po brzegu, stosując twierdzenie Greena:

$$I_1(\xi) = - \int_D \operatorname{div}_x \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} P^*(\mathbf{x}, \xi) \right) d\mathbf{x} = - \int_S P^*(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}). \quad (6.46)$$

W przekształceniach całki $I_2(\xi)$ skorzystamy z następujących tożsamości wynikających odpowiednio ze wzorów (9.19) i (9.15) (Dodatek D)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla_x (\mathbf{u}^2) &= \mathbf{u} \cdot (\nabla_x \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \\ (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) &= (\nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

oraz z tego, że $\boldsymbol{\omega} = [0, 0, \omega]$. Wtedy zachodzi

$$\begin{aligned} I_2(\xi) &= -\int_D \left(\nabla_x \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} \\ &= -\int_D \nabla_x \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} - \int_D (\nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \\ &= -\int_D \nabla_x \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} - \int_D \omega (\mathbf{u} \times \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi)) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Pierwsza całka po prawej stronie znaku równości z gradientem kwadratu prędkości może być przeniesiona na lewą stronę równości (6.30). Otrzymamy wówczas po lewej stronie całkę

$$\int_D \nabla_x \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + P \right) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x}$$

w której wyrażenie w nawiasie nawiązuje do odpowiedniego wyrażenia w równaniu Bernoulliego dla linii prądu przy założeniu zerowej siły masowej.

Przekształcenia trzeciej całki dokonujemy na podstawie tożsamości (9.27)

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u})$$

Ponieważ $\text{div}_x \mathbf{u} = 0$, zastosowanie wzoru Greena pozwala teraz otrzymać

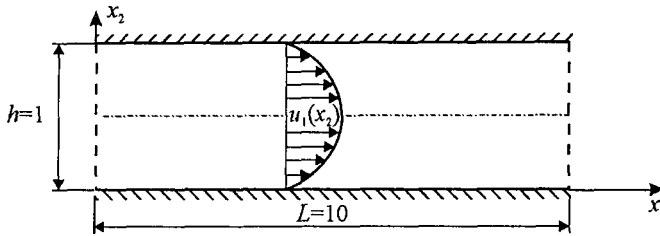
$$\begin{aligned} I_3(\xi) &= \nu \int_D (\nabla_x (\nabla_x \cdot \mathbf{u}) - \nabla_x \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} \\ &= -\nu \int_D (\nabla_x \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla_x P^*(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x} = \nu \int_S \omega \frac{\partial P^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})} dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6.48)$$

gdzie $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ – jednostkowy wektor styczny do brzegu w punkcie \mathbf{x} .

6.7. Przykłady obliczenia rozkładu ciśnienia

Algorytm i program komputerowy do obliczeń pola ciśnienia na podstawie znajomości pola prędkości oraz wirowości został opracowany przez autora w metodzie elementów brzegowych, zgodnie z zasadami opisanymi w rozdziale 6.5. Do napisania tego programu o nazwie *wkRun* wykorzystano środowisko *MatLab* wersja R2007a. Program wykorzystuje wynikowe pola prędkości i wirowości wyprowadzone z programu metody wirów – *MetVir*.

Zgodność obliczeń proponowaną metodą z rozwiązaniem analitycznym przetestowano na przykładzie dwuwymiarowego przepływu w kanale prostokątnym (rys. 6.3) o wysokości h i długości L , w którym odbywa się ustalony przepływ laminarny.



Rys. 6.3. Schemat kanału do wyznaczenia ciśnienia w przepływie Poiseuille'a

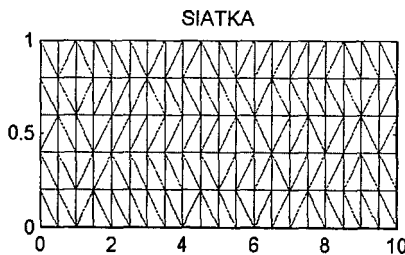
Jest to zagadnienie przepływu Poiseuille'a opisane w podrozdziale 3.3, dla którego rozkład prędkości jest dany wzorem (3.104)

$$u_1(x_2) = \frac{1}{2\nu\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x_1} (x_2^2 - hx_2)$$

Gradient ciśnienia w tym wzorze jest ujemny i jego wartość obliczono, przyjmując jednostkowy przepływ $Q = 1$ oraz wysokość kanału $h = 1$. Po scałkowaniu wyrażenia wzdłuż współrzędnej x_2 do wysokości kanału, otrzymujemy relację

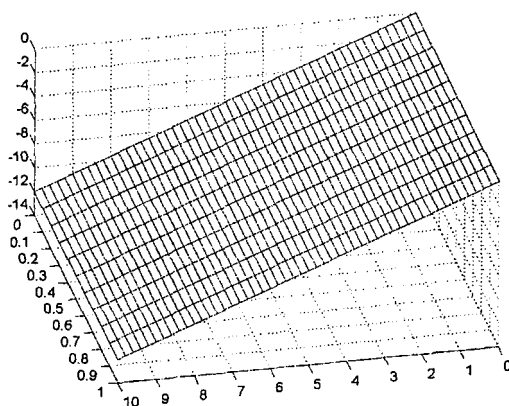
$$p = -12\nu\rho x_1 + C \quad (6.49)$$

Za model numeryczny przyjęto kanał o wymiarach $h = 1,0$ i $L = 10,0$, który został podzielony siatką elementów trójkątnych (rys. 6.4). W węzłach siatki wyliczone zostały prędkości i wirowości na podstawie wzoru (3.104) i przyjętych założeń.



Rys. 6.4. Schemat kanału do obliczeń ciśnienia dla przepływu Poiseuille'a

Przyjęto do celów testowych wartości $\rho = 1$, $\nu = 0,1$ oraz $p(0) = 0$, stąd rozwiązanie analityczne przedstawia zależność $p = -1,2x$. Wyniki obliczeń ciśnienia metodą elementów brzegowych przedstawiono na rysunku 6.5, z którego wynika, że są zgodne z rozwiązaniem analitycznym.



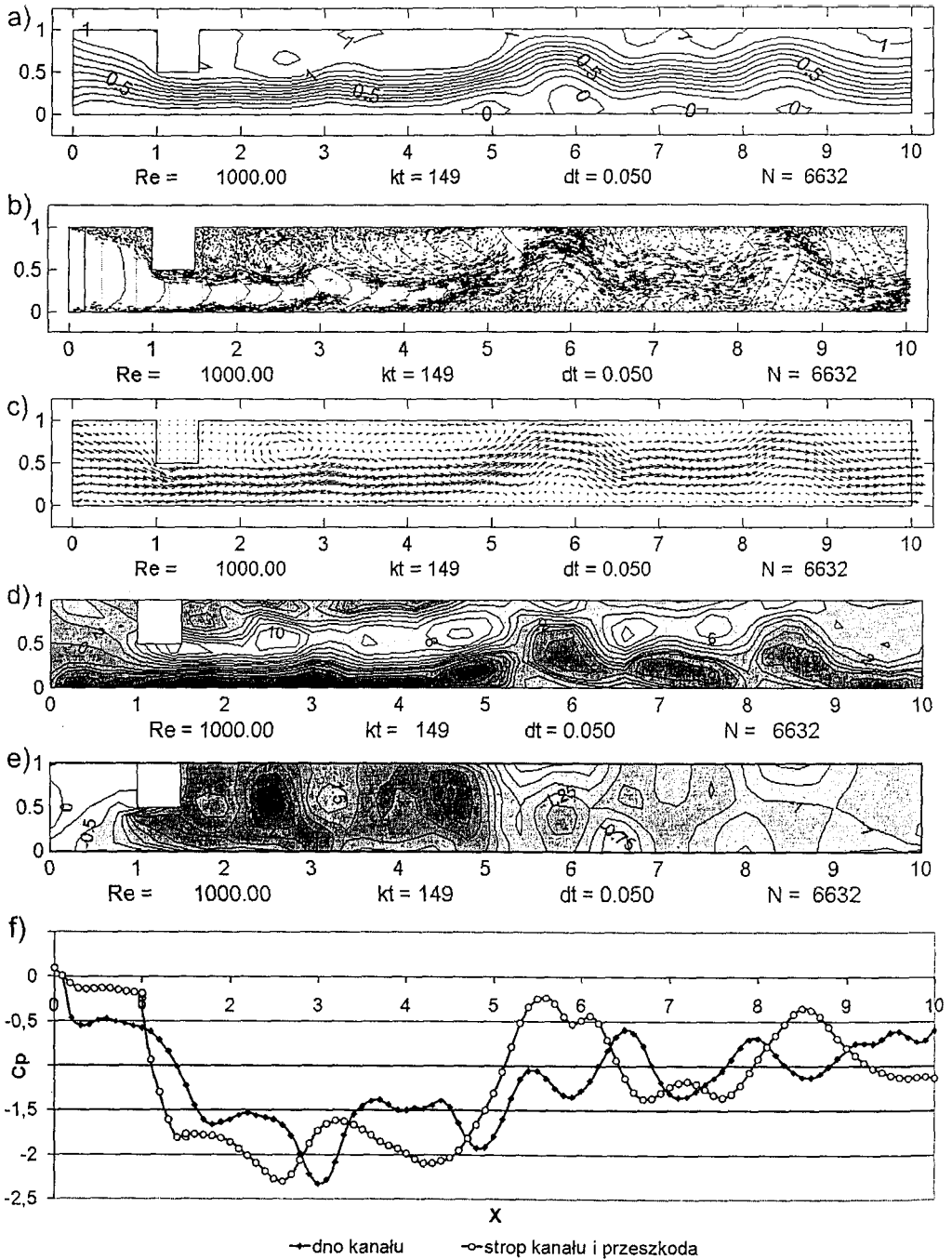
Rys. 6.5. Izolinie powierzchni wyznaczające rozkład ciśnienia dla przepływu Poiseuille'a

Jako kolejny przykład obliczeń przedstawiono wyznaczenie ciśnienia dla przepływu przez kanał z przeszkodą boczną na podstawie pola prędkości i wirowości określonych z metody wirów. Celem tej symulacji jest ilustracja graficzna zmian ciśnienia wywołanych strukturami wirowymi. Przyjęto do obliczeń kanał o długości $L = 10$, wysokość $H = 1$ oraz liczbę Reynoldsa $Re = 1000$, dla której szczególnie wyraźnie zaznaczają się niestabilności przepływu związane ze strukturami wirowymi. Struktury tworzą się za przeszkodą, są od niej odrywane i unoszone z przepływem, a na ich miejsce powstają nowe wiry. Każda taka struktura powoduje powstanie pulsacji ciśnienia w jej otoczeniu.

Na rysunku 6.6 przedstawiono obliczone numerycznie parametry pola przepływu za przeszkodą w czasie $t = 7,45$ s w postaci linii prądu, pola prędkości i wirowości wyznaczonych metodą wirów oraz współczynnika ciśnienia i jego wartości wzdłuż brzegu dolnego i górnego kanału obliczonych metodą elementów brzegowych.

Rozkład wektorów prędkości przepływu i rozkład pola wirowości determinują rozwiązanie dla pola prędkości, co ilustruje rysunek 6.6c–e. Dla liczby Reynoldsa 1000 duże gradienty pola wirowości (na rysunku 6.6d przejście od obszarów jasnych do ciemnych) pokrywają się z dużym gradientem pola ciśnienia (rys. 6.6e). Jak wykazały symulacje autora, przy wzroście liczby Reynoldsa wpływ pola prędkości na zmianę pola ciśnienia rośnie, a wpływ wirowości wyraźnie maleje, co jest zgodne z dominacją adwekcji nad dyfuzją dla tego rodzaju przepływu.

Inne, praktyczne przykłady rozwiązania zagadnienia ciśnienia proponowaną w pracy metodą numeryczną przedstawiono w rozdziale 7.



Rys. 6.6. Przepływ w kanale z przeszkodą, w czasie $t = 7,45$ s: a) linie prądu, b) położenia kropli wirowych wraz z ich wektorami prędkości oraz tachoidy prędkości, c) rozkład pola prędkości, d) rozkład pola wirowości, e) rozkład pola ciśnienia (C_p), f) rozkład ciśnienia (C_p) na brzegach kanału

7. Analiza obciążeń hydrodynamicznych działających na wybrane rodzaje zamknięć hydrotechnicznych

7.1. Zasuwa płaska

Analiza obciążeń hydrodynamicznych została wykonana dla zamknięcia zasuwego w spuszczeniu dennym zapory zbiornika Słup na rzece Nysie Szalonej po założeniu, że w wyniku pracy przelewów i spustu oraz wysokiego poziomu w rzece następuje zatopienie wylotu spustu, który pracuje ciśnieniowo. Kanał spustu dennego wyposażony jest w dwie zasuwy – pierwsza od wody górnej jest zamknięciem awaryjnym i jest zwykle całkowicie otwarta, druga zaś jest zamknięciem głównym, tzn. pracującym stale. Kanał spustowy poza wlotem jest pryzmatyczny, jego przekrój poprzeczny ma wymiary 2,30 m szerokości oraz 2,80 m wysokości. Wysokość zwierciadła wody ponad dnem spustu liczona dla normalnego poziomu piętrzenia w zbiorniku wynosi $H = 17,2$ m. Schemat bloku urządzeń zrzutowych przedstawiono na rysunku 7.1. Schemat obliczeniowy spustu wraz z zamknięciem głównym obejmujący wlot, zasuwę oraz część kanału spustowego został przedstawiony na rysunku 7.2. Do wyznaczenia siły hydrodynamicznej wybrano dwa położenia zamknięcia – otwarcie zasuwy na wysokość 1,0 m oraz 2,0 m nad dnem. Schemat konstrukcji zamknięcia zasuwego przedstawiono na rysunku 2.8a w podrozdziale 2.2.1.1. Zasuwa ma konstrukcję wielodźwigarową oraz płaską, poziomą dolną krawędź. Na potrzeby analizy siły hydrodynamicznej zamknięcia, oprócz wariantu z poziomą dolną krawędzią zasuwy, przyjęto dodatkowe warianty kształtu – krawędź pochylona w kierunku napływu pod kątem 45° i $22,5^\circ$ do poziomu oraz pochylona w przeciwnym kierunku pod kątem $22,5^\circ$. Wszystkie warianty kształtu dolnej krawędzi zasuwy przedstawiono na rysunku 7.3.

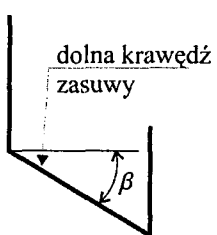
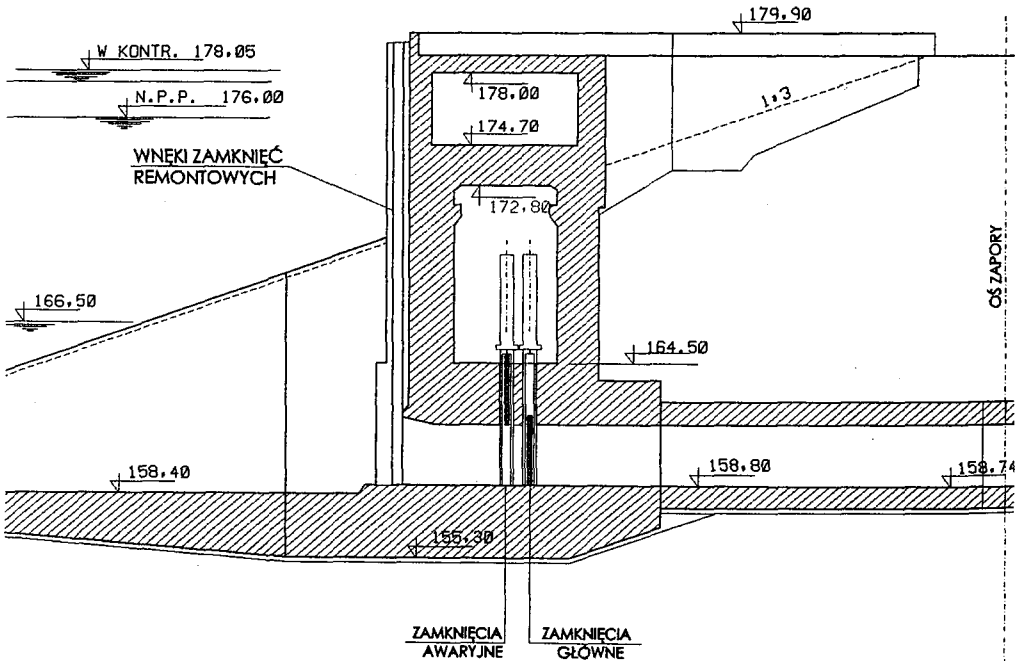
Wydatek spustu wyznaczono, przyjmując dla zamknięcia zasuwego współczynniki kontrakcji C_r oraz wydatku C_d , na podstawie pracy Chenga (1981). Współczynniki C_r i C_d są funkcjami kąta β pochylenia krawędzi zamknięcia do poziomu i zostały zamieszczone w tabeli 7.1. Obliczone wartości wydatków spustu na jeden metr szeroko-

ści zasuwy wynoszą $q = 11,57 \text{ m}^2/\text{s}$ dla otwarcia 1,0 m oraz $q = 23,15 \text{ m}^2/\text{s}$ dla otwarcia 2,0 m.

Ze względu na nieznaczne różnice w wartościach współczynników wydatku C_d (ok. 10%) dla kątów 45° i 0° przyjęto jednakową wartość tych współczynników dla wszystkich kształtów dolnej krawędzi.

Tabela 7.1. Współczynniki kontrakcji i wydatku dla ciśnieniowego zamknięcia zasuwegowego (Cheng, 1981)

$\beta [^\circ]$	C_r	C_d
90	0,600	0,55
65	0,611	0,561
45	0,630	0,570
30	0,641	0,587
14,5	0,652	0,597
5	0,678	0,618
0	0,692	0,630

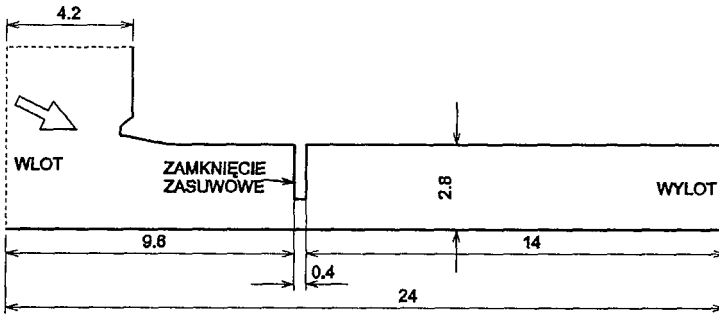



Rys. 7.1. Przekrój podłużny przez spust denny zapory zbiornika Słup na rzece Nysie Szalonej

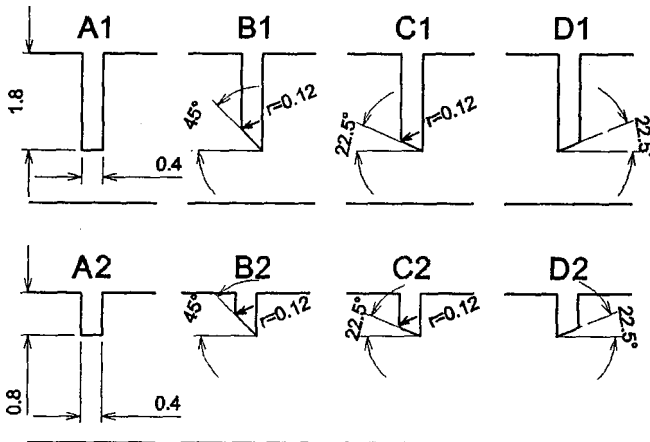
Modelowanie przepływu dla zasuw wykonano w układzie bezwymiarowym. W tym celu zastosowano liczbę Reynoldsa, którą odniesiono do obliczonej prędkości przepływu pod zamknięciem:

$$Re = \frac{u_0 R_h}{\nu} \tag{7.1}$$

gdzie u_0 – średnia wartość prędkości poziomej w przekroju zamknięcia, R_h – promień hydrauliczny w przekroju zamknięcia, $\nu = 10^{-6}$ – lepkość kinematyczna wody w temperaturze około 18 °C. Otrzymano następujące liczby Reynoldsa na podstawie wzoru (7.1): $Re = 5,83 \cdot 10^6$ dla otwarcia 1,0 m (kształty A1, B1, C1, D1), oraz $Re = 9,02 \cdot 10^6$ dla otwarcia 2,0 m (kształty A2, B2, C2, D2).



Rys. 7.2. Model obliczeniowy spustu wraz z zamknięciem głównym



Rys. 7.3. Warianty kształtu dolnej krawędzi zasuw dla numerycznej analizy

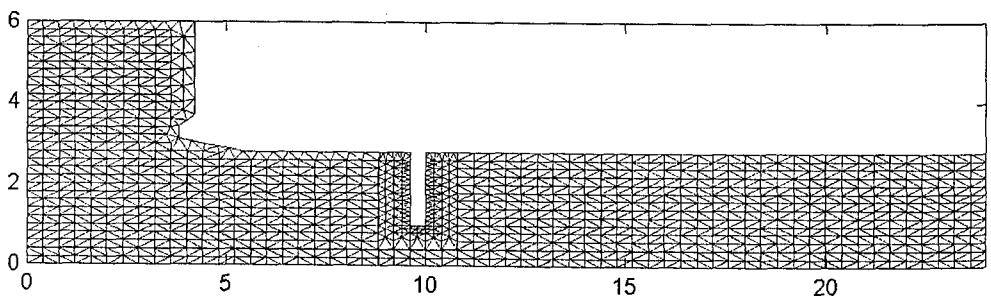
W symulacjach numerycznych przyjmowano wartości wydatku wody znormalizowane względem charakterystycznej prędkości w przekroju pod zamknięciem i wysokości otwarcia zasuwy, tak aby uzyskać jednostkowe wartości prędkości średniej pod zamknięciem. Na tej podstawie wyznaczono charakterystyczną prędkość $u_0 = 11,57$ m/s, względem której normalizowane są pozostałe fizyczne wielkości. W układzie bezwymiarowym ciśnienie jest znormalizowane względem czynnika ρu_0^2 , dlatego w obliczeniach posługiwano się współczynnikiem ciśnienia $C_p = (p - p_0) / \rho u_0^2$, gdzie p_0 jest referencyjnym ciśnieniem, które w obliczeniach przyjmowano równe zero. Przyjęcie p_0 jest niezbędne z uwagi na osobliwość macierzy \mathbf{H} w równaniu macierzowym metod elementów brzegowych (6.42)

$$[\mathbf{H}] \cdot \{P\} = \{\mathbf{B}\}$$

Obliczenia metodą wirów wykonywano dla następujących parametrów obliczeniowych:

- podstawowa długość elementu brzegowego, z którego warstwa wirowa zamieniana była na kroplę wirową $h = 0,2$,
- promień obciążenia $\varepsilon = h^{0,95} = 0,2168$,
- krok czasowy $dt = 0,15$; takie przyjęcie zapewnia, że przemieszczenie kropli wirowej w jednym kroku czasowym jest mniejsze od wartości $h = 0,2$,
- liczba kroków czasowych dla każdej symulacji $kt = 800$,
- uśrednianie obliczonych wartości pola prędkości i wirowości dla wyznaczania ciśnienia dokonywano dla przedziału 401–800 kroków czasowych.

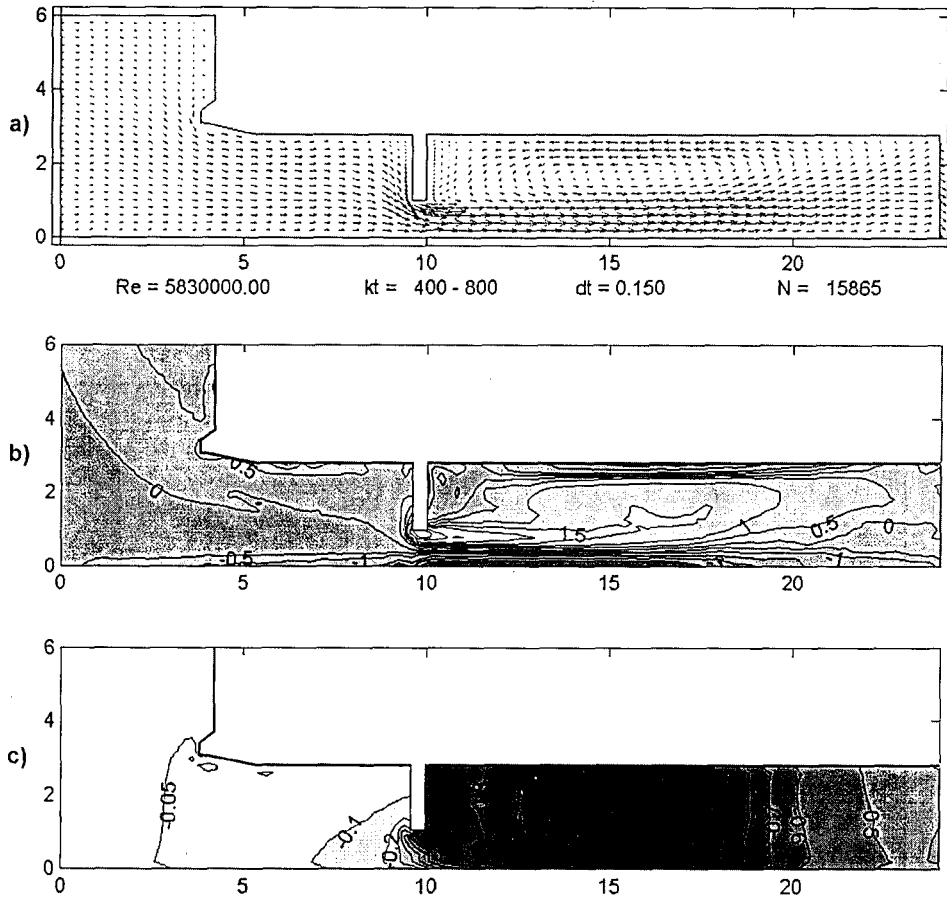
Ciśnienie wyznaczano na podstawie rozwiązania równania Poissona dla ciśnienia metodą elementów brzegowych, zgodnie z zasadami omówionymi w rozdziale 6. Niezbędne do obliczeń pola prędkości i wirowości otrzymywano z metody wirów. Aby wyznaczyć ciśnienie w obszarze przepływu, konieczne było przyjęcie siatki numerycznej pokrywającej obszar. Zdecydowano się na siatkę trójkątną z liniową aproksymacją pola prędkości i wirowości w obrębie elementu trójkątnego. Na rysunku 7.4 przedstawiono przykładową siatkę wariantu A1 zasuwy.



Rys. 7.4. Siatka numeryczna do wyznaczania ciśnienia dla wariantu A1 zasuwy

7.1.1. Dolna krawędź pozioma

Zgodnie z rysunkiem 2.8a, w rozdziale 2.2.1.1, analizowane zamknięcie zasuwowe ma dolną krawędź pochyloną pod kątem 0° względem poziomu. Obliczenia obejmowały dwa warianty jego otwarcia na wysokość 1,0 m i 2,0 m, co na rysunku 7.3 oznaczono symbolami A1 i A2. Na rysunku 7.5 przedstawiono dla wariantu A1 uśrednione pole prędkości, pole wirowości i pole ciśnienia w układzie bezwymiarowym (C_p).

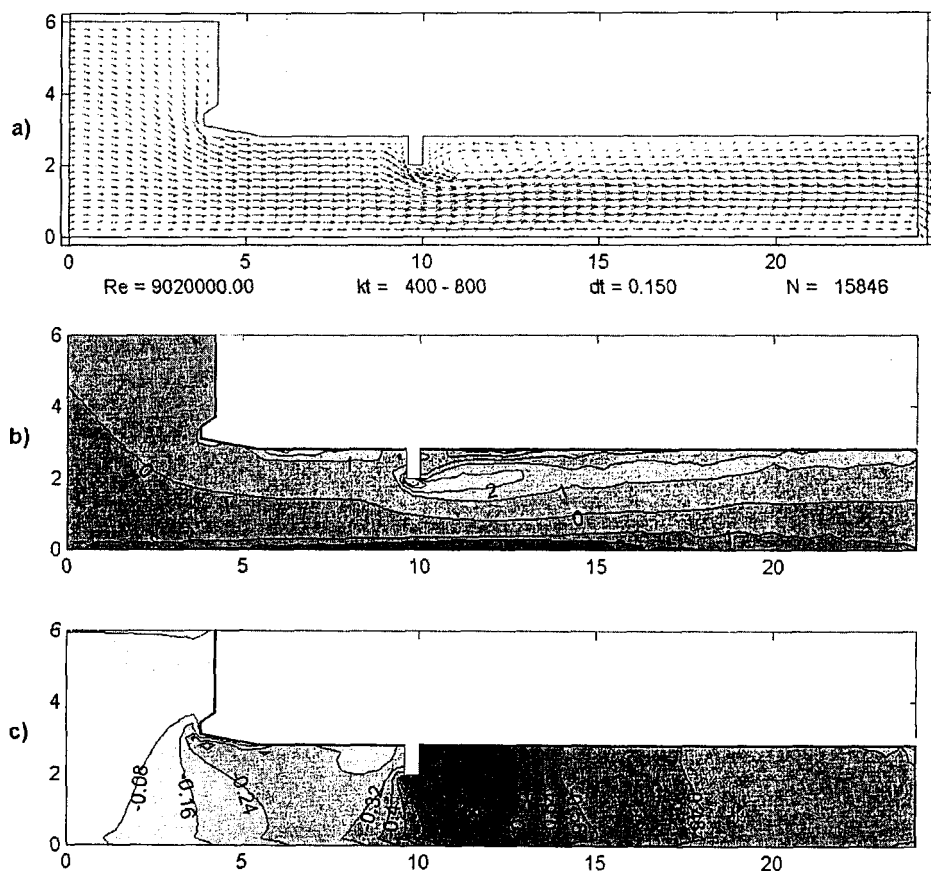


Rys. 7.5. Wyniki obliczeń zasuw – wariant A1: a) rozkład prędkości:
b) rozkład wirowości, c) rozkład ciśnienia (C_p)

Za zamknięciem występuje strefa recyrkulacji, którą można zaobserwować na rysunku 7.5a w postaci wiru wyznaczonego przez wektory pola prędkości. Izolinie wirowości, przedstawione na rys. 7.5b, osiągają największe wartości bezwymiarowe w przekroju poniżej zamknięcia, a wartości najmniejsze występują wzdłuż dna przewodu za zamknięciem. Wynika to z intensywnej generacji wirowości w tych miejscach

kanalu. Największe gradienty ciśnienia (C_p) występują w przekroju pod zamknięciem, gdzie gwałtownie zwiększa się prędkość przepływu, a obszar najmniejszego ciśnienia wynoszącego około $-1,1$ występuje za zamknięciem w odległości odpowiadającej położeniu środka strefy recyrkulacji, co można zaobserwować na rysunku 7.5c.

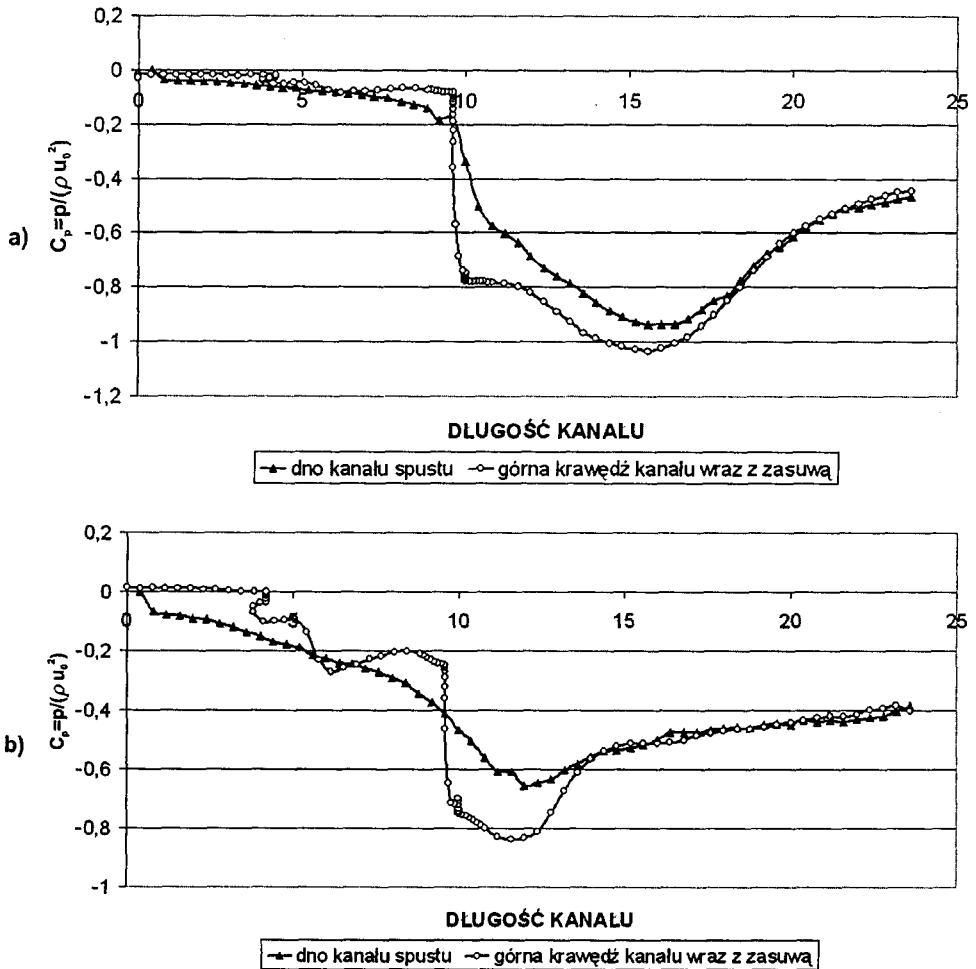
Na rysunku 7.6 przedstawiono wyniki numerycznej analizy dla wariantu A2.



Rys. 7.6. Wyniki obliczeń zasuw – wariant A2: a) rozkład prędkości, b) rozkład wirowości, c) rozkład ciśnienia C_p

Strefa recyrkulacji dla otwarcia zasuw na wysokość 2,0 m jest wyraźnie mniejsza niż przy otwarciu 1,0 m, co można zaobserwować na rysunku 7.6a. Również wirowość oraz ciśnienie C_p osiągają nieco mniejsze wartości dla tego otwarcia zasuw w porównaniu do otwarcia 1,0 m. Analizując bezwymiarowe izoliny ciśnienia na rysunku 7.6c, można zauważyć, że obszar o wartościach najmniejszych wynoszących w przybliżeniu $-0,88$ jest zlokalizowany w przybliżeniu w środku strefy recyrkulacji, podobnie jak dla otwarcia 1,0 m.

Na rysunku 7.7a i b przedstawiono dla wariantu A1 i A2 rozkład współczynnika ciśnienia wzdłuż górnego brzegu kanału wraz z konturem zamknięcia oraz wzdłuż jego dolnego brzegu.



Rys. 7.7. Rozkład współczynnika ciśnienia C_p na dolnym i górnym brzegu kanału:
a) dla wariantu A1, b) dla wariantu A2

W przypadku otwarcia na wysokość 1,0 m na górnym brzegu kanału od wlotu do przekroju zamknięcia, współczynnik ciśnienia jest nieznacznie mniejszy od zera. W przekroju zamknięcia na jego przedniej krawędzi następuje gwałtowne obniżenie ciśnienia, które dalej jeszcze maleje aż do przekroju odpowiadającego położeniu środka recyrkulacji, osiągając najmniejszą wartość równą $-1,03$. W kierunku wylotu ci-

śnienie stopniowo wzrasta. Podobnie zachowuje się ciśnienie na dolnym brzegu kanału, ale jego zmiany przebiegają łagodniej (rys. 7.7a).

W przypadku otwarcia na wysokość 2,0 m, ze względu na dwukrotnie większą wartość przepływu, spadek ciśnienia na odcinku od wlotu do przekroju zamknięcia na górnym i dolnym brzegu kanału jest większy, co można zaobserwować na rysunku 7.7b. Następnie na powierzchni przedniej zamknięcia następuje gwałtowny spadek C_p , które dalej znacznie się obniża, aż do przekroju odpowiadającego centrum recyrkulacji, po czym zaczyna wzrastać w kierunku wylotu. Na dolnym brzegu kanału charakter zmian jest podobny, ale bardziej łagodny. Najmniejszy współczynnik ciśnienia C_p dla tego otwarcia jest nieco większy niż dla otwarcia 1,0 m i wynosi $-0,837$.

Siłę hydrodynamiczną dla przyjętej głębokości wody w zbiorniku ponad dnem spustu można wyznaczać na podstawie rozkładu współczynnika ciśnienia $C_p(\gamma)$ wzdłuż konturu γ zamknięcia.

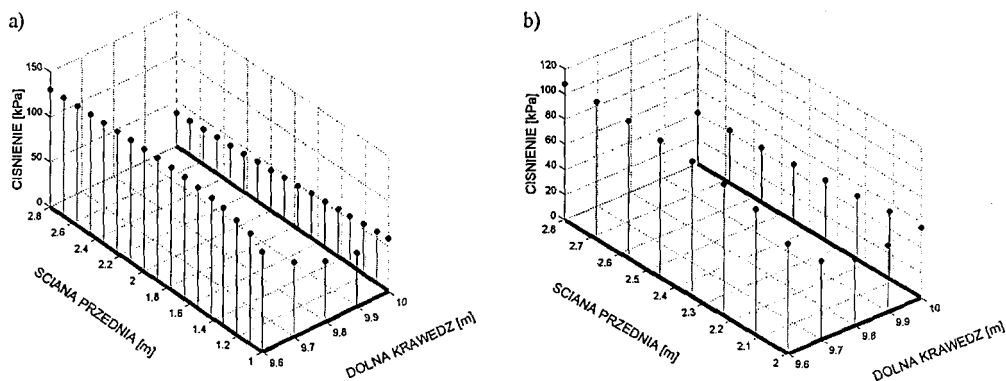
Dla rozpatrywanego przypadku zasowy składowe siły pozioma F_1 i pionowa F_2 na jednostkę długości zamknięcia wyrażone są całką po konturze z sumy ciśnienia hydrodynamicznego wyrażonego iloczynem $\rho g u_0^2 C_p(\gamma)$ oraz ciśnienia hydrostatycznego $\rho g H(\gamma)$. Jeśli opiszemy kształt tego konturu za pomocą krzywej parametrycznej $\gamma = (x_1(s), x_2(s))$, to otrzymamy

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\gamma(s)} \left(\rho g (u_0^2 C_p(\gamma) + H(\gamma)) \right) n_1 dx_2 = \int_{\gamma(s)} n_1 \left(\rho g (u_0^2 C_p(\gamma) + H(\gamma)) \right) (ds n_2) \\ F_2 &= \int_{\gamma(s)} \left(\rho g (u_0^2 C_p(\gamma) + H(\gamma)) \right) n_2 dx_1 = \int_{\gamma(s)} n_2 \left(\rho g (u_0^2 C_p(\gamma) + H(\gamma)) \right) (ds n_1) \end{aligned} \quad (7.2)$$

gdzie: $H(\gamma)$ – różnica wysokości normalnego poziomu piętrzenia w zbiorniku i punktów należących do krzywej γ , $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – wektor normalny do krzywej γ skierowany na zewnątrz konturu zamknięcia (por. punkt 3.1.9).

Na rysunku 7.8 przedstawiono rozkład wartości fizycznych całkowitego ciśnienia (hydrodynamicznego i hydrostatycznego) wzdłuż krawędzi zasowy, którego kształt jest podobny dla wariantów A1 i A2. Na ścianie przedniej, na styku kanału i zasowy, ciśnienie ma wartość największą, a następnie maleje aż do przeciwnego rogu między tylną ścianą zasowy i stropem kanału. Różnica między tymi wartościami jest około trzykrotna dla obu wariantów otwarcia.

Uśrednioną siłę naporu wyznaczono zgodnie ze wzorem (7.2) i otrzymano następujące wartości: dla wariantu A1 składowa pionowa 33,10 kN, składowa pozioma 134,74 kN, a dla wariantu A2 składowa pionowa 33,10 kN, składowa pozioma 134,74 kN.



Rys. 7.8. Rozkład ciśnienia wzdłuż krawędzi zasuw: a) wariant A1, b) wariant A2

7.1.2. Dolna krawędź pozioma – przepływ potencjalny

Aby określić różnice obciążeń wyznaczonych proponowaną w niniejszej pracy metodą i za pomocą stosowanej powszechnie metody siatki hydrodynamicznej (por. podrozdział 4.1.1), w niniejszym punkcie przedstawiono rozwiązanie metodą siatki hydrodynamicznej dla wariantu A1 i A2 zasuw.

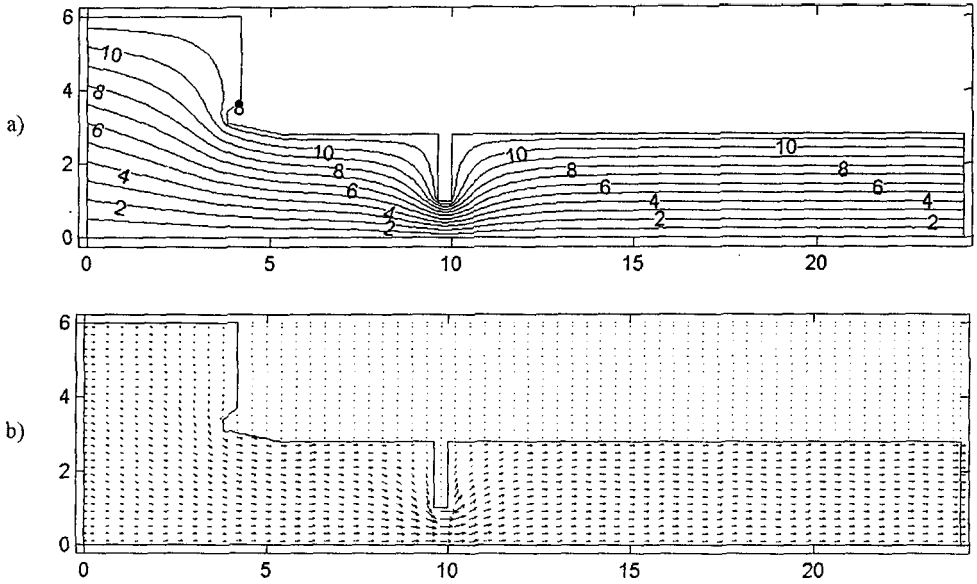
Zagadnienie przepływu potencjalnego sformułowano w postaci równania Laplace’a dla potencjalnej funkcji prądu, zgodnie z zasadami omówionymi w punkcie 3.1.9.

Przyjęto następujące założenia do tych obliczeń:

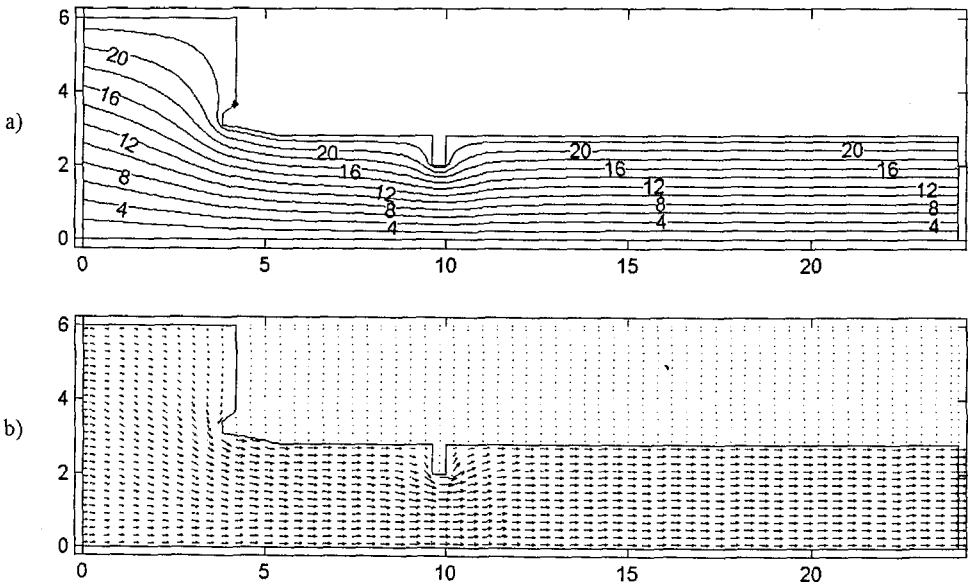
- wartości przepływu na jednostkę szerokości spustu są takie same jak w obliczeniach metodą wirów, tzn. $11,57 \text{ m}^2/\text{s}$ dla wariantu A1 i $23,15 \text{ m}^2/\text{s}$ dla wariantu A2,
- geometria obszaru przepływu jest zgodna z rysunkiem 7.2,
- ciśnienie wzdłuż konturu zamknięcia (skrajnej linii prądu) wyznaczano na podstawie równania Bernoulliego, według zasad zdefiniowanych w rozdziale 4.1.1.

Do obliczania przepływu potencjalnego zastosowano metodę elementów brzegowych. Na rysunku 7.9 przedstawiono wynik tych obliczeń w postaci pola prędkości potencjalnej i funkcji prądu. Zgodnie z teorią takich przepływów za zamknięciem nie występuje strefa recyrkulacji.

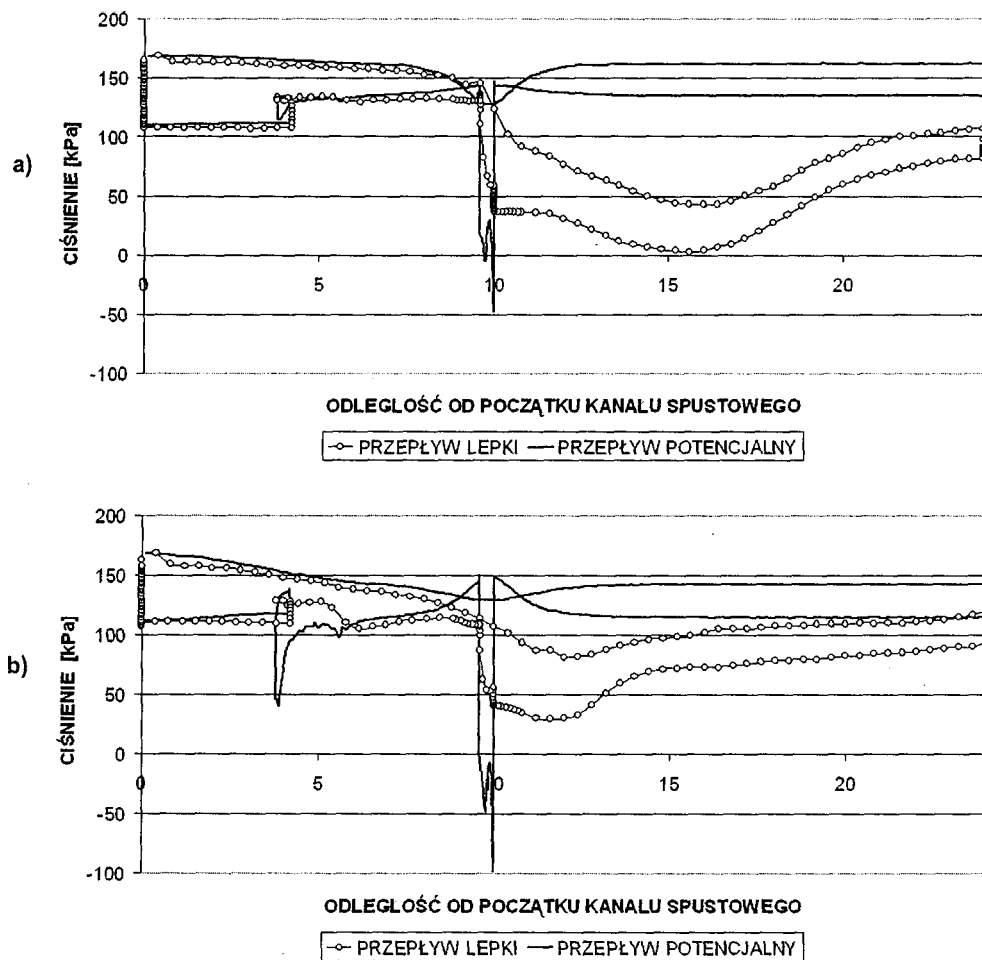
Wyznaczone prędkości przepływu potencjalnego osiągają bardzo duże wartości w punktach narożnych dolnej krawędzi zasuw. Obliczone na ich podstawie ciśnienie uzyskuje w tych punktach bezwzględne wartości powyżej 5 MPa, dlatego zdecydowano, aby posłużyć się prędkościami zlokalizowanymi w niewielkiej odległości (równej 0,1 bezwymiarowo) od brzegów. Ciśnienie wyznaczone z równania Bernoulliego wzdłuż całego konturu kanału przedstawiono na rysunku 7.11. Na rysunku tym przedstawiono również ciśnienie obliczone na podstawie proponowanej w pracy metody.



Rys. 7.9. Przepływ potencjalny dla zasuw – wariant A1: a) wykres funkcji prądu, b) pole prędkości



Rys. 7.10. Przepływ potencjalny dla zasuw – wariant A2: a) wykres funkcji prądu, b) pole prędkości



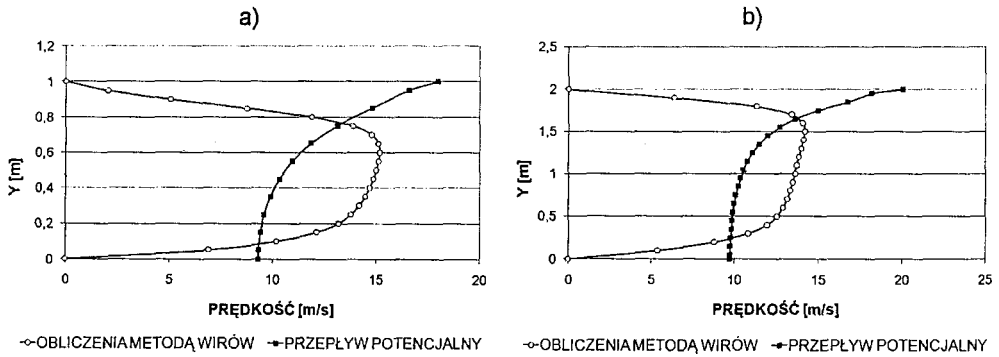
Rys. 7.11. Wykres brzegowych wartości ciśnienia na podstawie proponowanej w pracy metody i rozwiązania potencjalnego: a) dla wariantu A1, b) dla wariantu A2

Porównując wykresy brzegowego ciśnienia całkowitego można zauważyć, iż dla wariantu A1, na odcinku początkowym kanału do przekroju zamknięcia, rozwiązanie zagadnienia potencjalnego i rozwiązanie metodą zaproponowaną w pracy dają zbliżone rezultaty. Na przedniej krawędzi zamknięcia występuje skokowe zmniejszenie ciśnienia, jednak w przypadku rozwiązania potencjalnego jest ono około dwukrotnie większe niż dla metody wirów. W rozwiązaniu potencjalnym na tylnej krawędzi zasuw następuje ponowna gwałtowna zmiana ciśnienia, ale w kierunku większych jego wartości, co wynika ze zmiany wektorów pola prędkości, przedstawionych na rysunku 7.9. Na długości kanału ciśnienie jest stałe. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do rozwiąza-

nia metodą wirów, gdy za zamknięciem ciśnienie jeszcze maleje, aż do centrum strefy recyrkulacji, a następnie powoli rośnie.

W przypadku otwarcia zasuwy na wysokość 2,0 m (wariant A2) charakter zmian ciśnienia dla przepływu potencjalnego jest bardzo podobny jak w wariancie A1. Większa jest zmiana ciśnienia na krawędzi zamknięcia i dlatego bardziej znaczące są różnice między rozwiązaniem potencjalnym a proponowaną w pracy metodą wirów.

W obliczeniach przepływu potencjalnego bardzo duże ujemne ciśnienia w narożach na dolnej krawędzi zamknięcia, wynoszące dla wariantu A2 około -100 kPa, wynikają z rozkładu prędkości, którą uzyskuje przepływ potencjalny w przekroju zamknięcia i to mimo przyjmowania do obliczeń wartości prędkości nieależących bezpośrednio na brzegu. Najlepiej sytuację tę obrazuje rysunek 7.12, na którym przedstawiono profile prędkości pod zamknięciem, obliczone obiema metodami.



Rys. 7.12. Porównanie profili prędkości dla przepływu potencjalnego i lepkiego obliczonego metodą wirów: a) wariant A1, b) wariant A2

Rozkład prędkości potencjalnej dla obu rozpatrywanych wariantów charakteryzują się występowaniem prędkości ekstremalnych w punktach leżących na krawędzi dolnej zamknięcia i na dolnym brzegu kanału, podczas gdy odpowiadające im tachoidy prędkości dla przepływu lepkiego mają na brzegu wartości zerowe.

Na podstawie uzyskanych profili prędkości wyznaczono wartości wydatku pod zamknięciem, aby sprawdzić czy zachowany został przepływ masy. Obliczone wartości zestawiono w tabeli 7.2 i wskazują one, że dla obu metod zasada zachowania masy jest spełniona.

Rozkład ciśnienia wzdłuż krawędzi zamknięcia opływanej ruchem potencjalnym przeliczono następnie na siłę hydrodynamiczną zgodnie z równaniem (7.2), a wyniki zestawiono w tabeli 7.3 dla porównania z wynikami obliczonymi metodą wirów.

Tabela 7.2. Wartości przepływu pod zasuwą – wariant A1 i A2

Wariant	Przepływ na jednostkę szerokości kanału spustu		
	wartość zadana	wartość obliczona potencjalna	wartość obliczona z metody wirów
	[m ² /s]	[m ² /s]	[m ² /s]
A1	11,57	11,61	11,55
A2	23,15	23,17	23,09

Tabela 7.3. Całkowita siła pozioma i pionowa wyznaczona proponowaną metodą i metodą siatki hydrodynamicznej dla otwarcia zasuwy 1,0 m (wariant A1) i 2,0 m (wariant A2)

Wariant	Obliczenia proponowaną metodą		Obliczenia metodą siatki hydrodynamicznej	
	siła pozioma	siła pionowa	siła pozioma	siła pionowa
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
A1	134,74	33,10	19,06	3,82
A2	53,62	24,04	19,68	-10,97

Dla przepływu potencjalnego wartość całkowitej siły pionowej (hydrostatycznej i hydrodynamicznej) dla wariantu A1 jest bliska zeru, a dla wariantu A2 jest ujemna, co wynika z dużej wartości ujemnej (ssącej) składowej hydrodynamicznej. Wartości siły pionowej obliczone metodą proponowaną w niniejszej pracy są dodatnie, co oznacza, że zamknięcie będzie wypierane ku górze.

W przypadku obliczeń siły poziomej metodą wirów otrzymuje się duże wartości (135 kN dla wariantu A1 i 54 kN dla wariantu A2) wynikające z powstania za zamknięciem strefy recyrkulacji, która powoduje obniżenie ciśnienia na tylnej ścianie zamknięcia. Dla przepływu potencjalnego, z powodu braku recyrkulacji, ciśnienia na przednią i tylną ścianę zamknięcia prawie się równoważą.

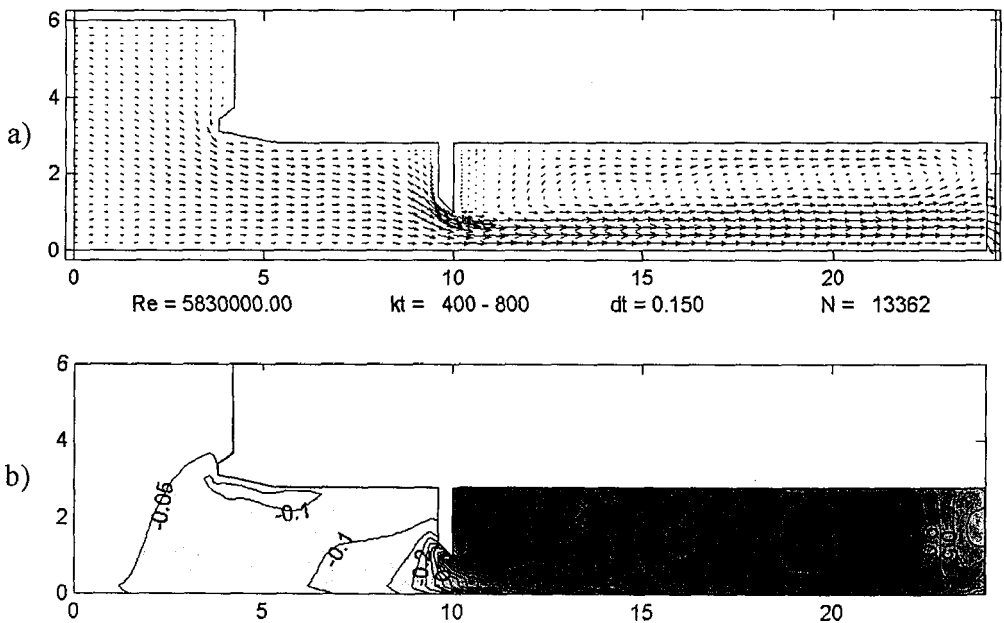
Przedstawiony przykład potwierdza postawioną w pracy tezę, że metodę siatki można stosować wyłącznie w przypadkach przepływu w obszarach o łagodnie zmieniającej się geometrii oraz gdy nie zachodzi recyrkulacja strumienia przepływu, tj. w przypadkach, które w budownictwie hydrotechnicznym rzadko występują.

7.1.3. Dolna krawędź pochylona zgodnie z kierunkiem strumienia przepływu

Przedmiotem badań w niniejszym punkcie pracy jest zamknięcie zasurowe o dolnej krawędzi zasuwy pochylonej w kierunku napływu wody. Przyjęto dwa różne kąty pochylenia krawędzi opływanej 45° i 22,5°, które przedstawiono na rysunku 7.3

i oznaczono odpowiednio symbolami – dla otwarcia 1,0 m jako B1 i C1 oraz dla otwarcia 2,0 m jako B2 i C2. Rozważane kształty są typowymi rozwiązaniami dla zasuw płaskich. Celem obliczeń było stwierdzenie, czy istnieje wpływ kształtu krawędzi opływanej zamknięcia na średnią siłę hydrodynamiczną. Na rysunku 7.13 przedstawiono obliczone pole prędkości i pole ciśnienia dla wariantu B1, a na rysunku 7.14 wyniki tych obliczeń dla wariantu B2.

Strefa recyrkulacji dla tego wariantu jest większa niż dla wariantu A1, co wynika z kształtu dolnej krawędzi zasuw, odchylającego strumień przepływu w kierunku dna kanału. Skutkiem tego jest większy współczynnik ciśnienia w obszarze recyrkulacji, co można zaobserwować na rysunku 7.13.

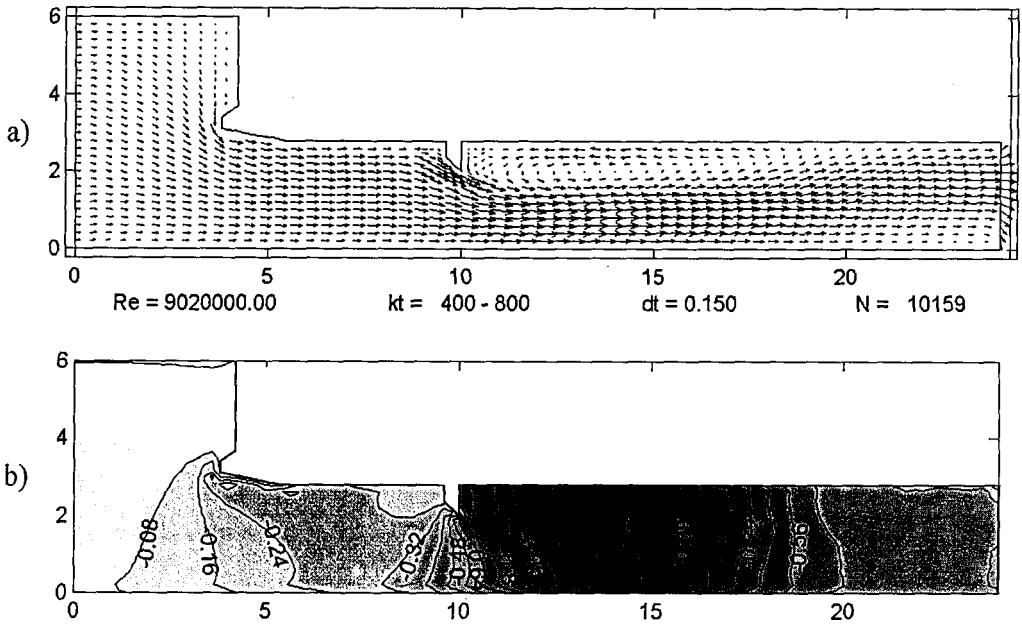


Rys. 7.13. Wariant B1: a) rozkład prędkości, b) rozkład ciśnienia

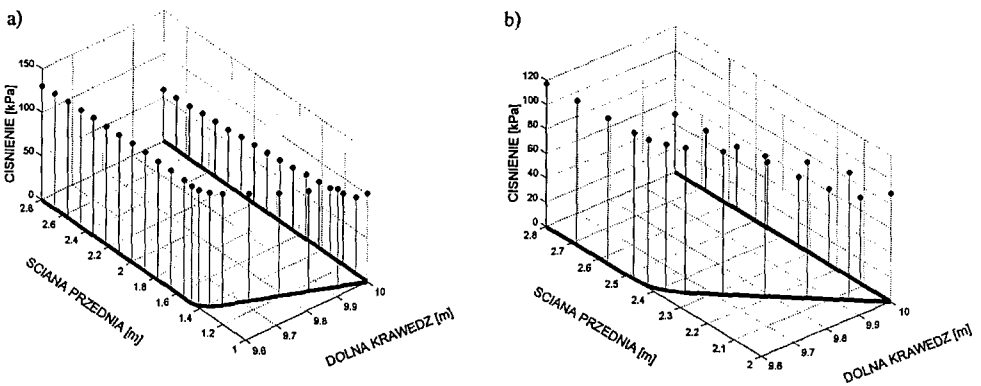
Opływ zasuw podniesionej na wysokość 2,0 m (wariant B2) wykazuje nieznaczne różnice w stosunku do wariantu A2, polegające na wydłużeniu i pogłębieniu strefy recyrkulacji tworzącej się za zamknięciem. Środek strefy przesunięty jest w kierunku wylotu, a współczynnik ciśnienia w jego centrum jest mniejszy niż w wariacie A2.

Rozkład całkowitego ciśnienia na opływanej krawędzi zasuw dla wariantów B1 i B2 przedstawiono na rysunku 7.15. Jest on inny niż dla odpowiadających wariantów A1 i A2, na przedniej bowiem ścianie zasuw i dolnej krawędzi ciśnienie jest w przybliżeniu stałe, a jego znaczne obniżenie następuje w okolicy kąta ostrego utworzonego przez dolną i tylną krawędź zamknięcia.

Wyniki obliczeń siły hydrodynamicznej zestawiono w tabeli 7.4.



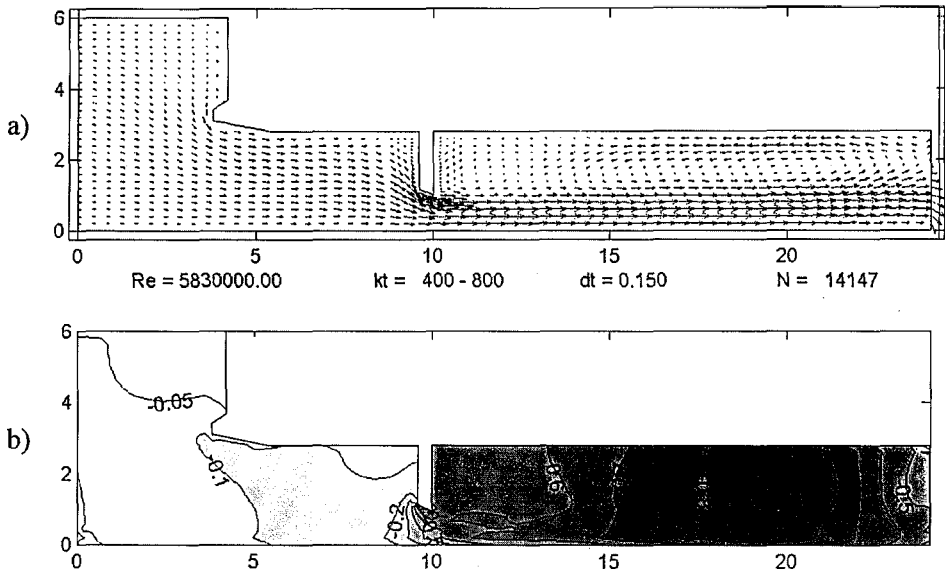
Rys. 7.14. Wariant B2: a) rozkład prędkości, b) rozkład ciśnienia



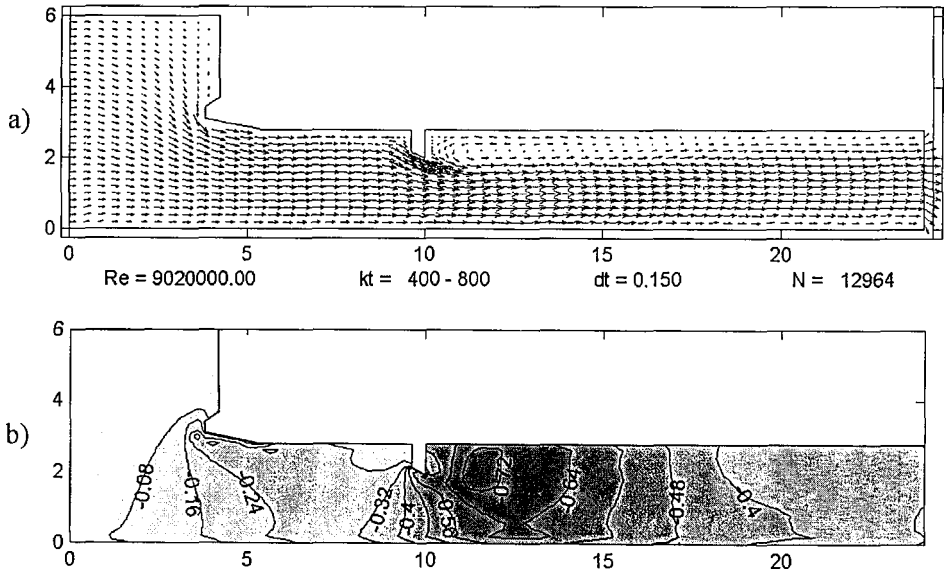
Rys. 7.15. Rozkład ciśnienia wzdłuż krawędzi zasuw: a) wariant B1, b) wariant B2

Obraz pola prędkości i wirowości dla pochylenia dolnej krawędzi zasuw pod kątem $22,5^\circ$ przedstawiono na rysunku 7.16 dla wariantu C1 i na rysunku 7.17 dla wariantu C2.

Rozkład wektorów pola prędkości oraz pole współczynnika ciśnienia dla obydwu położen zamknięcia mają charakter zbliżony do tych, które można zaobserwować dla wariantu B1 i B2.



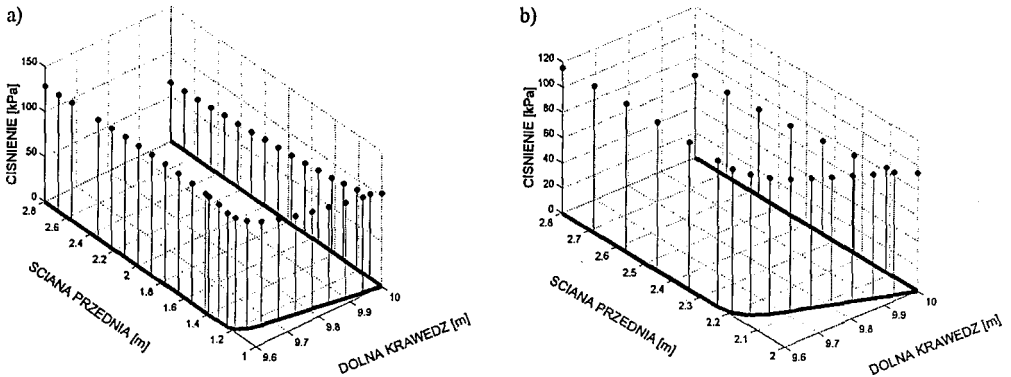
Rys. 7.16. Wariant C1: a) rozkład prędkości, b) rozkład ciśnienia



Rys. 7.17. Wariant C2: a) rozkład prędkości, b) rozkład ciśnienia

Rozkład ciśnienia na opływanej krawędzi zasuwy dla wariantu C1 i C2 przedstawiono na rysunku 7.18 i jest on podobny do tego jaki występuje odpowiednio dla wariantu B1 i B2.

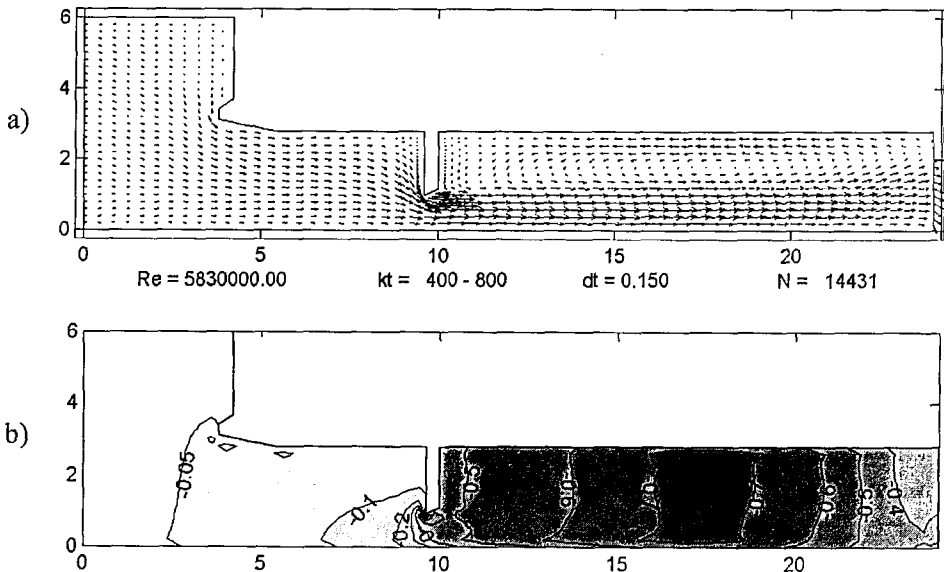
Wyniki obliczeń siły hydrodynamicznej zestawiono dla wszystkich wariantów w tabeli 7.4.



Rys. 7.18. Rozkład ciśnienia wzdłuż krawędzi zasuw: a) wariant C1, b) wariant C2

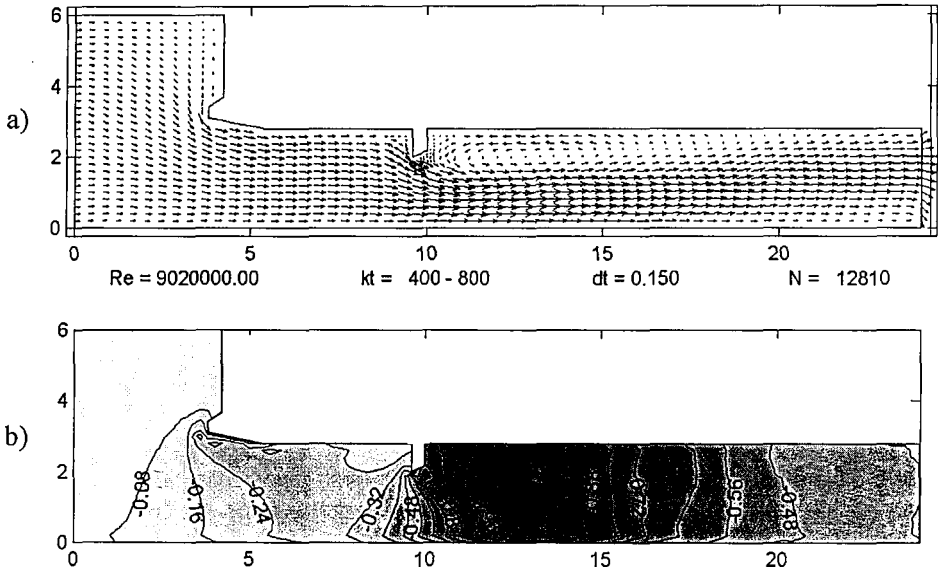
7.1.4. Dolna krawędź pochylona przeciwnie do kierunku strumienia przepływu

Dolna płaska krawędź zamknięć zasuwowych może być również pochylona odwrotnie do kierunku przepływu wody. Takie rozwiązanie stosowane jest często dla zamknięć powierzchniowych. W tym przypadku poddano numerycznej analizie zasuwę o kącie pochylecia krawędzi równym $-22,5^\circ$, dla dwóch wysokości otwarcia, przedstawionych na rysunku 7.3 i oznaczonych symbolami D1 i D2. Pole prędkości i współczynnik ciśnienia w obszarze przepływu dla wariantu D1 przedstawiono na rysunku 7.19, a dla wariantu D2 na rysunku 7.20.



Rys. 7.19. Wariant D1: a) rozkład prędkości, b) rozkład ciśnienia

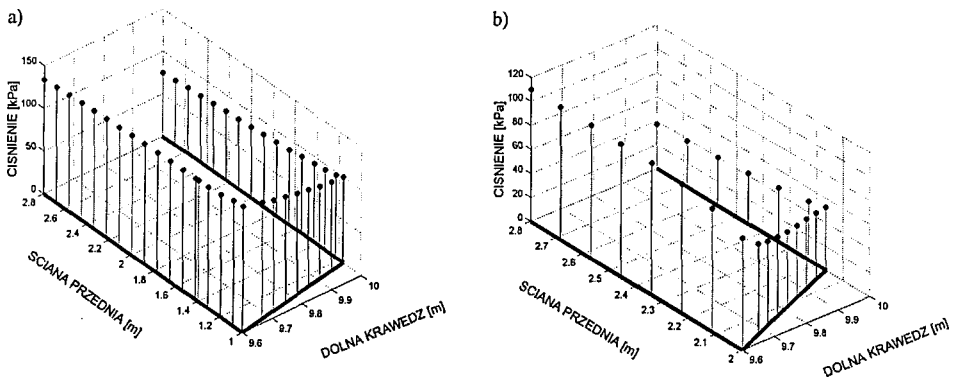
Opływ zasowy o ujemnym kącie pochylenia dolnej krawędzi może być traktowany jako opływ ostrej krawędzi. Z tego względu kształt pola prędkości i ciśnienia w tym wariancie jest zbliżony do tego, jaki otrzymano dla wariantu B1 i C1.



Rys. 7.20. Wariancie D2: a) rozkład prędkości, b) rozkład ciśnienia

Podobnie zachowuje się pole prędkości w przypadku wariantu D2. Obraz strefy recyrkulacji jest zbliżony do wariantu B2, gdzie również mamy do czynienia z ostrą krawędzią. Pole współczynnika ciśnienia ma dla tych dwóch przypadków opływu niemal identyczny kształt oraz wartości.

Ciśnienie rozłożone wzdłuż krawędzi zamknięcia przedstawiono na rysunku 7.21. Znaczny spadek brzegowego ciśnienia występuje wzdłuż dolnej krawędzi zasowy, co można zaobserwować na rysunku 7.21.



Rys. 7.21. Rozkład ciśnienia wzdłuż krawędzi zasowy: a) wariant D1, b) wariant D2

Tabela 7.4. Zestawienie sił działających na zasuwę płaską wszystkich wariantów, zgodnie z rysunkiem 7.3

Siła [kN]	Podniesienie zamknięcia i warianty							
	Hz = 1,0				Hz = 2,0			
	A1	B1	C1	D1	A2	B2	C2	D2
Napór na ścianę tylną	79,08	117,73	128,28	122,26	31,57	38,00	49,48	23,88
Napór na ścianę przednią	213,82	169,31	196,66	238,87	85,19	57,12	65,47	86,29
Sumaryczna siła pozioma	134,74	51,58	68,38	116,61	53,62	19,12	16,00	62,41
Sumaryczna siła pionowa	33,10	75,82	54,82	58,78	24,04	59,74	41,02	21,77

Z przedstawionego na rysunkach 7.8, 7.15, 7.18 i 7.21 rozkładu ciśnienia na opływającym konturze zasuw oraz wyników obliczeń sumarycznej siły poziomej i pionowej można stwierdzić, że zależą one istotnie od wysokości otwarcia zasuw i kąta pochylenia jej dolnej krawędzi.

Na wartość siły poziomej, wynikającej z różnicy sił działających na przednią i tylną ścianę zamknięcia, wpływ ma wysokość tych ścian oraz wielkość strefy recyrkulacji i ciśnienie w tej strefie. Większa strefa i niższe ciśnienie powodują, że siła działająca na tylną ścianę zamknięcia jest mniejsza i w konsekwencji otrzymuje się zwiększenie siły poziomej.

Istotne różnice w wartościach siły pionowej wynikają z rozkładu prędkości i wirowości pod zamknięciem. W przypadku otwarcia zasuw 1,0 m zdecydowanie największa wartość siły ssącej, powodującej najmniejsze wartości sumarycznej siły pionowej występuje dla kąta pochylenia spodu zasuw 0° , a dla wysokości otwarcia 2,0 m dla kąta 0° i $-22,5^\circ$.

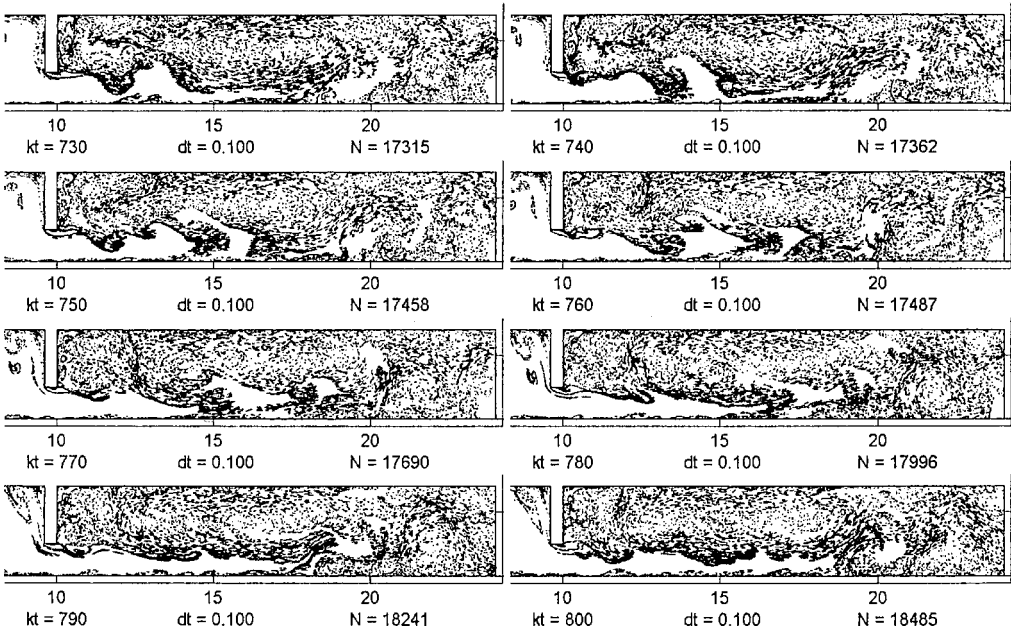
Przedstawione wyniki, choć uzyskane dla stosunkowo krótkiego czasu uśredniania, wskazują jednakże, że najbardziej niekorzystnym kształtem dolnej krawędzi zasuw jest krawędź pochylona pod kątem 0° .

7.1.5. Obciążenia chwilowe zamknięcia zasuwowego

Zjawisko przepływu dla tak dużych liczb Reynoldsa (powyżej 10^6), jakie rozpatrywano w niniejszym rozdziale pracy, charakteryzuje się dużą niestabilnością, co zostało potwierdzone licznymi badaniami i obserwacjami (Elsner, 1987; Batchelor, 1967; Naudascher, 1991; Naudascher i Rockwell, 1994). Metoda wirów z pewną dokładnością odtwarza to zjawisko przez tworzenie się i odrywanie struktur wirowych wzdłuż opływanych brzegów. Mimo iż dla takich złożonych kształtów, jak zamknięcie zasuwowe

w przewodzie ciśnieniowym dokładność modelowania zjawisk dynamicznych jest trudna do oszacowania, jakościowy opis zjawiska również może być cenną informacją dla projektantów tych konstrukcji.

Na rysunku 7.22 przedstawiono położenia kroplel wirowych w obszarze przepływu dla wybranego czasu.

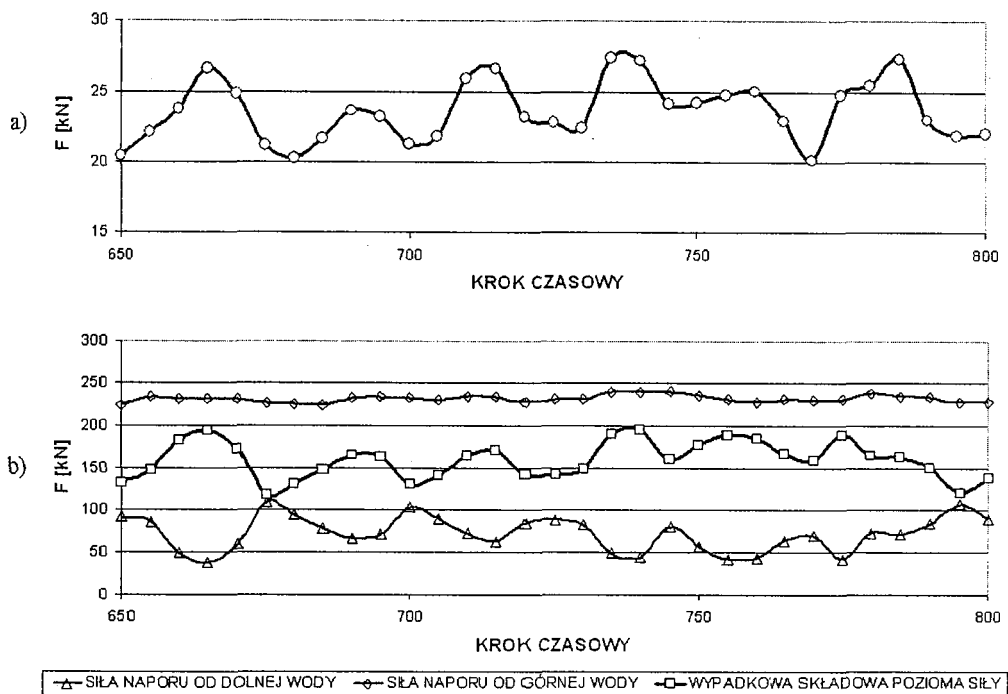


Rys. 7.22. Ewolucja położenia kroplel wirowych w obszarze przepływu za zasuwą dla wybranego czasu – wariant A1

Z układu wirów, przedstawionych na rysunku 7.22, można zauważyć, że zjawisko przepływu charakteryzuje się dużą zmiennością struktur wirowych, które, tworząc się na krawędzi zamknięcia i przemieszczając z przepływem, pociągają za sobą zmianę pozostałych parametrów fizycznych strumienia przepływu. Do zobrazowania tych efektów obliczono ciśnienie, a następnie wartości składowych pionowej i poziomej siły hydrodynamicznej (rys. 7.23), powstających na powierzchni opływanej zamknięcia dla wybranego czasu w przypadku wariantu A1, charakteryzującego się największymi zmianami w obrazie pola prędkości.

Wartość obydwu składowych siły hydrodynamicznej jest silnie zmienna w czasie, co można zaobserwować na rysunku 7.23. Siła naporu na przednią ścianę zasuwki jest praktycznie niezmienna, a o zmienności siły pionowej decydują zjawiska niestabilnego odrywania się warstwy granicznej za zamknięciem. Wartości siły poziomej oraz amplituda jej zmian są około 8 razy większe od takich wartości wyznaczonych dla składowej pionowej siły. Są to siły na tyle duże, że ich pulsacje mogą powodować drgania

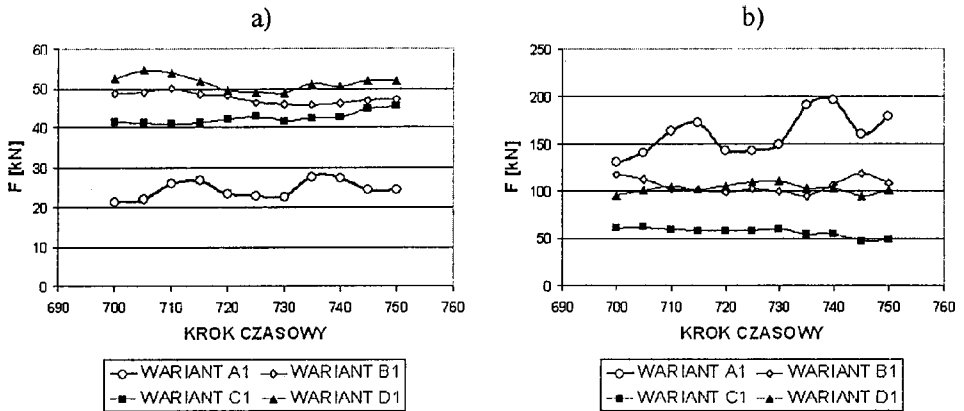
zamknięcia, a w najbardziej niekorzystnym przypadku, pojawić się może zjawisko sprzężenia zwrotnego polegające na wzajemnym wzmocnieniu siły wymuszającej oraz amplitudy drgań.



Rys. 7.23. Zmienność w czasie siły hydrodynamicznej dla wariantu A1 (co 1,0 s):
a) składowa pionowa, b) składowe poziome

Na rysunku 7.24 przedstawiono porównanie zmienności tych sił dla wszystkich kształtów zasowy podczas otwarcia na wysokość 1,0 m.

Pochylenie krawędzi w kierunku napływu – wariant B1 i C1 – znacznie zmniejsza amplitudę siły poziomej i pionowej, co obrazują przedstawione na rysunku 7.24 krzywe zmienności tych sił. Wynika to z charakteru zjawiska tworzenia się struktur wirowych i odrywania warstwy granicznej od brzegów zamknięcia, które dla tych wariantów przebiega dużo bardziej stabilnie. Pochylenie dolnej krawędzi w kierunku przeciwnym do kierunku napływu – wariant D1 – jest także korzystniejsze niż przypadek pochylenia zerowego – wariant A1, dla którego wartości składowych pionowej i poziomej siły wykazują największą amplitudę zmian. Jest to związane ze zjawiskiem odrywania się warstwy przyściennej i ponownym jej przyleganiem do krawędzi dolnej zasowy.



Rys. 7.24. Porównanie zmienności w czasie siły hydrodynamicznej dla wariantów A1, B1, C1, D1: a) składowa pionowa, b) składowa pozioma

7.2. Zamknięcie kłapowe

Kłapa jest przykładem zamknięcia, dla którego występuje brzeg w postaci swobodnej powierzchni zwierciadła wody. Jeśli kształt tego brzegu jest znany, to za pomocą metody wirów można wyznaczyć rozkład prędkości oraz wirowości i w konsekwencji metodą elementów brzegowych pole ciśnienia.

Do numerycznej analizy ciśnienia hydrodynamicznego działającego na zamknięcie kłapowe wybrano jego model fizyczny, dla którego wykonane były kompleksowe pomiary ciśnienia w Zakładzie Budownictwa Wodnego, w Instytucie Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej (Rędownicz, 2007). Wybrana do symulacji numerycznych kłapa ma następujące parametry:

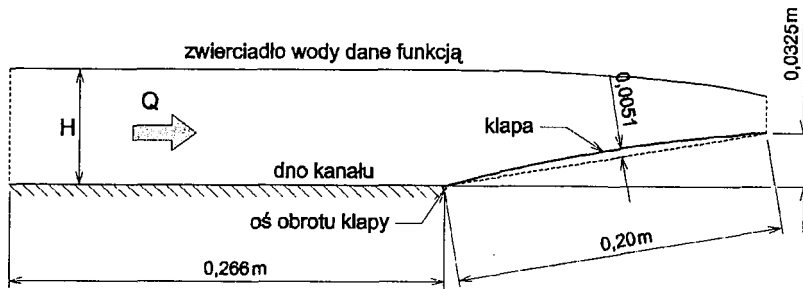
- promień krzywizny kłapy – 1,0025 m,
- długość cięciwy – 0,20 m,
- szerokość kłapy – 0,15 m,
- kąt pochylenia kłapy do poziomu – 10° .

Schemat kłapy przedstawiono na rysunku 7.25.

Do przanalizowania wybrano dwa przepływy $Q = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ oraz $Q = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. Wartościom tych przepływów odpowiadają liczby Reynoldsa: $1,6666 \cdot 10^4$ oraz $1,3333 \cdot 10^5$, które wyznaczono ze wzoru:

$$Re = \frac{Q}{bv} \quad (7.3)$$

gdzie Q – przepływ, b – szerokość kłapy, ν – współczynnik lepkości kinematycznej, który przyjmowano równy $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.



Rys. 7.25. Schemat klapy do obliczeń metodą wirów

Uzyskane liczby Reynoldsa wskazują, że ruch na modelu dla obu wielkości przepływu był turbulentny. Wysokość napełnienia w kanale dopływowym H wynosiła odpowiednio 0,07 m i 0,171 m.

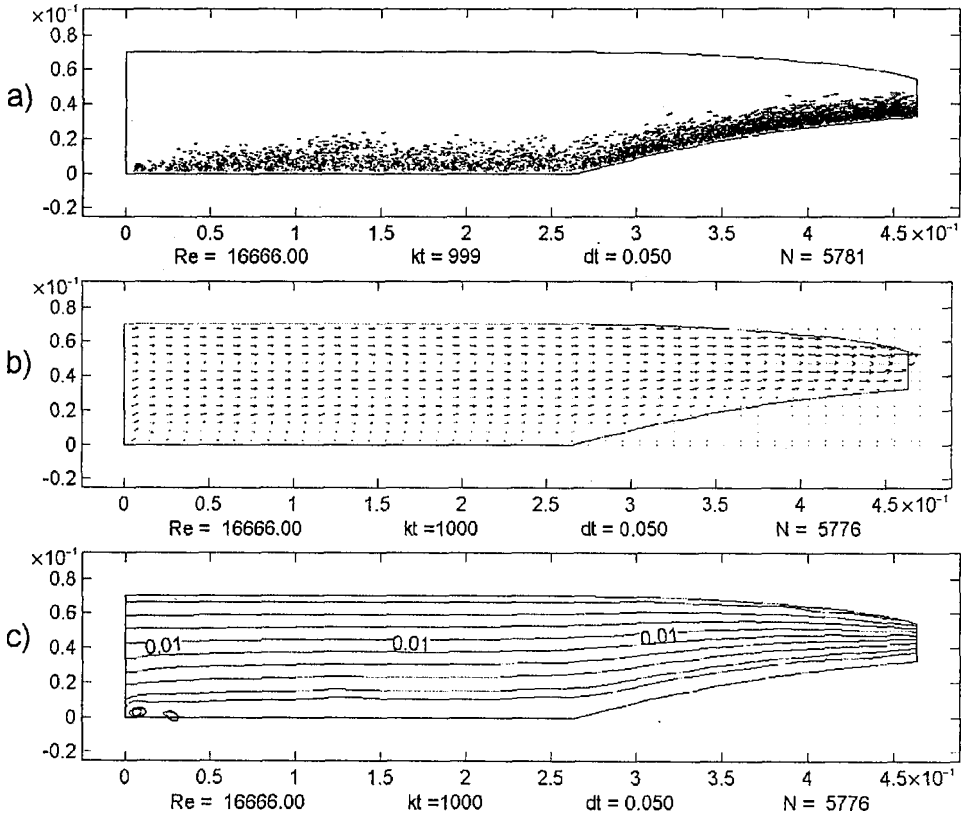
Położenie zwierciadła wody na modelu było mierzone profilografem szpilkowym oraz zdokumentowane fotograficznie i do obliczeń przyjęto następną funkcję $H_w = f(x)$ opisującą położenie tego zwierciadła. Wartość ciśnienia została zmierzona za pomocą piezometrów wodnych rozmieszczonych w 10 punktach wzdłuż osi podłużnej klapy.

Do obliczeń metodą wirów przyjęto następujące parametry:

- długość elementu brzegowego, z którego warstwa wirowa zamieniana była na kroplę wirową $h = 0,1$,
- promień obcięcia $\varepsilon = h^{0,95} = 0,1122$ (podrozdz. 5.4.2),
- krok czasowy $dt = 0,05$; takie przyjęcie zapewniało, że przemieszczenie kropli wirowej w jednym kroku czasowym było mniejsze od wartości $h = 0,1$ i rozwiązanie było dzięki temu stabilne,
- przyjęto liczbę kroków czasowych dla każdej symulacji $kt = 1000$, aby zapewnić uśrednianie pól prędkości i wirowości w zakresie przepływu ustalonego (sprawdzono, że przepływ był ustalony po około 500 krokach),
- uśrednianie obliczonych wartości pola prędkości i wirowości dla wyznaczania ciśnienia dokonywano dla przedziału 801–1000 kroków czasowych, aby uzyskać uśrednione wartości rozkładu ciśnienia.

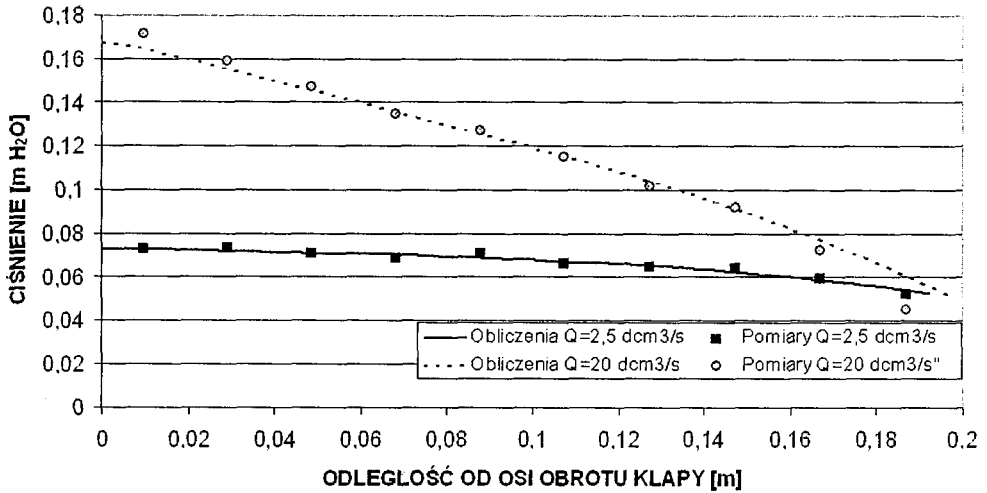
Na rysunku 7.26 przedstawiono wynik symulacji metodą wirów dla przepływu $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ w postaci chwilowego położenia wirów w kroku 999 oraz uśrednionego rozkładu prędkości i linii prądu dla przedziału 801–1000 kroków czasowych.

Ciśnienie liczone było wzdłuż konturu dna kanału i krawędzi klapy, a jego wyniki zostały wyrażone w metrach wysokości słupa wody. Wyniki pomiarów i symulacji numerycznych dla obydwu przepływów przedstawiono na rysunku 7.27 oraz w tabeli 7.5.



Rys. 7.26. Wyniki obliczeń przepływu nad klapą metodą wirów dla $Q = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$:
 a) położenie kropel wirowych, b) rozkład wektorów prędkości przepływu, c) położenie linii prądu

Porównując otrzymane rezultaty, należy zauważyć bardzo dobrą zgodność pomiarów i obliczeń dla przepływu $Q = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ na całej długości kłapy. Niewielkie odchylenia wynikają z niedokładności odczytu pomierzonych ciśnień za pomocą piezometrów. Nieco gorsze wyniki otrzymano dla przepływu $Q = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ w postaci rozbieżności w wartości ciśnienia na końcu kłapy. Jest to spowodowane przyjęciem w obliczeniach pola prędkości warunku brzegowego Neumanna na wylocie z obszaru obliczeniowego, oznaczającego istnienie w tym przekroju wyłącznie poziomych składowych prędkości przepływu, które przy tak dużym napełnieniu w rzeczywistości nie są poziome.



Rys. 7.27. Zestawienie wyników obliczeń proponowaną metodą i pomiarów ciśnienia dla zamknięcia klapowego

Tabela 7.5. Zestawienie ciśnienia obliczonego i pomierzonego dla zamknięcia klapowego

Odległość od osi obrotu kłapy [m]	Ciśnienie wzdłuż krawędzi kłapy					
	$Q = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$			$Q = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$		
	Obliczone [m H ₂ O]	Pomierzone [m. H ₂ O]	Różnica [%]	Obliczone [m H ₂ O]	Pomierzone [m H ₂ O]	Różnica [%]
0,0096657	0,0724636	0,0725794	0,16	0,164	0,171	4,06
0,0290716	0,0717712	0,0734169	2,24	0,155	0,159	2,45
0,0485700	0,0708944	0,0708663	0,04	0,145	0,147	1,12
0,0681533	0,0700121	0,0689259	1,55	0,135	0,135	0,26
0,0878138	0,0687025	0,0705939	2,68	0,125	0,127	1,2
0,1075434	0,0671334	0,0658691	1,88	0,115	0,115	0,13
0,1273345	0,0652784	0,0647500	0,81	0,104	0,102	1,83
0,1471791	0,0622128	0,0642355	3,15	0,091	0,092	0,89
0,1670694	0,0588289	0,0593247	0,84	0,077	0,072	6,06
0,1869974	0,0538242	0,0520166	3,36	0,060	0,045	25,29

7.3. Analiza wyników i wnioski

Głównym celem wykonanych symulacji było przedstawienie wykorzystania opracowanej metody do zagadnień inżynierskich wyznaczania sił hydrodynamicznych, działających na zamknięcia budowli wodnych. Na podstawie uzyskanych rezultatów można stwierdzić, że opracowanymi programami uzyskuje się przestrzenny i czasowy rozkład ciśnienia w całym obszarze przepływu, co dotychczas było możliwe przez zastosowanie żmudnych i drogich badań modelowych.

Rozważając wyniki obliczenia ciśnienia działającego na zasuwę w przewodzie ciśnieniowym, stwierdzono, że dla krawędzi pochylonej pod kątem 0° wartość siły pionowej jest najmniejsza, na poziomej krawędzi bowiem występuje największy spadek ciśnienia hydrodynamicznego. Jest to spowodowane odrywaniem ścieżki wirowej spływającej z przedniej ściany zamknięcia, która następnie łączy się z podobną ścieżką, ale przemieszczającą się wzdłuż ściany tylnej, co w konsekwencji powoduje znaczne obniżenie ciśnienia w obszarze pod dolną krawędzią zamknięcia. Siła pozioma osiąga w tym przypadku największe wartości, co wynika z tworzącej się strefy recyrkulacji w bliskiej odległości od tylnej ściany zasuwy.

Pochylenie dolnej krawędzi w kierunku napływu lub przeciwnie powoduje odsuwanie ścieżki wirowej od dolnej krawędzi zasuwy. W rezultacie zwiększa się odległość strefy recyrkulacji od dolnej i tylnej krawędzi zamknięcia, co powoduje zmniejszenie średniej wartości składowej pionowej i poziomej naporu wody.

Najbardziej niepożądanym zjawiskiem, związanym z opływem zasuwy, jest zmienność składowej pionowej i poziomej siły hydrodynamicznej, może bowiem być ona przyczyną drgań zamknięcia. Największą amplitudę zmian tych sił zanotowano dla poziomej dolnej krawędzi zasuwy, a najmniejszą dla krawędzi pochylonej pod kątem 45° . Jest to związane ze zjawiskiem odrywania się warstwy przyściennej od krawędzi zasuwy, które dla krawędzi pochylonej przebiega bardziej stabilnie niż dla krawędzi pochylonej pod kątem 0° . To implikuje wniosek, że konstruując zamknięcie, należy unikać poziomego kształtowania jej dolnej krawędzi.

Za pomocą numerycznych symulacji badano siłę hydrodynamiczną dla wariantu A1 i A2 proponowaną w niniejszej pracy metodą. Wykonując podobne obliczenia metodą siatki hydrodynamicznej stwierdzono, że metoda siatki prowadzi do dużych błędów w oszacowaniu tej siły. Otrzymane tą metodą podciśnienia na dolnej krawędzi są istotnie większe, co sprawia, że wynikowa składowa pionowa siły jest dużo mniejsza, a nawet osiąga wartości ujemne w stosunku do wyników otrzymanych z metody wirów. Wynika to z większych prędkości wzdłuż opływanej krawędzi zamknięcia wyznaczanych metodą siatki. Składowa pozioma siły wyznaczona metodą siatki hydrodynamicznej jest bowiem znacznie mniejsza, z powodu braku recyrkulacji za zasuwą, ciśnienia na przednią i tylną powierzchnię zamknięcia prawie się równoważą.

Proponowana w pracy metoda może również być stosowana do analizowania opływu w przypadku zamknięć powierzchniowych, dla których występuje swobodne zwierciadło wody. Przedstawione przykładowe obliczenia ciśnienia dla modelu zamknięcia klapowego wykazały dobrą zgodność wyników z badaniami modelowymi. Zamknięcia klapowe poddawane są silnym podciśnieniom w ich dolnym położeniu przy dużej warstwie przelewowej. Analizując proponowaną metodą rozkład ciśnienia na powierzchni zamknięcia, można stwierdzić czy nie wystąpi zjawisko odrywania się strumienia i niestabilność siły hydrodynamicznej, która może powodować drgania tej konstrukcji.

8. Podsumowanie

W niniejszej monografii przedstawiono praktyczną i efektywną metodę wyznaczania obciążeń hydrodynamicznych działających na zamknięcia hydrotechniczne. Do tego celu autor zastosował numeryczną metodę wirów w powiązaniu z metodą elementów brzegowych. Obciążenia hydrodynamiczne są w omawianych zagadnieniach inżynierskich związane z bardzo silnie turbulentnym przepływem, charakteryzującym się liczbą Reynoldsa przekraczającą znacznie wartość 10^6 . Uzyskanie właściwego obrazu przepływu dla takich warunków jest bardzo złożone, ze względu na gwałtowność zachodzących w strumieniu zmian prędkości i wirowości o bardzo zmiennych skalach przestrzennych. Mimo występujących trudności, autor podjął wyzwanie opracowania efektywnej metody, zbudowania do niej szeregu algorytmów i programów komputerowych, za pomocą których można wyznaczać obciążenia hydrodynamiczne zamknięć budowli wodnych.

Zawarte w pracy praktyczne przykłady obliczeń poprzedzono obszernym wstępem teoretycznym, którego zamierzeniem było przedstawienie zarówno szerokiego kontekstu obciążeń zamknięć hydrotechnicznych, jak i możliwości jego opisu teoretycznego oraz rozwiązania metodami numerycznymi.

Omówiono szczegółowo zagadnienie obciążeń hydrodynamicznych, które można usystematyzować na podstawie przyczyn, które je wywołują. Zaliczają się do nich pulsacja prędkości i ciśnienia wywołane ogólną turbulencją przepływu, zmiany ciśnienia spowodowane odrywaniem się warstwy granicznej i formowaniem dużych struktur wirowych w strumieniu opływającym konstrukcję, ruch konstrukcji oraz zjawiska ekstremalne, takie jak trzęsienie ziemi lub obciążenie wybuchem. Niemal każdy rodzaj obciążenia wymaga zastosowania innego aparatu matematycznego i metody obliczeń, dlatego po analizie częstości i istotności tych zjawisk wybrano do modelowania zjawisko odrywania warstwy granicznej i formowania się strefy recyrkulacji. Wybór ten uznać należy za trafny, recyrkulacja bowiem pojawia się prawie zawsze podczas zwykłej eksploatacji konstrukcji wodnych, a równocześnie może być, jak wykazano w pracy, przyczyną znacznych problemów eksploatacyjnych, aż do awarii konstrukcji włącznie. Dochodzi do niej zwykle w rezultacie drgań rezonansowych, jakie mogą

pojawić się w wyniku zmian ciśnienia w strumieniu opływowym, związanych z powstawaniem dużych, spójnych, wirowych struktur.

Część pracy obejmuje zagadnienia mechaniki płynów związane z rozpatrywanym zjawiskiem opływu. Szczególną uwagę autor zwrócił na kinematykę i dynamikę wirowości oraz tworzenia się warstwy przyściennej, wyprowadzając stosowne wzory i prezentując je w sposób dostosowany do opracowania równań metody wyznaczania siły hydrodynamicznej.

Rozważając możliwości modelowania tej siły, stwierdzono, że stosowane często uproszczone metody, bazujące na równaniu Bernoulliego lub równaniu Laplace'a nie prowadzą do poprawnych rozwiązań bardziej złożonych geometrycznie przypadków opływu. Z tego względu uznano, że podstawą opracowania metody powinny być nieliniowe równania przepływu cieczy lepkiej, zwane równaniami Naviera–Stokesa. Analizując rozwiązania równań metodami numerycznymi, stwierdzono, że ich bezpośrednie rozwiązanie klasycznymi metodami, korzystającymi z dyskretyzacji obszaru, przekracza możliwości dostępnego sprzętu komputerowego i należy stosować równania uśrednione po przebiegach czasowych (metoda RANS lub LES) lub zastosować metodę, w której nie korzysta się z siatki numerycznej. Po dokonaniu krótkiego przeglądu i oceny tych metod pod kątem ich właściwości i możliwości wyznaczania parametrów przepływów turbulentnych, dokonano wyboru „bezsiatkowej” metody wirów dyskretnych. Wybór uzasadniono licznymi argumentami, spośród których najważniejsze to odwołanie się do fizycznych cech modelowanego zjawiska, zdominowanego przez wirowość symulowaną ruchem cząstek wirowych (kropeli wirowych), dzięki procedurze śledzenia ich trajektorii. Krople – nośniki wirowości gromadzą się w tych rejonach przepływu, w których występują duże gradienty pola prędkości, odpowiedzialne za produkcję wirowości w przepływie. Dlatego metodę wirów określa się mianem samoadaptacyjnej. Metoda jest zbieżna, stabilna i dzięki zastosowaniu zmiennych Lagrange'a, nie generuje błędu numerycznego w postaci dyfuzji numerycznej, jak w metodach dyskretyzacji obszaru obliczeniowego.

Przydatność metody do zastosowań inżynierskich powinna wynikać z łatwości jej aplikacji, jednak metody wirów są mniej znane niż na przykład metody różnic skończonych i elementów skończonych, trudno też jest znaleźć opis ich zastosowania praktycznego. W rozprawie omówiono różne odmiany tej metody oraz jej podstawy matematyczne i wskazano, że właściwą do rozwiązania przepływu w obszarach o złożonej geometrii rozpatrywanej przestrzeni jest metoda wirów dyskretnych. Do realizacji zamierzonego celu wyprowadzono równania transportu wirowości opisujące adwekcję i dyfuzję pola wirowości.

Rozważano dwa podejścia do opracowania modelu obliczeniowego metody wirów dyskretnych: deterministyczne i stochastyczne.

Wyprowadzono formuły do deterministycznego wyznaczania adwekcji i dyfuzji wirowości. Do rozwiązania adwekcji przyjęto układ Lagrange'a i założono, że wirowość jest przenoszona przez cząstki cieczy – nośniki wirowości przemieszczające się w ob-

szarze przepływu zgodnie z opisującym ten ruch całkowo-różniczkowym równaniem trajektorii. Ze względu na osobliwość jądra całkowego przyjęto sposób jego regularyzacji przez zastosowanie splotu z funkcją wygładzającą. Problem dyfuzji wirowości rozwiązano przez aproksymację operatora Laplace'a splotowym połączeniem wirowości z funkcją obcięcia, która jest następnie różniczkowana. Dzięki temu uzyskano układ równań całkowo-różniczkowych. Aby móc go numerycznie rozwiązać, należało przeprowadzić dyskretyzacją ciągłego pola wirowości na elementy skończone, tak zwane krople wirowe. Dzięki temu zabiegowi, zastępując całkowanie sumowaniem po liczbie kropeł wirowych, otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych, który rozwiązywano opracowanym programem komputerowym. Testowane przykłady wykazały jednak, że rozwiązanie po pewnej liczbie kroków obliczeniowych traci stabilność. Zdecydowano więc na rozwiązanie polegające na stochastycznej metodzie wyznaczania dyfuzji wirowości. Podstawą tej metody jest przyjęcie założenia, że cząstki wirowe podlegają w procesie dyfuzji ruchom Browna, podobnie jak w gazach. Taki model ruchu cząstek wymagał stochastycznej interpretacji równania dyfuzji wirowości.

Do opracowania stochastycznej metody wirów dyskretnych skorzystano z metody dekompozycji równania transportu wirowości na równanie adwekcji i dyfuzji. Sposób rozwiązywania adwekcji pozostał deterministyczny w postaci śledzenia trajektorii kropeł wirowych. Ponieważ rozwiązaniem fundamentalnym równania dyfuzji w obszarze nieograniczonym jest funkcja Greena, która jest tożsama z gęstością rozkładu normalnego zmiennej losowej o zerowej wartości oczekiwanej, przyjęto więc rozwiązanie dyfuzji w postaci odpowiednio dobranego losowego przemieszczenia kropeł wirowych. Opracowany sposób rozwiązania polega na tym, że w każdym kroku czasowym dla połowy jego wartości ewolucja pola wirowości najpierw podlegać będzie adwekcji, a następnie dla kolejnej połowy kroku czasowego wirowość będzie modyfikowana w procesie dyfuzji. Opracowano więc nowy algorytm i program obliczania stochastyczną metodą wirów oraz przeprowadzono testy numeryczne, które potwierdziły zasadność zmiany metody, otrzymano bowiem stabilne rozwiązania i zgodne z badaniami eksperymentalnymi. Siła algorytmu stochastycznej metody wirów polega na tym, że oddaje on charakter przepływu turbulentnego, który jest z natury losowy. Wniosek ten nie dyskwalifikuje podejścia deterministycznego metody wirów, ale wskazuje, że metoda ta wymaga wykonania dodatkowych badań teoretycznych i eksperymentów numerycznych wyższego rzędu aproksymacji układu równań różniczkowych zwyczajnych dla zmiennych, którymi są trajektorie i cyrkulacje kropeł wirowych.

W rozprawie zwrócono także uwagę na dobór funkcji wygładzającej, która odgrywa kluczową rolę w wyprowadzaniu równań i algorytmów metody wirów dyskretnych. Po przeanalizowaniu kilku możliwych jej rodzajów zdecydowano się przyjąć funkcję Cauchy'ego, nie tylko spełniającą warunki zbieżności i stabilności metody, ale także umożliwiającą bezpośrednio całkowanie równań bez konieczności stosowania kwadratury numerycznej, co przyspiesza wykonywanie obliczeń. Rozwiązania przybliżone,

konstruowane w metodzie wirów, zależą od dwóch parametrów – wymiaru h dyskretyzacji pola wirowego na krople wirowe i promienia obcięcia ε , skalującego funkcję wygładzającą. Testy wykazały, że najdokładniejsze rozwiązania otrzymuje się przy przyjęciu relacji $\varepsilon = h^\gamma$, gdy $\gamma = 0,75 - 0,95$.

Ważnym elementem symulacji komputerowych za pomocą tej metody jest staranny dobór parametrów modelowania, tj. kroku czasowego zależnego od liczby Reynoldsa, gęstości podziału generowanej warstwy wirowej na krople wirowe i zastosowanie odpowiedniej długości promienia obcięcia. Od właściwego przyjęcia parametrów zależy dokładność uzyskanych wyników, ale także czas wykonywanych symulacji, który nie powinien być krótszy niż czas potrzebny na ustalenie się (z pewnym przybliżeniem) liczby cząstek wirowych znajdujących się w obszarze przepływu.

Szczególnym utrudnieniem w modelowaniu przepływów turbulentnych jest spełnienie warunków brzegowych i dotyczy to zarówno metod siatkowych RANS i LES, jak i metody wirów. Należy przede wszystkim spełnić warunek znikania prędkości na brzegach nieprzepuszczalnych. Znikanie składowej stycznej uzasadniono szczegółowym opisem zjawiska odrywania warstwy przyściennej, która powoduje generowanie wirów na brzegach obszaru. W opracowanym algorytmie cyrkulację wirów wyznaczano na podstawie natężenia wirowości pola prędkości wzdłuż obwodu infinitezimalnego otoczenia odcinka warstwy przyściennej. Autor przetestował różne sposoby generowania wirów i stwierdził ich wady polegające na nadprodukcji wirowości, niestabilność pola wirowości, zaburzenia w rozkładzie prędkości w bliskości brzegów. W związku z czym autor opracował oryginalną metodę postępowania z wirami, które przekraczają brzeg obszaru. Metoda polega na pozostawieniu tych wirów poza obszarem przepływu przez jeden krok czasowy, cyrkulacja tych wirów jest wykorzystywana do wyznaczania wirowej funkcji prądu oraz pola prędkości. Metoda zapewnia gładkość pola wirowości i prędkości i właściwy rozkład prędkości wzdłuż brzegu.

Do realizacji znikania składowej normalnej skorzystano z właściwości dekompozycji Helmholtza pola wektorowego, aby wykazać, że można za pomocą pola potencjalnego skorygować wynikowe pole prędkości, nie zmieniając wirowości w obszarze przepływu. To implikuje jednak konieczność rozwiązania w każdym kroku czasowym przepływu potencjalnego. Algorytm obliczeń, korygującego, potencjalnego pola prędkości, uzyskano, formułując odpowiednie zagadnienie brzegowe, które następnie rozwiązano w sposób przybliżony metodą elementów brzegowych. Szczegółowy opis tego postępowania zamieszczono w rozprawie. Koncepcję wyboru MEB należy uznać za trafną, zapewnia bowiem niezbędną elastyczność metody wirów, umożliwiając jej stosowanie do zagadnień inżynierskich, charakteryzujących się złożonością geometryczną obszarów przepływu. Dzięki takiemu połączeniu metod można szybko i dokładnie określić pochodzące od pola wirowego i korygującego pola potencjalnego wartości funkcji prądu i składowe prędkości dla kropli wirowych, poruszających się po

swoich trajektoriach. W pracy opracowano teoretycznie zagadnienie wyznaczania przepływu z brzegiem ruchomym i periodycznym metodą wirów.

Zasadnicza część rozprawy dotyczyła wyznaczania siły hydrodynamicznej powstającej podczas opływu ciała strumieniem płynu lepkiego. Zdefiniowano ją jako całkę z naprężeń stycznych i normalnych działających na powierzchnię ciała, co uzasadniono na podstawie teoretycznej analizy zmiany pędu przechodzącego przez opływaną powierzchnię. Przyjęto następnie założenie, że rozważać się będzie wyłącznie reakcję hydrodynamiczną, pochodzącą od parcia wody na opływaną powierzchnię. Takie przyjęcie ma swoje fizyczne uzasadnienie, dla rozpatrywanych bowiem w rozprawie przepływów turbulentnych, charakteryzujących się małą lepkością (dużą liczbą Reynoldsa), składowa siły wywołana tarcielem lepkiem jest pomijalnie mała w stosunku do siły wynikającej z ciśnienia. W sformułowaniu metody wyznaczania ciśnienia w obszarze przepływu wykorzystano fakt, że dane są rozkłady pola prędkości i wirowości, uzyskane z metody wirów. Zagadnienie wyznaczania ciśnienia sformułowano w postaci równania Poissona uzyskanego w wyniku operacji dywergencji równania Naviera–Stokesa. Przeanalizowano różne możliwe sposoby rozwiązania tego problemu i zdecydowano się na podejście jak w metodzie wariacyjnej. Przez zastosowanie funkcji próbnej i dokonanie odpowiednich przekształceń, uzyskano sformułowanie słabe zagadnienia ciśnienia, które ma rozwiązanie z dokładnością do stałej. W praktycznych obliczeniach tę niejednoznaczność rozwiązania usuwano, przyjmując określoną, znaną wartość ciśnienia w jednym punkcie na brzegu.

Decydując się na sposób rozwiązania dokonano oryginalnych przekształceń równań różniczkowych, aby uzyskać postać zagadnienia brzegowego, którego rozwiązanie nie będzie zależne od ciśnienia brzegowego, a priori przecież nieznanego. Podstawą do wyznaczenia ciśnienia są znane z metody wirów rozkłady pola wirowości i prędkości. Wyrażone są one w postaci całek z wyrażenia nieliniowego – pochodnej konwekcyjnej, oraz pierwszych i drugich pochodnych pola prędkości. W pracy całki te zmodyfikowano, aby poprawić efektywność metody wyznaczania ciśnienia. Do rozwiązania numerycznego tego problemu zastosowano ponownie metodę elementów brzegowych. Słuszność tego wyboru uzasadnia fakt, że do wyznaczenia siły hydrodynamicznej wystarczy rozwiązać zagadnienie brzegowe ciśnienia, co znacznie przyspiesza wykonanie obliczeń numerycznych. Opracowano nowy algorytm, a następnie program komputerowy wyznaczania ciśnienia na brzegu, uwzględniający jednak możliwość określenia ciśnienia także wewnątrz obszaru przepływu, na podstawie obliczonego ciśnienia na brzegu. Program sprawdzono w numerycznych badaniach, które wykazały jego skuteczność i efektywność.

Praktycznym sprawdzianem opracowanych metod, algorytmów i programów było wykonanie obliczeń rozkładu pól prędkości, wirowości i ciśnienia wybranych zamknięć hydrotechnicznych.

Charakter zjawisk zachodzących w strumieniu zależy w istotny sposób od rodzaju opływanego zamknięcia. Zdecydowano się na wybór dwóch skrajnie różniących się

pod względem konstrukcji i funkcji zamknięć budowli wodnych. Jako ważniejsze, stanowiące zasadniczy obiekt analizy i testów numerycznych, przyjęto zamknięcie zasuwowe w kanale ciśnieniowym. Jest ono typowym przedstawicielem powszechnie stosowanych i stwarzających problemy eksploatacyjne zamknięć głębinowych. Drugi rodzaj to zamknięcie klapowe na niskim progu, które jest charakterystycznym przedstawicielem zamknięć powierzchniowych, powszechnie obecnie stosowanych, które również w pewnych szczególnych warunkach przepływu są narażone na znaczne dynamiczne obciążenia.

Parametry modelu obliczeniowego zamknięcia zasuwowego przyjęto na podstawie zamknięcia zasuwowego spustu dennego zapory Słup na rzece Nysie Szalonej. Przedmiotem badań numerycznych była analiza obciążenia hydrodynamicznego istniejącego kształtu zamknięcia oraz kilka wariantów jego modyfikacji, aby móc określić wpływ kształtu na wielkość tych obciążeń. Z przeprowadzonych symulacji wynika, że spośród kształtów o różnym pochyleniu, zamknięcie z dolną krawędzią poziomą, jest poddane największym średnim obciążeniom hydrodynamicznym, oraz że w badanym przypadku i zadanej wartości otwarcia zasuw, składowa pozioma siły hydrodynamicznej jest o rząd większa od jej składowej pionowej. Dla tego kształtu uzyskano również największą amplitudę składowych siły hydrodynamicznej sprzyjającą niewątpliwie powstawaniu drgań tego zamknięcia. W celu stwierdzenia efektywności metody wykonano też obliczenia dla tej zasuwę metodą uproszczoną, na podstawie równania Laplace'a i Bernoulliego. Porównanie uzyskanych wyników potwierdziło stawianą w pracy tezę, że proponowana metoda wirów w połączeniu z metodą elementów brzegowych daje dla zjawiska przepływu z recyrkulacją nieporównanie dokładniejsze rezultaty sięgające nawet kilkuset procent niż stosowane do tej pory w praktyce rozwiązania.

Obiektem, na którym testowano metodę, był model kłapy na wysokim progu. Ten rodzaj zamknięcia wybrano celowo, aby sprawdzić możliwość wykorzystania metody wirów w przepływach ze swobodną powierzchnią. Wykonane testy wykazały, że proponowana metoda dobrze oddaje charakter przepływu powierzchniowego i można za jej pomocą wyznaczać również ciśnienia hydrodynamiczne zamknięć powierzchniowych, pod warunkiem jednak znajomości położenia zwierciadła swobodnego nad zamknięciem.

W niniejszej monografii po raz pierwszy udowodniono, że metoda wirów i powiązana z nią metoda elementów brzegowych jest obecnie najlepszym analitycznym sposobem wyznaczania obciążeń hydrodynamicznych działających na zamknięcia hydrotechniczne. Uwzględnivszy dotychczasowe wyniki symulacji metodą wirów pól prędkości i wirowości oraz uzyskane na ich podstawie wyniki obliczeń ciśnienia metodą elementów brzegowych autor uważa, że proponowana metoda może być praktycznie stosowana do oceny obciążeń hydrodynamicznych konstrukcji hydrotechnicznych.

Ważniejsze rezultaty przedstawione w pracy

1. Podsumowanie dotychczasowego stanu wiedzy dotyczącego mechanizmów wstawiania sił hydrodynamicznych działających na konstrukcje hydrotechniczne i skutków.

2. Przedstawienie kinematyki i dynamiki wirowości w sposób dostosowany do zastosowania w wyprowadzaniu równań metod wirów.

3. Wyprowadzenie równań stanowiących teoretyczne podstawy: metody wi punktowych, metody deterministycznej i stochastycznej wirów dyskretnych, metod warstw wirowych oraz ich szczegółowy opis.

4. Opracowanie algorytmów i programów komputerowych do deterministycznej i stochastycznej metody kropeł wirowych. Programy opracowano w języku Fortran. Preprocesor graficzny opracowano w programie MicroStation, graficzna prezentacja wyników w programie Matlab. Programy można stosować do obszarów o dowolnej złożonej geometrii w obszarach jedno- i wielospójnych, a więc istotnych do zastosowań inżynierskich.

5. Przedstawienie zasad obliczeń metodami wirów w obszarach ograniczonych o złożonej geometrii. Opisanie procedur spełniania warunków brzegowych zerowej prędkości na brzegu stacjonarnym i nieprzepuszczalnym. Wykazanie, że empiryczne przesłanki służące zerowaniu składowej stycznej, polegające na generowaniu wirowości wzdłuż brzegów, mają swoje fizyczne uzasadnienie w postaci warstwy wirowości którą można dyskretyzować za pomocą kropli wirowych.

6. Opracowanie oryginalnej metody postępowania z wirami, które przekraczają brzeg obszaru, polegającej na wykorzystywaniu cyrkulacji tych wirów przez obliczenia jednego kroku obliczeniowego do wyznaczania wirowej funkcji prądu oraz pola prędkości. Dzięki tej metodzie rozwiązanie zagadnienia transportu wirowości jest ciekawsze niż w przypadku metod opisanych w literaturze.

7. Wykonanie programów do obliczeń metodą stochastyczną i deterministyczną wirów oraz wykonanie porównania wyników obliczeń, które wykazało, że dla tych samych schematów całkowania równań ruchu stochastyczna metoda jest bardziej dokładna. Wynika to z natury ruchu turbulentnego, która jest stochastyczna dla prądów turbulentnych w odpowiednio małych skalach, nietworzących struktur największych – koherentnych.

8. Oryginalne rozwiązanie zagadnienia ciśnienia w obszarze przepływu przy wykorzystaniu metody wariacyjnej oraz metody elementów brzegowych. W pracy przedłożono wyprowadzenie równań metody elementów brzegowych i ich modyfikacje poprawy efektywności rozwiązania.

9. Rozwiązanie zagadnienia ciśnienia w obszarze przepływu z zastosowaniem metody wariacyjnej oraz wyprowadzenie równań w przypadku metody elementów brzegowych do jego rozwiązania.

10. Opracowanie algorytmów i programów komputerowych do obliczania ciśnienia w obszarze o złożonej geometrii na podstawie pól prędkości i wirowości wyznaczonych metodą wirów.

11. Wykonanie testów sprawdzających zbieżność i dokładność proponowanych metod i wykazanie zgodności uzyskiwanych wyników z badaniami eksperymentalnymi i innymi obliczeniami.

12. Wykonanie analizy obciążeń hydrodynamicznych działających na konstrukcję hydrotechniczną – zamknięcie zasuwowe w przewodzie spustowym na przykładzie urządzeń zrzutowych zapory Słup na rzece Nysie Szalonej. Porównanie wyników z dotychczas stosowaną metodą polegającą na rozwiązaniu równania przepływu potencjalnego i wykazanie istotnych różnic, wskazujących, że do zagadnień opływu, w którym występuje strefa recyrkulacji, obliczenia obciążeń hydrodynamicznych oparte na równaniu przepływu potencjalnego nie powinny być stosowane.

13. Wykonanie testowania sił hydrodynamicznych w przypadku różnych kształtów dolnej krawędzi zasuwki oraz dwóch różnych wysokości jej otwarcia i wykazanie, że największe podciśnienia występują dla zasuwki z poziomą i płaską dolną krawędzią. Ponadto dla tego rodzaju zamknięcia amplituda składowych pionowej i poziomej siły hydrodynamicznej jest największa, co wskazuje, że jest ona najbardziej narażona na wymuszanie drgań.

14. Wykonanie obliczeń numerycznych dla modelu zamknięcia powierzchniowego – modelu fizycznego kłapy, dla którego wykonano badania ciśnienia hydrodynamicznego i wykazanie, że proponowane metody numeryczne dobrze symulują zjawisko opływu ze swobodną powierzchnią i mogą być stosowane do wyznaczania ciśnienia pochodzącego od strumienia przelewającego się przez zamknięcie.

Kierunek dalszych badań

Stosując zaproponowaną metodę wirów do praktycznych obliczeń sił hydrodynamicznych, należy pamiętać o pewnych narzuconych w pracy ograniczeniach. Pierwszym z nich jest przyjęcie rozwiązania dwuwymiarowego do opisu zjawisk, które w rzeczywistości są trójwymiarowe. Jest to powszechna praktyka inżynierska stosowana wówczas, gdy parametry geometryczne są niezmiennie w kierunku trzeciego wymiaru, a która ma na celu przyspieszenie wykonywanych obliczeń. Autor przyznaje, że poprzez pominięcie trzeciego wymiaru zaniedbuje się zjawisko rozciągania włókien wirowych. Jak istotny wpływ ma to pominięcie na rozwiązanie przedmiotowego zadania, trudno jest określić bez wykonania stosownego modelowania i porównania wyników. Dodanie trzeciego wymiaru, mimo iż nie stanowi problemu matematycznego, zwiększa o rząd liczbę wykonywanych operacji numerycznych.

Podczas realizacji części badawczej autor miał trudności w znalezieniu materiałów porównawczych, umożliwiających zweryfikowanie uzyskanych wyników na podstawie wykonanych badań opublikowanych w naturze lub badań laboratoryjnych, które obej-

mowałyby przepływy o liczbie Reynoldsa przekraczającej 10^6 . Zamiarem autora jest w najbliższej przyszłości dokonanie takich badań na dużym modelu fizycznym, aby zweryfikować metodę numeryczną. Autor dalsze swoje badania powinien ukierunkować na:

1. Wykonanie kompleksowych obliczeń kilku przykładów zamknięć głębinowych, w tym zamknięć zasuwowych i segmentowych, oraz przeprowadzenie pełnej analizy obciążeń hydrodynamicznych, w celu sformułowania wniosków i zaleceń przydatnych w projektowaniu optymalnych kształtów geometrycznych tych konstrukcji i przewodów spustowych.

2. Podwyższenie rzędu aproksymacji metody deterministycznej wirów i przeprowadzenie testów obliczeniowych do zbadania jej efektywności.

3. Skrócenie czasu obliczeń metodą wirów. Przeanalizowanie wszystkich znanych algorytmów optymalizujących obliczenia oraz rozpatrzenie możliwości ich zastosowania w obszarach o złożonym kształcie geometrycznym.

4. Dokonanie próby sprzężenia proponowanej metody z obliczeniami drgań własnych zamknięcia w wodzie. Prowadzi to do zagadnienia wyznaczania drgań własnych z uwzględnieniem masy towarzyszącej wody. Problem ten autor rozwiązywał w swojej pracy doktorskiej metodą elementów skończonych. Celem prac byłoby stworzenie metody dla pełnej analizy dynamicznej zamknięć hydrotechnicznych.

5. Podjęcie próby napisania algorytmów metody dla modelu trójwymiarowego i ich testowanie pod kątem praktycznego zastosowania do wyznaczania obciążeń hydrodynamicznych konstrukcji hydrotechnicznych.

9. Dodatki

Dodatek A. Wyznaczenie jacobianu $\det \nabla_{\alpha} \mathbf{X}(t, \alpha)$ gradientu trajektorii cząstki

Zajmiemy się uzasadnieniem twierdzenia (rozdz. 3.1.2, 5.4.1), że $\det \nabla_{\alpha} \mathbf{X}(t, \alpha) \equiv 1$, w przypadku gdy $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. W tym celu skorzystamy z trzech ogólnych własności wyznaczników.

Własność 1

Niech $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $1 \leq i, j \leq n$, wtedy

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} \det A_i(t) \quad (9.1)$$

gdzie macierze $A_i(t) = [a_{kl}^{(i)}(t)]$, $1 \leq i \leq n$ określone są następująco

$$a_{kl}^{(i)}(t) = \begin{cases} a_{kl}(t), & \text{gdy } k \neq i, \\ a'_{kl}(t), & \text{gdy } k = i. \end{cases}$$

Macierz $A_i(t)$ powstaje z macierzy $A(t)$ w wyniku zamiany wyrazów $a_{ij}(t)$, $1 \leq j \leq n$ wiersza i -tego wyrazami $a'_{ij}(t)$, $1 \leq j \leq n$.

Uzasadnienie

Skorzystamy z podstawowego określenia wyznacznika

$$\det A(t) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}(t) a_{2\sigma(2)}(t) \dots a_{n\sigma(n)}(t)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich permutacjach σ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_{1\sigma(1)}(t) a_{2\sigma(2)}(t) \dots a_{n\sigma(n)}(t) &= a'_{1\sigma(1)}(t) a_{2\sigma(2)}(t) \dots a_{n\sigma(n)}(t) \\ &+ a_{1\sigma(1)}(t) a'_{2\sigma(2)}(t) \dots a_{n\sigma(n)}(t) + \dots + a_{1\sigma(1)}(t) a_{2\sigma(2)}(t) \dots a'_{n\sigma(n)}(t), \end{aligned}$$

żeby stwierdzić prawdziwość rozważanego wzoru.

Własność 2

Niech $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$ będą dowolnymi macierzami, a macierz $C = [c_{ij}]$ ich iloczynem $C = BA$. Wtedy

$$[c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}] = \sum_{1 \leq j \leq n} b_{ij} [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.2)$$

tnz. i -ty wiersz macierzy C jest kombinacją liniową wierszy macierzy A .

Własność 3

Niech $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$ będzie dowolną macierzą, a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ dowolnym układem liczbowym. Wybierzmy dowolnie i , $1 \leq i \leq n$ i utwórzmy macierz $\bar{A}_i = [\bar{a}_{kl}]$, $1 \leq k, l \leq n$, określając

$$\bar{a}_{kl} = \begin{cases} a_{kl}, & \text{gdy } k \neq i \\ \sum_{1 \leq j \leq n} \beta_j a_{jl}, & \text{gdy } k = i \end{cases}$$

tnz. macierz \bar{A}_i powstaje z macierzy A przez zamianę jej i -tego wiersza kombinacją liniową wszystkich wierszy macierzy A , wtedy

$$\det \bar{A}_i = \beta_i \det A \quad (9.3)$$

Uzasadnienie

Wiersze macierzy A będziemy oznaczać następująco

$$a^{(i)} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}], \quad 1 \leq i \leq n$$

Wtedy możemy napisać

$$A = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ \dots \\ a^{(i)} \\ \dots \\ a^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ \dots \\ \sum_{1 \leq j \leq n} \beta_j a^{(j)} \\ \dots \\ a^{(n)} \end{bmatrix} \quad - \text{ } i\text{-ty wiersz}$$

Korzystając teraz z elementarnych własności wyznacznika, otrzymujemy

$$\det \bar{A}_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \beta_j \det \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ \dots \\ a^{(j)} \\ \dots \\ a^{(n)} \end{bmatrix} - i\text{-ty} = \beta_i \det \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ \dots \\ a^{(i)} \\ \dots \\ a^{(n)} \end{bmatrix} = \beta_i \det A$$

bo wszystkie składniki sumy, w których $j \neq i$ są wyznacznikami macierzy, mających dwa takie same wiersze, są więc równe zero.

Przystępując do głównej części dowodu, wykonamy operację określenia gradientu w równaniu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t, \alpha) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \alpha), t), \quad \mathbf{X}(0, \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in R^n \quad (9.4)$$

Ponieważ operacje różniczkowania są przemienne, otrzymamy

$$\nabla_\alpha \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t, \alpha) = \frac{d}{dt} \nabla_\alpha \mathbf{X}(t, \alpha) = \nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \alpha), t) \nabla_\alpha \mathbf{X}(t, \alpha), \quad \nabla_\alpha \mathbf{X}(0, \alpha) = I, \quad \alpha \in R^n \quad (9.5)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. w celu uproszczenia dalszych rachunków, dla ustalonego $\alpha \in R^n$, wprowadzamy oznaczenia

$$A(t) = \nabla_\alpha \mathbf{X}(t, \alpha), \quad B(t) = \nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \alpha), t)$$

Wtedy równanie (9.5) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} A'(t) &= B(t)A(t), \quad t > 0 \\ A(0) &= I \end{aligned} \quad (9.6)$$

Do wyznaczenia wyznacznika $\det A(t)$ skorzystamy najpierw z własności 1, otrzymując

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} \det A_i(t)$$

gdzie i -ty wiersz macierzy $A_i(t)$ jest postaci

$$[a'_{i1}(t), a'_{i2}(t), \dots, a'_{in}(t)]$$

(pozostałe są odpowiednimi wierszami macierzy $A(t)$).

Z równości (9.3) i własności 2 wynika, że ten i -ty wiersz jest kombinacją liniową

$$[a'_{i1}(t), a'_{i2}(t), \dots, a'_{in}(t)] = \sum_{1 \leq j \leq n} b_{ij}(t) [a_{j1}(t), a_{j2}(t), \dots, a_{jn}(t)]$$

wierszy macierzy $A(t)$.

Dlatego na podstawie własności 3 otrzymujemy

$$\det A_i(t) = b_{ii}(t) \det A(t)$$

Ostatecznie dostajemy

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_{ii}(t) \right) \det A(t)$$

$$\det A(0) = 1$$

Oznacza to, że $\det A(t)$ spełnia podane proste równanie różniczkowe. Po jego rozwiązaniu otrzymujemy

$$\det A(t) = \exp \left(\int_0^t \sum_{1 \leq i \leq n} b_{ii}(s) ds \right)$$

Trzeba teraz tylko zauważyć, że

$$b_{ii}(t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} (X(\alpha, t), t)$$

Z równania ciągłości wynika, że

$$\sum_{1 \leq i \leq n} b_{ii}(t) = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

czyli $\det A(t) = \det \nabla_{\alpha} \mathbf{X}(\alpha, t) \equiv 1$, co należało uzasadnić.

Dodatek B. Wyprowadzenie postaci adwekcyjnej zasady zachowania pędu (równania ruchu Cauchy'ego)

Przedstawione w podrozdziale 3.1.6 równanie momentu pędu wzdłuż współrzędnej x_i jest postaci

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} u_i) = \nabla \cdot T_i + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.7)$$

Korzystamy teraz ze wzoru na dywergencję diady

$$\left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T)\right)_i = \sum_{j=1}^3 \rho \frac{\partial (u_i \cdot u_j)}{\partial x_j}, \quad i=1,2,3 \quad (9.8)$$

Lewą stronę równania (9.7) przekształcamy do postaci adwekcyjnej, korzystając z następującego jej przedstawienia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} u_i) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial ((\rho u_1) \cdot u_i)}{\partial x_1} + \frac{\partial ((\rho u_2) \cdot u_i)}{\partial x_2} + \frac{\partial ((\rho u_3) \cdot u_i)}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_1)}{\partial x_1} u_i + \frac{\partial (\rho u_2)}{\partial x_2} u_i + \frac{\partial (\rho u_3)}{\partial x_3} u_i \\ &\quad + \rho u_1 \frac{\partial (u_i)}{\partial x_2} + \rho u_2 \frac{\partial (u_i)}{\partial x_3} + \rho u_3 \frac{\partial (u_i)}{\partial x_3} \\ &= u_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_1 \frac{\partial (u_i)}{\partial x_2} + \rho u_2 \frac{\partial (u_i)}{\partial x_3} + \rho u_3 \frac{\partial (u_i)}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Wobec tego, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym przedstawia równanie ciągłości (zachowania masy) i jest równe zeru, mamy:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial (u_i)}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \quad (9.9)$$

Postępując podobnie dla pozostałych osi układu współrzędnych, otrzymujemy pełną wektorową, adwekcyjną postać równania pędu:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad (9.10)$$

Dodatek C. Szczegóły przekształceń przy wyprowadzaniu równania zachowania momentu pędu

Zależność opisującą zasadę zachowania momentu pędu formułujemy tradycyjnie w postaci równości całkowej

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS + \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dV \quad (9.11)$$

Jednak dla wykazania bardzo ważnej właściwości tensora \mathbf{T} , czyli jego symetryczności będzie nam potrzebna nieco zmodyfikowana jej postać.

Na wstępie określimy iloczyn wektorowy wektora \mathbf{r} i dowolnej macierzy \mathbf{M} , jako macierz

$$\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_{1j} &= r_2 m_{3j} - r_3 m_{2j} \\ a_{2j} &= r_3 m_{1j} - r_1 m_{3j} \\ a_{3j} &= r_1 m_{2j} - r_2 m_{1j}, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Kolumny macierzy \mathbf{A} są wektorowymi iloczynami wektora \mathbf{r} i odpowiednich kolumn macierzy \mathbf{M} . Ta operacja ma następujące własności:

Własność 1

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{M}\mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{M})\mathbf{v} \quad \text{dla dowolnego wektora } \mathbf{v} \quad (9.12)$$

Dla uzasadnienia wystarczy rozpatrzeć odpowiadające sobie kolejne składowe wektorów po lewej i prawej stronie równości. Pokażemy to na przykładzie pierwszych składowych. Dla pozostałych rachunek przebiega podobnie.

Zauważmy, że

$$(\mathbf{r} \times (\mathbf{M}\mathbf{v}))_1 = r_2 \sum_{1 \leq j \leq 3} m_{3j} v_j - r_3 \sum_{1 \leq j \leq 3} m_{2j} v_j = \sum_{1 \leq j \leq 3} (r_2 m_{3j} - r_3 m_{2j}) v_j = ((\mathbf{r} \times \mathbf{M})\mathbf{v})_1$$

co należało uzasadnić.

Własność 2

$$\operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) = (\mathbf{r} \times \operatorname{div} \mathbf{M}) + \begin{bmatrix} m_{32} - m_{23} \\ m_{13} - m_{31} \\ m_{12} - m_{21} \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Dla uzasadnienia rozpatrzmy pierwsze składowe, mamy wtedy

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathbf{M}))_1 &= \operatorname{div} [a_{11}, a_{12}, a_{13}] = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (r_2 m_{3j} - r_3 m_{2j}) \\ &= \sum_j \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} r_2 \right) m_{3j} - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} r_3 \right) m_{2j} \right] + \sum_j \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} m_{3j} \right) r_2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} m_{2j} \right) r_3 \right] \\ &= r_2 \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} m_{3j} \right) - r_3 \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} m_{2j} \right) + (m_{32} - m_{23}) = (\mathbf{r} \times \operatorname{div} \mathbf{M})_1 + (m_{32} - m_{23}) \end{aligned}$$

Podobnie otrzymujemy dla pozostałych składowych.

Własność 3

$$\nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \mathbf{r} \times \nabla \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

Przeprowadzimy rachunek tylko dla pierwszych składowych

$$\nabla(r_2 u_3 - r_3 u_2) = (r_2 \nabla u_3 - r_3 \nabla u_2) + (u_3 \nabla r_2 - u_2 \nabla r_3) = (\mathbf{r} \times \nabla \mathbf{u})_1 + [0, u_3, -u_2].$$

Dla pozostałych składowych rachunek przebiega podobnie.

Zacznijmy od wyznaczenia pochodnej materialnej wyrażenia pod całką po lewej stronie równości

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

Poszczególne składniki po prawej stronie równości rozpiszemy następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) \right) + \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \right) \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \rho \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right)$$

i

$$\nabla(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{u}) = \nabla(\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{u})) = (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \nabla \rho^T + \rho \nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{u})$$

Korzystamy z własności 3 i możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \right) \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \rho \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right) + (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \nabla \rho^T \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \right) \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \rho \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right) + (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \nabla \rho^T \cdot \mathbf{u} + \rho (\mathbf{r} \times \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \rho \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \rho^T \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \rho \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{r} \times \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right) \end{aligned}$$

Ostatecznie po uwzględnieniu zasady ciągłości otrzymujemy

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \rho \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{r} \times \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{r} \times \frac{D}{Dt} \mathbf{u}$$

Drugą całkę w równości (3.44)

$$\int_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS = \int_{S(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} dS$$

zamienimy za pomocą wzoru Gaussa na całkę objętościową

$$\int_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS = \int_{S(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V(t)} \operatorname{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{T}) dV$$

Korzystamy teraz z własności 2, możemy napisać

$$\int_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \operatorname{div} \mathbf{T} dV + \int_{V(t)} \mathbf{t}^* dV$$

gdzie

$$\mathbf{t}^* = \begin{bmatrix} t_{32} - t_{23} \\ t_{13} - t_{31} \\ t_{12} - t_{21} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie zasada zachowania momentu pędu przybiera postać

$$\int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{t}^*) dV + \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dV$$

Dodatek D. Niektóre przekształcenia wektorowe, funkcyjne i wzory całkowe

Przyjmijmy, że \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} są wektorami w przestrzeni \mathbb{R}^3 , \mathbf{v} , \mathbf{w} są funkcjami wektorowymi odwzorowującymi przestrzeń $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, φ oraz ψ są funkcjami skalarnymi odwzorowującymi przestrzeń $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, V jest objętością w układzie trójwymiarowym ograniczoną brzegiem S , $S(C)$ jest otwartą przestrzenią ograniczoną krzywą C , \mathbf{n} zaś jest wektorem jednostkowym zewnętrznym do powierzchni S , wówczas ważne są następujące tożsamości wektorowe i całkowe:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (9.15)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (9.16)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (9.17)$$

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (9.18)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \quad (9.19)$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (9.20)$$

$$\nabla (\varphi \mathbf{v}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \quad (9.21)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) \quad (9.22)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (9.23)$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{u}) = \varphi \nabla \times \mathbf{u} + (\nabla \varphi) \times \mathbf{u} \quad (9.24)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (9.25)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (9.26)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.27)$$

Twierdzenie Gaussa:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.28)$$

$$\int_V \nabla \varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS \quad (9.29)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS \quad (9.30)$$

Pierwsza tożsamość Greena:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \int_S \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.31)$$

Druga tożsamość Greena:

$$\int_S (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \int_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.32)$$

Twierdzenie Stokesa:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{v} dl \quad (9.33)$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \varphi dS = \int_C \varphi dl \quad (9.34)$$

Literatura

1. ABDALLAH S., (1987), *Numerical Solutions For the Pressure Poisson Equation with Neumann Boundary Conditions Using a Non-staggered Grid*, J. Comput. Phys., Vol. 70, 182–192.
2. ABDALLAH S., DREYER J., (1988), *Dirichlet and Neumann Boundary Conditions for the Pressure Poisson Equation of Incompressible Flow*, Intern. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 8, 1029–1036.
3. ALI A., RAJAKUMAR C., (2004), *The boundary Element Method. Applications in Sound and Vibration*, A.A. Balkema Publishers., Tokyo.
4. ANDERSON C.R., (1986), *A method of local correction for computing the velocity field due to a distribution of vortex blobs*, J. Comput. Phys., 62, 111–123.
5. ANDERSON D.A., TANNEHILL J.C., PLETCHER R.H., (1984), *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Pub. Corp. Washington
6. ANDERSON D.A., GREENGARD C., HENDERSON M., (1988), *Instability, vortex shedding, and numerical convergence*, Lecture Notes in Mathematic 1360, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 42–55.
7. APPEL D.W., SANFORD C.L., UPPAL H.L., (1961), *Vibration problem in hydraulic structures*, J. Hydr. Div., HY6, 207–215.
8. ASHURST W.T., MEIBURG E., (1988), *Three-dimensional shear layers via vortex dynamics*, J. Fluid Mech., Vol. 189, 87–116.
9. AURIAULT J.-L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W., STRZELECKI T., (1996), *Mechanika ośrodków niejednorodnych. Teoria homogenizacji*. Monografia pod red. T. Strzeleckiego, Dolnośląskie Wyd. Edukacyjne, Wrocław.
10. AYDIN I, (2002), *Air Demand Behind High Head Gates During Emergency Closure*, J. Hydraul. Res. IAHR, 40 (1), 83–93.
11. AYDIN I, TELCI I, DUNDAR O, (2006), *Prediction of downpull on closing high head gates*, J. Hydraul. Res. IAHR, 44 (6), 822–831.
12. ATKINS D. J., MASKELL J., (1980), *Numerical Prediction of Separated Flows*, Int. J. Num. Meth. Engineering, Vol. 15, 129–144.
13. BAKER G., BEALE J. T., (2004), *Vortex blob methods applied to interfacial motion*, J. Comput. Phys., Vol. 196, 233–258.
14. BALL W., (1959), *Hydraulic Characteristics of Gate Slots*, J. Hydr. Div., Vol. 10, 155–161.
15. BARBER, R.W., FONTY, (June 2002), *A numerical study of laminar flow over a confined backward-facing step using a novel viscous-splitting vortex algorithm*, 4th GRACM Congress on Computational Mechanics, Patras, 27–29.

16. BATCHELOR G.K., (1967), *An Introduction to Fluid Dynamic*, Cambridge University Press, London.
17. BEALE J.T., MAJDA A., (1982a), *Vortex methods I: Convergence in three dimensions*, Math. Comp., Vol. 39, 1–27.
18. BEALE J.T., MAJDA A., (1982b), *Vortex methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions*, Math. Comp., Vol. 39, 29–52.
19. BEALE J.T., MAJDA A., (1985), *High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels*, J. Comput. Phys., 58, 188–208.
20. BENSON M.G., BELLAMY-KNIGHTS P.G., GERRARD J.H., GLADWELL I., (1989), *A viscous splitting algorithm applied to low Reynolds number flows round a circular cylinder*, J. Fluids and Structures, Vol. 3, 439–479.
21. BERNARD, P.S., (1995), *A Deterministic Vortex Sheet Method for Boundary Layer Flow*, J. Comput. Phys., 117, 132–145.
22. BESKOS D.E. (1987), *Boundary Element Methods in Mechanics, Computational Methods in Mechanics*, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam.
23. BILLETTER P. (2000), *Flow-Inducted Multiple-Mode Vibrations of Gates with Submerged Discharge*, J. Fluids and Structures, Vol. 14, 323–338.
24. BILLETTER P., (2004), *Properties of single shear layer instabilities and vortex-induced excitation mechanisms of thick plates*, J. Fluids and Structures, Vol. 19, 335–348.
25. BJÖRCK A., DAHLQUIST G., (1983), *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa.
26. BŁAŻEWICZ J., STYCZEK A., (1993), *The stochastic simulation of a viscous fluid flow past an airfoil*, part I, Mechanika teoretyczna i stosowana, Vol. 31, No. 1, 175–204.
27. BORTHWICK A.G.L., BARBER R.W., (1992), *Numerical simulation of jet-forced flow in a circular reservoir using discrete and random vortex methods*, Intern. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 14, 1453–1472.
28. BOUAANANI N., PAULTRE P., (2005), *A new boundary condition for energy radiation in covered reservoirs using BEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 29, 903–911.
29. BOUFERROUK A., CHERNYSHENKO S.I., (2005), *Tikhonov regularization in discrete vortex method*, Computers & Fluids, 34, 275–281.
30. BREBBIA C.A., TELLES J.C.F, WROBEL L.C. (1984), *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin.
31. BREBBIA C.A., WALKER (1980), *Boundary Element Techniques in Engineering*, Butterworths, London.
32. BRUNGART T. A., LAUCHELE G. C., DEUTSCH S., RIGGS E. T., (2002), *Wall Pressure Fluctuations Induced by Separated/Reattached Channel Flow*, J. Sound and Vibration, Vol. 251, 558–577.
33. BUI T. D., OPPENHEIM A. K., (1987), *Evaluation of Wind Effects on Model Building by the Random Vortex Method*, Applied Numerical Mathematics, 3, 195–207.
34. BURCZYŃSKI T. (1995), *Metoda elementów brzegowych w mechanice*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa.
35. CAMPBELL F. B., (1961), *Vibration Problems In Hydraulic Structures*, J. Hydr. Div., Vol. 2, 61–77.

36. CASTRO I.P., (1979), *Relaxing Wakes behind Surface-Mounted Obstacle in Rough Wall Boundary Layers*, J. Fluid Mech., Vol. 93, 631–659.
37. CHAN S.T.K., LAROCK B.E., (1973), *Fluid Flows from Axisymmetric Orifices and Valves*, J. Hydr. Div., Vol. 1, 81–97.
38. CHEER A.Y., (1989), *Unsteady Separated Wake Behind an Impulsively Started Cylinder in Slightly Viscous Fluid*, J. Fluid Mech., Vol. 201, 485–505.
39. CHEN J.M., CHIA-HUNG L., (1999), *Vortex shedding and surface pressures on a square cylinder at incidence to a uniform air system*, Intern. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 20, 592–597.
40. CHEN L., VORUS S.W., (1992), *Application of a Vortex Method to Free Surface Flows*, Intern. J. Num. Meth. Fluids, VOL. 14, 1289–1310
41. CHENG A., H-D., LIGGETT J., A., LIU PH., L-F., (1981), *Boundary Calculations of Sluice and Spillway Flows*, J. Hydr. Div., Vol. 107, No. HY10, 1164–1178.
42. CHOI Y, HUMPHREY J.A.C., SHERMAN F.S., (1988), *Random-Vortex Simulation of Transient Wall-Driven Flow in a Rectangular Enclosure*, J. Comput. Phys., Vol. 75, 359–383.
43. CHORIN A.J., (1997), *A numerical methods for solving incompressible viscous flow problems*, J. Comput. Phys., Vol. 135, 118–125.
44. CHORIN A.J., (1973), *Numerical study of slightly Viscous flow*, J. Fluid Mech., 57, 785–796.
45. CHORIN A.J., (1978), *Vortex sheet approximation of boundary layers*, J. Comput. Phys., 27, 428–442.
46. CHORIN A.J., (1980), *Vortex models and boundary layer instability*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 1, 1–21.
47. CHORIN A.J., BERNARD P., (1878), *Discretization of vortex sheet with an example of roll-up*, J. Comput. Phys., 18, 438–428.
48. CHORIN A.J., MARSDEN J.E., (1990), *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag.
49. CHRISTLIEB A.J., KRASNAYA R., VERBONCOEUR J.P., (2004), *A treecode algorithm for simulating electron dynamics in a Penning–Malmberg trap*, Comp. Phys. Comm., 164, 306–310.
50. CLARKE N. R., TUTTY O. R., (1994), *Construction And Validation Of A Discrete Vortex Method For The Two-Dimensional Incompressible Navier–Stokes Equations*, Computers & Fluids, Vol. 23, No. 6, 751–783.
51. COLGATE D., (1959), *Hydraulic Downpull Forces on High Head Gates*, J. Hydr. Div., Vol. 11, 39–52.
52. COLLATZ L., (1960), *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa.
53. CORTEZ R., (2000), *A Vortex/Impulse Method for Immersed Boundary Motion in High Reynolds Number Flows*, J. Comput. Phys., No 160, 385–400.
54. COTTET G.-H. MICHAUX B., OSSIA S., VANDERLINDEN G., (2002), *A Comparison of Spectral and Vortex Methods in Three-Dimensional Incompressible Flows*, J. Comput. Phys., Vol. 175, 702–712.
55. COTTET G.-H., KOUMOUTSAKOS P.D., (2000), *Vortex Methods: Theory and Practice*, Cambridge University Press.

56. CZYŻEWSKI K., WOLSKI W., WÓJCICKI S., ŻBIKOWSKI A. (1973), *Zapory ziemne*, Wyd. Arkady, Warszawa.
57. DEGRAAFF D. B., WEBSTER D. R., EATON J. K., (1999), *The effect of Reynolds number on boundary layer turbulence*, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol. 18, 341–346.
58. DEISSLER R.G., (1993), *Some remarks on the nature of Navier–Stokes turbulence, Instabilities And Turbulence In Engineering Flows*, 247–264.
59. DOBROCIŃSKI S., (2000), *Stabilność rozwiązań zagadnień odporności udarowej konstrukcji*, Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia.
60. DOMARADZKI J.A., ADAMS N.A., (2002), *Direct Modeling of Subgrid Scales of Turbulence in Large Eddy Simulations*, J. Turbulence 3.
61. DYNNIKOVA G., Ya., (2002), *Vortex motion in two-dimensional viscous fluid flows*, Fluid Dynamics., Vol. 38, No. 5, 670–678.
62. ELDREDGE J. D., COLONIUS T., LEONARD A., (2002), *A Vortex Particle Method for Two-Dimensional Compressible Flow*, J. Comput. Phys., Vol. 179, 371–399.
63. ELSNER J. W., (1987), *Turbulencja przepływów*, PWN.
64. FANTI K., (1960), *Analiza niektórych zjawisk występujących w przepływie wody przez zamknięcie klapowe*, Prace naukowe Instytutu Inżynierii Środowiska, 77–93.
65. FANTI K., (1972), *Budowle piętrzące*, Arkady, Warszawa.
66. FARRANT T., TAN M., PRICE W. G., (2000), *A Cell Boundary Element Method Applied to Laminar Vortex-Shedding from Arrays of Cylinders in Various Arrangements*, J. Fluids and Structures, Vol. 14, 375–402.
67. FISHELOV D., (1990), *A new vortex scheme for viscous flows*, J. Comput. Phys., Vol. 86, 211–234.
68. FISHELOV D., (1994), *Simulation of Three-Dimensional Turbulent Flow in Non-Cartesian Geometry*, J. Comput. Phys., Vol. 115, 249.
69. FLOREZ W. F., POWER H., (2001), *Comparison between continuous and discontinuous boundary elements in the multidomain dual reciprocity method for the solution of the two-dimensional Navier–Stokes equations*, Engineering Analysis With Boundary Elements, Vol. 25, 57–69.
70. FORTUNA Z., MACUKOW B., WAŚOWSKI J., (2005), *Metody numeryczne*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa
71. FRANGMEIER D. D., STRELKOFF T.S., (1968), *Solution for Gravity Flow under a Slice Gate*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 1, 153–176.
72. GATSKI T.B., HUSSAINI M.Y., LUMLEY J.L., (1996), *Simulation and Modeling of Turbulent Flows*, Oxford University Press, New York.
73. GAUL L., KÖGL M., WAGNER M. (2003), *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists, An Introductory Course with Advanced Topics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
74. GHARAKHANI, A., GHONIEM A. F., (1997), *Three-Dimensional Vortex Simulation of Time Dependent Incompressible Internal Viscous Flows*, J. Comp. Phys., 75–95.
75. GHONIEM A.F., CAGNON Y., (1987), *Vortex Simulation of Recirculating Flow*, J. Comput. Phys., Vol. 68, 346–377.

76. GHONIEM F.A., SETHIAN A.J., (1986), *Effect of Reynolds Number on the Structure of Recirculating Flow*, AIAA Journal, Vol. 25, No. 1, 168–171.
77. GŁOWIŃSKI R. (1983), *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer Verlag, New York.
78. GRAMELA M., (2002), *Lagrange hydrodynamics as extended Euler hydrodynamics: Hamiltonian and GENERIC structures*, Physics Letters, Vol. 296, pp 97–104.
79. GREENGATRD L., ROKHLIN V., (1987), *A fast algorithm for particle simulation*, J. Comput. Phys, Vol. 73, 325–348.
80. GRČIĆ J., (1963), *Predetermination of Vibration Positions of a Flap Gate*, IAAR Congress, 81–88.
81. GRESHO P.M., CHAN S.T., LEE R.L., UPSON C.D. (1984), *A Modified Finite Element Method for Solving the Time-Dependent Incompressible Navier – Stokes Equations*, Part 1 and 2, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, 557–598 i 619–640.
82. GRESHO, Ph. M., SANI, R., (1987), *On Pressure Boundary Conditions for The Incompressible Navier–Stokes Equations*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 7, 1111–1145.
83. GRYBOŚ R., (1998), *Podstawy mechaniki płynów*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
84. GUNZURGER M.D., (1988), *On Finite Element Approximations of the Stream function-vorticity and Velocity-vorticity Equations*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 8, 1229–1240.
85. HALD O.H., (1979), *Convergence of vortex methods for Euler's equations II*, SIAM J. Numer. Anal., 16, 726–755.
86. HALD O.H., (1987), *Convergence of Vortex Methods for Euler's Equations III*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 24, No. 3, 538–581.
87. HANSON T., SUMMERS D. M., WILSON C. B., (1984), *Numerical Modelling Of Wind Flow Over Buildings In Two Dimensions*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, 25–41.
88. HANSON T., SUMMERS D. S., WILSON C. B., (1985), *A Random Vortex Simulation of Wind-flow Over a Building*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 5, 849–871.
89. HARDWICK J., D., (1974), *Flow Induced Vibration of Vertical – Lift Gate*, Proc. ASCE, J. Hydr. Div., Vol. 5,
90. HIRT C.W., NICHOLS B.D., ROMERO N.C., (1975), *SOLA–A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flow*, Report of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos.
91. JAGER W., (2001), *On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow*, Journal of Differential Equations, Vol. 170, 96–122.
92. JEŻOWIECKA-KABSCH K., SZEWCZYK H., (2001), *Mechanika Płynów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
93. JOSEPH D. D., (1976), *Stability of Fluid Motions I*, Springer-Verlag, Berlin.
94. KAMEMOTO K., (2004), *On contribution of advanced vortex element methods toward virtual reality of unsteady vertical flows in the new generation of CFD*, J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng., Vol. 26, No. 4.
95. KAMEMOTO K., TSUTAHARA M., (1999), *Vortex Methods*, World Scientific, Kobe.
96. KANDIL O.A., CHU L.-C., TUREAUD T., (1984), *A Nonlinear Hybrid Vortex Method For Wings At Large Angle Of Attack*, AIAA Journal, Vol. 22, No. 3, 329–336.
97. KATZ J., (1981), *A Discrete Vortex Method For The Non–Steady Separated Flow Over An Airfoil*, J. Fluid Mech., Vol. 102, 315–328.

98. KIMURA T., TSUTAHARA M., (1986), *Flows about a Rotating Circular Cylinder by the Discrete-Vortex Method*, AIAA J., Vol. 25, No. 1, 182–183.
99. KNIO O. M., GHONIEM A.F., (1991), *Three-Dimensional vortex simulation of Rollup and Entrainment in a Shear Layer*, J. Comput. Phys., 97, 172–223.
100. KOLKMAN P.A., (1984), *Gate Vibration. Developments in Hydraulic Engineering – 2*. Edited by P. Novak, Elsevier.
101. KOSTECKI S., (1983), *Coupled vibrations of the tilting gate and surrounding water*, XX Congress IAHR Proceedings, Vol. 6, 198–205.
102. KOSTECKI S., (2003a), *Two-dimensional Vortex Method for Flow under Vertical Lift Gate*, [in:] *Problemy hydrotechniki*. Praca zbiorowa pod red. Rogala i Kostecki, Dolnośl. Wydaw. Edukacyjne, Wrocław.
103. KOSTECKI S., (2003b), *Modelowanie przepływów z dużą liczbą Reynoldsa metodą wirów*. W: *Problemy hydrotechniki. Współczesne podstawy planowania i projektowania w inżynierii i gospodarce wodnej*. Praca zbiorowa pod red. Rogala, Dolnośląskie Wydaw. Edukacyjne, Wrocław, 49–62.
104. KOSTECKI S., (2006), *2-D vortex method for pressure evaluation on protruding wall for high Reynolds flow*, Flow Simulation in Hydraulic Engineering. Ann. Int. Conf. on Hydraulic Engineering, Dresden.
105. KOSTECKI S., (2007), *Zastosowanie metody wirów w obliczeniach obciążeń hydrodynamicznych*, w: *Współczesne problemy naukowo-badawcze budownictwa lądowego i wodnego*, Red. W. Glabisz, C. Madryas, H. Nowak, Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław, 121–132.
106. KOSTECKI S., POPOW A., (1987), *Nappe oscillation as a force inducing gate vibrations, Model investigations in hydro-engineering*. 3rd Conference – Actual Problems of Hydro-Engineering, 69–74.
107. KOSTECKI S., STRZELECKI T., (2006), *Numeryczna symulacja obciążenia hydrodynamicznego zamknięcia zasuwowego. Modelowanie i hydroinformatyka oraz wybrane zagadnienia ochrony przeciwpowodziowej* (ed. Stanisław Kostecki), DWN, Wrocław, 247–254.
108. KOSTECKI S., RĘDOWICZ W., POPOW A., (1986), *Badania oraz sposób zapobiegania drganiom zamknięcia przelewu zbiornika Słup*, *Badania konstrukcji budowlanych i inżynierskich*, 157–164.
109. KRAJNOVIĆ S., DAVIDSON L., (2002), *A mixed one-equation subgrid model for large-eddy simulation*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 23, 413–425.
110. KRASNY R., (1986), *Desingularization of periodic vortex sheet roll-up*, J. Comput. Phys., Vol. 65, 292–313.
111. KUDELA H., (1984), *Badania nad metodą dyskretnych warstw wirowych*, *Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: ENERGETYKA*, z. 87, 285–292.
112. KUDELA H., (1995), *Modelowanie zjawisk hydrodynamicznych metodami dyskretnych wirów*, Oficyna Wyd. PWr., Seria: Monografie 25, Wrocław.
113. KUDELA H., KOSTECKI (1992), *Vortex blobs simulation of two-dimensional flow over a backward facing step*, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. XII, No. 1–2., 3–17.
114. LAITONE J., (1987), *Numerical Experiments On Turbulent Flow Using The Random Vortex Method*, International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 24, 1297–1303.
115. LANDAU L. D., LIFSZYC E. M., (1994), *Hydrodynamika*, PWN.

116. LAROCK B. E., (1969), *Gravity-Affected Flow From Planar Sluice Gates*, J. Hydr. Div., Vol. 4, 1211–1226.
117. LAROCK B. E., (1970), *A theory for free outflow beneath radial gates*, J. Fluid Mech., Vol. 41, No. 4, 851–864.
118. LEBIEDIEW N.N. (1957), *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, Warszawa,
119. LEI C., CHENG L., KAVANAGH K., (1999), *Re-examination of the effect of a plane boundary on force and vortex shedding of a circular cylinder*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 80, 263–286.
120. LEJA F. (1973), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa.
121. LEONARD A., (1980), *Vortex methods for flow simulation*, J. Comput. Phys., 37, 289–335.
122. LEWIS R. I., (2005), *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, Cambridge University Press, London.
123. LI Q.S., MELBURNE W.H., (1999), *The effect of large-scale turbulence on pressure fluctuations in separated and reattaching flows*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 83, 159–169.
124. LINDSAY, K. KRASNY R., (2001), *A Particle Method and Adaptive Treecode for Vortex Sheet Motion in Three-Dimensional Flow*, J. Comp. Phys., 172, 879–907.
125. LIU G.R., LIU M.B., (2003), *Smoothed Particle Hydrodynamics*, World Scientific Publishing, Singapore.
126. LIU J.-G., XIN Z., (2000), *Convergence of the Point Vortex Method for 2-D Vortex Sheet*, Mathematics of Computation, Vol. 70, No. 234, 595–606.
127. LONG D.-G., (1988), *Convergence of the random vortex method in two dimensions*, J. Amer. Math. Soc., 1, 779–804.
128. LUNG-AN Y., PING-WEN Z., (1994), *Fully Discrete Convergence Estimates for Vortex Methods in Bounded Domains*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 31, No. 2, 344–361.
129. MAJDA A.J., BERTOZZI A.L., (2002), *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge University Press, Cambridge.
130. MALCZEWSKI J., PIEKARSKI M., (1992), *Modele procesów transportu masy, pędu i energii*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
131. MARCINKOWSKA H. (1990), *Dystrybucje i przestrzenie Sobolewa*, Wyd. Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław.
132. MARGERIT D., BRANCHER J.-P., (2001), *Asymptotic expansion of the Biot–Savart law for a slender vortex with core variation*, Journal Engineering Mathematics, 40, 297–313.
133. MARTIN J. E., MEIBURG E., (1994), *The nonlinear evolution of swirling jets*, Journal Meccanica, Vol. 29, 331–341.
134. MATTHEIJ R.M.M., RIENSTRA W., TEN THIJE BOONKAMP J.H.M., (2005), *Partial Differential equations. Modelling, Analysis, Computation*, SIAM, Philadelphia.
135. MATYKA M., (2002), *Symulacje komputerowe w fizyce*, Helion, Gliwice.
136. McCracken M. F., PESKIN C. S., (1980), *A Vortex Method For Blood Flow Through Heart Valves*, J. Comput. Phys., Vol. 35., 183–205.
137. MERIC R. A., (1997), *An optimization approach for Stokes flow in a channel with a cylindrical block by the BEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 19, 89–95.

138. MICHLIN S.G., SMOLNICKI C.L., (1970), *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa.
139. MIZUKAMI A., TSUCHIYA M., (1984), *A Finite Element Navier–Stokes Equations*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 4, 349–357.
140. MORTAZAVI I., GIOVANNINI A., (2001), *The Simulation of Vortex Dynamics downstream of a Plate Separator using a Vortex Finite-Element Method*, Int. J. of Fluid Dynamics, Vol. 5 Article 4.
141. NAGAO F., UTSUNOMIYA H., MURATA S., (1997), *Improvement of pitching moment estimation of an oscillating body by discrete vortex method*, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 67&68, 337–347.
142. NAHARA H. K., KAMOTANI Y., (2000), *Bubble formation from Wall orifice In liquid cross-flow dunder low gravity*, Chemical Engineering Science, Vol. 55, 4653–4665.
143. NARAYANAN R., REYNOLDS A. J., (1972), *Reattaching Flow Downstream Of Leaf Gate*, J. Hydr. Div., Vol. 5, 913–934.
144. NAUDASCHER E., (1961), *Vibration of gate durin overflow and underflow*, J. Hydr. Div., Vol. 5, 63–86.
145. NAUDASCHER E., (1972), *Entwurfskriterien fur schwingungssichere Talsperrenverschlusse*, Wasserwirtschaft, Vol. 62, 52–55.
146. NAUDASCHER E., ROCKWELL, D., (1994), *Flow-Induced Vibratios, An Engineering Guide*, A.A.Balkema.
147. NAUDASCHER, E., (1991), *Hydrodynamic forces*, A.A.Balkema.
148. NGUYEN D.T., (1990), *Gate Vibration due to Unstable Flow Separation*, Journal of Hydraulic Eng., Vol. 116, No. 3, 342–361.
149. NI A.L., (1995), *Boundary Conditions for Vorticity-Velocity Formulation of Navier–Stokes Equations*, AIAA Journal, Vol. 34. No. 2, 416–418.
150. NI A.L., (1998), *Pressure boundary conditions for vorticity-velocity formulation of Navier–Stokes equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 22, 33–40.
151. NORDMARCK R.O., (1991), *Re-zoning for high order vortex method*, J. Comput. Phys., Vol. 97, 366–397.
152. NOVAK P., (1984), *Developments in hydraulic engineering*, Elsevier, London.
153. NOWAKOWSKI A., ROKICKI J., STYCZEK A., (1996), *The Pressure Problem In the Stochastic Vortex Blob Method*, ESAIM Proc., Vol. 1, 125–134.
154. ODEN J.T., REDDY J.N. (1976), *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, J. Wiley & Sons, New York.
155. ODEN J.T., (1972), *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw–Hill, New York,
156. ONATE E., PERIAUX L., SAMUELSSON A., (1991), *The finite element method in the 1900's*, Springer–Verlag, Berlin.
157. OWEN D.R., HINTON E., (1980), *Introduction to Finite Element Computation*, Pineridge Press.
158. PALEPU V.R., (1968), *Boundary-layer development at curved conduit entrances*, J. Hydr. Div., Vol. 1, 195–217.
159. PARISSET E., (1955), *Etude sur la vibration des lames deversantes*, Labolatoire Dauphimois d'Hydraulique, Congress IAHR, C21.1–C21.14.

160. PEREIRA L.A.A., HIRATA M.H., SILVERIA NETO A., (2003), *Vortex Method with turbulence sub-grid scale modeling*, J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng., Vol. 25 No. 2.
161. PETERSSON N.A., (2001), *Stability of Pressure Boundary Conditions for Stokes and Navier–Stokes Equations*, J. Comput. Phys., 172, 40–70.
162. PETRIKAT K., (1976), *Structure vibrations of segment gates*, 8th Symp. IAHR, Section Hydr. Mach., Equipm. and Cavitation, Leningrad, paper 1.2.
163. PETRIKAT K., (1955), *Schwingungserregungen an Stahlwasserbauten*, Der Stahlbau.
164. PLOUMHANS P., DAENINCK G., WINCKELMANS G.S., (2004), *Simulation of Three-Dimensional Bluff-Body Flows Using the Vortex Particle and Boundary Element Methods*, Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 73, 117–131.
165. PLOUMHANS P., WINCKELMANS G.S., (2000), *Vortex methods for high-resolution simulation of viscous flow past bluff bodies of general geometry*, J. Comput. Phys., 167, 354–406.
166. POPE S.B., (2000), *Turbulent Flows*, Cambridge University Press.
167. PORTHOUSE D. T C., LEWIS R. I., (1981), *Simulation of viscous diffusion for extension of the surface vorticity method to boundary and separated flows*, J. Mech. Eng. Sci., 23, No. 3, 157–167.
168. PROTAS B., STYCZEK A., NOWAKOWSKI A., (2000), *An Effective Approach to Computation of Forces in Viscous Incompressible Flows*, J. Comput. Phys., 159, 231–245.
169. PUCKETT, E.G. (1989), *A study of the vortex sheet method and its rate of convergence*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, 288–327.
170. PUZYREWSKI R., SAWICKI J., (1998), *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*, PWN.
171. RAVIART P. A., (1985), *An analysis of particle methods, Lecture Notes in Math*, Springer-Verlag, 1127, 243–324.
172. RIPKEN J.F., HAYAKAWA N., (1972), *Cavitation in high-head conduit control dissipators*, J. Hydr. Div., HY 1, 239–256.
173. RHONE T. J., (1959), *Problems Concerning Use of Low Head Radial Gates*, J. Hydr. Div., Vol. 2, 35–65.
174. RĘDOWICZ W., (2007), *Wpływ kształtu zamknięcia klapowego na wybrane parametry strumienia wody*, [w:] *Współczesne problemy naukowo-badawcze budownictwa lądowego i wodnego*, Red. W. Glabisz, C. Madryas, H. Nowak, Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław, 121–132.
175. ROGALA R., KOSTECKI S., KONG V., (1994), *The Simulation of Pressure Distribution on a Flow around Obstacle by the Discrete Vortex Method*, 5th Conference on Problems of Hydroengineering, Wyd. Politechniki Wrocławskiej.
176. ROGALA R., KOSTECKI S., KONG V., (1995), *Metoda lokalnych korekcy w obliczeniach przepływu metodą wirów dyskretnych*, XV Ogólnopolska Szkoła Hydrauliki Wód Śródlądowych, Wrocław–Trzebiezowice, 133–140.
177. ROGALA R., KOSTECKI S., (1985), *Drgania zamknięć klapowych*, Arch. Hydrot., Vol. 31, z. 1, 53–72.
178. ROGALA R., KOSTECKI S., KONG V., (1993), *Symulacja przepływu w kanale zamkniętym metodą wirów dyskretnych*, [w:] *Współczesne problemy hydrauliki wód śródlądowych*, XIII Ogólnopolska Szkoła Hydrauliki, Materiały szkoły. Pr. zbiorowa pod red. Wojciecha Majewskiego. PAN IBW w Gdańsku, 141–148.

179. ROGALA R., KOSTECKI S., RĘDOWICZ W., (1986), *Eliminacja drgań zamknięcia klapowego zapory Ślup*, III Krajowa Konferencja Technicznej Kontroli Zapór, 141–148.
180. ROGALA R., WINTER J., (1983), *Ciśnienie hydrodynamiczne działające na zamknięcie klapowe*, Archiwum Hydrotechniki, tom XXX, zeszyt 3, 153–173.
181. ROGALA R., WINTER J., (1986), *Dynamika stalowych konstrukcji przelewowych*, Badania konstrukcji budowlanych i inżynierskich, 227–235.
182. ROGALA R., WINTER J., KOSTECKI S., (1984), *The vibrations of tilting gates— causes and ways of their prevention*, *Research on hydraulic engineering*. Proceedings of the Polish–Yugoslav Symposium, 309–316.
183. ROSENHEAD L., (1931), *The point vortex approximation of a vortex sheet*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 134, 170–192.
184. SAGAR B.T.A., (1995), *ASCE Hydrogates Task Committee Design Guidelines for High-Head Gates*, IAHR J. Hydraul. Eng., 121, No. 12, 845–852.
185. SANGHI S., AUBRY N., (1992), *Models for the structure and dynamics of near wall turbulence*, GATSKI T.B., SARKAR S., SPEZIALE C.G., *Studies In Turbulence*, Springer–Verlag.
186. SAPRKAYA T., (1989), *Computational Method with Vortices*, Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 111, 5–52.
187. SAPRKAYA T., (2001), *On the force decompositions of Lighthill and Morison*, J. Fluids and Structures, Vol. 15, 227–233.
188. SARLER B., KHUN G., (1999), *Primitive variable dual reciprocity boundary element method solution of incompressible Navier–Stokes equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 23, 443–455.
189. SCHLICHTING H., (1934), *Laminare Kanaleinlaufstromung*, Ztschr. F. Angew. Math. Und Mech., Band 14, Heft 6, 368–373.
190. SCHLICHTING H., (1965), *Grenzschicht Theorie*, 5 Aufl. Karlsruhe: G. Braun.
191. SCHMIDGALL T., (1972), *Spillway gate vibrations on Arkansas river dams*, Proc. ASCE J. Hydr. Div, HY 1, paper 8676.
192. SETHIAN J.A., GHONEM A.F., (1988), *Validation study for vortex methods*, J. Comput. Phys., Vol. 74, 283–317.
193. SETHIAN J.A., GHONIEM A.F., *On Measuring the Accuracy of Vortex Method: Using a Random Method to Model Stable and Unstable Flow*, [in:] *Vortex Methods*, Proceedings of the U.C.L.A Workshop held in Los Angeles 1987, Lecture Notes in Mathematics, 1360, Springer–Verlag.
194. SHANKAR S., VAN DOMMELEN, L., (1996), *A new Diffusion Procedure for Vortex Methods*, J. Comput. Phys., Vol. 127, 88–109.
195. SHIRATO H., MATSUMOTO M., (1997), *Unsteady pressure evaluation on oscillating bluff body by vortex method*, Journal of Wind Engineering And Industrial Aerodynamics, 67&68, 349–359.
196. SIMMONS W.P., (1959), *Air model studies of hydraulic downpull on large gates*, J. Hydr. Div., Vol. 1, 41–59.
197. SPALART P. R., LEONARD A., (1981), *Computation of Separated Flows by a Vortex-Tracing Algorithm*, AIAA Journal, 1–14.

198. STANDSBY P.K., (1985), *A Generalized Discrete-Vortex Method for Sharp-Edged Cylinders*, AIAA Journal, Vol. 23, No. 6, 856–861.
199. STEFES B., FERNHOLZ H.H., (2005), *The influence of high free-stream turbulence and a favourable pressure gradient on an incompressible axisymmetric turbulent boundary layer*, European Journal of Mechanics & Fluids, Vol. 24, 167–187.
200. STOER J. (1979), *Wstęp do metod numerycznych*, PWN, Warszawa.
201. STRAIN J., (1996), *2D Vortex Methods and Singular Quadrature Rules*, J. Comput. Phys., Vol. 124, 131–145.
202. STRAIN J., (1996), *Fast Adaptive 2D Vortex Methods*, J. Comput. Phys., Vol. 132, 131–145.
203. STRZELECKI T. (red.) , AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W. (1996), *Mechanika ośrodków niejednorodnych, Teoria homogenizacji*, DWE, Wrocław.
204. STRZELECKI T., KOSTECKI S., ŻAK S., (2007) *Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate*, DWE, Wrocław.
205. STYCZEK A., (1987), *The Vortex Blobs Method of Simulating the Viscous Liquid Motion*, Archiwum Budowy Maszyn, Tom XXXIV, Zeszyt 1.
206. STYCZEK A., WALD P., (1995), *Fast and Efficient Vortex–Blobs Simulation of The Flow Past The Circular Cylinder*, Archiwum Budowy Maszyn, Vol. XLII, Zeszyt 1–4.
207. SZEWCZYK H., JEŻOWIECKA-KABSCH K., (2001), *Mechanika płynów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
208. SZYMKIEWICZ R., (2000), *Modelowanie matematyczne w rzekach i kanałach*, PWN, Warszawa.
209. SZYMKIEWICZ R., (2003), *Metody numeryczne w inżynierii wodnej*, Wydawnictwo PG, Gdańsk.
210. TAYLOR C., HUGHER T.G. (1981), *Finite Element Programming of Navier–Stokes Equations*, Pineridge Press.
211. THANG N.D., (1984), *Gate Vibrations due to Unstable Flow Separation*, J. Hydr. Eng., Vol. 116, No. 3, 342–361.
212. VEZZA M., GALBRAITH R. A. McD., (1985), *An Inviscid Model of Unsteady Aerofoil Flow with Fixed Upper Surface Separation*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 5, 577–592.
213. WINTER J., (1982), *Badanie własności pulsacji ciśnienia hydrodynamicznego działającego na zamknięcie klapowe*, Gospodarka Wodna, Nr 11–12, 224–227.
214. WROBEL L. C., (1984), *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag.
215. YING L–a., (1992), *Convergence of Vortex Methods for Three Dimensional Euler Equations in Bounded Domain*, Institute of Math. and Dept. of Math., Peking Univ. Research Report, 65.
216. YING L–A., (1998), *Vortex Method for Two Dimensional Euler Equations in Bounded Domains with Boundary Correction*, Mathematics of computation, Vol. 67, No. 224, 1383–1400.
217. YING L.–A., ZHANG P., (1994), *Fully discrete convergence estimates for vortex methods in bounded domains*, SIAM J. Numer. Anal., 31, 344–361.
218. YING L–a., ZHANG P., (1997), *Vortex Methods*, Science Press and Kluwer Academic Publishers, Beijing.
219. ZEB A., ELLIOTT L., INGHAM D.B., LESNIC D., (1998), *The boundary element method for the solution of Stokes equations in two-dimensional domains*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 22, 317–326.

220. ZEB A., ELLIOTT L., INGHAM D.B., LESNIC D., (2000), *Boundary element two-dimensional solution of an inverse Stokes problem*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 24, 75–88.
221. ZIENKIEWICZ O.C., (1978), *The Finite Element Method*. Third Ed, McGraw–Hill Book Comp., London.





BIBLIOTEKA GŁÓWNA

334594 L/1

Przedstawiono praktyczną i efektywną metodę wyznaczania obciążeń hydrodynamicznych działających na zamknięcia budowli wodnych. Obciążenia hydrodynamiczne są w omawianych zagadnieniach inżynierskich związane z bardzo silnie turbulentnym przepływem, w którym występują zjawiska odrywania warstwy przyściennej i recyrkulacji. Omówiono zagadnienia związane z kinematyką i dynamiką wirowości oraz teorię warstwy przyściennej. Po analizie możliwości różnych metod numerycznych do rozwiązania zagadnienia przepływu turbulentnego wybrano stochastyczną metodę wirów dyskretnych. Wyprowadzono równania dla przepływu w obszarach o złożonej geometrii oraz przedstawiono oryginalny sposób rozwiązania problemu warunków brzegowych.

W przepływach silnie turbulentnych obciążenie hydrodynamiczne jest przede wszystkim efektem ciśnienia cieczy działającego na konstrukcję. Problem ciśnienia rozwiązano metodą elementów brzegowych, wykorzystując rozkłady pola prędkości i wirowości, znane z obliczeń metodą wirów.

Użyteczność opracowanych metod i algorytmów zaprezentowano, wykonując praktyczne obliczenia rozkładu pól prędkości, wirowości i ciśnienia dla wybranych zamknięć hydrotechnicznych – zasuw płaskiej w spuszczeniu dennym oraz zamknięcia klapowego na wysokim progu.

Monografia jest przeznaczona dla specjalistów z dziedziny budownictwa wodnego i projektantów zajmujących się zastosowaniem metod numerycznych w hydrotechnice.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej

są do nabycia w księgarni

„Tech”

plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław

budynek D-1 PWr., tel. 071 320 29 35

Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 978-83-7493-379-7

