Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport nr PRE-35/79

WYTĘŻENIE PŁYT W UKŁADACH PŁYTOWO-ŻEBROWYCH

Czesław Machelski

Praca doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Jan Kmita

Słowa kluczowe: wytężenie płyt, płaskie elementy powierzchniowe, płyty użebrowane

Wrocław 1979

Mgr inż. Czesław Machelski

Instytut Inżynierii Lądowej
Politechniki Wrocławskiej

Wybrzeże Wyspiańskiego 27
bud. H-3, p. 105, tel. 20-23-56
50 - 370 W r o c ł a w

Komunikat

wpłynął do Redakcji Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych
Instytutu Inżynierii Lądowej w kwietniu 1979 r.

SPIS RZECZY

Zestawienie podstawowych oznaczeń 4

1. WPROWADZENIE 7

1.1. Wstęp 7

1.2. Sposoby rozwiązań płyt użebrowanych 8

1.3. Cel pracy 13

2. PŁASKIE ELEMENTY POWIERZCHNIOWE 14

2.1. Model płyty użebrowanej podłużnie 14

2.2. Równania sił i przemieszczeń w elemencie 17

2.3. Macierz sztywności elementu 20

2.4. Wektor obciążenia elementu 25

2.4.1. Uwagi ogólne 25

2.4.2. Obciążenie ruchome 26

2.4.3. Sprężenie poprzeczne 29

2.4.4. Sprężenie podłużne 31

2.5. Siły wewnętrzne i przemieszczenia w elementach układu 33

2.6. Płyty użebrowane podłużnie z poprzecznicami 39

2.7. Cechy sprężyste elementu 42

2.8. Algorytm numeryczny rozwiązania 44

3. ROZKŁAD SIŁ OD OBCIAŻENIA RUCHOMEGO 48

3.1. Płyty użebrowane podłużnie 48

3.1.1. Wpływ żebra na rozkład sił wewnętrznych w płycie 48

3.1.2. Analiza momentów m_y w płycie 60

3.2. Płyty użebrowane podłużnie z poprzecznicami 66

3.3. Płyty użebrowane z podporami pośrednimi 70

4. ROZKŁAD SIŁ OD SPREZENIA 73

4.1. Sprężenie poprzeczne poprzez płytę 73

4.2. Sprężenie poprzeczne poprzez poprzecznicę 75

4.3. Sprężenie poprzez żebro podłużne 78

5. ANALIZA UZUPEŁNIAJACA 80

5.1. Wpływ cech sprężystych elementów na rozkład sił wewnętrznych w płycie 80

5.2. Zbieżność rozwiązania 82

5.3. Współdziałanie płyty w rozdziale obciążenia 85

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI 87

LITERATURA 89

Zestawienie podstawowych oznaczeń

1. Oznaczenia ogólne

XYZ - baza ogólna układu
xyz - baza lokalna elementu
w - rozwiązanie ogólne równania różniczkowego płyty
$w_{,xy}$ - pochodne funkcji $w(x,y)$
F - rozwiązanie ogólne równania różniczkowego tarczy
$F_{,xy}$ - pochodne funkcji $F(x,y)$

2. Wielkości geometryczne

l, b, t - wymiary elementu
$l, b, t, b_1, t_1, h, t_z, B, b_p, t_p, b_{ps}, t_{ps}$ - wymiary konstrukcji
$a_m = m\pi/l$ $a_b = a_m \cdot b$
$a_x = a_m \cdot x$ $a_y = a_m \cdot y$

3. Przemieszczenia

$w, \theta_x, \theta_y, v, \theta_{xy}, u$ - przemieszczenia w elemencie
θ_i, w_i, v_i, u_i - przemieszczenia brzegowe elementu
$\tilde{\theta}_i, \tilde{w}_i, \tilde{v}_i, \tilde{u}_i$ - przemieszczenia linii węzłowej

4. Siły

P, g, S_v, S_u - obciążenie zewnętrzne
$\left.\begin{array}{l} a_u = a_m \cdot u_p \\ a_v = a_m \cdot v_p \end{array}\right\}$ rozkład obciążenia w kierunku podłużnym i poprzecznym
$m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y$ - siły wewnętrzne płytowe w elemencie
n_x, n_y, n_{xy} - siły wewnętrzne tarczowe w elemencie
$z_\theta^i,\ z_w^i,\ z_v^i,\ z_u^i$ - siły brzegowe elementu od obciążenia zewnętrznego
$\tilde{p}_\theta^i,\ \tilde{p}_w^i,\ \tilde{p}_v^i,\ \tilde{p}_u^i$ - siły węzłowe układu od obciążenia zewnętrznego
$M_x,\ N_x,\ M_y,\ T_y,\ M_z,\ T_z$ - siły wewnętrzne w poprzecznicy przęsłowej
$M_y(o),\ M_y(l)$ - momenty skręcające w poprzecznicy skrajnej
$T_{xo},\ M_{xo},\ T_{yo},\ M_{yo},\ N_{zo},\ M_{zo}$ - siły wewnętrzne podpory pośredniej

5. Współczynniki sprężystości płytowej elementu

$D_x,\ D_y,\ D$ - klasyczne sztywności płytowe
$\nu_x,\ \nu_y$ - płytowe stałe Poissona

$$D = D_x \cdot \nu_y = D_y \cdot \nu_x$$

$$\alpha = \frac{2D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} + \sqrt{\nu_x \nu_y}$$

$$f_a = \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\,\alpha - \nu_x$$

$$f_{c,s} = \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\,(1 \pm \alpha)$$

$$f_{u,w} = \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \pm \nu_x$$

$$f_o = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \qquad f_e = \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$$

$f_1 \div f_8$ - objaśnione w tekście

f_i - tabela 2.1

$$b_m = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}\,\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\,a_m = k_m = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}\,\sqrt{\frac{\alpha+1}{2}}\,a_m$$

$$\bar{b}_m = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}\,\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\,a_m \qquad \bar{k}_m = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}\,\sqrt{\frac{\alpha-1}{2}}\,a_m$$

$$b_y = b_m . y \qquad \bar{b}_y = \bar{b}_m . y$$

$$b_b = b_m . b \qquad \bar{b}_b = \bar{b}_m . b$$

$r_1 \div r_9$ - wyrazy macierzy sztywności elementu (2.30), (2.39)

6. Współczynniki sprężystości tarczowej elementu

E_x, E_y, G_{xy} - moduły Younga i Kirchhoffa

$\nu_x^{\bullet}$, $\nu_y^{\bullet}$ - tarczowe stałe Poissona

$$E_x \cdot \nu_y^{\bullet} = E_y \cdot \nu_x^{\bullet}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{E_x . E_y}}{2.G_{xy}} - \sqrt{\nu_x^{\bullet} . \nu_y^{\bullet}}$$

$$h_a = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \cdot \beta + \nu_x^{\bullet}$$

$$h_{c,s} = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\,(1 \pm \beta)$$

$$h_{u,w} = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \pm \nu_x^{\bullet}$$

$$h_o = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad h_e = \sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}$$

$h_1 \div h_5$ - objaśnione w tekście

h_i - tabela 2.1

$$d_m = \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y}}\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\,a_m \qquad = \qquad l_m = \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y}}\sqrt{\frac{\beta+1}{2}}\,a_m$$

$$\bar{d}_m = \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y}}\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}\,a_m \qquad \bar{l}_m = \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y}}\sqrt{\frac{\beta-1}{2}}\,a_m$$

$$d_y = d_m \cdot y \qquad \bar{d}_y = \bar{d}_m \cdot y$$

$$d_b = d_m \cdot b \qquad \bar{d}_b = \bar{d}_m \cdot b$$

$r_{10} \div r_{19}$ - wyrazy macierzy sztywności elementu (2.32), (2.42)

7. Sztywności prętowe

EJ_x, EJ_y, EJ_z - sztywność na zginanie
GJ_s - sztywność na skręcanie
EA - sztywność osiowa

8. Macierze i wektory

$\mathbf{K}$ - macierz sztywności układu
$\mathbf{k}^e$, $\mathbf{k}^e$ - macierz sztywności elementu w bazie lokalnej i ogólnej
$\mathbf{s}$ - wektor przemieszczeń układu
$\mathbf{s}^e$, $\mathbf{s}^e$ - wektor przemieszczeń elementu w bazie lokalnej i ogólnej
$\mathbf{p}$ - wektor obciążenia układu
$\mathbf{p}^e$, $\mathbf{p}^e$ - wektor obciążenia elementu w bazie lokalnej i ogólnej
$\mathbf{n}^e$ - wektor sił brzegowych elementu
$\mathbf{A}$ - macierz sił wewnętrznych elementów
$\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ - macierz stałych płytowych lub tarczowych
$\mathbf{L}$ - macierz wpływu sił lub przemieszczeń
$\mathbf{x}$ - wektor sił nadliczbowych
$\mathbf{F}$ - macierz podatności
$\mathbf{B}$ - macierz transformacji ortogonalnych
$\mathbf{G}$ - macierz transformacji prętowych
$\mathbf{\emptyset}$ - macierz zerowa
$\mathbf{e}$ - wektor jednostkowy /wersor/
$\mathbf{K}^{-1}$ - macierz odwrotna do $\mathbf{K}$
$\mathbf{B}^T$ - macierz transponowana
$\mathbf{D} * \mathbf{b}$ - operacja prostego mnożenia macierzy
$\mathbf{D} \circ \mathbf{b}$ - operacja poszerzania macierzy
$\{d_{ij}\}_{ns}$ - elementy macierzy $\mathbf{D}$ o rozmiarze n x s

9. Stałe

A_m, B_m, C_m, D_m - stałe płytowe
E_m, F_m, G_m, H_m - stałe tarczowe

1. WPROWADZENIE

1.1. Wstęp

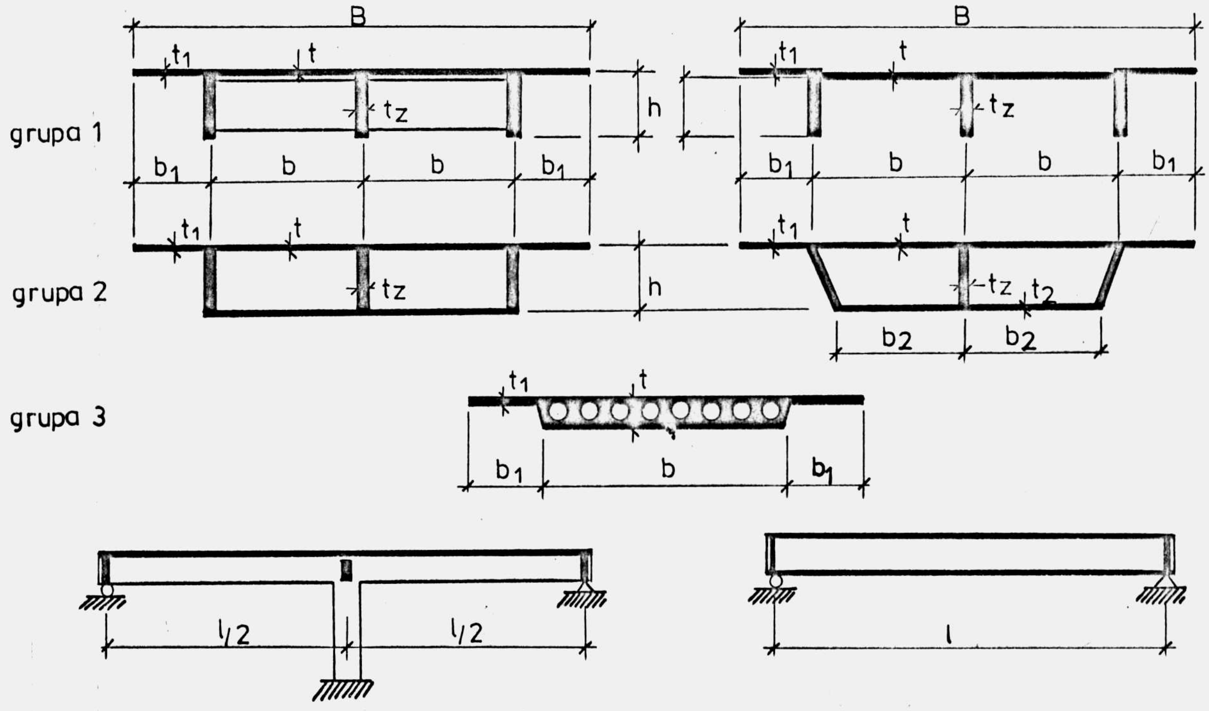
Statyka płyt użebrowanych traktowanych jako konstrukcje przestrzenne jest jedną z intensywniej rozwijających się gałęzi mechaniki budowli. W ostatnich latach powstały sposoby rozwiązań obiektów o złożonej geometrii konstrukcji i cechach wytrzymałościowych jej elementów, dążące do bezpiecznego i jednocześnie optymalnego projektowania, co stało się możliwe dzięki zastosowaniu elektronicznej techniki obliczeniowej. Mimo wielu osiągnięć w omawianej dziedzinie wiedzy nadal poszukuje się metod obliczeniowych prowadzących bądź do bardziej ogólnych algorytmów, ujmujących szereg obiektów o różnorodnych cechach fizycznych czy geometrycznych, bądź dokładniej opisujących wytężenie poszczególnych jej elementów w złożonym stanie obciążenia.

Specyficznym przykładem takiej konstrukcji - płyty użebrowanej jest przęsło mostowe, ze względu na jego ukształtowanie oraz szczególne rodzaje obciążenia. Ten typ konstrukcji będzie omawiany w pracy szczegółowo mimo, że przeprowadzane rozważania dotyczą wszelkich tego rodzaju obiektów.

We współczesnych konstrukcjach mostowych, można zauważyć tendencję stosowania przęseł bezpoprzecznicowych wynikającą ze znacznych uproszczeń technologicznych. Płyta pomostowa w takim przęśle jest głównym elementem zapewniającym współdziałanie nieobciążonych bezpośrednio żeber podłużnych. Naturalne dążenie do ograniczenia jej ciężaru /30 ÷ 40 % ciężaru całej konstrukcji dla małych rozpiętości [60] / jest uwarunkowane odpowiednią jej grubością [25] . Wymaga to wnikliwej analizy wytężenia płyty przy różnych układach obciążeń zewnętrznych, zmiennych cechach geometrycznych i sprężystych całej konstrukcji w złożonym stanie sił wewnętrznych. Z powyższych względów podjęty w pracy temat ma duże znaczenie praktyczne,co uwydatniono w szerokiej analizie numerycznej.

Przedstawiony w pracy algorytm obejmuje mosty drogowe czy też kolejowe, w rzucie prostokątne, swobodnie podparte na dwóch przeciwległych końcach /z podporami pośrednimi/. Przekrój poprzeczny /rys. 1.1/ może być zróżnicowany począwszy od przekrojów otwartych do skrzynkowych czy gęstożebrowych.

W rozwiązaniu przyjmuje się dowolność obciążenia zewnętrznego /skupione, rozłożone, grupowe/ o dowolnym położeniu na obiekcie, co pozwala na odzwierciedlenie stosowanych obciążeń mostów.



Rys. 1.1

Założenie dowolności cech sprężystych materiału /płytowych: D_x, D_y, D_{xy}, ϑ_x, ϑ_y dowolnych i niezależnych od tarczowych : E_x, E_y, G_{xy}, $\dot{\vartheta}_x$, $\dot{\vartheta}_y$/ pozwala na odwzorowanie modeli elementów z betonu jak również pewnych typów stalowych pomostów ortotropowych [47].

Rozwiązanie ogólne uzyskano przy zastosowaniu metody przemieszczeń /mieszanej dla układów z podporami pośrednimi/, a wykorzystanie notacji macierzowej [18], [19] pozwoliło na znaczne uproszczenie zapisu rozwiązania. Niniejsza praca ma zarówno charakter poznawczy jak i praktyczny, a program numeryczny na EMC, mimo głównego nacisku na analizę sił wewnętrznych w płycie, zawiera również wydruki sił wewnętrznych w pozostałych elementach konstrukcji.

1.2. Sposoby rozwiązań płyt użebrowanych.

Bogaty przegląd sposobów analizy statycznej płyt użebrowanych typu mostowego zamieszczono w wielu pracach np: [27, 42, 47, 55, 60] i innych, w których przedstawiono charakterystykę zastosowań oraz sposoby rozwiązania. Ponieważ, w większości, są to sposoby nieprzydatne do badania wytężenia płyt w układach płytowo - żebrowych w dalszej części rozdziału omówiono tylko grupę rozwiązań oznaczonych /* /, które mogłyby temu celowi służyć. Poniżej przedstawione zostały klasyfikacje według trzech autorów:

Mańko Z. [47]

1. Metody oparte na teorii rusztów prętowych
2. Metody oparte na teorii płyt ortotropowych
3. Metoda różnic skończonych
*4. Metoda tarczownic
*5. Metoda elementów skończonych

Grycz J. [27]

1. Metody elementarne
2. Metody prętowe
3. Metody typu [50]
4. Metody typu [63]
5. Metody typu [51]
*6. Metody ścisłe

Semenec L.W. [55]

1. Metody pretowe :
   - sposób dźwigni
   - sposób mimośrodowego ściskania
   - sposób podatnych podpór
   - sposób B.P. Nazarenko
   - sposób H.Homberga
2. Metody płytowe :
   - sposób W.G.Donczenki
   - * sposób W.E.Ulickiego
   - * sposób A.W.Aleksandrowa
   - * sposób L.W.Semenca
3. Metody prętów cienkościennych : W.Z.Własowa i A.A.Umanskiego

, z których można wydzielić sposoby oparte na klasycznej teorii dźwigarów powierzchniowych, oraz drugą grupę sposobów opartych na metodzie elementów skończonych. MES wypiera skutecznie sposoby klasyczne, gdyż jest niejednokrotnie jedynym narzędziem do analizy wytężenia konstrukcji o złożonej geometrii. Wykorzystanie elementów trójwymiarowych, omówionych w [3] i [69] , pozwala na wyznaczanie pełnego tensora naprężeń z drugiej strony prowadzi do zbyt dużych rozmiarów równań równowagi, stąd pewne ograniczenia ich zastosowania. Dla układów o niezmiennych cechach geometrycznych i fizycznych na długości stosuje się powszechnie [3] rozwiązanie oparte na pryzmatycznych elementach skończonych [3] [69], co wydatnie redukuje układ równań.

Dla płaskich elementów konstrukcyjnych, w których dwa wymiary dominują nad trzecim przyjęcie elementów dwuwymiarowych, omówionych w [47] , [69], umożliwia rozwiązywanie większych zadań. Do typów konstrukcji rozpatrywanych w pracy stosuje się powszechnie w MES jeden z jej rodzajów "pasma skończone" [9] [10] [11] , który ma wiele cech wspólnych ze sposobem prezentowanym w rozdziale 2.

Poniżej omówione zostaną rozwiązania klasyczne związane ściślej z tematyką poruszoną w pracy /oraz pasma skończone/, które będą omówione w trzech grupach.

W grupie pierwszej rozwiązanie uzyskuje się przez zastosowanie metody przemieszczeń przy wykorzystaniu płyskich elementów powierzchniowych /płyty i tarcze/ [1], [6], [10] .
W pracach typu [1] przyjęte rozwiązania elementów powierzchniowych w postaci funkcji hiperbolicznych i trygonometrycznych zapewniają dobry opis rozkładu sił i przemieszczeń niezależnie od szerokości elementu. Natomiast przy podejściu jak w [10] przyjęte rozwiązanie w postaci szeregów potęgowych upraszcza znacznie operacje różniczkowania i całkowania, wymaga jednak stosowania stosunkowo wąskich elementów. Przy szerszych pasmach lub przy słabej zbieżności mogą się ujawniać pewne niezgodności sił węzłowych. W pracy [6], w odróżnieniu od dwóch pozostałych, rozwiązanie uzyskuje się poprzez równania zgodności, a nie poprzez wyrazy macierzy sztywnosci elementów.

Sposób [1] został rozwinięty w [56] gdzie zastosowano go do analizy pryzmatycznych powłok złożonych i układów płytowo-belkowych. Przedstawiono tutaj wzory transformacyjne metody przemieszczeń dla elementów izotropowych.
Pracę ilustruje szereg przykładów zastosowań sposobu do analizy wytężenia dźwigarów poprzez budowanie powierzchni wpływu uogólnionych sił wewnętrznych przekroju /M_x, T_x, N_x/. Rozpatruje się również żebra podłużne o złożonym przekroju poprzecznym z uwzględnieniem deformacji obrysu. Zasygnalizowano możliwość pewnych zastosowań do układów ciągłych i z poprzecznicami.
Dalszym rozwinięciem tego podejścia jest [12], zamieszczone w [57], gdzie zasygnalizowano możliwość uogólnienia rozwiązania na elementy ortotropowe.

W [61] przedstawiono, niezależnie od [56] , wyrazy macierzy sztywności elementów oraz zastosowania elementów powierzchniowych do wyznaczania rozdziału poprzecznego obciążeń oraz sił wewnętrznych w poprzecznicy. Główny nacisk w rozwiązaniu położono na układy z poprzecznicami w ujęciu [64], wskazano także na możliwość uwzględnienia ortotropii płyty /dla szczególnego przypadku [8] $D_x \neq D_y$ ale $\alpha = 1$/. Równania stanu tworzy się przez rozpatrzenie równowagi sił i momentów w kierunku x i y doprowadzając do układu równań, którego niewiadomymi są ugięcia i kąty obrotu θ_y węzłów . Pracę ilustruje przykład rozwiązania konstrukcji o przekroju skrzynkowym z poprzecznicami.

W [16] przedstawiono wzory transformacyjne metody przemieszczeń dla jednego typu elementów /sztywno-sztywnego/ o izotropowych cechach tworzywa. Wykazuje się, że w przypadku granicznym $b/l \rightarrow 0$. wzory te przechodzą we wzory analogiczne do stosowanych w statyce prętowej. Natomiast w [2] rozwinięto powyższe podejście do badania stateczności płyt użebrowanych jednostronnie.

W pracy [26] , należącej do grupy jak [6] , przedstawiono sposób analizy układów płytowo - belkowych przy sformułowaniu rozwiązania w przemieszczeniach. Elementy płaskie traktowane są jako ortotropowe /$D_x \neq D_y$ ale $\alpha = 1$/przy przemieszczeniach płytowych. W stanie tarczowym zakłada się prostoliniowy rozkład naprężeń σ_x i τ_{xy} oraz odkształceń jednostkowych ε_x. Rozwiązanie w postaci przemieszczeń linii węzłowych w i θ_y / po obu stronach żebra podłużnego, jak na rys. 3.8/ uzyskuje się z różniczkowych warunków równowagi sił i momentów. Algorytm ten stosuje się do szerokiej klasy konstrukcji mostowych. W [23] przedstawiono rozwiązanie dla ukośnych przęseł swobodnie podpartych, natomiast w [26] dla przęseł ciągłych z żebrami podłużnymi o stałym przekroju, a w [25] o zmiennej sztywności /ze skosami/. W [24] zamieszczono rozwiązanie przęseł z podatnymi podporami słupowymi /przegubowymi/ i poprzecznicami przęsłowymi.

Płyty wzmocnione belkami krawędziowymi rozpatrywano w wielu pracach typu [6] , jednak ze względu na małą liczbę żeber wnioski o wytężeniu płyty mają zasięg ograniczony /przęsła kolejowe/.

W pracach grupy drugiej rozwiązanie uzyskuje się przy zastosowaniu metody sił, która w odróżnieniu od poprzedniej pozwala łatwiej uzyskać siły wewnętrzne w pewnych przekrojach /punktach/, stąd jej naturalne zastosowanie do wyznaczania powierzchni wpływu. Grupa ta jest obecnie słabo rozwijana ze względu na następujące wady:

1. Metoda sił zastosowana do konstrukcji omawianych w pracy prowadzi do dwukrotnie /i więcej/ większych rozmiarów układu równań /przy tej samej ogólności i dokładności jak w grupie poprzedniej/.
2. Powierzchnia wpływu wymaga ponownego obliczania sił wewnętrznych dla złożonych obciążeń typu mostowego.

W [22] przedstawiono rozwiązanie ogólne uzyskane poprzez wyrazy macierzy podatności elementu, o izotropowych cechach tworzywa, z pominięciem stałej Poissona. Rozwiązanie prowadzi się w kierunku wyznaczenia powierzchni wpływu sił brzegowych. Pracę ilustruje obszerna analiza momentów brzegowych w zależności od proporcji wymiarów przekroju poprzecznego konstrukcji dwubelkowej. Zasygnalizowano tutaj możliwość rozwiązania pewnego typu przęsła ciągłego o rozciętej na podporach płycie pomostowej.
Powyższe rozwiązanie posłużyło w [39] do analizy statycznej układu poddanego obciążeniom termicznym.

W [59] rozpatrywano analizę statyczną jak również problem stateczności konstrukcji użebrowanej podłużnie przy przyjęciu płyty o cechach ortotropowych.

W [65] przedstawiono różne sposoby rozwiązania przęseł mostowych bezpoprzecznicowych i z poprzecznicami, swobodnie podpartych i ciągłych jak również zakrzywionych i skośnych w planie. Monografię ilustruje szereg analiz i przykładów oraz pewne koncepcje algorytmów numerycznych rozwiązywanych konstrukcji.

Grupa trzecia zawiera sposoby mniej dokładne niż przedstawione powyżej, jednak ze względu na ciekawsze ujęcie rozwiązania **zasługujące** na uwagę.
Sposób oparty na metodzie energetycznej [55] w zastosowaniu do konstrukcji bezpoprzecznicowej prowadzi do prostej funkcji ugięcia, stąd można wyznaczyć pozostałe przemieszczenia i siły wewnętrzne w dźwigarach. Zaniedbuje się jednak przemieszczenia tarczowe.

W [16] do wyznaczania powierzchni wpływu pewnych wielkości w płytach użebrowanych podłużnie wykorzystuje się funkcje wpływu /Kernel function/, natomiast w [31] rozwiązuje się podobnie płyty użebrowane podłużnie i poprzecznie.

Z zaprezentowanych tutaj sposobów do analizy wytężenia płyty najefektywniejsze są płaskie elementy powierzchniowe w ujęciu [1], gdyż są ogólniejsze i dokładniejsze od pozostałych w grupie 1. Dalsze rozwinięcie tego sposobu na elementy ortotropowe, zapoczątkowane w [46], miało na celu uwzględnienie bardziej złożonych cech sprężystych niektórych typów pomostów.
Rozwiązania oparte na metodzie sił [22] /grupa 2/ oraz pasma skończone [48], [49] do analizy problemu przedstawionego w pracy są nieefektywne.

1.3. Cel pracy

Celem rozprawy jest opracowanie dogodnego algorytmu analizy wytężenia płyt użebrowanych typu mostowego przy złożonym stanie obciążeń i uwzględnieniu przestrzennego stanu deformacji konstrukcji. Przez wytężenie rozumie się tutaj funkcję charakteryzowaną składowymi sił n_{ij}, momentów m_{ij} oraz parametrów materiału c_{ij} o postaci

$$W(x,y) = F(n_{ij}, m_{ij}, c_{ij}) \qquad /1.1/$$

Aby cel ten osiągnąć rozwiązuje się cały układ skupiając się szczególnie na wyznaczeniu powierzchni sił wewnętrznych w płycie, a dla ilustracji skuteczności algorytmu przeprowadza się analizę sił w pewnych typach przęseł przy wybranych obciążeniach konstrukcji. Zastosowane do dyskretyzacji płyty płaskie elementy powierzchniowe, o cechach ortotropowych, mają umożliwiać odwzorowanie konstrukcji żelbetowych czy też stalowych płyt pomostowych.

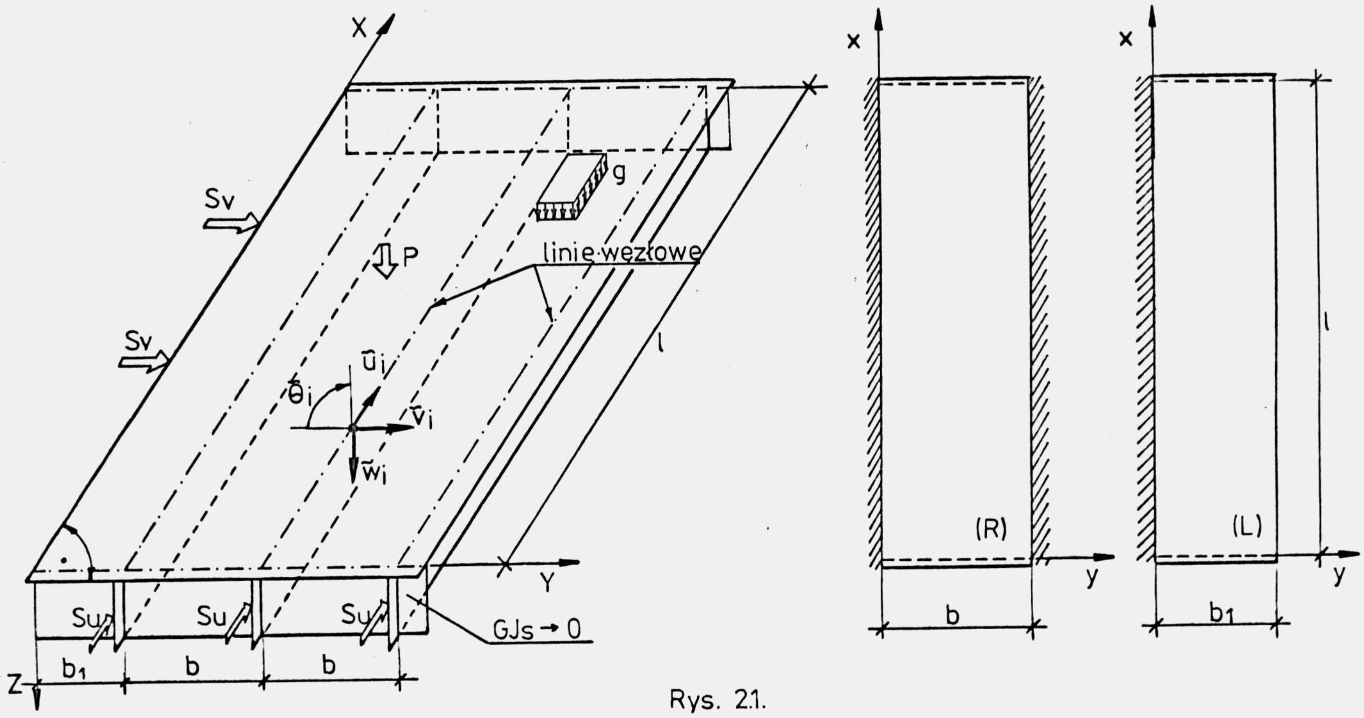
Jako tezę pracy można przedstawić stwierdzenie:
Dotychczas stosowane sposoby obliczeń nie umożliwiają pełnej analizy wytężenia płyt pomostowych przy złożonym stanie obciążeń i dowolnym ukształtowaniu konstrukcji przęsła. Sposób przedstawiony w pracy tę niedogodność usuwa, a w szczególnie trudnych przypadkach znacznie łagodzi.

2. PŁASKIE ELEMENTY POWIERZCHNIOWE

2.1. Model płyty użebrowanej podłużnie

W pracy rozpatruje się konstrukcje, których elementy, o stałych cechach geometrycznych i sprężystych na długości i szerokości, traktuje się jako płaskie dźwigary powierzchniowe podlegające klasycznym założeniom teorii tarcz i płyt cienkich [21] , [44] , [45] , [62] . Dla ogólności rozwiązania traktowane są jako ortotropowe, jednorodne kontinuum materialne podlegające prawu Hooke'a, a przyjęcie ortotropii technicznej może mieć pewne znaczenie praktyczne przy modelowaniu elementów żelbetowych [34] , [58] lub pomostów ze stalową płytą ortotropową [47] .

Żebra podłużne, odbiegające swymi wymiarami od proporcji dźwigarów powierzchniowych oraz żebra poprzeczne podlegają klasycznym założeniom teorii prętów pryzmatycznych [53] , a poprzecznica skrajna, z założenia, ma charakter przepony nieskończenie sztywnej w swej płaszczaźnie oraz małą sztywność na skręcanie /rys. 2.1/.



Rys. 2.1.

W rozwiązaniu ogólnym zakłada się, że linia węzłowa nad podporami skrajnymi / x = 0 i x = l/ nie doznaje przemieszczeń w kierunkach w, θ, v, co jest konsekwencją przyjętego modelu poprzecznicy. Przyjęcie w = 0 /x = 0 i x = l/ jest równoznaczne z zaniedbaniem osiadania podór, zaś v = 0 może być konsekwencją nieskończenie sztywnej przepony lub niewielkich sił n_y w płycie. Powyższe założenia, są w ogólnych przypadkach spełnione w konstrukcjach rzeczywistych, nieco trudniej spełnić warunek $\Theta_y \doteq 0$ /x =0 i x = l/, gdyż wymaga on wyeliminowania obrotów żeber podłużnych na podporze.

Charakter przemieszczeń określony powyżej prowadzi do rozwiązań typu Levy'ego [1] , [10] , [38] , a zastosowanie funkcji ortogonalnych [69] pozwala rozkładać duży układ równań metody przemieszczeń na m oddzielnych

$$\mathbf{K}_n^m \cdot \mathbf{s}_n^m = \mathbf{p}_n^m \qquad /2.1/$$

ponieważ dla m $\neq$ n $\mathbf{K}_n^m = \emptyset$ i $\mathbf{p}_n^m = \mathbf{s}_n^m = \emptyset$ równanie /2.1/ będzie postaci

$$\mathbf{K}^m \cdot \mathbf{s}^m = \mathbf{p}^m \quad . \qquad /2.2/$$

W dalszych rozważaniach pomija się wskaźnik m, traktując go jako ustalony dla danego równania, a pojawi się on dopiero w rozdziale 2.5. Śledzenie poszczególnych części rozdziału 2 ułatwi algorytm numeryczny przedstawiony na rys. 2.16.

Deformację konstrukcji będą określały przemieszczenia linii węzłowych w bazie ogólnej /rys. 2.1/

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_i &= s_\Theta^i \, . \sin a_x \\ \tilde{w}_i &= s_w^i \, . \sin a_x \\ \tilde{v}_i &= s_v^i \, . \sin a_x \\ \tilde{u}_i &= s_u^i \, . \cos a_x \end{aligned} \qquad , \qquad /2.3/$$

gdzie $s^i(y)$ jest amplitudą przemieszczenia i-tej linii węzłowej. W ogólniejszym przypadku konstrukcji niż przedstawionej na rys. 2.1, dla innych schematów statycznych podparć /x = 0 i x = l/, funkcja przemieszczeń może być postaci [10]

$$f(_x) = E_m^1 \, . \sin a_x + E_m^2 \, . \cos a_x + E_m^3 . \mathrm{sh}\, a_x + E_m^4 . \mathrm{ch}\, a_x \qquad /2.4/$$

pozwalająca spełnić ogólniejsze warunki brzegowe [47] .
Dla jaśniejszego sformułowania algorytmu zajmiemy się dalej przypadkiem szczególnym jak na rys. 2.1.

Przemieszczenia podstawowe elementu /rys. 2.3a/, opisane w bazie lokalnej, przedstawiają równania

$$\begin{aligned} \Theta_y(x,y) &= e_\Theta \, . \sin a_x \\ w\,(x,y) &= e_w \, . \sin a_x \\ v\,(x,y) &= e_v \, . \sin a_x \\ u\,(x,y) &= e_u \, . \cos a_x \end{aligned} \qquad , \qquad /2.5/$$

a gdy układ lokalny elementu będzie zgodny z układem ogólnym konstrukcji przemieszczenia brzegowe elementu /2.5/ będą równocześnie przemieszczeniami linii węzłowej /2.3/.

Ugięcie elementu opisuje równanie różniczkowe płyt ortotropowych Hubera [32]

$$D_x \cdot w_{,xxxx} + 2\left(2 D_{xy} + D\right) w_{,xxyy} + D_y . w_{,yyyy} = 0 \qquad /2.6/$$

, którego rozwiązanie czyniące zadość warunkom brzegowym /x = 0, x = l/ przyjmie postać

- dla $\alpha \leqslant 1$

$$w = \left(A_m . \mathrm{ch}\; by . \cos \bar{b}y + B_m . f_o . \mathrm{ch}\; b_y . \sin \bar{b}_y + C_m . \mathrm{sh}\; b_y . \cos \bar{b}_y + D_m . f_o . \mathrm{sh}\; b_y . \sin \bar{b}_y\right) \sin a_x \qquad /2.7/$$

- dla $\alpha = 1$ $/D_x = D_y/$

$$w = \left(A_m . \mathrm{ch}\; a_y + B_m . a_y . \mathrm{ch}\; a_y + C_m . \mathrm{sh}\; a_y + D_m . a_y . \mathrm{sh}\; a_y\right) \sin a_x \qquad /2.8/$$

- dla $\alpha \geqslant 1$

$$w = \left(A_m . \mathrm{ch}\; k_y . \mathrm{c\bar{h}}\; k_y + B_m . f_e . \mathrm{ch}\; k_y . \mathrm{s\bar{h}}\; k_y + C_m . \mathrm{sh}\; k_y . \mathrm{ch}\; \bar{k}_y + D_m . f_e . \mathrm{sh}\; k_y . \mathrm{sh}\; \bar{k}_y\right) \sin a_x \;. \qquad /2.9/$$

Siły wewnętrzne i przemieszczenia w płaszczyźnie elementu /tarczowe/ opisuje równanie /4.22 [45] /

$$\frac{1}{E_y} . F_{,xxxx} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\,\nu_x^{\bullet}}{E_x}\right) F_{,xxyy} + \frac{1}{E_x} \cdot F_{,yyyy} = 0 \qquad /2.10/$$

, którego rozwiązanie czyniące zadość warunkom brzegowym /x =0,x=l/ będzie postaci

- dla $\beta \leqslant 1$

$$F = \left(E_m . \mathrm{ch}\; d_y . \cos \bar{d}_y + F_m . h_o . \mathrm{ch}\; d_y . \sin \bar{d}_y + G_m . \mathrm{sh}\; d_y . \cos \bar{d}_y + H_m . h_o . \mathrm{sh}\; d_y . \sin \bar{d}_y\right) \sin a_x \qquad /2.11/$$

- dla $\beta = 1$ $/E_x = E_y/$

$$F = \left(E_m . \mathrm{ch}\; a_y + F_m . a_y . \mathrm{ch}\; a_y + G_m . \mathrm{sh}\; a_y + H_m . a_y . \mathrm{ch}\; a_y\right) \sin a_x \qquad /2.12/$$

- dla $\beta \geqslant 1$

$$F = \left(E_m . \mathrm{ch}\; l_y . \mathrm{ch}\; \bar{l}_y + F_m . h_e . \mathrm{ch}\; l_y . \mathrm{sh}\; \bar{l}_y + G_m . \mathrm{sh}\; l_y . \mathrm{ch}\; \bar{l}_y + H_m . h_e . \mathrm{sh}\; l_y . \mathrm{sh}\; \bar{l}_y\right) \sin a_x \;, \qquad /2.13/$$

gdzie F(x,y) jest funkcją naprężeń Airy'ego .

Zestawione w tabeli 2.1 typy rozwiązań(W_y^i, F_y^i) będą służyły w rozdziale 2.2 do wyznaczania ogólnych (α, β) równań sił i przemieszczeń w elemencie.

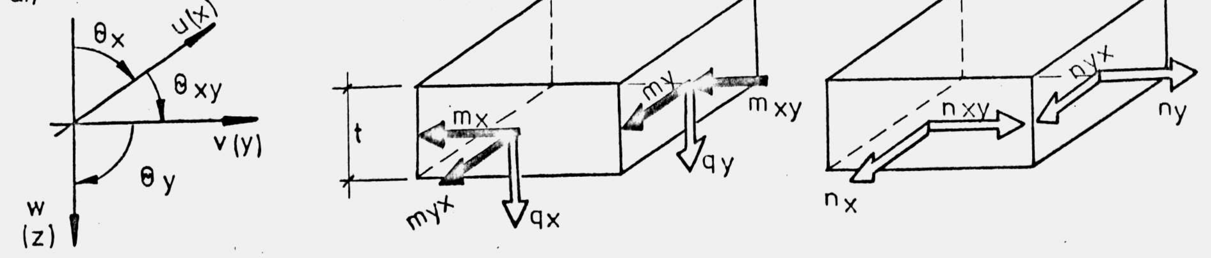
Tabela 2.1

Typ równ.	α / β	W_y^1 / F_y^1	W_y^2 / F_y^2	W_y^3 / F_y^3	W_y^4 / F_y^4	f_i / h_i
1	$\alpha<1$	$ch b_y . cos \bar{b}_y$	$f_o . ch b_y . sin \bar{b}_y$	$sh b_y . cos \bar{b}_y$	$f_o . sh b_y . sin \bar{b}_y$	$1/f_o^2$
	$\beta<1$	$ch d_y . cos \bar{d}_y$	$h_o . ch d_y . sin \bar{d}_y$	$sh d_y . cos \bar{d}_y$	$h_o . sh d_y . sin \bar{d}_y$	$1/h_o^2$
2	$\alpha=\beta=1$	$ch\ a_y$	$a_y . ch\ a_y$	$sh\ a_y$	$a_y . sh\ a_y$	0
3	$\alpha>1$	$ch k_y . ch \bar{k}_y$	$f_e . ch k_y . sh \bar{k}_y$	$sh k_y . ch \bar{k}_y$	$f_e . sh k_y . sh \bar{k}_y$	$-1/f_e^2$
	$\beta>1$	$ch l_y . ch \bar{l}_y$	$h_e . ch l_y . sh \bar{l}_y$	$sh l_y . ch \bar{l}_y$	$h_e . sh l_y . sh \bar{l}_y$	$-1/h_e^2$

Można łatwo wykazać, że równania /2.7/ i /2.9/ przechodzą w /2.8/, jak również /2.11/ i /2.13/ w /2.12/. Natomiast z głębszej analizy wynika, że funkcje typu 1 mogą reprezentować całą grupę rozwiązań, a proste przejście do pozostałych zawiera tabela 2.1. Spostrzeżenie to zostało wykorzystane przy formułowaniu zależności fizycznych rozdziału 2. Wobec czego uważa się, że równania tam zamieszczone obejmują całą klasę ($\alpha, \beta \gtrless 1$) rozwiązań.

2.2. Równania sił i przemieszczeń w elemencie

Przy określaniu kierunków sił uogólnionych i przemieszczeń przyjęto tradycyjne oznaczenia [21, 22, 37, 50, 55, 56, 57, 60, 62] jak na rys. 2.2.



Rys.2.2

Przemieszczenia płytowe, przedstawione na rys. 2.2a, zostaną wyznaczone poprzez odpowiednie pochodne funkcji ugięcia w (x,y)

$$\begin{bmatrix} w \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ w,_x \\ w,_y \end{bmatrix} = \mathbf{C}_p^s \cdot \mathbf{w} * \begin{bmatrix} \sin a_x \\ a_m \cdot \cos a_x \\ b_m \cdot \sin a_x \end{bmatrix} \qquad /2.14/$$

gdzie

$$\mathbf{C}_p^s = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_m & B_m & C_m & D_m \\ A_m & B_m & C_m & D_m \\ C_m + D_m & D_m - f_i\ C_m & A_m + B_m & B_m - f_i\ Am \end{array}\right], \qquad /2.15/$$

a siły wewnętrzne, jak na rys. 2.26, będą postaci

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x \cdot w,_{xx} + D \cdot w,_{yy} \\ D_y \cdot w,_{yy} + D \cdot w,_{xx} \\ 2D_{xy} \cdot w,_{xy} \\ D_x \cdot w,_{xxx} + (4D_{xy} + D) \cdot w,_{yyx} \\ D_y \cdot w,_{yyy} + (4D_{xy} + D) \cdot w,_{xxy} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_p^n \cdot \mathbf{w} * \begin{bmatrix} D_x \cdot a_m^2 \cdot \sin a_x \\ -D_y \cdot a_m^2 \cdot \sin a_x \\ 2D_{xy} \cdot a_m \cdot b_m \cdot \cos a_x \\ D_x \cdot a^3{}_m \cdot \cos a_x \\ D_y \cdot a_m^2 \cdot b_m \cdot \sin a_x \end{bmatrix}, \qquad /2.16/$$

gdzie

$$\mathbf{C}_p^n = \left[\begin{array}{c|c|c|c} f_1 A_m - f_2 B_m & f_1 D_m + f_3 C_m & f_1 C_m - f_2 D_m & f_1 B_m + f_3 A_m \\ f_a A_m + f_c B_m & f_a D_m - f_s C_m & f_a C_m + f_c D_m & f_a B_m - f_s A_m \\ C_m + D_m & B_m - f_i A_m & A_m + B_m & D_m - f_i C_m \\ f_4 A_m - f_6 B_m & f_5 C_m + f_4 D_m & f_4 C_m - f_6 D_m & f_5 A_m + f_4 B_m \\ f_w C_m - f_u D_m & f_i f_u A_m - f_w B_m & f_w A_m + f_u B_m & f_i f_u C_m + f_w D_m \end{array}\right], \qquad /2.17/$$

natomiast

$$f_1 = 1 - \sqrt{\vartheta_x \cdot \vartheta_y}\,\alpha \ , \qquad f_{4,5} = 1 - \alpha\left(2\alpha \pm \sqrt{\vartheta_x \vartheta_y}\right) ,$$

$$f_{2,3} = \sqrt{\vartheta_x \vartheta_y}\,(1 \pm \alpha) \ , \qquad f_6 = (1+\alpha)\left(2\alpha - \sqrt{\vartheta_x \vartheta_y}\right) .$$

Wektor $\mathbf{w}$ w zależności od α /tabela 2.1/ przedstawia równanie

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} W_y^1 & W_y^2 & W_y^3 & W_y^3 \end{bmatrix}^T , \qquad /2.18/$$

natomiast / * / w /2.14/ i /2.16/ oznacza proste mnożenie macierzy [40] o postaci ogólnej

$$\mathbf{D} * \mathbf{b} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ d_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}\cdot b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n}\cdot b_1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ d_{r1}\cdot b_r & \cdot & \cdot & \cdot & d_{rn}\cdot b_r \end{bmatrix} \quad /2.19/$$

Przemieszczenia w płaszczyźnie elementu /tarczowe/ wyznaczone zostaną z odkształceń jednostkowych ε_x i ε_y

$$u = \int \varepsilon_x . dx + C_1(y) = \int\left(\frac{1}{E_x} . F_{,yy} - \frac{\nu^{\bullet}_y}{E_y} . F_{,xx}\right) dx + C_1(y)$$

$$v = \int \varepsilon_y . dy + C_2(x) = \int\left(\frac{1}{E_y} . F_{,xx} - \frac{\nu^{\bullet}_x}{E_x} . F_{,yy}\right) dy + C_2(x) \quad /2.20/$$

na podstawie funkcji naprężeń Airy'ego F(x,y). Po przekształceniach i wyeliminowaniu stałych C przemieszczenia tarczowe będą postaci

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta_{xy} \end{bmatrix} = \frac{-1}{E_x} \begin{bmatrix} F_{,yyx}/a_m^2 + \nu^{\bullet}_x . F_{,x} \\ (2h_a - \nu^{\bullet}_x)\, F_{,y} - a_m^2 . F_{,yyy} \\ (2h_a - \nu^{\bullet}_x)\, F_{,yx} - a_m^2 . F_{,yyyx} \end{bmatrix} = \frac{-1}{E_x} . \mathbf{C}_t^s \cdot \mathbf{f} * \begin{bmatrix} a_m . \cos a_x \\ d_m . \sin a_x \\ a_m . d_m . \cos a_x \end{bmatrix} \quad /2.21/,$$

gdzie

$$\mathbf{C}_t^s = \left[\begin{array}{c|c|c|c} h_a E_m + h_c F_m & h_a H_m - h_s G_m & h_a G_m + h_c H_m & h_a F_m - h_s E_m \\ h_u G_m - h_w H_m & h_i h_w E_m + h_u F_m & h_u E_m - h_w F_m & h_i h_w G_m + h_u H_m \\ h_u G_m - h_w H_m & h_i h_w E_m + h_u F_m & h_u E_m - h_w F_m & h_i h_w G_m + h_u H_m \end{array}\right] \quad /2.22/.$$

Siły wewnętrzne jak na rys. 2.2c będą postaci

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} F_{,yy} \\ F_{,xx} \\ -F_{,xy} \end{bmatrix} = t . \mathbf{C}_t^n \cdot \mathbf{f} * \begin{vmatrix} a_m^2 . \sin a_x \\ -a_m^2 . \sin a_x \\ -a_m . d_m . \cos a_x \end{vmatrix} \quad /2.23/,$$

gdzie

$$\mathbf{C}_t^n = \left[\begin{array}{c|c|c|c} h_1 E_m + h_2 F_m & h_1 H_m - h_3 G_m & h_1 G_m + h_2 H_m & h_1 F_m - h_3 E_m \\ E_m & F_m & G_m & H_m \\ G_m + H_m & F_m - h_i E_m & E_m + F_m & H_m - h_i G_m \end{array}\right] \quad /2.24/,$$

natomiast

$$h_1 = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\,\beta \qquad\qquad h_{2,3} = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\,(1 \pm \beta)$$

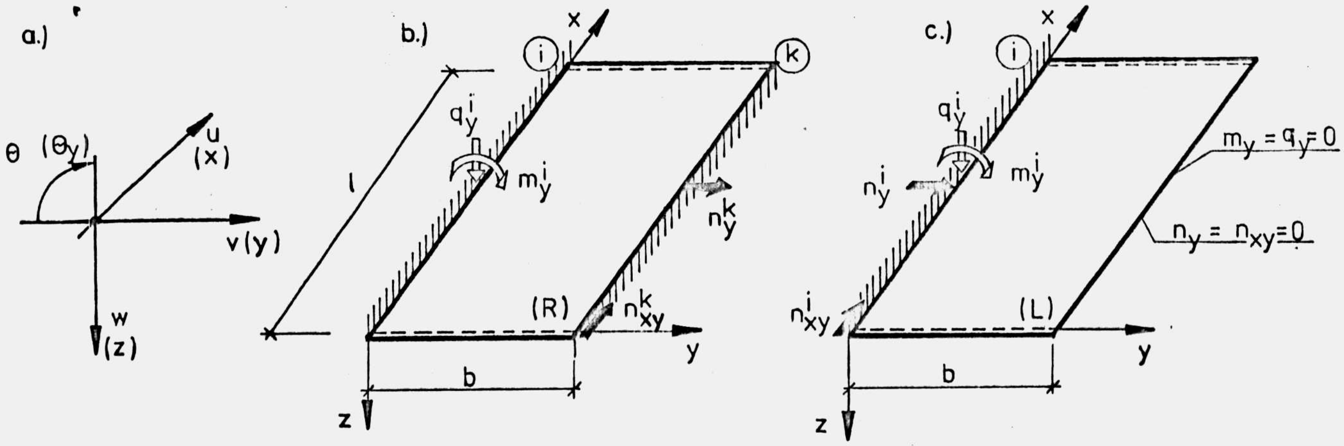
Wektor $\mathbf{f}$ w zależności od β /tabela 2.1/ przedstawia równanie

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_y^1 & F_y^2 & F_y^3 & F_y^4 \end{bmatrix}^T \quad . \qquad /2.25/$$

W dalszych częściach rozdziału 2 przedstawione będą równania tylko dla $\alpha<1$ i $\beta<1$ /tabela 2.1/, co pozwoliło na bardziej zwięzłe i czytelne zestawienie wzorów, nie zawężając jednak powyższych zależności.

2.3. Macierz sztywności elementu

W modelu płyty użebrowanej przedstawionym na rys. 2.1 występują dwa rodzaje elementów swobodnie podpartych na krawędziach x = 0 i x = l; elementy /R/ o dwóch przeciwległych brzegach utwierdzonych i elementy /L/ o jednym brzegu utwierdzonym i drugim swobodnym .



Rys. 2.3

Dla elementu /R/ /rys.2.3b/ wektor przemieszczeń brzegowych /rys. 2.3a/

$$\mathbf{s}_R^e = \begin{bmatrix} \theta_i & w_i & v_i & u_i & \vdots & \theta_k & w_k & v_k & u_k \end{bmatrix}^T \qquad /2.26/$$

oraz wektor sił brzegowych

$$\mathbf{n}_R^e = \begin{bmatrix} m_y^i & q_y^i & n_y^i & n_{xy}^i & \vdots & m_y^k & q_y^k, & n_y^k & n_{xy}^k \end{bmatrix}^T \qquad /2.27/$$

powiązane są znanym związkiem fizycznym metody przemieszczeń

$$\mathbf{n}_R^e = \mathbf{k}_R^e \cdot \mathbf{s}_R^e \quad . \qquad /2.28/$$

$\mathbf{k}_R^e$ jest macierzą sztywności elementu w bazie lokalnej

$$
\mathbf{k}_R^e = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
r^{ii}_{\theta\theta} & r^{ii}_{\theta w} & 0 & 0 & r^{ik}_{\theta\theta} & -r^{ik}_{\theta w} & 0 & 0 \\
 & r^{ii}_{ww} & 0 & 0 & r^{ik}_{w\theta} & -r^{ik}_{ww} & 0 & 0 \\
 & & r^{ii}_{vv} & -r^{ii}_{vu} & 0 & 0 & -r^{ik}_{vv} & r^{ik}_{vu} \\
 & & & r^{ii}_{uu} & 0 & 0 & -r^{ik}_{uv} & -r^{ik}_{uu} \\
\hline
 & & & & r^{kk}_{\theta\theta} & -r^{kk}_{\theta w} & 0 & 0 \\
 & \text{Sym.} & & & & r^{kk}_{ww} & 0 & 0 \\
 & & & & & & r^{kk}_{vv} & r^{kk}_{vu} \\
 & & & & & & & r^{kk}_{uu}
\end{array}\right] \qquad /2.29/
$$

, której wyrazy spełniające równania sił /2.16/ i /2.23/ oraz przemieszczeń /2.14/ i /2.21/ przedstawiają następujące wzory ($\alpha < 1$, $\beta < 1$)

$$
\begin{aligned}
r_1 &= r^{ii}_{\theta\theta} = r^{kk}_{\theta\theta} = \frac{D_y}{b}\, 2b_b\left(shb_b \cdot chb_b - f_o \cdot \sin \bar{b}_b \cdot \cos \bar{b}_b\right) / M_1 \\
r_2 &= r^{ik}_{\theta\theta} = \frac{D_y}{b}\, 2b_b \left(f_o \cdot chb_b \cdot \sin\bar{b}_b - shb_b \cdot \cos \bar{b}_b\right) / M_1 \\
r_3 &= r^{ii}_{\theta w} = r^{kk}_{w\theta} = \frac{D_y}{b^2}\, a_b^2 \left(f_u \cdot sh^2 b_b + f_w \cdot f_o^2 \cdot \sin^2 \bar{b}_b\right) / M_1 \qquad /2.30/ \\
r_4 &= r^{ik}_{\theta w} = \frac{D_y}{b^2}\, 2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\, a_b^2 \cdot f_o \cdot shb_b \cdot \sin \bar{b}_b / M_1 \\
r_5 &= r^{ii}_{ww} = r^{kk}_{ww} = \frac{D_y}{b^3}\, 2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\, a_b^2 \cdot b_b \left(shb_b \cdot chb_b + f_o \cdot \cos \bar{b}_b \cdot \sin \bar{b}_b\right) / M_1 \\
r_6 &= r^{ik}_{ww} = \frac{D_y}{b^3}\, 2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\, a_b^2 \cdot b_b \left(shb_b \cdot \cos \bar{b}_b + f_o \cdot chb_b \cdot \sin \bar{b}_b\right) / M_1 ,
\end{aligned}
$$

gdzie M_1 jest wyrażone przez

$$
M_1 = sh^2\, b_b - f_o^2 \cdot \sin^2 \bar{b}_b , \qquad /2.31/
$$

natomiast

$$
r_{11} = r^{ii}_{vv} = r^{kk}_{vv} = \frac{E_x \cdot t}{b}\, 2d_b\left(h_5 \cdot h_o \cdot \sin \bar{d}_b \cdot \cos \bar{d}_b + h_4 \cdot shd_b \cdot chd_b\right) / M_2
$$

$$
r_{12} = r^{ik}_{vv} = \frac{E_x \cdot t}{b}\, 2d_b\left(h_4 \cdot shd_b \cdot \cos \bar{d}_b + h_5 h_o \cdot chd_b \cdot \sin \bar{d}_b\right) / M_2
$$

$$r_{13}=r^{ii}_{vu}=r^{kk}_{vu}=\frac{E_x\cdot t}{b}\,a_b\left(h_w\cdot h_4\cdot sh^2 d_b-h_u\cdot h_5\cdot h_o^2\cdot \sin^2\bar{d}_b\right)/M_2$$

$$r_{14}=r^{ik}_{vu}=r^{ik}_{uv}=\frac{E_x\cdot t}{b}\,a_b\cdot h_6\cdot h_o\cdot shd_b\cdot \sin\bar{d}_b\;/M_2 \qquad /2.32/$$

$$r_{15}=r^{ik}_{uu}=\frac{E_x\cdot t}{b}d_b\left(h_u+h_w\right)\left(h_4\cdot shd_b\cdot chd_b-h_5\cdot h_o\cdot \sin\bar{d}_b\cdot \cos\bar{d}_b\right)/M_2$$

$$r_{16}=r^{ii}_{uu}=r^{kk}_{uu}=\frac{E_x\cdot t}{b}d_b\left(h_u+h_w\right)\left(h_4\cdot shd_b\cdot \cos\bar{d}_b-h_5\cdot h_o\cdot chd_b\cdot \sin\bar{d}_b\right)/M_2\;,$$

gdzie M_2 przedstawia równanie

$$M_2 = h_4^2\cdot sh^2 d_b - h_5^2\cdot h_o^2\cdot \sin^2\bar{d}_b\;. \qquad /2.33/$$

Współczynniki sztywności h wyrażone są przez

$$h_4 = h_c\cdot h_u + h_a\cdot h_w$$

$$h_5 = h_a\cdot h_u - h_s\cdot h_w \qquad /2.34/$$

$$h_6 = h_a\cdot h_a + h_s\cdot h_c\;.$$

Dla elementu /L/ przedstawionego na rys. 2.3c wektor przemieszczeń brzegowych

$$\mathbf{s}_L^e = \left[\theta_i \quad w_i \quad v_i \quad u_i\right]^T \qquad /2.35/$$

oraz wektor sił brzegowych

$$\mathbf{n}_L^e = \left[m_y^i \quad q_y^i \quad n_y^i \quad n_{xy}^i\right]^T \qquad /2.36/$$

tworzą związek analogiczny do /2.28/

$$\mathbf{n}_L^e = \mathbf{k}_L^e\cdot \mathbf{s}_L^e\;, \qquad /2.37/$$

a $\mathbf{k}_L^e$ jest macierzą sztywności elementu /L/ o postaci

$$\mathbf{k}_L^e = \begin{bmatrix} r^{ii}_{\theta\theta} & r^{ii}_{\theta w} & 0 & 0 \\ & r^{ii}_{ww} & 0 & 0 \\ & & r^{ii}_{vv} & -r^{ii}_{vu} \\ & \text{Sym.} & & r^{ii}_{uu} \end{bmatrix}. \qquad /2.38/$$

Wyrazy macierzy $\mathbf{k}_L^e$ /2.38/ przedstawiają równania /2.39/

$$r_7 = r^{ii}_{\theta\theta} = \frac{D_y}{b}\, 2b_b \left(f_8 . f_o . \sin \bar{b}_b \,.\, \cos \bar{b}_b + f_7 . \mathrm{sh} b_b . \mathrm{ch} b_b \right) / M_3$$

$$r_8 = r^{ii}_{\theta w} = \frac{D_y}{b^2}\, a^2_b \left(f_7 . f_u . \mathrm{sh}^2 b_b - f_8 . f_w . f^2_o \,.\, \sin^2 \bar{b}_b \right) / M_3 \qquad /2.39/$$

$$r_9 = r^{ii}_{ww} = \frac{D_y}{b^3}\, 2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\, a^2_b . b_b \left(f_8 . f_o . \sin \bar{b}_b . \cos \bar{b}_b - f_7 . \mathrm{sh} b_b . \mathrm{ch} b_b \right) / M_3 \quad ,$$

gdzie

$$M_3 = f_7 \,.\, \mathrm{ch}^2\, b_b + f_8 \,.\, f^2_o \,.\, \sin^2 \bar{b}_b + f_u \left(f_u + f_w \right) \quad , \qquad /2.40/$$

natomiast

$$f_7 = f_c \,.\, f_w + f_a \,.\, f_u$$

$$f_8 = f_a \,.\, f_w - f_s \,.\, f_u \qquad /2.41/$$

oraz /2.42/

$$r_{17} = r^{ii}_{vv} = \frac{E_x . t}{b}\, 2d_b \left(\mathrm{sh} d_b . \mathrm{ch} d_b - h_o . \sin \bar{d}_b . \cos \bar{d}_b \right) / M_4$$

$$r_{18} = r^{ii}_{uv} = \frac{E_x . t}{b}\, a_b \left(h_w . \mathrm{sh}^2 d_b + h_u . h^2_o . \sin^2 \bar{d}_b \right) / M_4 \qquad /2.42/$$

$$r_{19} = r^{ii}_{uu} = \frac{E_x . t}{b}\, d_b \left(h_u + h_w \right) \left(\mathrm{sh} d_b . \mathrm{ch} d_b + h_o . \sin \bar{d}_b . \cos \bar{d}_b \right) / M_4 \quad ,$$

gdzie

$$M_4 = h_5 \,.\, h^2_o \,.\, \sin^2 \bar{d}_b + h_4 \,.\, \mathrm{ch}^2 d_b + h^2_w \quad , \qquad /2.43/$$

a h_4 i h_5 jak w /2.34/ .

Wyrazy macierzy sztywności $\mathbf{k}^e_L$ /2.38/ można również wyznaczyć ze znanej macierzy $\mathbf{k}^e_R$ /2.29/ rozkładając przemieszczenia elementu /R/ /2.26/ na

$$\mathbf{s}^e_R = \left| \mathbf{s}_i \quad \mathbf{s}_k \right|^T \quad , \qquad /2.44/$$

a siły brzegowe /2.27/ na

$$\mathbf{n}^e_R = \left| \mathbf{n}^i \quad \mathbf{n}^k \right|^T \quad . \qquad /2.45/$$

Z warunku brzegowego /rys. 2.3c/ mamy $\mathbf{n}^k = \emptyset$, wobec czego układ równań /2.28/ będzie postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}^{ii} & \mathbf{k}^{ik} \\ \mathbf{k}^{ki} & \mathbf{k}^{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^i \\ \emptyset \end{bmatrix} \qquad /2.46/$$

, a po rozwiązaniu /rozdział 2.6/

$$\left(\mathbf{k}^{ii} \cdot \mathbf{k}^{kk} - \mathbf{k}^{ki} \cdot \mathbf{k}^{ik}\right) \mathbf{s}_i = \mathbf{k}^{kk} \cdot \mathbf{n}^i \qquad /2.47/$$

otrzymano

$$\left(\mathbf{k}^{ki} \cdot \left(\mathbf{k}^{kk}\right)^{-1} \cdot \mathbf{k}^{ik}\right) \mathbf{s}_i = \mathbf{n}^i \ , \qquad /2.48/$$

gdzie

$$\mathbf{k}^{ki} \cdot \left(\mathbf{k}^{kk}\right)^{-1} \cdot \mathbf{k}^{ik} = \mathbf{k}_L^e \ . \qquad /2.49/$$

Wyrazy macierzy $\mathbf{k}_L^e$ /2.49/ łatwo jest wyznaczyć gdyż $\left(\mathbf{k}^{kk}\right)^{-1}$ przyjmuje prostą formę /wystarczy $\mathbf{k}^{kk}$ rozłożyć na bloki tarczowe i płytowe/.

Powyższy sposób może być również przydatny przy elementach o sprężyście utwierdzonym brzegu /k/ /w rozwiązaniach ze złączami podłużnymi - na przykład przęsła typu "Płońsk"/. Wówczas mamy dodtkowy warunek /2.46/

$$\mathbf{n}^k = \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{s}_k \ , \qquad /2.50/$$

gdzie $\mathbf{R}_s$ jest macierzą /niekoniecznie diagonalną/ sprężystości brzegu /złącza/. Prowadzi to do układu równań

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}^{ii} & \mathbf{k}^{ik} \\ \mathbf{k}^{ki} & \mathbf{k}^{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}^i \\ \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{s}_k \end{bmatrix} \qquad /2.51/$$

stąd po wyeliminowaniu $\mathbf{s}_k$ otrzymano zależność

$$\hat{\mathbf{k}}_L^e \cdot \mathbf{s}_i = \mathbf{n}^i \ , \qquad /2.52/$$

gdzie $\hat{\mathbf{k}}_L^e$ jest macierzą sztywności elementu o sprężyście utwierdzonym brzegu /k/.

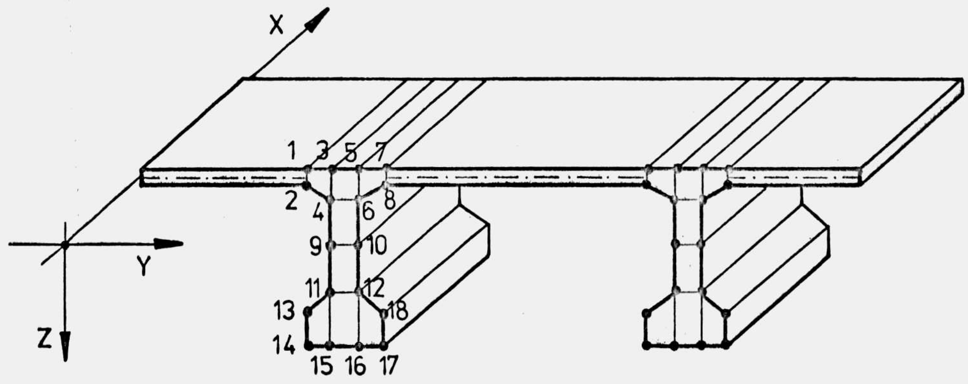
W przypadku gdy element /L/ nie spełnia warunków geometrycznych dźwigara powierzchniowego /np: żebro podłużne konstrukcji mostowej/ wyrazy $\mathbf{k}_L^e$ /2.38/ wyznaczone zostaną jak dla pręta [22], [23], [35], [56], [64]

$$\begin{aligned} r_7 &= r_{\Theta\Theta}^{ii} = a_m^2 \cdot GJ_s \\ r_8 &= r_{\Theta w}^{ii} = e_o \cdot a_m^4 \cdot EJ_z \\ r_9 &= r_{ww}^{ii} = a_m^4 \cdot EJ_z \end{aligned} \qquad /2.53/$$

oraz

$$\begin{aligned} r_{17} &= r_{vv}^{ii} = a_m^4 \cdot EJ_x \\ r_{18} &= r_{uv}^{ii} = a_m^3 \cdot ES_x \\ r_{19} &= r_{uu}^{ii} = a_m \cdot EA \end{aligned} \qquad /2.54/$$

Dla przekrojów o złożonej geometrii /rys. 2.4/ oraz przy analizie



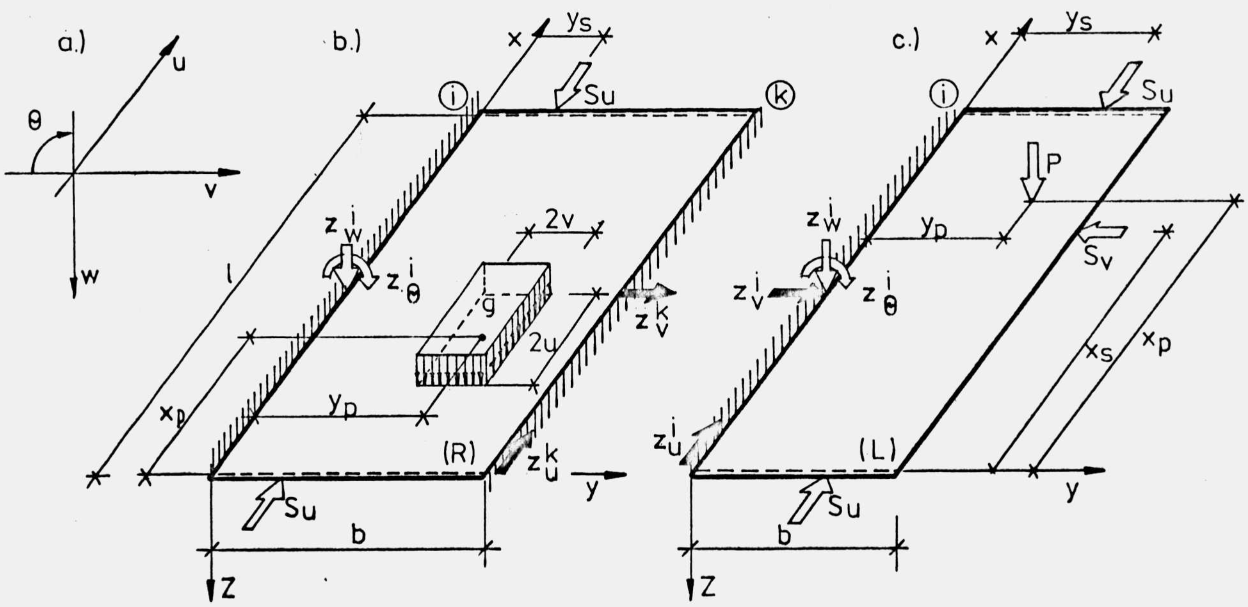
Rys. 2.4

wytężenia całej konstrukcji dogodne jest wykorzystanie sposobu [4] , gdzie żebro dyskretyzowane jest elementami pryzmatycznymi [3] .

2.4. Wektor obciążenia elementu

2.4.1. Uwagi ogólne

Na rys. 2.1 przedstawiono rozpatrywane rodzaje obciążeń konstrukcji, w których można wyróżnić siły działające w kierunku Z nazwane dalej obciążeniem ruchomym /P, g/, oraz siły działające w kierunkach Y i X nazywane dalej sprężeniem poprzecznym /S_v/ i podłużnym /S_u/. Ze względu na odmienny charakter oddziaływania na poszczególne elementy zostaną one rozpatrzone oddzielnie. Na rys.2.5 przedstawione są obciążone elementy oraz reakcje brzegowe jakie one wywołują przy założeniu $\mathbf{s}^e = \emptyset$. Wektor obciążenia elementu /R/ można przedstawić jako



Rys.2.5

$$\mathbf{p}_R^e = \left[z_\Theta^i \quad z_w^i \quad z_v^i \quad z_u^i \;\vdots\; z_\Theta^k \quad z_w^k \quad z_v^k \quad z_u^k \right]^T , \qquad /2.55/$$

a elementu /L/

$$\mathbf{p}_L^e = \left[z_\Theta^i \quad z_w^i \quad z_v^i \quad z_u^i \right]^T . \qquad /2.56/$$

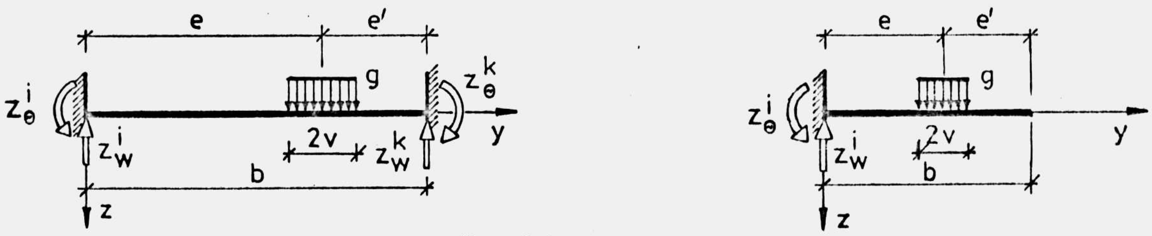
Siły brzegowe z (x,y) rozłożone są na długości elementu analogicznie jak przemieszczenia /2.5/ według następujących funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} z_\Theta^i &= p_\Theta \cdot \sin a_x \\ z_w^i &= p_w \cdot \sin a_x \\ z_v^i &= p_v \cdot \sin a_x \\ z_u^i &= p_u \cdot \cos a_x . \end{aligned} \qquad /2.57/$$

Sposób wyznaczania wielkości amplitudowych p (y) dla poszczególnych obciążeń zostanie przedstawiony w następnych częściach rozdziału.

2.4.2. Obciążenie ruchome

Obciążenie ruchome, z założenia prostopadłe do płaszczyzny środkowej elementu, może znajdować się w dowolnym położeniu w postaci siły dowolnie rozłożonej lub skupionej [68] . Poniżej zostaną przedstawione rozważania dla obciążenia skupionego /P/ lub rozłożonego równomiernie /rys. 2.5/ w taki sposób, że P=g.2u.2v /rys. 2.6/ .



Rys. 2.6

Rozwiązanie szczególne równania /2.6/ dla $\alpha < 1$ będzie postaci jak w /2.7/

$$w = \big(A_m \cdot \mathrm{ch} b_y \cdot \cos \bar{b}_y + B_m \cdot f_o \cdot \mathrm{ch} b_y \cdot \sin \bar{b}_y + C_m \cdot \mathrm{sh} b_y \cdot \cos \bar{b}_y +$$
$$D_m \cdot f_o \cdot \mathrm{sh} b_y \cdot \sin \bar{b}_y + w^*\big) \sin a_x \quad , \qquad /2.58/$$

gdzie w^* jest całką szczególną /2.6/

W przypadku obciążenia skupionego /rys. 2.5c/ w^* wyrażone będzie przez

$$w^* = h^e \frac{p_{ms}}{2a_m^2 \, b_m \sqrt{D_x \, D_y}} \left(f_o \, chb_y^* . \sin \bar{b}_y^* - shb_y^* \, . \, \cos \bar{b}_y^* \right) \quad , \qquad /2.59/$$

gdzie

h^e jest operatorem przesunięcia, $e \geqslant 0$

$p_{ms} = 2P/l \; . \; \sin a_{xp}$

natomiast $b_y^* = b_m (y-e) \quad , \quad \bar{b}_y^* = \bar{b}_m (y-e) \quad .$

Dla obciążenia rozłożonego /rys. 2.5b/ w^* będzie postaci

$$w^* = \frac{p_{mr}}{2a_m^3 \, . \, D_x} \left(h^{e-v_p} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} f_o \, shb_y^{\wedge} \, \sin \bar{b}_y^{\wedge} - chb_y^{\wedge} \cos \bar{b}_y^{\wedge} + 1 \right) \right. \qquad /2.60/$$

$$\left. - h^{e+v_p} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} f_o \, shb_y^{\vee} \, \sin \bar{b}_y^{\vee} - chb_y^{\vee} \cos \bar{b}_y^{\vee} + 1 \right) \right) \quad ,$$

gdzie

$p_{mr} = 2P/l \; . \; \sin a_u / (a_u a_v) . \; \sin a_{xp}$

$b_y^{\wedge} = b_m (y-e-v_p) \quad , \quad \bar{b}_y^{\wedge} = \bar{b}_m (y-e-v_p) \quad ,$

$b_y^{\vee} = b_m (y-e+v_p) \quad , \quad \bar{b}_y^{\vee} = \bar{b}_m (y-e+v_p) \quad .$

Do wyznaczenia w^* wykorzystano sposób przedstawiony w [37] dla płyt o skończonych wymiarach, nieco odmienne rezultaty uzyskano w [50] i [54] dla pasma.

Wykorzystując warunki brzegowe $\mathbf{s}^e = \emptyset$ /2.26/ lub /2.35/ wyznaczone zostaną z /2.16/ siły brzegowe od obciążenia zewnętrznego. Dla elementu /R/ siły te wyrażone są przez

$$z_\theta^i = \frac{p_m}{a_m} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \left(\frac{2}{1+\alpha} \, . \, \bar{r}_4 \, . \, c_1^i - \bar{r}_2 \, . \, c_2^i \right)$$

$$z_w^i = \frac{p_m}{b_b} \left(\bar{r}_4 \, . \, c_2^i - \bar{r}_6 \, . \, c_1^i \right)$$

$$z_\theta^k = \frac{p_m}{a_m} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \left(\frac{2}{1+\alpha} \, . \, \bar{r}_4 \, . \, c_1^k - \bar{r}_2 \, . \, c_2^k \right) \qquad /2.61/$$

$$z_w^k = \frac{p_m}{b_b} \left(\bar{r}_4 \, . \, c_2^k - \bar{r}_6 \, . \, c_1^k \right) \quad ,$$

gdzie p_m jest funkcją obciążenia

$$p_m = \frac{2P}{l} \cdot \frac{\sin a_u}{a_u} \cdot \frac{shb_v . \cos \bar{b}_v}{a_v} \cdot \sin a_{xp} \cdot \sin a_x \quad . \qquad /2.62/$$

Wielkości $\bar{r}$ mają charakter współczynników sztywności elementu /R/ /2.30/

$$\bar{r}_2 = \left(f_o \cdot chb_b \cdot \sin \bar{b}_b - shb_b \cdot \cos \bar{b}_b\right) / M_1$$

$$\bar{r}_4 = f_o \cdot shb_b \cdot \sin \bar{b}_b \;/ M_1 \qquad /2.63/$$

$$\bar{r}_6 = \left(shb_b \cdot \cos \bar{b}_b + f_o \cdot chb_b \cdot \sin \bar{b}_b\right) / M_1 \quad ,$$

natomiast M_1 jak w /2.31/. Funkcje miejsca i rozłożenia obciążenia C_1 i C_2 są postaci /2.64a/ dla brzegu /i/

$$C_1^i = \left(\alpha(1-c_v) + c_v\right) f_o . chb_{\hat{e}} . \sin \bar{b}_{\hat{e}} - \left(\alpha(1-c_v) + 1\right) shb_{\hat{e}} . \cos \bar{b}_{\hat{e}}$$

$$C_2^i = \left(f_o + c_v\right) shb_{\hat{e}} . \sin \bar{b}_{\hat{e}} + \left(c_v - 1\right) chb_{\hat{e}} . \cos \bar{b}_{\hat{e}} \qquad /2.64a/$$

oraz /2.64b/ dla brzegu /k/

$$C_1^k = \left(\alpha(1-c_v) + c_v\right) f_o . chb_{\check{e}} . \sin \bar{b}_{\check{e}} - \left(\alpha(1-c_v) + 1\right) shb_{\check{e}} . \cos \bar{b}_{\check{e}}$$

$$C_2^k = \left(f_o + c_v\right) shb_{\check{e}} . \sin \bar{b}_{\check{e}} + \left(c_v - 1\right) chb_{\check{e}} . \cos \bar{b}_{\check{e}} \quad , \qquad /2.64b/$$

gdzie

$$c_v = f_o \frac{chb_v . \sin \bar{b}_v}{shb_v . \cos \bar{b}_v} \qquad /2.65/$$

oraz $b_v = b_m . v_p$, $\bar{b}_v = \bar{b}_m . v_p$, natomiast $b_{\hat{e}} = b_m . e'$, $\bar{b}_{\hat{e}} = \bar{b}_m . e'$, $b_{\check{e}} = b_m . e$, $\bar{b}_{\check{e}} = \bar{b}_m . e$.

W przypadku gdy obciążenie jest skupione wzory powyższe ulegną uproszczeniu. Równanie /2.62/ będzie postaci

$$p_m = 2P/l \cdot \sin a_{xp} \cdot \sin a_x \quad , \qquad /2,66/$$

a $c_v = 1$ /2.65/ wobec czego /2.64b/ wyrażone będzie przez

$$C_1^k = f_o \cdot chb_{\check{e}} \cdot \sin \bar{b}_{\check{e}} - shb_{\check{e}} \cdot \cos \bar{b}_{\check{e}}$$

$$C_2^k = \left(1 + f_o\right) shb_{\check{e}} \cdot \sin \bar{b}_{\check{e}} \quad . \qquad /2.67/$$

Dla elementu /L/ siły brzegowe od obciążenia zewnętrznego przedstawiają równania

$$z_\theta^i = \frac{p_m}{a_m}\ 2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\left(r_d \cdot C_3 - r_b \cdot C_4\right)$$

$$z_w^i = \frac{p_m}{b_b}\ 4\left(r_a \cdot C_4 - r_c \cdot C_3\right) \qquad /2.68/$$

a wielkości r są funkcjami stałymi dla elementu

$$r_{a,c} = \left(f_u . chb_b . \cos\bar{b}_b \pm f_a . f_o . shb_b . \sin\bar{b}_b\right)/M_3$$

$$r_{b,d} = \left(f_w . f_o . chb_b . \sin\bar{b}_b \pm f_u . shb_b . \cos\bar{b}_b\right)/M_3 \qquad /2.69/$$

gdzie M_3 jak w /2.40/ .

Funkcje uwzględniające położenie i charakter obciążenia przedstawiają równania

$$C_3 = shb_{\hat{e}} . \cos\bar{b}_{\hat{e}}\left(\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\left(f_a+f_w\right)c_v+\vartheta_x\right) + f_o . chb_{\hat{e}} . \sin\bar{b}_{\hat{e}} . \left(\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\left(f_a+f_w\right) - \vartheta_x . c_v/f_o^2\right)$$

$$C_4 = chb_{\hat{e}} . \cos\bar{b}_{\hat{e}}\left(\left(1-c_v\right)\left(f_a+f_w\right)+f_u\right) - f_o . shb_{\hat{e}} . \sin\bar{b}_{\hat{e}} . \left(\left(f_c+f_w\right)c_v/f_o^2 - \left(f_o+f_w\right)\right) \qquad /2.70/$$

Gdy obciążenie jest rozłożone na całej szerokości elementu /L/ wówczas /2.70/ upraszcza się do postaci

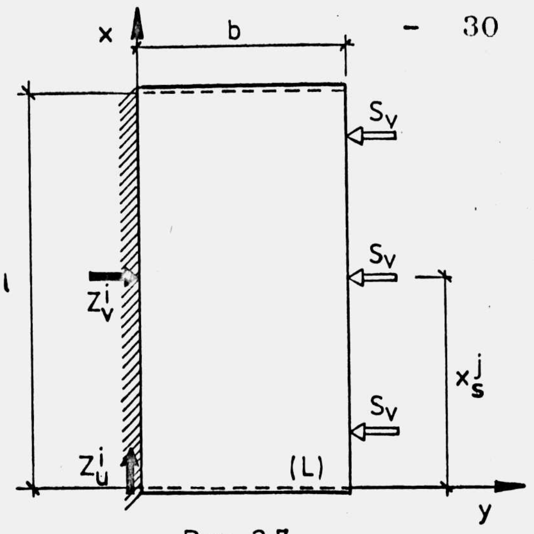
$$2C_3 = \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\left(f_a+f_w\right) f_o . shb_b . \sin\bar{b}_b + \vartheta_x . chb_b . \cos\bar{b}_b$$

$$2C_4 = \left(f_c+f_w\right) shb_b . \cos\bar{b}_b - \left(f_a+f_w\right) f_o . chb_b . \sin\bar{b}_b \qquad /2.71/$$

W równaniach powyższych uwzględnione zostały aspekty numeryczne polegające na tym, że wyrażenia wraz ze zmianą harmonicznej m zmieniają się w zakresie stosunkowo niewielkim. Pozwala to ominąć pewne osobliwości rozwiązań metody M. Levy'ego zaobserwowane w [67] .

2.4.3. Sprężenie poprzeczne

Zakładając, że sprężenie jest realizowane poprzez swobodną krawędź elementu /L/, a siła S_v jest przyłożona w płaszczyźnie środkowej, siły brzegowe z_u^i i z_v^i przedstawione na rys. 2.7 można wyznaczyć wykorzystując równanie /2.21/ dla brzegu /i/ oraz /2.23/ dla krawędzi "swobodnej" lub prościej z zasady prac przygotowanych [17] .



Rys. 2.7

Rozpatrując stany jednostkowych przemieszczeń brzegu /i/

$$s_L^e = e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underset{v_i}{1} & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \sin a_x \longrightarrow v_s^j(v_i), \quad v_s^j(u_i) = 0 \qquad /2.72/$$

$$s_L^e = e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \underset{u_i}{1} \end{bmatrix}^T \cdot \cos a_x \longrightarrow v_s^j(v_i) = 0, \quad v_s^j(u_i)$$

można wyznaczyć przemieszczenie krawędzi "swobodnej" w kierunku S_v /$v_s^j(v_i)$ oraz $v_s^j(u_i)$/ dla $x = x_s^j$. Z równania prac przygotowanych

$$L = \int_0^l z_u^i \cdot u_i \cdot dx + \int_0^l z_v^i \cdot v_i \cdot dx + S_v \cdot \sum_{j=1}^{ł} v_s^j(u_i) + S_v \cdot \sum_{j=1}^{ł} v_s^j(v_i) = 0 \qquad /2.73/$$

otrzymać można układ równań

$$\begin{cases} 0 + z_v^i \cdot l/2 + 0 + S_v \sum_{j=1}^{ł} v_s^j(v_i) = 0 \\ z_u^i \cdot l/2 + 0 + S_v \sum_{j=1}^{ł} v_s^j(u_i) + 0 = 0 \end{cases} \qquad /2.74/$$

z którego uzyskano bezpośrednio

$$z_v^i = \frac{s_m \cdot h_c}{M_4} \left(h_c \cdot chd_b \cdot \cos \bar{d}_b + h_u \cdot h_o \cdot shd_b \cdot \sin \bar{d}_b \right) \sin a_x$$

$$z_u^i = \frac{2 s_m}{M_4} \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \left(h_s \cdot h_o \cdot chd_b \cdot \sin \bar{d}_b - h_w \cdot shd_b \cdot \cos \bar{d}_b \right) \cos a_x \quad . \qquad /2.75/$$

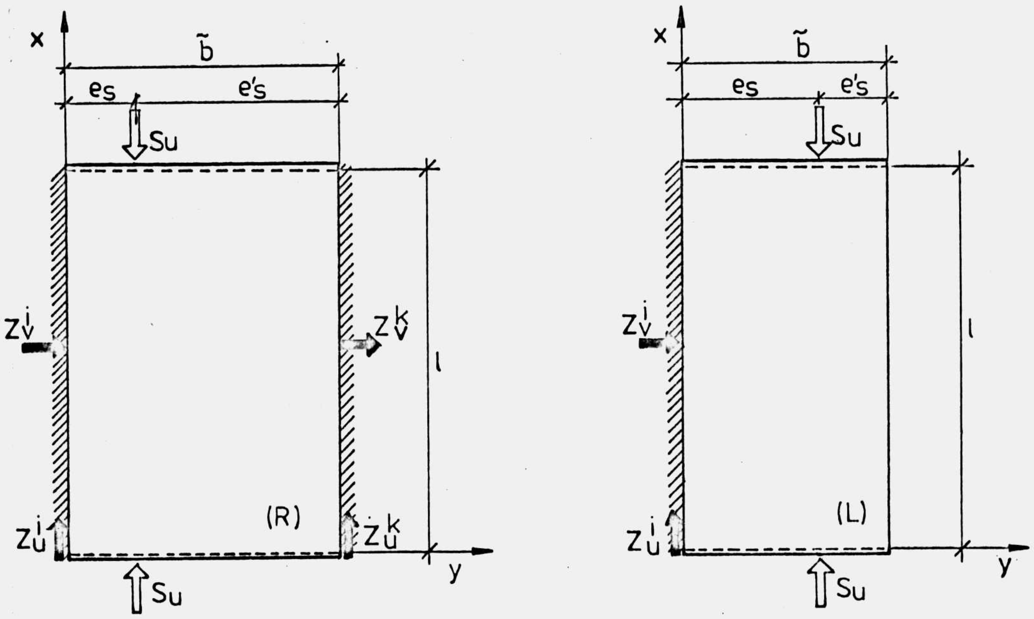
M_4 w równaniach /2.75/ wyznaczone jest w /2.43/, natomiast

$$s_m = 2S_v/l \cdot \sum_{j=1}^{n_g} \sin\left(a_m \cdot x_s^j\right) \qquad /2.76/$$

jest rozwinięciem n_g sił w szereg Fouriera.

2.4.4. Sprężenie podłużne

Zakładając, że sprężenie jest realizowane poprzez cięgna proste, równoległe do osi x, rozpatrzone zostaną poniżej dwa przypadki obciążeń elementów jak na rys. 2.8.



Rys. 2.8

Siły brzegowe od obciążenia zewnętrznego S_u można wyznaczyć w sposób analogiczny jak w rozdziale 2.4.3.
Dla elementu /L/ siły te przyjmą postać

$$z_v^i = p_u \frac{r_{14}^*(r_{11}^* + r_{17}^o) + r_{12}^*(r_{13}^* - r_{18}^o)}{(r_{11}^*+r_{17}^o)(r_{15}^*+r_{19}^o) - (r_{13}^*-r_{18}^o)^2} \cdot \sin a_x$$

$$z_u^i = p_u \frac{r_{14}^*(r_{13}^* - r_{18}^o) - r_{16}^*(r_{11}^*+r_{17}^o)}{(r_{11}^*+r_{17}^o)(r_{15}^*+r_{19}^o) - (r_{13}^*-r_{18}^o)^2} \cdot \cos a_x \quad , \qquad /2.77/$$

natomiast dla elementu /R/ będą wyrażone przez

$$z_v^i = -p_u/M_5 \left(r_{14}^*(r_{11}^*+r_{11}^o) + r_{12}^*(r_{13}^*-r_{13}^o)\right) \cdot \sin a_x$$

$$z_u^i = p_u/M_5 \left(r_{14}^*(r_{13}^*-r_{13}^o) - r_{16}^*(r_{11}^*+r_{11}^o)\right) \cdot \cos a_x \qquad /2.78/$$

dla brzegu /i/ oraz przez

$$z_v^k = p_u/M_5 \left(r_{12}^*(r_{13}^*-r_{13}^o) - r_{14}^*(r_{11}^*+r_{11}^o)\right) \cdot \sin a_x$$

$$z_u^k = p_u/M_5 \left(r_{16}^*(r_{11}^*+r_{11}^o) + r_{14}^*(r_{13}^*-r_{13}^o)\right) \cdot \cos a_x \qquad /2.79/$$

dla brzegu /k/, natomiast M_5 jest postaci

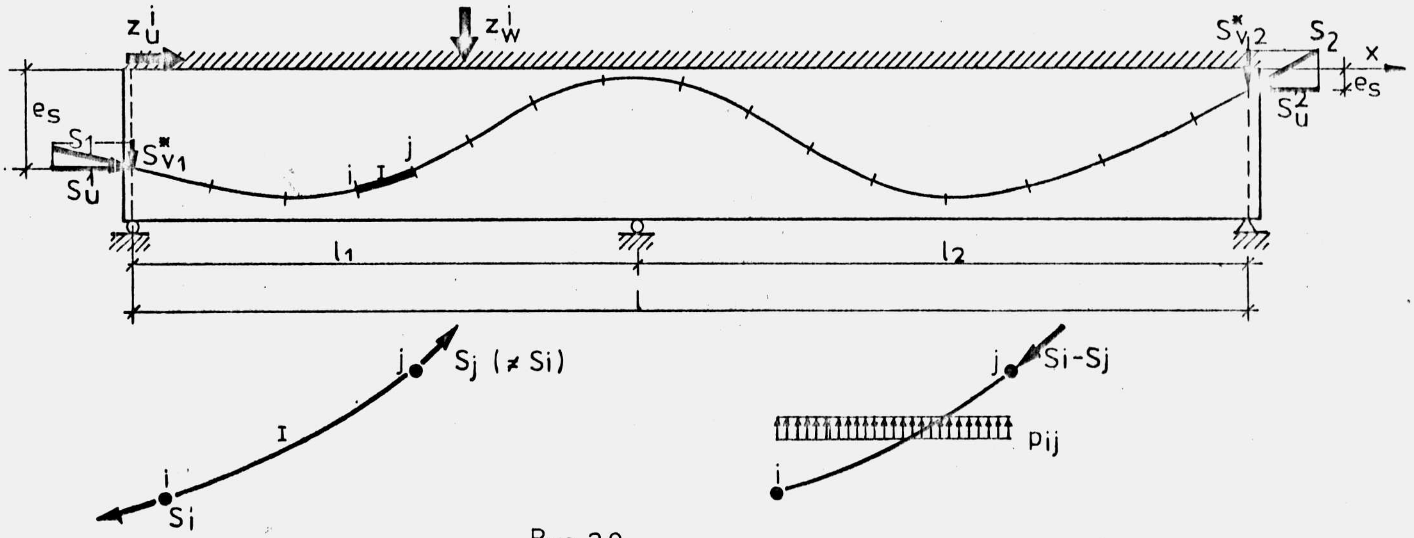
$$M_5 = (r^*_{11}+r^o_{11})(r^*_{15}+r^o_{15}) - (r^*_{13}-r^o_{13})^2 \quad . \qquad /2.80/$$

W równaniach /2.77/ ÷ /2.80/ wielkości r^*_{ij} oraz r^o_{ij} są wyrazami $\mathbf{k}^e_R$ /2.32/ lub $\mathbf{k}^e_L$ /2.42/ obliczonymi jako $r^*_{ij} = r_{ij}$ $(b=e_s)$ oraz $r^o_{ij} = r_{ij}$ $(b = e'_s)$, zaś

$$p_u = 2S_u(1-\cos m\pi)/l = 4S_u/l \quad m=1,3,5... \qquad /2.81/$$

jest rozwinięciem siły sprężenia w szereg cosinusowy.
W rozpatrywanym przypadku możliwe jest również uwzględnienie wpływu tarcia na długości cięgna $S_u(x)$, wówczas ulega odpowiedniej modyfikacji p_u /2.81/ w zależności od funkcji rozkładu siły sprężającej.

Ważnym w praktyce inżynierskiej przypadkiem jest sprężenie konstrukcji poprzez żebro za pomocą cięgna krzywoliniowego jak na rys. 2.9.



Rys. 2.9

Do uwzględnienia tego przypadku dogodne jest przyjęcie technicznego ujęcia [13] zagadnienia ze względu na fakt, że analizuje się siły wewnętrzne w płycie, a nie element bezpośrednio obciążony /żebro/. Siłę brzegową z^i_w /rys.2.9/ można wyznaczyć z równania

$$z^i_w = z^i_w(u) + z^i_w(w) \quad , \qquad /2.82/$$

gdzie $z^i_w(u) = z^i_v$ /2.77/
Składowa $z^i_w(w)$ określona będzie z sił wyporu cięgna sprężającego p_{ij} [13] /stałego na odcinku ij/, natomiast z^i_u /rys.2.9/ wyznaczona została w /2.77/.

2.5. Siły wewnętrzne i przemieszczenia w elementach układu.

Dzięki wykorzystaniu ortogonalności macierzy sztywności [69] można analizować oddzielnie udział w rozwiązaniu /2.1/, /2.2/ każdej harmonicznej m. Wynik końcowy będzie algebraiczną sumą rezultatów dla poszczególnych rozwiązań cząstkowych $m = 1,2 \ldots m_k$.

Deformację konstrukcji przedstawionej na rys. 2.1 będzie opisywał wektor przemieszczeń układu

$$\mathbf{S}^m = \left[\mathbf{S}_1^m \ \ldots \ \mathbf{S}_j^m \ldots \ \mathbf{S}_r^m\right]^T , \qquad /2.83/$$

gdzie $\mathbf{S}_j^m$ jest wektorem przemieszczeń j-tej linii węzłowej /2.3/

$$\mathbf{S}_j^m = \left[\tilde{\theta}_j^m \quad \tilde{w}_j^m \quad \tilde{v}_j^m \quad \tilde{u}_j^m\right]^T , \qquad /2.84/$$

a r jest liczbą linii węzłowych .

Macierz sztywności konstrukcji $\mathbf{K}^m = \left\{k_{zs}^m\right\}_{4r\times 4r}$, w układzie ogólnym, wyrażona będzie przez

$$k_{zs}^m = \sum_{k=1}^{r} \tilde{r}_m^{ik} , \qquad /2.85/$$

a $\tilde{r}_m^{ik}$ należy przyjmować zgodnie z zasadą /rys.2.10a/

$$\tilde{r}_m^{ik} = \begin{cases} 0. & \bigwedge_i \notin L_q \\ \tilde{r}_{zs}^{ik} \in \mathbf{k}_L^e & \bigwedge_i \in L_q \\ 0. & \bigwedge_{i \cap k} \notin R_q \\ \tilde{r}_{zs}^{ik} \in \mathbf{k}_R^e & \bigwedge_{i \cap k} \in R_q \end{cases} , \qquad /2.86/$$

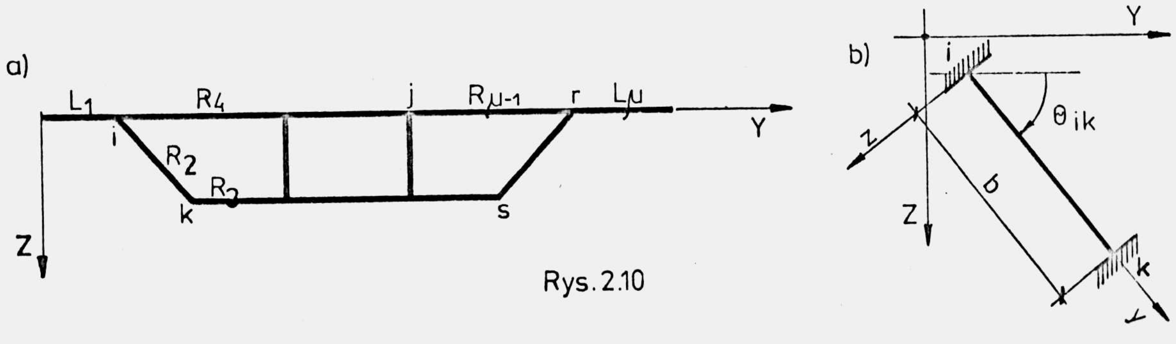
gdzie

$L_q \in E_L$, $R_q \in E_R$, $\quad q = 1,\ldots\mu$

E_R - zbiór elementów /R/ /$R_2 \div R_{\mu-1}$/

E_L - zbiór elementów /L/ /L_1, L_μ/

μ - ogólna liczba elementów ,



Rys. 2.10

natomiast $\mathbf{k}^{e}$ jast macierzą sztywności elementu w bazie ogólnej /rys. 2.10b/, a $\tilde{r}^{ik}_{zs}$ są jej wyrazami.

Ponieważ rozpatrywane są konstrukcje o zarysie prostokątnym osie X i x będą do siebie równoległe, natomiast pozostałe mogą być obrócone o kąt θ_{ik} jak na rys. 3.10. Wykorzystując fakt, że oba układy współrzędnych YZ i yz są prostokątne można wykorzystać macierz transformacji ortogonalnych [36] $\mathbf{B}_{R}$ dla elementu /R/ i $\mathbf{B}_{L}$ dla elementu /L/

$$\mathbf{B}_{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{L} & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{B}_{L} \end{bmatrix} , \qquad /2.87/$$

gdzie

$$\mathbf{B}_{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ik} & -\sin\theta_{ik} & 0 \\ 0 & \sin\theta_{ik} & \cos\theta_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad /2.88/$$

Stąd macierz sztywności elementu w bazie ogólnej można przedstawić w postaci

$$\mathbf{k}^{e}_{L} = \mathbf{B}^{T}_{L} \cdot \mathbf{k}^{e}_{L} \cdot \mathbf{B}_{L} \qquad /2.89/$$

dla elementu /L/ oraz

$$\mathbf{k}^{e}_{R} = \mathbf{B}^{T}_{R} \cdot \mathbf{k}^{e}_{R} \cdot \mathbf{B}_{R} \qquad /2.90/$$

dla elementu /R/ .

Siły brzegowe powstałe od obciążenia zewnętrznego, w bazie ogólnej, będą postaci

$$\mathbf{p}^{m} = \left[\mathbf{p}^{m}_{1} \cdot\cdot\cdot \mathbf{p}^{m}_{j} \cdot\cdot\cdot \mathbf{p}^{m}_{r}\right]^{T} , \qquad /2.91/$$

gdzie

$$\mathbf{p}^{m}_{j} = \mathbf{p}^{m}_{j}(P) + \mathbf{p}^{m}_{j}(g) + \mathbf{p}^{m}_{j}(S_{v}) + \mathbf{p}^{m}_{j}(S_{u}) , \qquad /2.92/$$

a $\mathbf{p}^{m} = \left\{\tilde{p}^{m}_{s}\right\}_{4r}$ wyznaczone będzie z

$$\tilde{p}^{m}_{s} = \sum_{k=1}^{r} \tilde{z}^{ik}_{m} \qquad /2.93/$$

analogicznie jak w /2.86/

$$\tilde{z}^{ik}_{m} = \begin{cases} 0. & \bigwedge_{i} \notin L_{q} \\ \tilde{z}^{i}_{s} \in \mathbf{p}^{e}_{L} & \bigwedge_{i} \in L_{q} \\ 0. & \bigwedge_{i \cap k} \notin R_{q} \\ \tilde{z}^{i}_{s} \in \mathbf{p}^{e}_{R} & \bigwedge_{i \cap k} \in R_{q} \end{cases} . \qquad /2.94/$$

$\mathbf{p}^e$ otrzymać można z

$$\mathbf{p}_L^e = \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{p}_L^e \qquad /2.95/$$

dla elementu /L/ oraz

$$\mathbf{p}_R^e = \mathbf{B}_R^T \cdot \mathbf{p}_R^e \qquad /2.96/$$

dla elementów /R/, gdzie $\mathbf{p}^e$ o postaci /2.55/ lub /2.56/.

Przemieszczenia $\mathbf{s}^m$ /2.80/, obciążenie $\mathbf{p}^m$ /2.91/ oraz macierz sztywności układu $\mathbf{K}^m$ powiązane są znanym związkiem metody przemieszczeń

$$\mathbf{K}^m \cdot \mathbf{s}^m = \mathbf{p}^m \quad , \qquad /2.97/$$

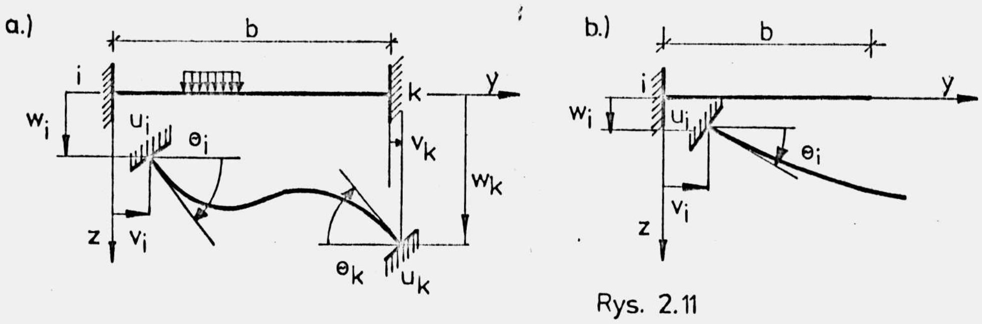
z którego otrzymuje się deformację całej konstrukcji

$$\mathbf{s}^m = \left(\mathbf{K}^m\right)^{-1} \cdot \mathbf{p}^m \cdot \qquad /2.98/$$

oraz poszczególnych elementów w układzie globalnym, a poprzez

$$\mathbf{s}_i^m = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{s}_i^m \qquad /2.99/$$

w bazie lokalnej, jak na rys. 2.11 .



Rys. 2.11

Siły wewnętrzne i przemieszczenia, w dowolnym punkcie /przekroju/ elementu, zostaną wyznaczone na podstawie znanych deformacji brzegowych /rys. 2.11/.
Gdy interesuje nas rozkład tych wielkości, w pewnym obszarze jednego z elementów, dogodne jest wykorzystanie postaci macierzy stałych $\mathbf{C}_p$ i $\mathbf{C}_t$ /2.15/, /2.17/ i /2.22/, /2.24/ oraz wektorów $\mathbf{w}$ /2.18/ i $\mathbf{f}$ /2.25/. W Przypadku gdy konstrukcja jest regularna, w swej budowie oraz gdy chcemy uzyskać regularną siatkę punktów w każdym elemencie /rys. 2.12/ można wprowadzić macierz stałych płytowych $\mathbf{C}_p^m$ o postaci

$$\mathbf{C}_p^m = \begin{bmatrix} A_m^1 & B_m^1 & C_m^1 & D_m^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m^j & B_m^j & C_m^j & D_m^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m^\mu & B_m^\mu & C_m^\mu & D_m^\mu \end{bmatrix} \qquad /2.100/$$

oraz tarczowych $\mathbf{C}_t^m$

$$\mathbf{C}_t^m = \begin{bmatrix} E_m^1 & F_m^1 & G_m^1 & H_m^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_m^j & F_m^j & G_m^j & H_m^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_m^\mu & F_m^\mu & G_m^\mu & H_m^\mu \end{bmatrix} \qquad /2.101/$$

Stałe zawarte w /2.100/ i /2.101/ wyznaczone zostaną z przemieszczeń brzegowych /2.99/. Dla elementu /R/ /rys. 2.11a/ będą wyrażone poprzez następujące równania

$$A_m^j = w_i$$

$$B_m^j = \frac{2}{1+\alpha} B_o \cdot \overline{r}_4 - D_o \cdot \overline{r}_2 \qquad /2.102/$$

$$C_m^j = - D_m^j + \theta_i / b_m$$

$$D_m^j = D_o \cdot \overline{r}_4 - B_o \cdot \overline{r}_6 \quad ,$$

gdzie

$$B_o = - \mathrm{ch}\, b_b . \cos \overline{b}_b \cdot w_i - \mathrm{sh}\, b_b . \cos \overline{b}_b \cdot \theta_i / b_m + w_k$$

$$D_o = -(\mathrm{sh}\, b_b . \cos \overline{b}_b - \mathrm{ch}\, b_b . \sin \overline{b}_b / f_o) w_i - (\mathrm{ch}\, b_b . \cos \overline{b}_b \qquad /2.103/$$

$$- \mathrm{sh}\, b_b . \sin \overline{b}_b / f_o) \theta_i / b_m + \theta_k / b_m \quad ,$$

natomiast $\overline{r}_2$, $\overline{r}_4$, $\overline{r}_6$ jak w /2.63/ .

Dla elementu /L/ przedstawionego na rys. 2.11b te same stałe wyznaczone zostaną z równań

$$A_m^j = w_i$$

$$B_m^j = -(\overline{r}_7 \cdot \theta_i \cdot b + (\overline{r}_8 + f_a \cdot a_b^2) w_i / (f_c \cdot a_b^2) \qquad /2.104/$$

$$C_m^j = - D_m + \theta_i \cdot b / b_b$$

$$D_m^j = - (\overline{r}_9 . w_i + (\overline{r}_8 + f_w . a_b^3 / b_b) \theta_i . b / (a_b^2 . b_b (f_u + f_w)) \quad ,$$

gdzie $\overline{r}_7 = r_7 . b / D_y$, $\overline{r}_8 = r_8 . b^2 / D_y$, $\overline{r}_9 = r_9 . b^3 / D_y$, natomiast r_7, r_8, r_9 jak w /2.39/ .

Stałe tarczowe /2.101/ dla elementu /R/ wyrażone będą poprzez następujące równania

$$E_m^j = -(h_c \cdot F_m^j + E_x \cdot t \cdot u_i/a_m)/f_a$$

$$F_m^j = E_x \cdot t\left(\frac{2}{1+\beta} F_o \cdot \bar{r}_{14} + H_o \bar{r}_{12}\right) / (h_u \cdot a_m) \qquad /2.105/$$

$$G_m^j = \left(h_w \cdot H_m^j - E_x \cdot t \cdot v_i/d_m\right)/h_u$$

$$H_m^j = E_x \cdot t\left(H_o \cdot \bar{r}_{16} + F_o \cdot \bar{r}_{14}\right)/(h_a \cdot a_m) \quad ,$$

gdzie H_o i F_o są funkcjami przemieszczeń brzegowych elementu

$$H_o = \left(h_u^2 \cdot sh\ d_b \cdot cos\ \bar{d}_b + h_u \cdot h_w \cdot ch\ d_b \cdot sin\ \bar{d}_b/h_o\right) u_i +$$

$$\left(h_a \cdot h_u \cdot ch\ d_b \cdot cos\ \bar{d}_b + h_w \cdot h_a \cdot sh\ d_b \cdot sin\ \bar{d}_b/h_o\right) v_i/d_m - h_a \cdot h_u \cdot v_k/d_m$$

$$F_o = \left(h_a \cdot h_u \cdot ch\ d_b \cdot cos\ \bar{d}_b - h_s \cdot h_u \cdot h_o \cdot sh\ d_b \cdot sin\ \bar{d}_b\right) u_i + \left(h_a^2 \cdot sh\ d_b \cdot cos\ \bar{d}_b\right.$$

$$\left. - h_a \cdot h_s \cdot h_o \cdot ch\ d_b \cdot sin\ \bar{d}_b\right) v_i/d_m - h_a \cdot h_u \cdot u_k \quad , \qquad /2.106/$$

zaś $\bar{r}$ są funkcjami sztywności elementu

$$\bar{r}_{12} = \left(h_5 \cdot h_o \cdot ch\ d_b \cdot sin\ \bar{d}_b + h_5 \cdot sh\ d_b \cdot cos\ \bar{d}_b\right)/\ M_2$$

$$\bar{r}_{14} = \left(h_6 \cdot h_o \cdot sh\ d_b \cdot sin\ \bar{d}_b\right)/\ M_2 \qquad /2.107/$$

$$\bar{r}_{16} = \left(h_5 \cdot h_a \cdot ch\ d_b \cdot sin\ \bar{d}_b - h_4 \cdot sh\ d_b \cdot cos\ \bar{d}_b\right)/\ M_2 \quad ;$$

natomiast M_2 jak w /2.33/, a h_4, h_5 i h_6 jak w /2.34/ .

Stałe tarczowe /2.101/ dla elementu /L/ przedstawieją równania

$$E_m^j = \left(r_{17} \cdot v_i - r_{18} \cdot u_i\right)/a_m^2$$

$$F_m^j = -\left(h_a \cdot E_m^j + E_x \cdot t \cdot u_i / a_m\right)/h_c \qquad /2.108/$$

$$G_m^j = \left(h_w \cdot r_{19} \cdot u_i/a_m - \left(E_x \cdot t + h_w \cdot r_{18}/a_m\right) v_i\right) / \left(\left(h_u + h_w\right) d_m\right)$$

$$H_m^j = \left(h_u \cdot G_m^j + E_x \cdot t \cdot v_i / d_m\right)/h_w \quad ;$$

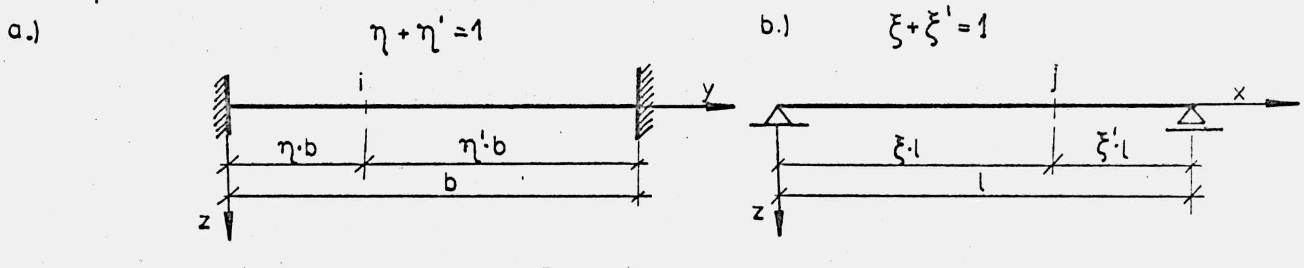
gdzie r_{17}, r_{18} i r_{19} jak w /2.42/.

Siły wewnętrzne i przemieszczenia otrzymuje się przez wykorzystanie macierzy wpływu wielkości N - $\mathbf{L}_N^m(y)$.

W przypadku ugięć macierz wpływu będzie postaci

$$\mathbf{L}_w^m = \begin{bmatrix} \ldots(\mathrm{ch}\, b_y^i \cdot \cos \bar{b}_y^i)\ldots \\ \ldots(f_o \mathrm{ch}\, b_y^i \cdot \sin \bar{b}_y^i)\ldots \\ \ldots(\mathrm{sh}\, b_y^i \cdot \cos \bar{b}_y^i)\ldots \\ \ldots(f_o \mathrm{sh}\, b_y^i \cdot \sin \bar{b}_y^i)\ldots \end{bmatrix} \qquad /2.109/$$

gdzie $b_y^i = b_b \cdot \eta$, $\bar{b}_y^i = \bar{b}_b \cdot \eta$, a η jak na rys. 2.12a.



Rys. 2.12

Dyskretną powierzchnię ugięcia, dla ustalonego m, można przedstawić w postaci macierzy trójwymiarowej

$$\mathbb{A}_w^m = (\mathbf{C}_p^m \cdot \mathbf{L}_w^m) \circ \mathbf{d}_w^m \qquad , \qquad /2.110/$$

gdzie $\mathbf{d}_w^m(x)$ będzie wektorem uogólnionych przekrojów poprzecznych , który w tym przypadku przedstawia /2.111/

$$\mathbf{d}_w^m = \begin{bmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_j \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sin(m\pi\xi) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad . \qquad /2.111/$$

W wyrażeniu /2.110/ przez / o / oznaczono operację poszerzania macierzy zdefiniowaną następująco

$$\mathbb{A} = \{a_{ijn}\} = \mathbf{D} \circ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \cdot b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{D} \cdot b_n \end{bmatrix} \qquad , \qquad /2.112/$$

gdzie $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$, natomiast $\mathbf{b} = \{b_n\}$.

Związek /2.110/ dla przypadku ogólnego przyjmie postać

$$\mathbb{A}_N = \sum_{m=1}^{m_k} \left(\mathbf{C}_{p,t}^m \cdot \mathbf{L}_N^m\right) \circ \mathbf{d}_N^m \qquad , \qquad /2.113/$$

gdzie

$\mathbf{A}_N$ - jest powierzchnią wielkości N

$\mathbf{C}^m_{p,t}$ - macierz stałych płytowych lub tarczowych

$\mathbf{L}^m_N$ - macierz wpływu wielkości N

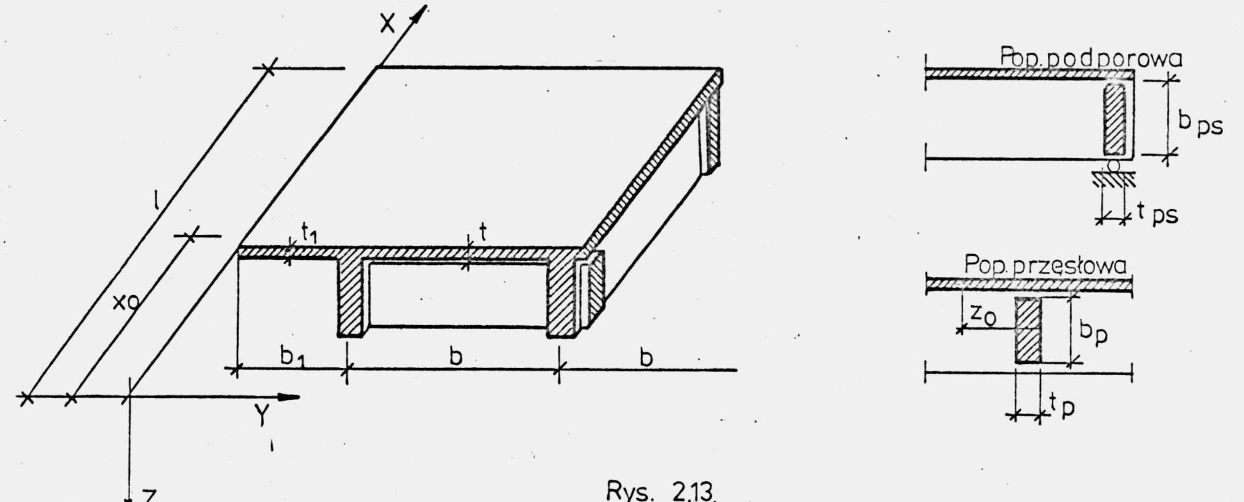
$\mathbf{d}^m_N$ - wektor przekrojów/sinusów lub cosinusów/

m_k - ostatnia harmoniczna uwzględniona w rozwiązaniu .

Gdy wewnątrz elementu działa obciążenie zewnętrzne macierze stałych $\mathbf{C}^m_p$ lub $\mathbf{C}^m_t$ należy poszerzyć o wektor /macierz/ incydencji, a macierze wpływu $\mathbf{L}^m_N$ o wiersz /macierz/ uwzględniającą charakter i położenie obciążenia /np: w^* dla $\mathbf{L}^m_w$ /2.58/ lub /2.60//.

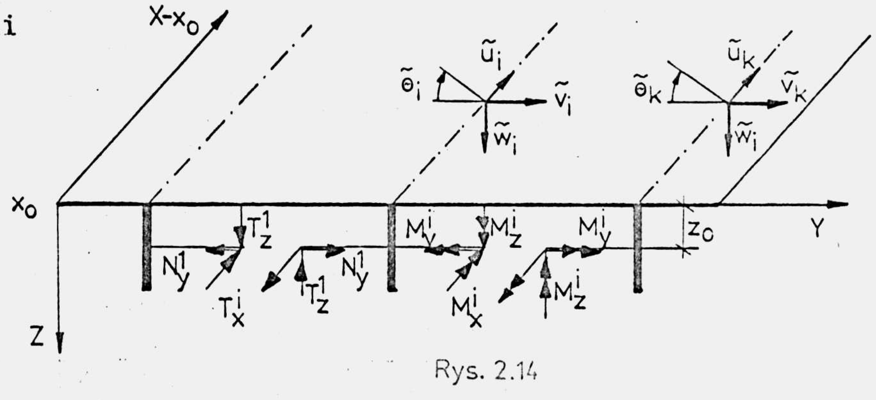
2.6. Płyty użebrowane podłużnie z poprzecznicami

Poniżej przedstawione będzie rozszerzenie zakresu poprzednich części rozdziału 2 polegające na uwzględnieniu w rozwiązaniu wpływu poprzecznicy przęsłowej nie połączonej z płytą pomostową [25] [64] oraz uwzględnieniu sztywności $/GJ_s/$ na skręcanie poprzecznicy podporowej /stycznej do płyty pomostowej/. Obie poprzecznice są połączone monolitycznie z żebrami podłużnymi jak na rys. 2.13.



Rys. 2.13.

Do rozwiązania takiej konstrukcji zastosować można metodę mieszaną /sił i przemieszczeń/ o modelu obliczeniowym metody przemieszczeń przedstawionym w poprzedniej części rozdziału 2, zaś siły wewnętrzne w poprzecznicach będą wielkościami nadliczbowymi /rys. 3.14/ tworzącymi



Rys. 2.14

wektor $\mathbf{X}_x$ o postaci

$$\mathbf{X}_x = \left[\mathbf{x}^1 \; .... \; \mathbf{x}^i \; .... \; \mathbf{x}^{r-1} \right]^T \quad , \qquad /2.114/$$

natomiast

$$\mathbf{x}^i = \left[M_y^i(o) \; M_y^i(1) \middle| \; T_x^i \; M_x^i \; N_y^i \; M_y^i \; T_z^i \; M_z^i \right] , \qquad /2.115/$$

gdzie $M_y(o)$, $M_y(1)$ - momenty skręcające w poprzecznicy podporowej /x = o i x = 1/

r - liczba linii węzłowych /żeber podłużnych/.

Macierzowy układ równań metody mieszanej przedstawia /2.116/

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss}^m & \mathbf{K}_{sx}^m \\ \mathbf{F}_{xs}^m & \mathbf{F}_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_s^m \\ \mathbf{x}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_s^m \\ \mathbf{f}_x \end{bmatrix} , \qquad /2.116/$$

gdzie

$\mathbf{K}_{ss}^m$ jest macierzą sztywności układu podstawowego metody przemieszczeń zbudowaną z podmacierzy $\mathbf{K}^m$

$$\mathbf{K}_{ss}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & \emptyset \\ & \mathbf{K}^m & \\ \emptyset & & \mathbf{K}^n \end{bmatrix} , \qquad /2.117/$$

$\mathbf{F}_{xs}^m$ jest macierzą przemieszczeń w kierunkach $\mathbf{X}_x$ od $\mathbf{s}_s^m = \mathbf{e}_i$ o postaci

$$\mathbf{F}_{xs}^m = \left[\mathbf{F}_{xs}^1 \; . \; . \; . \; \mathbf{F}_{xs}^m \; . \; . \; . \; \mathbf{F}_{xs}^n \right] , \qquad /2.118/$$

a $\mathbf{F}_{xx}$ jest macierzą podatności poprzecznicy.

Wektor przemieszczeń

$$\mathbf{s}_s^m = \left[\mathbf{s}^1 \; . \; . \; . \; \mathbf{s}^m \; . \; . \; . \; \mathbf{s}^n \right]^T \qquad /2.119/$$

oraz wektor obciążenia

$$\mathbf{p}_s^m = \left[\mathbf{p}^1 \; . \; . \; . \; \mathbf{p}^m \; . \; . \; . \; \mathbf{p}^n \right]^T \qquad /2.120/$$

wyrażone są poprzez $\mathbf{s}^m$ /2.84/ oraz $\mathbf{p}^m$ /2.91/.

Ponieważ poprzecznica traktowana jest jako element drugorzędny /nie obciążony bezpośrednio/ przyjmuje się wektor przemieszczeń w kierunkach $\mathbf{X}_x$ od obciążenia zewnętrznego $\mathbf{f}_x = \emptyset$.

Rozwiązanie układu równań /2.116/ [7] [19] prowadzi do wyznaczenia $\mathbf{S}_s^m$ oraz $\mathbf{X}_x$.

Procedura wyznaczenia wektora $\mathbf{X}_x$ prowadzi poprzez równanie

$$(\mathbf{K}_{ss}^m \cdot \mathbf{F}_{xx} - \mathbf{F}_{xs}^m \cdot \mathbf{K}_{sx}^m)\mathbf{X}_x = -\mathbf{F}_{xs}^m \cdot \mathbf{p}_s^m \quad , \qquad /2.121/$$

a po podzieleniu obu stron przez $\mathbf{F}_{xx}$ oraz wykorzystaniu twierdzenia o wzajemności reakcji i przemieszczenia Raylaigha [20] $/\mathbf{F}^m_{xs} = -\left(\mathbf{K}^m_{sx}\right)^T/$ otrzymamy

$$\left(\mathbf{F}_{xx} + \mathbf{F}^m_{xs}\cdot\left(\mathbf{K}^m_{ss}\right)^{-1}\cdot\left(\mathbf{F}^m_{xs}\right)^T\right)\mathbf{X}_x = -\mathbf{F}^m_{xs}\cdot\left(\mathbf{K}^m_{ss}\right)^{-1}\mathbf{p}^m_s \quad . \qquad /2.122/$$

Wyrażenie $\mathbf{F}^m_{xs}\cdot\left(\mathbf{K}^m_{ss}\right)^{-1}\cdot\left(\mathbf{F}^m_{xs}\right)^T$ jest podatnością układu podstawowego metody przemieszczeń w kierunkach $\mathbf{X}_x$, natomiast $\mathbf{F}^m_{xs}\cdot\left(\mathbf{K}^m_{ss}\right)^{-1}\cdot\mathbf{p}^m_s$ jest wektorem przemieszczeń w kierunkach $\mathbf{X}_x$ od obciążenia zewnętrznego w kierunkach $\mathbf{S}^m_s$.

Postępując analogicznie jak przy wyznaczaniu $\mathbf{X}_x$ zostaną wyznaczone przemieszczenia $\mathbf{S}^m_s$

$$\left(\mathbf{K}^m_{ss}\cdot\mathbf{F}_{xx} - \mathbf{K}^m_{sx}\cdot\mathbf{F}^m_{xs}\right)\mathbf{S}^m_s = \mathbf{F}_{xx}\cdot\mathbf{p}^m_s \qquad /2.123/$$

po przekształceniach otrzyma się

$$\left(\mathbf{K}^m_{ss} + \left(\mathbf{F}^m_{xs}\right)^T\cdot\mathbf{F}^{-1}_{xx}\cdot\mathbf{F}^m_{xs}\right)\mathbf{S}^m_s = \mathbf{p}^m_s \quad , \qquad /2.124/$$

gdzie $\left(\mathbf{F}^m_{xs}\right)^T\cdot\mathbf{F}^{-1}_{xx}\cdot\mathbf{F}^m_{xs}$ jest macierzą sztywności poprzecznicy w układzie podstawowym $/\mathbf{S}^m_s/$.

Porównując wyrażenia /2.122/ i /2.124/ można zauważyć, że /2.124/ prowadzi do wysokiego rzędu równań, nawet przy przyjęciu do rozwiązania niewielkiej liczby harmonicznych. Jest to poważnym ograniczeniem przy programowaniu na EMC. O wiele korzystniej wygląda rozwiązanie poprzez /2.122/ jeżeli zauważymy, że macierz $\left(\mathbf{K}^m_{ss}\right)^{-1}$, o znacznym rozmiarze, da się łatwo rozłożyć na dużo mniejsze podmacierze ponieważ $\mathbf{K}^m_{ss} = \operatorname{diag}\left\{\mathbf{K}^m\right\}$ wobec czego $\left(\mathbf{K}^m_{ss}\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left\{\left(\mathbf{K}^m\right)^{-1}\right\}$.

Po wykorzystaniu powyższego równanie /2.122/ przyjmie postać /podobnie jak w [56] /

$$\left(\mathbf{F}_{xx} + \sum_{m=1}^{n}\left(\mathbf{F}^m_{xs}\cdot\left(\mathbf{K}^m\right)^{-1}\cdot\left(\mathbf{F}^m_{xs}\right)^T\right)\right)\mathbf{X}_x = -\sum_{m=1}^{n}\left(\mathbf{F}^m_{xs}\cdot\left(\mathbf{K}^m\right)^{-1}\cdot\mathbf{p}^m\right) . \qquad /2.125/$$

Rozkładając rozwiązanie na dwa etapy /w pierwszym wyznacza się $\mathbf{X}_x$ z /2.125// wyznaczymy $\mathbf{S}^m_s$ z równania /2.124/

$$\mathbf{K}^m_{ss}\cdot\mathbf{S}^m_s + \left(\mathbf{F}^m_{xs}\right)^T\cdot\mathbf{X}_x = \mathbf{p}^m_s \quad , \qquad /2.126/$$

a po przekształceniu

$$\mathbf{K}^{m}\cdot \mathbf{s}^{m} = \mathbf{p}^{m} - \left(\mathbf{F}^{m}_{xs}\right)^{T}\cdot \mathbf{X}_{x} = \mathbf{p}^{m} - \mathbf{p}^{m}(x) \qquad /2.127/$$

Przedstawione powyżej rozwiązanie obejmuje ogólniejsze typy konstrukcji /konstrukcja przedstawiona na rys. 2.13 służyła tylko jako przykład/ , a podstawowe różnice , przy tym samym układzie podstawowym wystąpią w budowie macierzy $\mathbf{X}_x$, $\mathbf{F}^{m}_{xs}$ i $\mathbf{F}_{xx}$.

Dla konstrukcji przedstawionej na rys. 2.13 przy dwóch żebrach podłużnych i założeniu prętowej deformacji żebra podłużnego /$\mathbf{G}_{\mathbf{S}^m}$/3.1// macierz $\mathbf{F}^{m}_{xs}$ będzie postaci

x^1

$$\mathbf{F}^{m}_{xs} = \left[\begin{array}{cc|cccccc}
0 & 0 & 0 & S^o & z_o\cdot S^o & 0 & a_b\cdot S^o/2 & 0 \\
a_m & -a_m\cdot \cos m\pi & a_o\cdot S^o & 0 & 0 & -a_m\cdot C^o & S^o & 0 \\
0 & 0 & a_b\cdot S^o/2 & 0 & -S^o & 0 & 0 & -a_m\cdot C^o \\
0 & 0 & C^o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -S^o & -z_o\cdot S^o & 0 & -a_b\cdot S^o/2 & 0 \\
-a_m & a_m\cdot \cos m\pi & -a_o\cdot S^o & 0 & 0 & a_m\cdot C^o & -S^o & 0 \\
0 & 0 & -a_b\cdot S^o/2 & 0 & S^o & 0 & 0 & a_m\cdot C^o \\
0 & 0 & -C^o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \qquad /2.128/$$

gdzie : $S^o = \sin a_o$, $C^o = \cos a_o$, $a_o = a_m\cdot x_o$,

natomiast $\mathbf{F}_{xx}$ jest zestawiona podobnie jak w układach prętowych [20] , a dla"sztywnej poprzecznicy" [27] $\mathbf{F}_{xx} = \emptyset$. W przypadku gdy żebra podłużne są z wiotkimi ściankami deformację ich /2.128/ należy określać poprzez równania elementów powierzchniowych /rozdział 2.2/, a przy złożonych kształtach wg [4] .

2.7. Cechy sprężyste elementu

Przedstawiona w poprzednich częściach rozdziału, teoria płaskich elementów powierzchniowych bazuje na przyjęciu ortotropii tych elementów, nie precyzując w zasadzie jej typu. Ponieważ przypadek ortotropii fizycznej nie wymaga dodatkowych uściśleń, poniżej zostanie omówiona druga, bardziej obszerna, grupa tworzyw izotropowych pracujących w konstrukcji jako ortotropowa przez specyficzne jej ukształtowanie /ortotropia techniczna/.

Elementy z betonu pracujące wyłącznie w I fazie można traktować jako izotropowe z normowymi stałymi materiałowymi $E_x = E_y = E^b_c$ oraz $\nu_x = \nu_y = \nu_b$, a stąd $G_{xy} = E^b_c/2\,(1+\nu_b)$.

Sztywności płytowe przyjmą postać

$$D_x = D_y = E_c^b \cdot t^3 / (12(1-\nu_b^2)) = D_b \qquad /2.129/$$

$$D_{xy} = D_b / (2(1+\nu_b))$$

wobec czego $\alpha = \beta = 1$ oraz

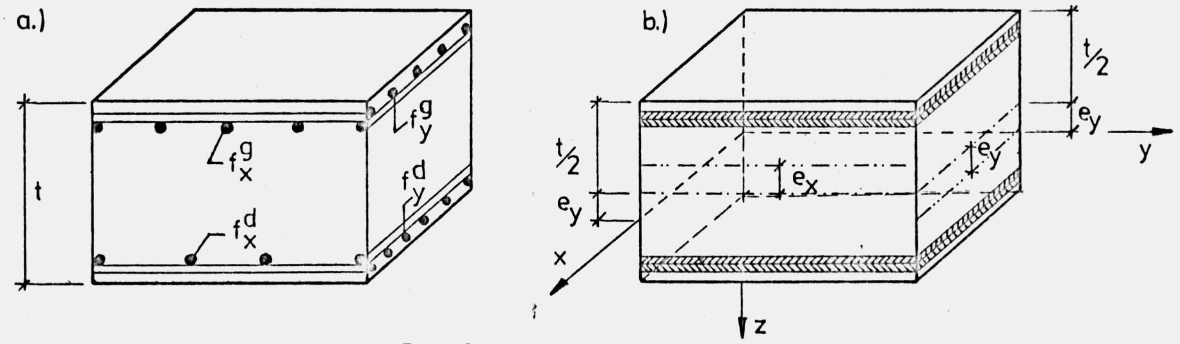
$$f_u = h_u = 1 + \nu_b$$

$$f_a = f_w = h_a = h_w = 1 - \nu_b$$

$$f_c = h_c = 2 \qquad /2.130/$$

$$f_s = h_s = 0 \quad .$$

Znacznie trudniejsze jest wyznaczenie cech sprężystych w przypadku żelbetu, jeszcze trudniej gdy układ zbrojenia jest niesymetryczny względem płaszczyzny środkowej /rys. 2.15a/ lub gdy



Rys. 2.15

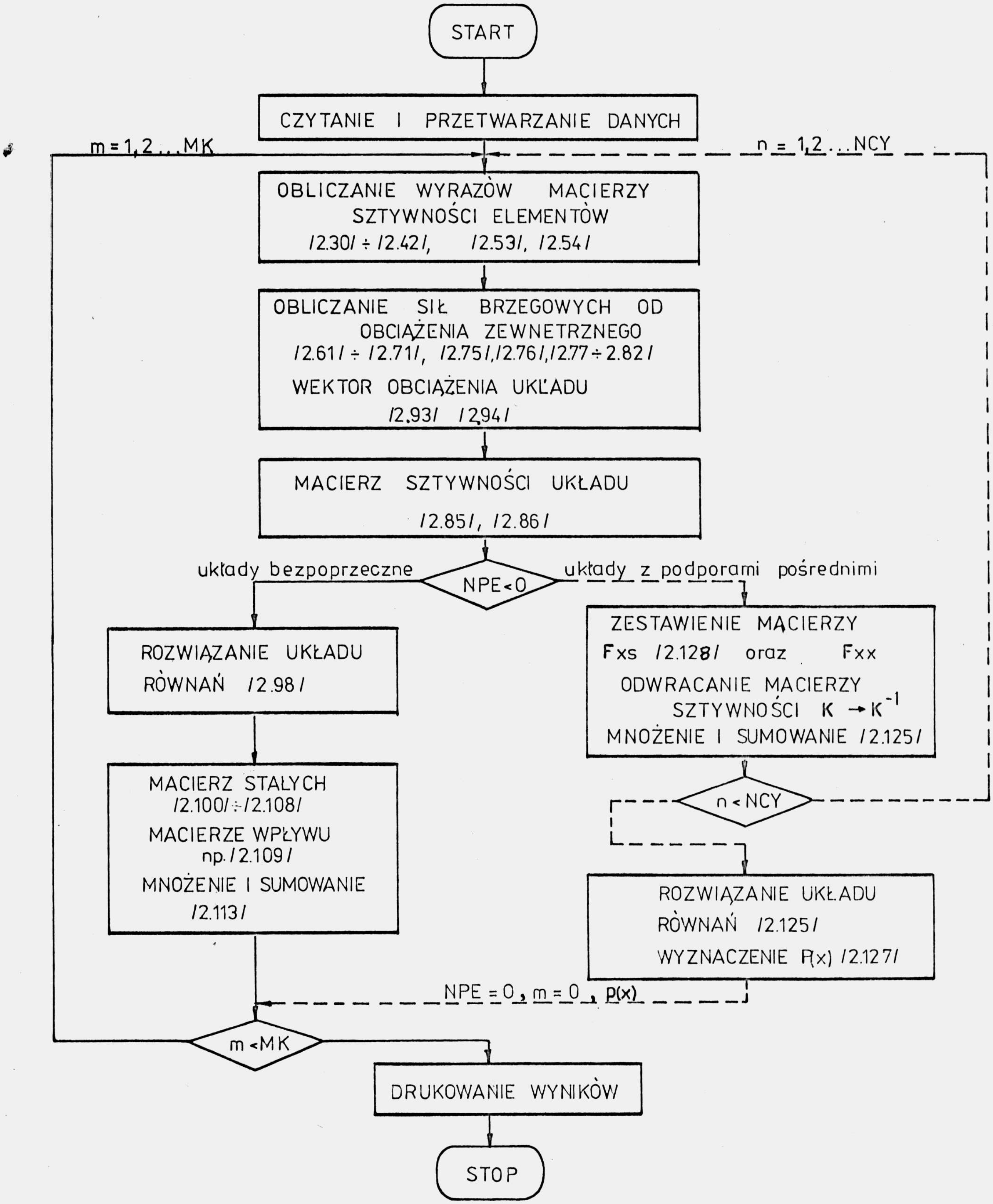
element nie pracuje w I fazie /w fazie wyższej [41] /. Powiązanie w jednym przekroju dwóch, w zasadzie różnych, materiałów o złożonej charakterystyce "sprężystej" betonu nie pozwala na dokładne wyznaczenie współczynników sprężystości elementu. Mimo wielu publikacji na ten temat [33, 34, 37, 43, 58] i innych, problem ten praktycznie nie jest rozwiązany w wyniku złożoności zagadnienia.

Jedną z możliwości rozwiązania problemu jest sposób [58] , gdzie przekrój żelbetowy rozpatruje się jako płytę warstwową jak na rys. 2.15b przy założeniu niezmiennych cech w całej płaszczyźnie elementu /x, y/. Podejście to, mimo niektórych założeń upraszczających, zasługuje na uwagę dzięki możliwości rozpatrzenia każdej warstwy /o cechach izotropowych/ osobno, a następnie ustalenia globalnej sztywności zastępczej dla obydwu kierunków x i y.

Wyznaczenie zastępczej sztywności użebrowanych elementów powierzchniowych na przykład tak zwanych ortotropowych stalowych płyt pomostowych można znaleźć w wielu pracach omówionych w [47] oraz [14].

2.8. Algorytm numeryczny rozwiązania

Uproszczony schemat blokowy programu przedstawiono na rys. 2.16, na którym linią ciągłą oznaczono przebieg obliczeń dla konstrukcji bez poprzecznic /rys. 2.1/. Dla konstrukcji z poprzecznicami /rys. 2.13/ droga obliczeń przebiega według linii przerywanej, a po pełnym cyklu własnym m = 1,2,3...NCY droga liczenia przenie-



Rys. 2.16

siona jest do układów bezpoprzecznicowych /m = 0/ z dodatkowymi siłami nadliczbowymi $p^m(x)$. Program jest przystosowany do rozwiązywania konstrukcji o przekrojach poprzecznych oznaczonych na rys. 1.1 jako grupa 1 i grupa 3.
Jako obciążenie zewnętrzne przyjmuje się sprężenie poprzeczne i podłużne jak na rys. 2.18 oraz obciążenie ruchome w postaci jednej, dwóch, czterech czy ośmiu /K-80 [52]/ jednakowych sił skupionych czy rozłożonych. W ogólności wymienione rodzaje obciążeń można rozpatrywać oddzielnie lub łącznie np.: obc. ruchome + spręż.poprzeczne + spręż. podłużne.
Do wyznaczenia powierzchni sił lub przemieszczeń w elemencie przyjmuje się niezależnie siedem przekrojów podłużnych /rys.2.12a $\eta=j/6$ j = 0,1,2...6/ na szerokości każdego elementu.

Dane do programu tworzą poszczególne karty

$\boxed{\text{KARTA 1}}$ - informacyjna

NRZA - czterocyfrowy szyfr konstrukcji i obciążenia
NDR - /0,1,2,3/ - szyfr wydruków pośrednich /służy do sprawdzania poprawności podstawowych wielkości np.: r_{ij}, $\mathbf{K}^m$, $\mathbf{p}^m$, $\mathbf{s}^m$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{F}^m_{xs}$ itd.
ILO - liczba żeber podłużnych /$2 \leqslant i \leqslant 8$/
NPR - liczba przekrojów poprzecznych przez powierzchnię sił lub przemieszczeń /$n_p \leqslant 23 \div 8$/
MK - ostatnia harmoniczna uwzględniona w rozwiązaniu /$m_k \leqslant 45$/
NCY - j.w. w pętli własnej dla układów z poprzecznicami /rys. 2.16/
NP - numer przekroju podłużnego, w którym badana jest zbieżność

$$\left.\begin{array}{ll} \text{DL} & = l/t \\ \text{B} & = b/t \\ \text{BWS} & = b_1/t \\ \text{GWS} & = t_1/t \end{array}\right\} \text{rys. 2.13}$$

EWS $= c_o/t$ - rys. 3.8
DX $= \nu_x$ - stała Poissona dla płyt /w kierunku x/
GX $= \nu^{\bullet}_x$ - stała Poissona dla tarcz /w kierunku x/
DEX $= E^b_c \,/\, E^b_{zg}$ - stosunek modułów Younga na ściskanie i zginanie

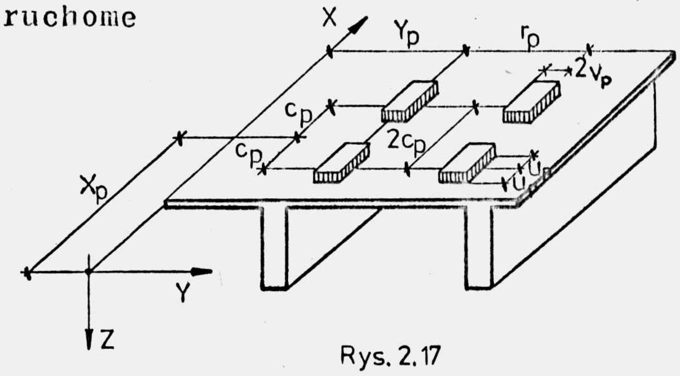
$\boxed{\text{KARTA 2*}}$ - cechy sprężyste elementów

$$\left.\begin{array}{ll} \text{DX} & = D_x / D_o \\ \text{DY} & = D_y / D_o \\ \text{DXY} & = D_{xy} / D_o \end{array}\right\} \text{sztywności płytowe; } D_o = E^b_{zg} \cdot t^3 /(12\,(1-\nu_b^2))$$

EX = E_x / E_o
EY = E_y / E_o
GXY = G_{xy} / E_o
} sztywności tarczowe; $E_o = E_c^b$

KARTA 3 a* - obciążenie ruchome

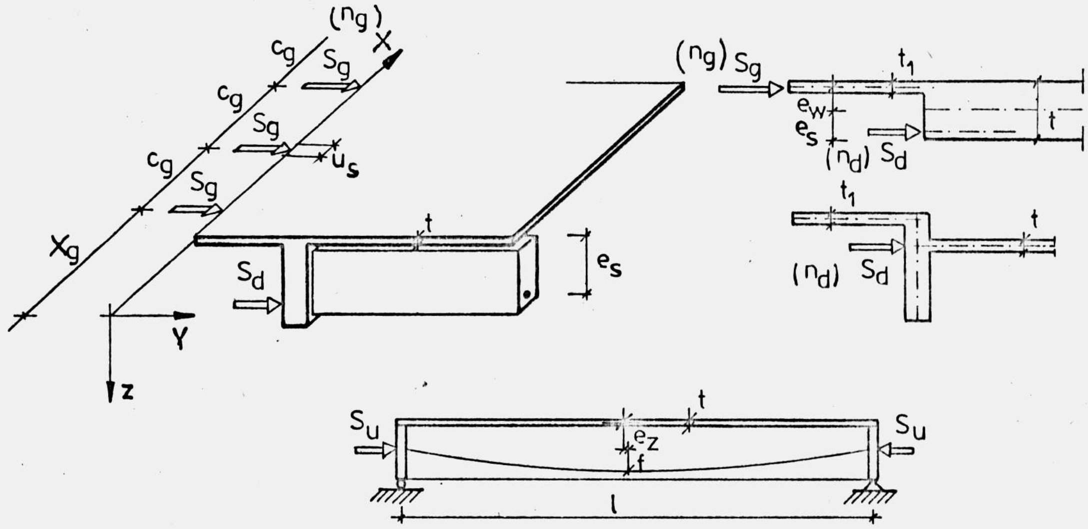
XP = X_p/t
YPO = Y_p/t
RKO = r_p/t
CK = c_p/t
VK = v_p/t
UK = u_p/t



Rys. 2.17

KARTA 3 b* - sprężenie

XG = x_g/t
XD = x_d/t
CG = c_g/t
CD = c_d/t
SG = S_g
SD = S_d
ES = e_s/t
US = u_s/t
NSG = n_g
NSD = n_d
EZ = e_z/t
FZ = f/t
FIZ = S_u



Rys. 2.18

KARTA 4 * - wymiary żebra

HR = h/t
BZ = t_z/t
} rys. 1.1

BW = $2c/t$ rys. 3.8

KARTA 5 * - poprzecznice i podpory pośrednie

HP = b_p/t
AP = t_p/t
APS = t_{ps}/t
} rys. 2.13 wymiary poprzecznicy /z_o=0,5h, b_{ps}=h-0,5t/

WS = H/t
AS = a_s/t
} rys. 3.25 wymiary podpory pośredniej /$t_s = t_z$/

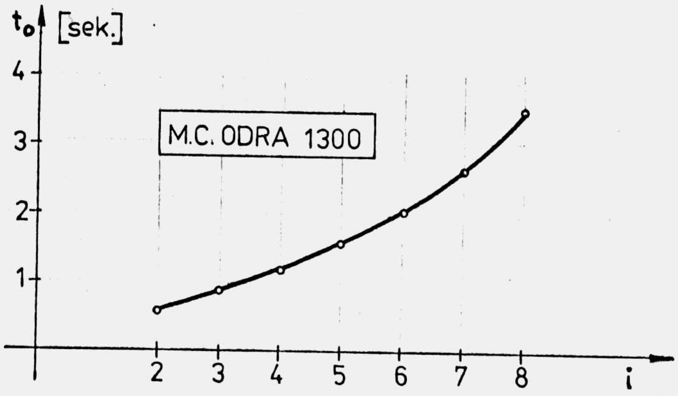
NPE - szyfr zadania nadliczbowego

Karty danych oznaczone / * / w pewnych typach konstrukcji i obciążenia są pomijane, co reguluje NRZA:

KARTA 2 gdy elementy są izotropowe
KARTA 4 dla płyt /grupa 3 rys. 1.1/
KARTA 5 gdy konstrukcja jest bezpoprzecznicowa lub bez podpór pośrednich
KARTA 3 /a lub b/gdy występuje tylko jeden z rodzajów obciążenia

Opracowany program wymaga małej liczby danych prostych. Dane geometryczne i fizyczne konstrukcji oraz obciążenie są w postaci bezwymiarowej, co pozwala uniknąć w programie operacji na małych [m, T, kN] lub dużych [cm, kG, N] liczbach /macierz sztywności/ jak również ominąć układ jednostek - stąd wyniki będą również w postaci bezwymiarowej.

Przebieg liczenia jest bardzo krótki; dla układów bez podpór pośrednich obieg w pętli m = 1,2...MK /rys. 2.16/, w zależności od liczby żeber podłużnych /i/, przedstawia rys. 2.19.



Rys. 2.19.

Dla układów z poprzecznicami i podporami pośrednimi czas obliczeń zwiększa się 2-3 krotnie.

Opracowany program w języku FORTRAN wymaga pamięci operacyjnej 32 oraz nie korzysta z pamięci zewnętrznej.

3. ROZKŁAD SIŁ OD OBCIĄŻENIA RUCHOMEGO

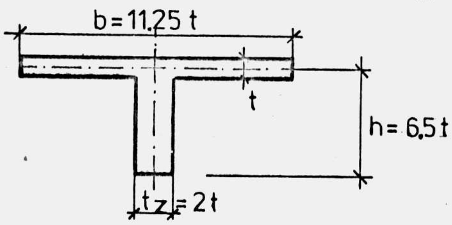
3.1. Płyty użebrowane podłużnie

3.1.1. Wpływ żebra na rozkład sił wewnętrznych w płycie

W rozdziale tym jako obciążenie ruchome stosuje się normowy ciągnik K-80 [52] ponieważ jest zbliżony do obciążenia rzeczywistego, a równocześnie może być uważany za obciążenie miarodajne do wymiarowania płyt pomostowych w mostach drogowych. Inne rodzaje obciążenia w postaci pojedyńczej siły skupionej, czy rozłożonej wywołują dość znaczne efekty lokalne /tabela 3.7/. Daje to obraz podobny do powierzchni wpływu jednak w tego typu konstrukcjach jest obciążeniem rzadko występującym.

Ze względu na doniosłą rolę płyty w układach bezpoprzecznicowych rozdział ten będzie zilustrowany większą liczbą przykładów prowadzących do oszacowania wielkości wybranych sił wewnętrznych w zależności od cech geometrycznych konstrukcji i ustawienia obciążenia. Wpływ różnych cech sprężystych elementów rozpatrywany jest w rozdziale 5.1, natomiast poniżej przyjęto elementy o cechach izotropowych oraz $\nu = 0.16$.

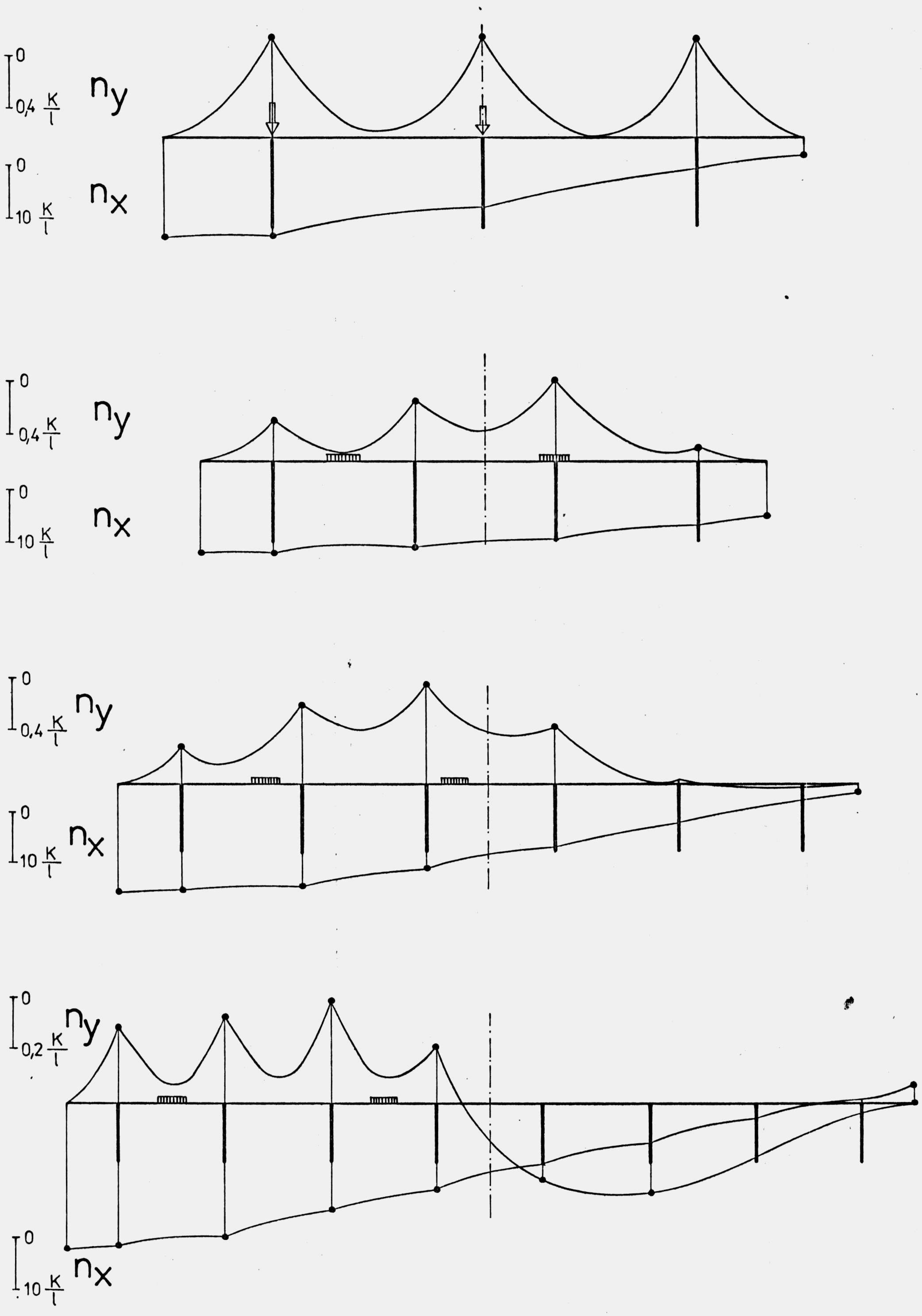
Aby można było zrealizować różne warianty położenia poprzecznego obciążenia konieczne było wprowadzenie zmiennego rozstawu żeber podłużnych, a stąd zmiennych cech geometrycznych dźwigara jak na rys. 3.1. Wobec powyższego przyjęto dodatkowe założenia:
- ustalona jest rozpiętość $l = 20.$ m,
- wymiary przekroju poprzecznego będą się zmieniały regularnie wraz z liczbą żeber /i/ tak aby śr. $n_x \approx$ const.



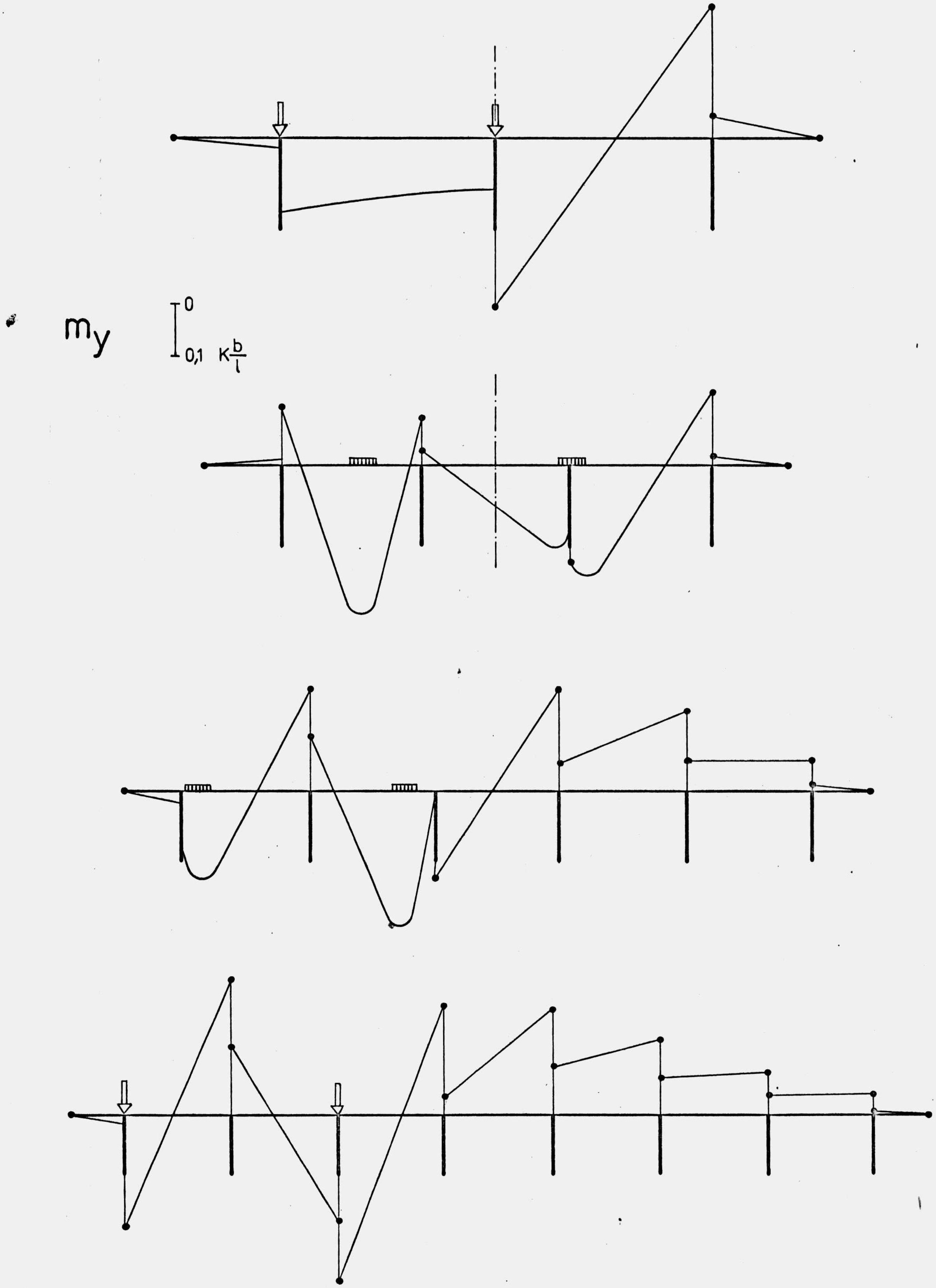
i = 3	t = 18 cm	(b = 15 t)
i = 4	t = 16 cm	
i = 6	t = 14 cm	
i = 8	t = 12 cm	

Rys. 3.1.

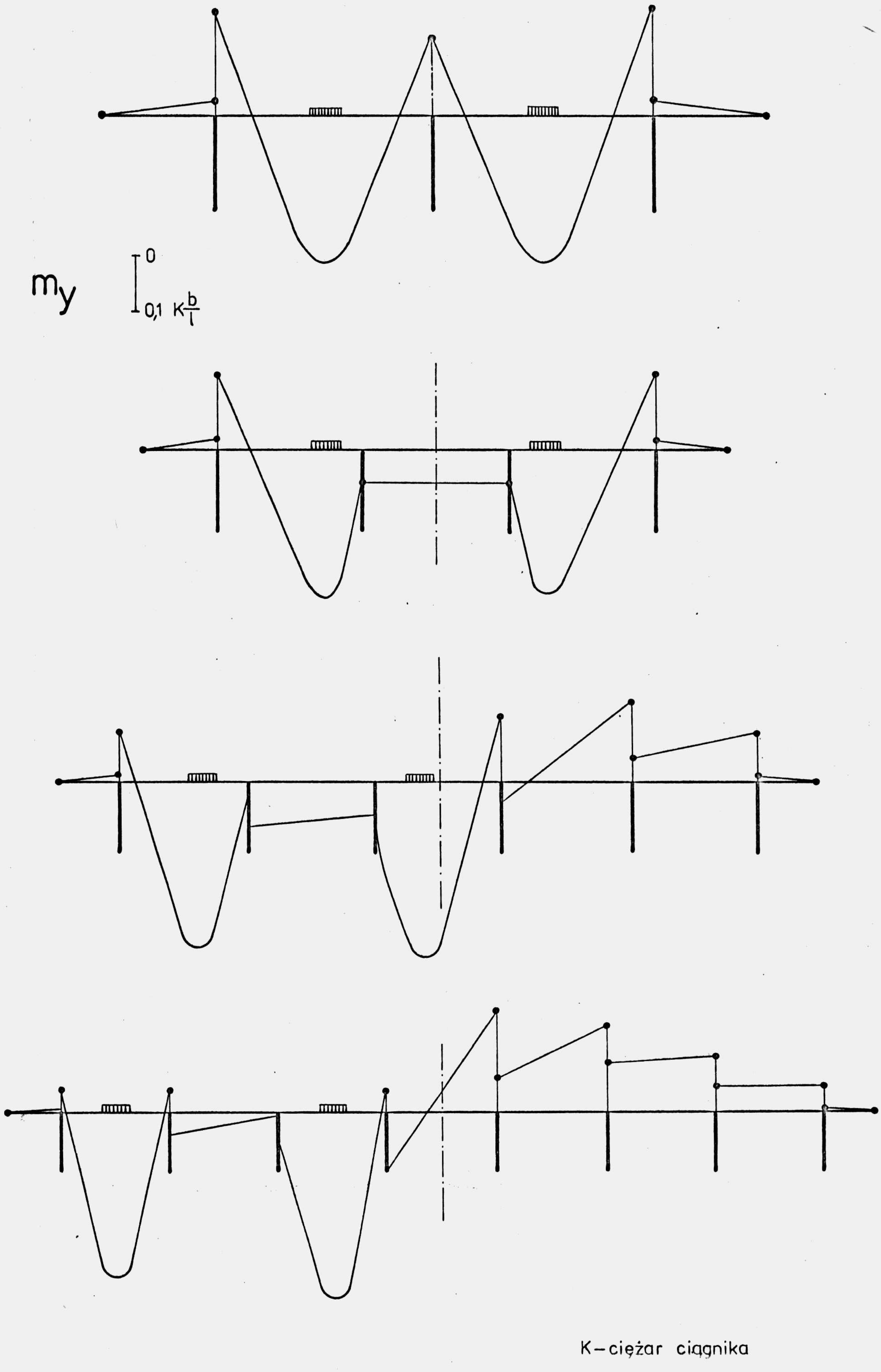
Na rysunkach 3.2 ÷ 3.4 przedstawiono przekroje poprzeczne przez powierzchnię sił w środku rozpiętości konstrukcji /$X = X_p = l/2$/. Z wykresów tych wynika wyraźny wpływ liczby żeber na rozkład sił wewnętrznych w płycie. Zaprezentowano tutaj tylko niektóre rezultaty /n_x, n_y, m_y/, natomiast m_x dla jednego z wariantów przekroju poprzecznego i obciążenia przedstawiono na rys. 3.11.


0
0,4 K/l
n_y
0
10 K/l
n_x
0
0,4 K/l
n_y
0
10 K/l
n_x
0
0,4 K/l
n_y
0
10 K/l
n_x
0
0,2 K/l
n_y
0
10 K/l
n_x
K – ciężar ciągnika

Rys. 3.2



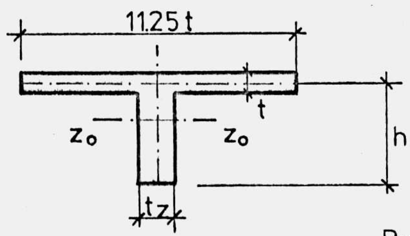
Rys. 3.3 K– ciężar ciągnika



Rys. 3.4

Momenty poprzeczne m_y /porównywane do m_o [66] jak na rys. 3.17b/ w elementach bezpośrednio obciążonych wraz z liczbą żeber ulegają zmniejszeniu na brzegach oraz przyrostowi w elementach bezpośrednio obciążonych, a w części nieobciążonej pojawiają się momenty o znacznych wielkościach pochodzące od skręcania całej konstrukcji. Siły tarczowe poprzeczne n_y wyraźnie zależą od liczby żeber i ustawienia obciążenia. Przy niewielkiej ich liczbie występuje rozciąganie, z ekstremalnymi wartościami nad żebrem, a przy skrajnym ustawieniu obciążenia i większej liczbie żeber płyta może być ściskana w części nieobciążonej.

Poniżej przedstawiona będzie analiza wpływu wymiarów żebra na momenty m_y w płycie pomostowej dla układu ośmiożebrowego. Zmiana wymiarów żebra /rys. 3.5/ będzie tak ustalona aby moment bezwładnoś-



wariant a : t_z = 1.5 t , h = 7.0 t

wariant b : t_z = 2 t , h = 6.7 t

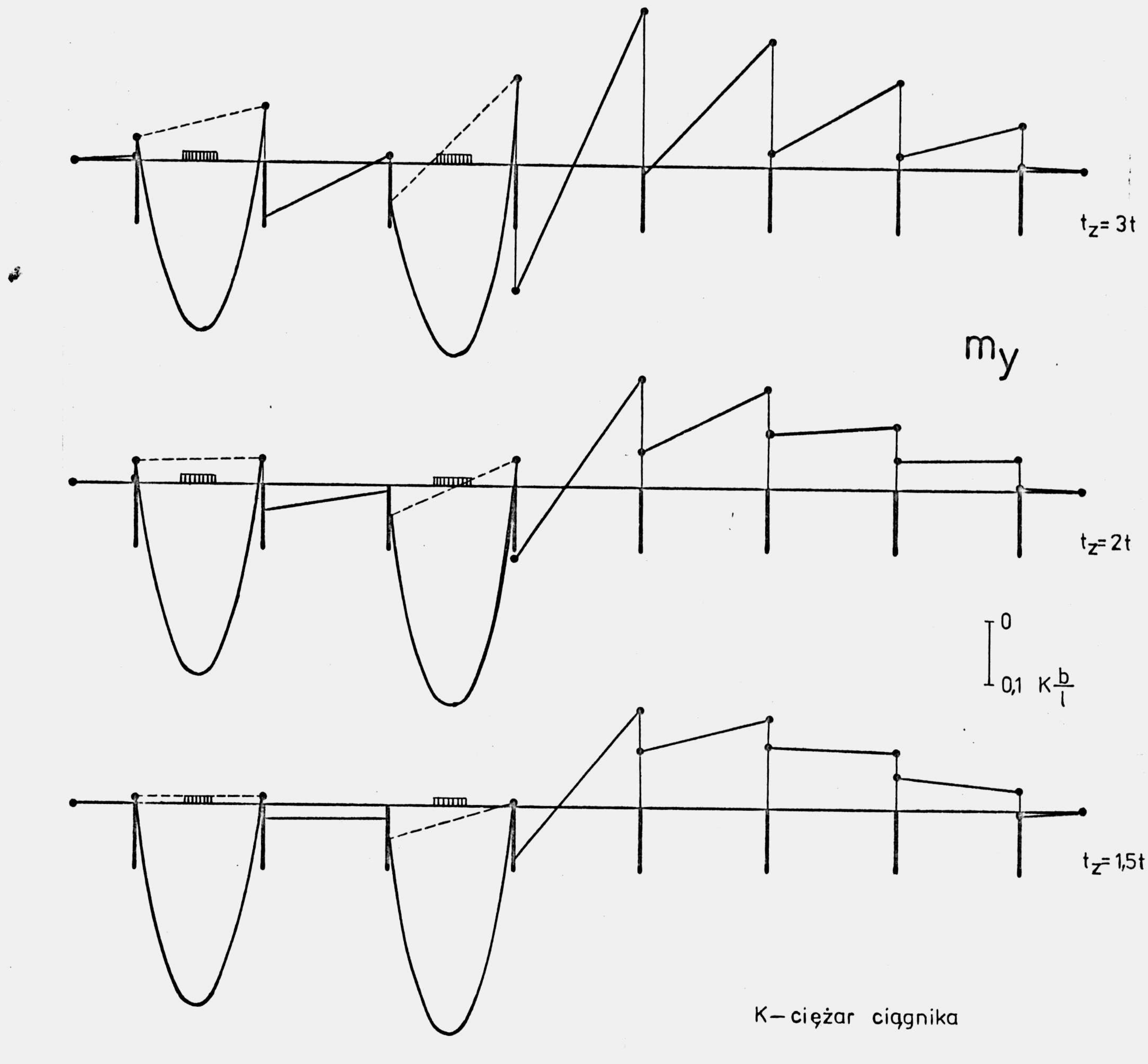
wariant c : t_z = 3 t , h = 5.9 t

Rys. 3.5

ci J_x dźwigara był stały dla wszystkich wariantów przekroju poprzecznego. Porównanie rozkładów m_y dla poszczególnych wariantów przy ustalonym położeniu obciążenia przedstawiają rys. 3.6 i rys. 3.7.

Gdy obciążenie znajduje się pomiędzy żebrami /rys. 3.6/ wraz ze zmniejszaniem się t_z ulegają zwiększeniu momenty m_y w obszarze bezpośrednio obciążonym oraz zmniejszają się momenty brzegowe. Gdy obciążenie położone jest nad żebrami /rys. 3.7/ wraz ze zmniejszaniem się t_z zmniejszają się wszystkie momenty brzegowe co jest skutkiem mniejszej sztywności na skręcanie dźwigara. Nie zaobserwowano tutaj przypadku aby pojawiały się momenty odmiennego znaku przy obciążeniu w sąsiednich przedziałach /tabela 3.1/.

Porównując ekstremalne wielkości m_y w elementach bezpośrednio obciążonych /rys. 3.3, rys. 3.4, rys. 3.6 i rys. 3.7/ z odpowiednimi wynikami B. Ulickiego [66] można zauważyć zwiększającą się różnicę wraz ze wzrostem liczby żeber. Dla układu ośmiobelkowego porównano w tabeli 3.1 wyniki uzyskane na podstawie [66] oraz /w nawiasach/ wielkości wzięte z rys. 3.6 i rys. 3.7. Zaobserwowane rozbieżności pozwalają stwierdzić, że sposób przedstawiony w [66] nie może być sto-

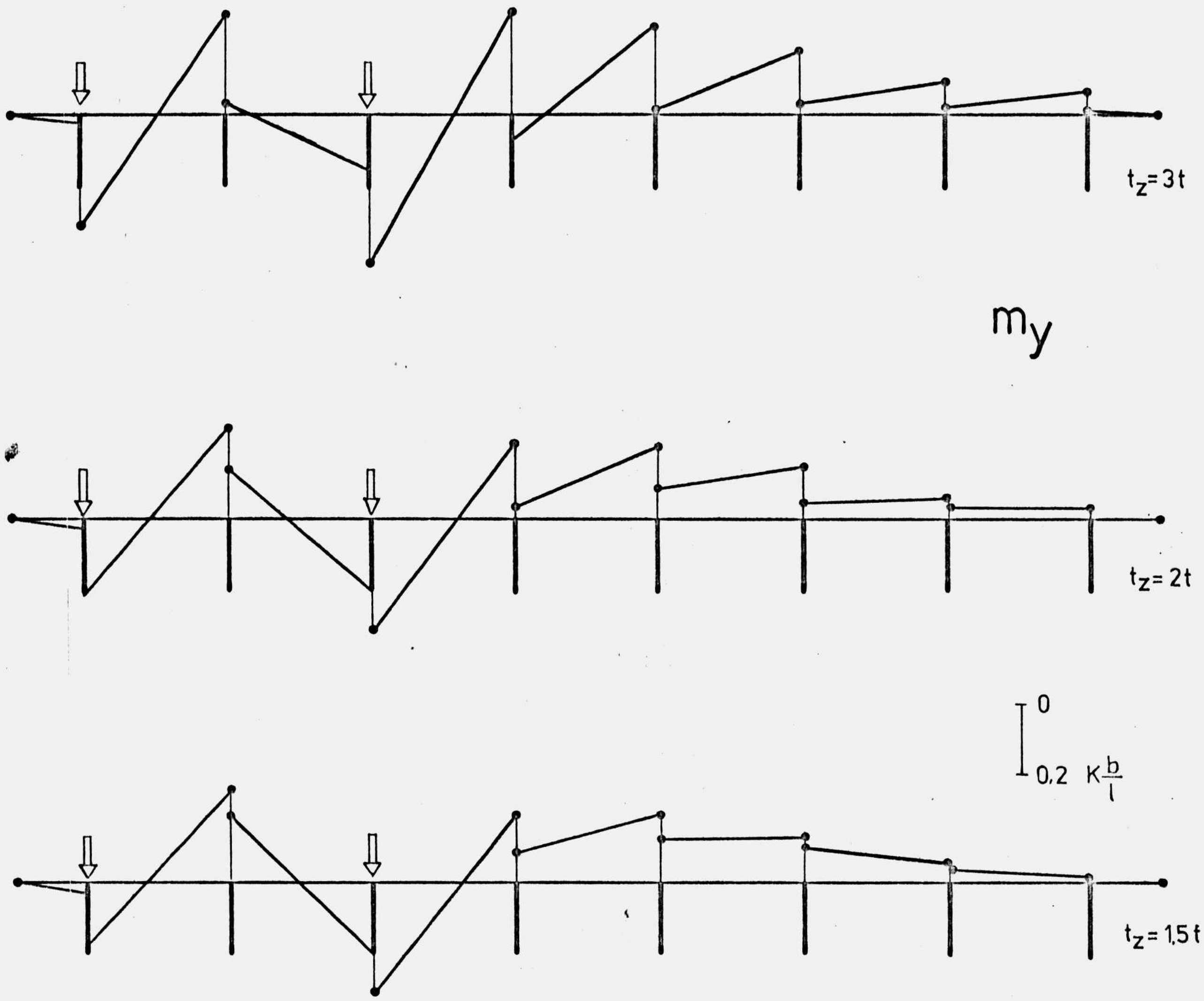


Rys. 3.6

sowany bez ograniczeń do wszelkiego rodzaju płyt pomostowych, a zaobserwowane różnice skłoniły do głębszej analizy m_y, którą przeprowadzono w rozdziale 3.1.2.

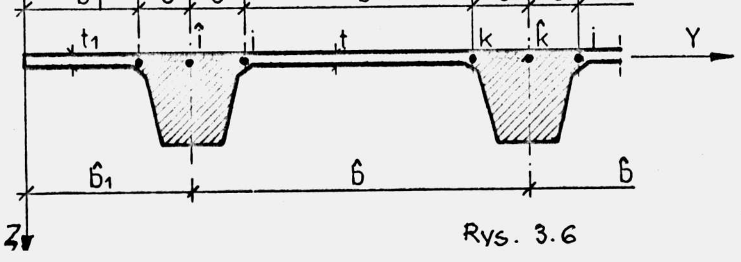
Tabela 3.1

	k s	k	s
m_s/m_o	0.37 (0.71 ÷ 1.12)	———	- 0.38 (+0.1)
m_k/m_o	- 0.80 (-0.29 ÷ 0.14)	0.19 (0.93÷0.82)	———

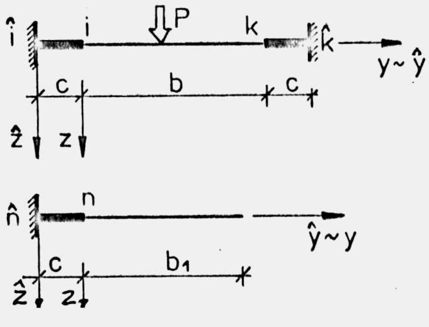


Rys. 3.7

Przy rozwiązywaniu konstrukcji betonowych może zachodzić pytanie, czy rozwiązywanie układu o dość znacznych grubościach żebra $/t_z/$ nie prowadzi do niezgodności modelu obliczeniowego przedstawionego na rys. 2.1 z obiektem rzeczywistym. Aby wyjaśnić tą kwestię przedstawione będzie rozwiązanie z "krępymi węzłami" [7], [56], gdzie część zawartą pomiędzy liniami węzłowymi k, j /rys. 3.8/ traktuje się jako nieskończenie sztywną, ze względu na siły płytowe i tarczowe, odkształcającą się jak pręt pryzmatyczny / G/.



Rys. 3.6



Zmodyfikowaną macierz sztywności elementu $\hat{\mathbf{k}}^e$ w bazie /^/ można przedstawić jako

$$\hat{\mathbf{k}}^e = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{G} \quad , \qquad /3.1/$$

gdzie $\mathbf{k}^e$ jak w /2.29/ lub /2.38/, a $\mathbf{G}$ będzie postaci

$$\mathbf{G}_R = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ c & 1 & 0 & 0 & & \emptyset & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -a_c & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \emptyset & & & -c & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & a_c & 1 \end{array}\right] \qquad /3.2/$$

dla elementu /R/, natomiast dla elementu /L/

$$\mathbf{G}_L = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \emptyset \\ -c & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \emptyset & & -a_c & 1 \end{array}\right] \quad , \qquad /3.3/$$

w których $a_c = m \cdot \pi \cdot c/l$.

Wektor obciążenia w bazie / ^ / otrzymać można z

$$\hat{\mathbf{p}}^e = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{p}^e \quad , \qquad /3.4/$$

gdzie $\mathbf{p}^e$ jak w /2.55/ dla elementu /R/ lub /2.56/ dla elementu /L/. Dokonując transformacji sił / $\mathbf{k}^e$, $\mathbf{p}^e$/ z bazy lokalnej elementów / ^ / do bazy ogólnej konstrukcji / ~ /, tak jak to zostało przedstawione w rozdziale 2.5, doprowadzić można do układu równań /2.97/, a po jego rozwiązaniu /2.98/ oraz wykorzystaniu

$$\hat{\mathbf{s}}_i^m = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{s}_i^m \qquad /3.5/$$

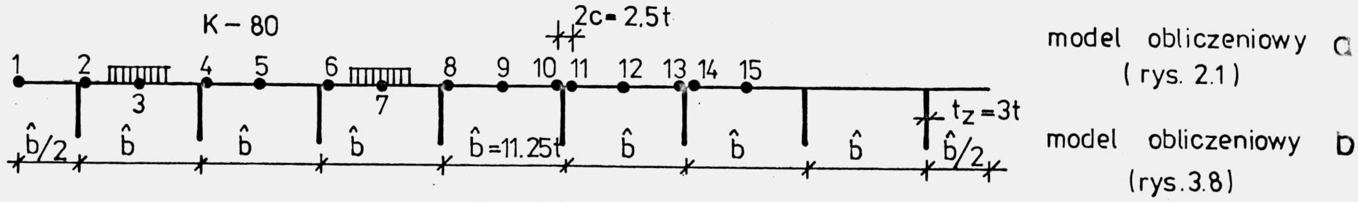
otrzymamy przemieszczenia w bazie / ^ /.

Przemieszczenia brzegowe elementów o postaci jak na rys. 2.11 otrzymamy z równania

$$\mathbf{s}_i^m = \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{s}}_i^m \quad . \qquad /3.6/$$

Wyznaczenie sił wewnętrznych w takich elementach nie przedstawia już żadnych trudności, gdyż /3.6/ i /2.99/ są identycznie zdefiniowane.

Pewną ilustracją przedstawionego algorytmu oraz porównaniem wyników otrzymanych dla dwóch modeli obliczeniowych niech będzie tabela 3.2, gdzie przyjęto



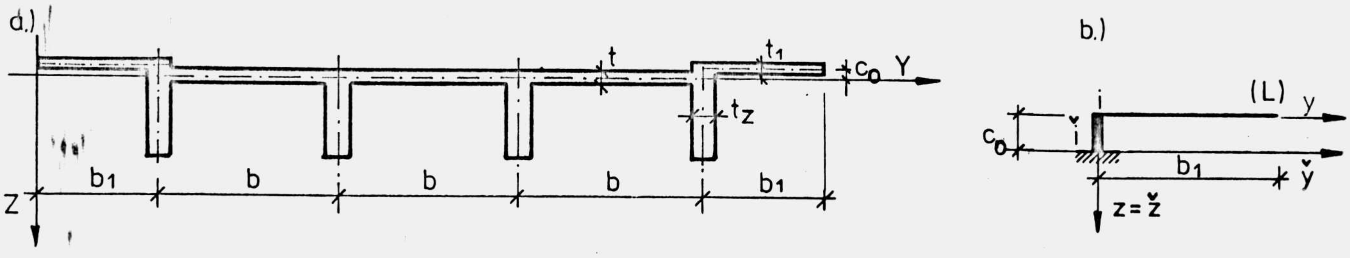
Rys. 3.9

Tabela 3.2

punkt		3	5	7	8	10	11	13	14
m_y	a	26.93	3.156	29.72	14.55	-19.47	-0.812	-16.80	-3.739
	b	26.58	3.532	29.35	14.62	-21.56	-2.153	-19.48	-5.357
punkt		1	2	3	5	6	7	8	9
m_x	a	8.514	9.483	12.50	8.237	9.593	11.19	8.152	4.266
	b	8.511	9.711	12.52	8.157	9.686	11.13	7.936	4.142
punkt		2	3	4	5	6	7	9	12
n_y	a	20.12	4.916	23.03	8.193	27.47	8.145	-18.46	-39.46
	b	13.43	-2.891	18.92	3.874	28.67	7.333	-22.89	-46.14
punkt		1	2	3	5	7	9	12	15
$-n_x$	a	2868.	2748.	2603.	2297.	1932.	1476.	1014.	623.3
	b	3268.	3112.	2045.	2583.	2169.	1677.	1179.	738.4

konstrukcję i obciążenie jak na rys. 3.4. Porównanie rozkładów m_x i m_y /wariant a i b/ pozwala stwierdzić, że przy wyznaczaniu sił płytowych wystarczające jest przyjęcie „modelu „a", nawet przy dość znacznym stosunku $t_z/b = 1/7$. Przy porównaniu sił tarczowych /n_x i n_y/ widać już wyraźny wpływ sztywności węzła.

Najniekorzystniej pracującym żebrem podłużnym w konstrukcjach mostowych jest zazwyczaj dźwigar skrajny. Aby poprawić jego nośność stosuje się czasem zwiększenie jego sztywności /EJ_x/ przez zwiększenie wysokości środnika np: [56], jak również podniesienie wspornika np: [30] , [64] /rys. 3.10a/. Spośród tych wariantów rozwiązań konstrukcyjnych drugi wydaje się być lepszym, ze względów eksploatacyjnych, ponieważ nie zwiększa wysokości konstrukcyjnej obiektu. Poniżej



Rys 3.10

zostanie przedstawiony sposób uwzględnienia tego przypadku, a w przy kładzie zostaną omówione konsekwencje statyczno-wytrzymałościowe tago zabiegu.

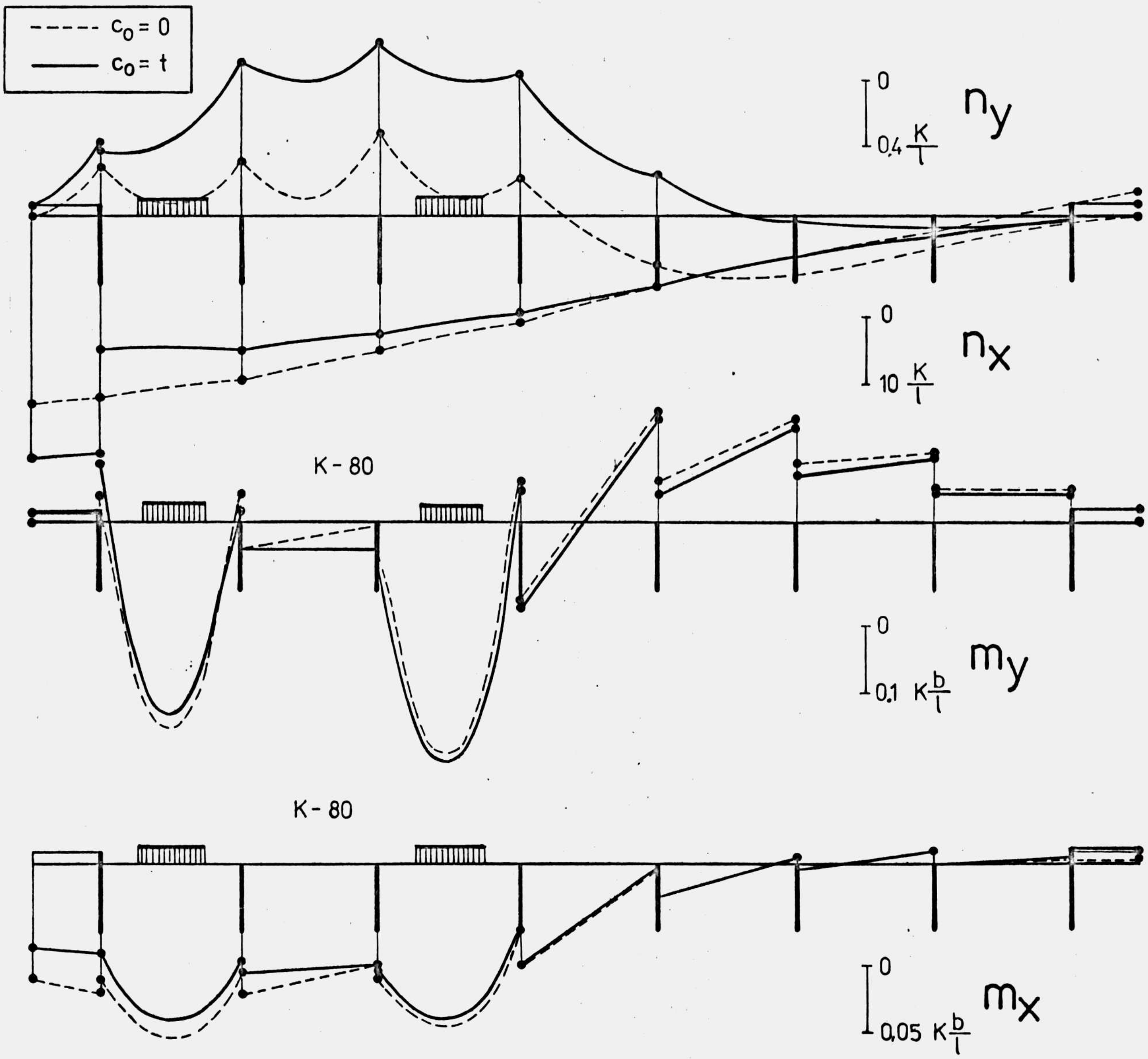
Dla małych wartości c_o /$c_o \approx t_z$/ korzystnie jest zastosować rozwiązanie analogiczne do przedstawionego powyżej /krępy węzeł/. W tym przypadku konieczne jest określenie macierzy sztywności elementu /L/ w układzie / ∨ / /rys. 3.10b/

$$\check{\mathbf{k}}_L^e = \mathbf{G}_o^T \cdot \mathbf{k}_L^e \, \mathbf{G}_o \qquad /3.7/$$

gdzie $\mathbf{k}_L^e$ jak w /2.38/, natomiast $\mathbf{G}_o$ jast postaci

$$\mathbf{G}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_o & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_m c_o & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad /3.8/$$

Dalsze postępowanie, odnoszące się jedynie do elementu /L/ jest ana-

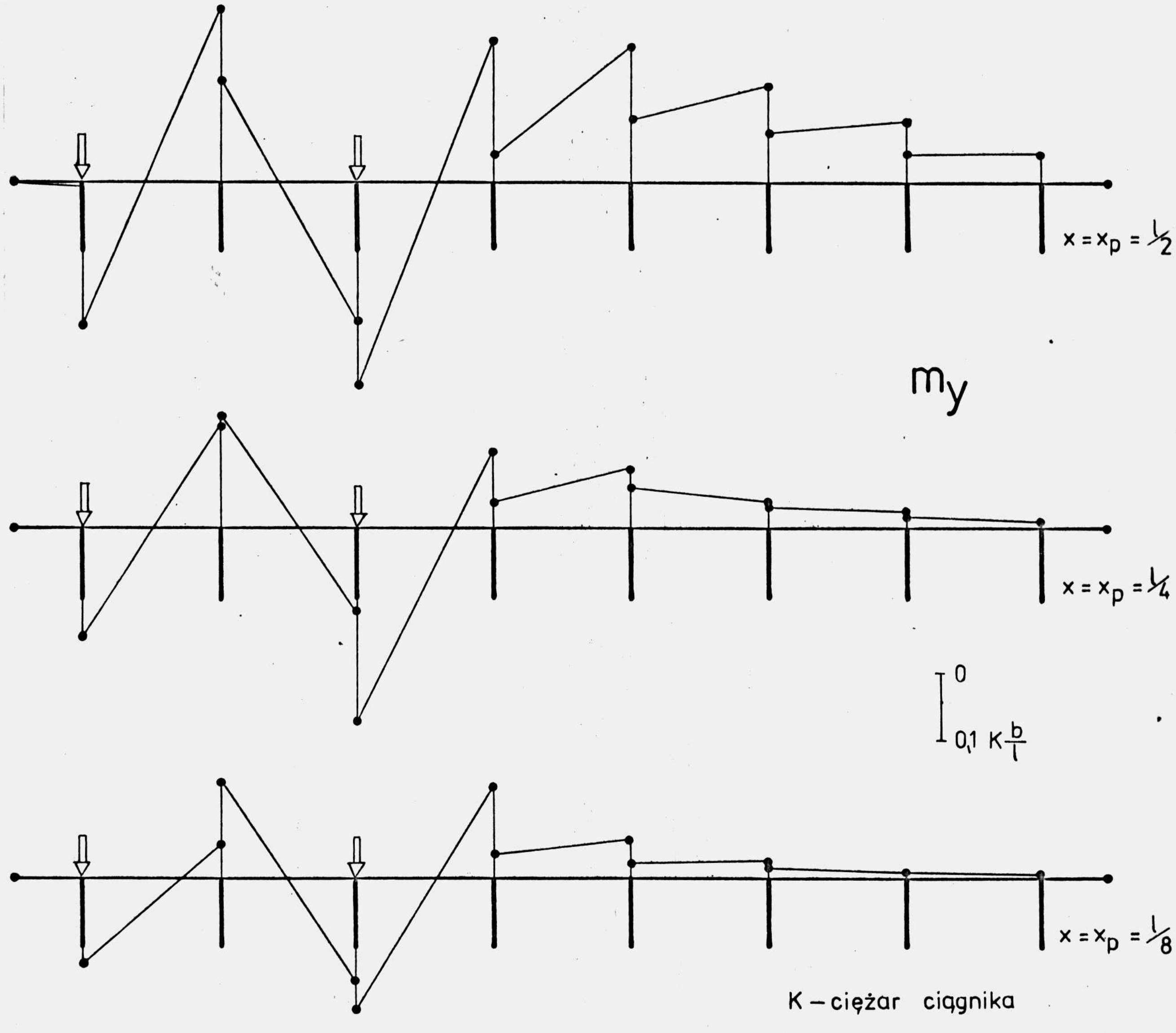


Rys. 3.11

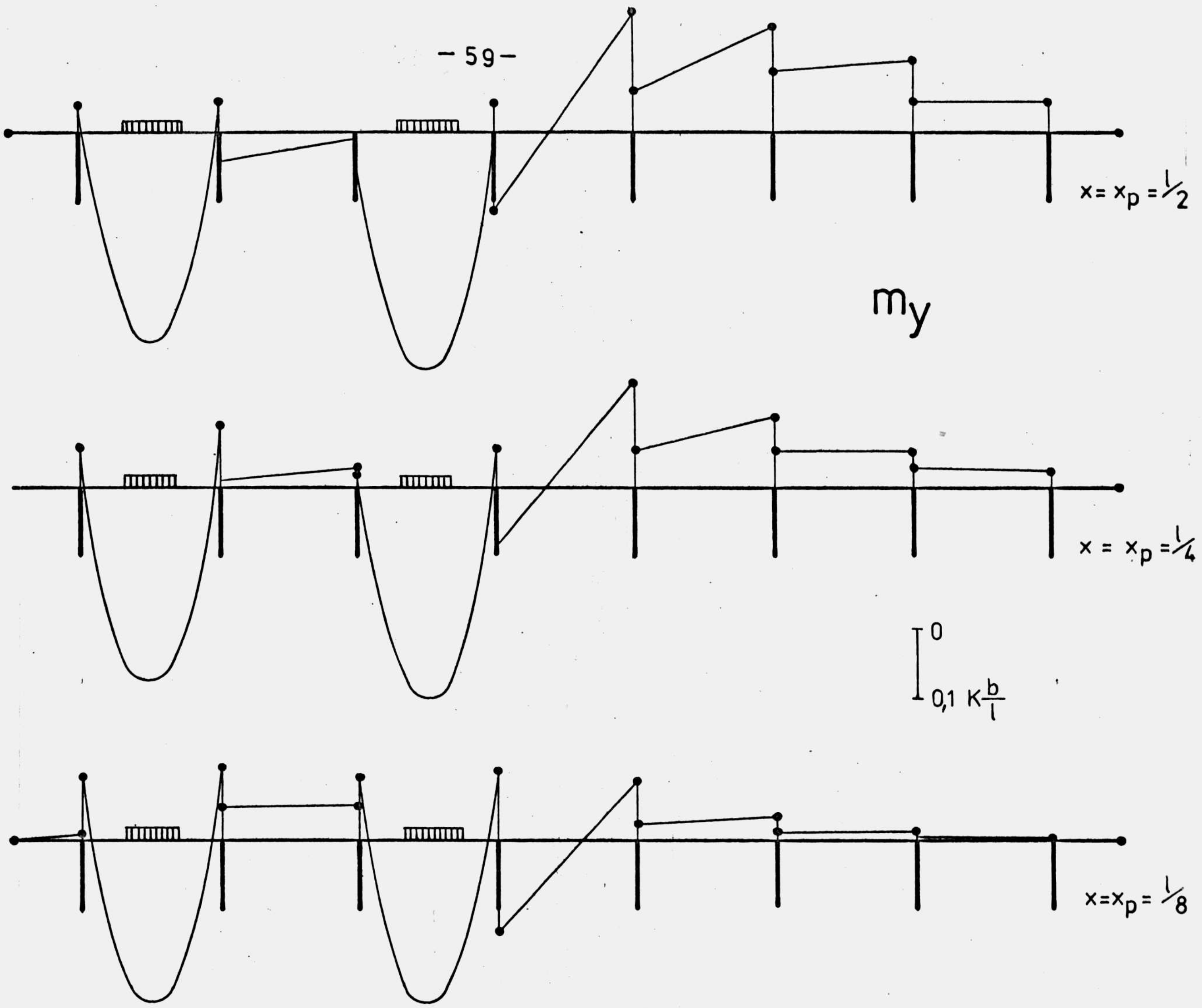
logiczne do przedstawionego dla "krępego węzła".

Pewną ilustracją przedstawionego algorytmu jest rys. 3.11, na którym porównano rozkłady sił $/X_p = X = 1/2/$ dla przypadku $c_o = 0$ oraz $c_o = t$. Z rysunku tego wynika, że podniesienie wspornika $/c_o > 0/$ wywiera wyraźny wpływ na rozkład sił tarczowych n_x i n_y. Momenty m_x ulegają wyraźnemu zmniejszeniu w obszarze podniesionego elementu, co jest wynikiem redukcji ugięć, natomiast momenty m_y ulegają pewnemu niewielkiemu złagodzeniu.

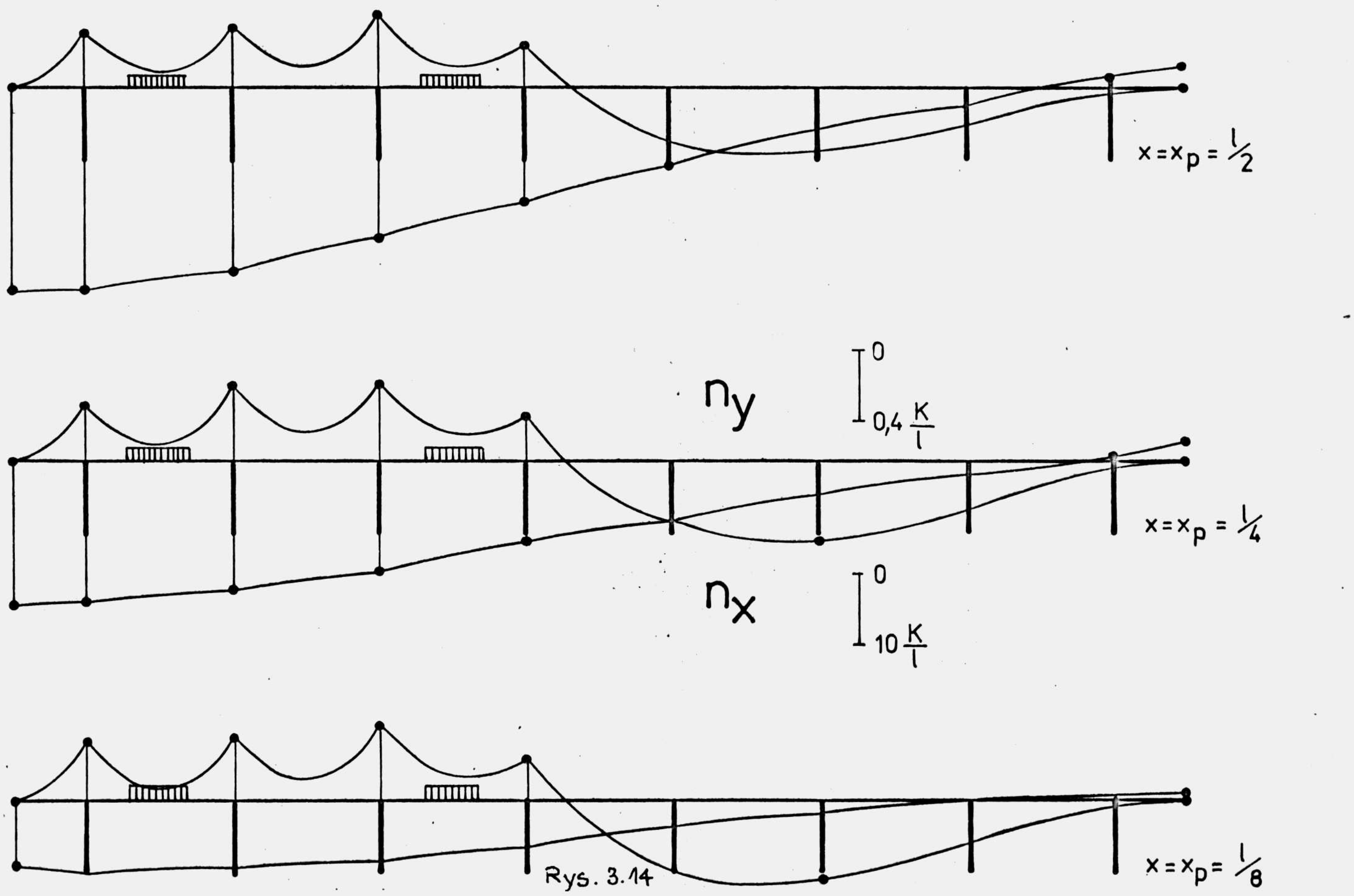
Pewną ilustracją zmian rozkładu sił na długości obiektu są rysunki 3.12 ÷ 3.14, gdzie przedstawiono przekroje poprzeczne przez powierzchnię sił w przekroju obciążonym $/X = X_p/$. Na rys. 3.12, dla konstrukcji i obciążenia jak na rys. 3.3, przedstawiono rozkład m_y



Rys. 3.12



Rys. 3.13



Rys. 3.14

przy ustawieniu obciążenia nad żebrem, natomiast na rys. 3.13 dla ustawienia pomiędzy żebrami. Można tutaj zauważyć wyraźne zmniejszanie się m_y wraz z położeniem obciążenia /X_p/. Podobny wniosek można wyciągnąć przy analizowaniu rozkładów n_x na rys. 3.14, natomiast n_y nie wykazuje wyraźniejszych tendencji do zmian.
Rozkłady sił w całej płaszczyźnie płyty dla układu czterobelkowego przedstawione są na rys. 9 i rys. 10 [41] oraz rys. 2 i rys. 3 [46].

3.1.2. Analiza momentów m_y w płycie

Momenty m_y mają decydujący wpływ na wymiarowanie płyt pomostowych z betonu zbrojonego co pociąga za sobą konieczność dokładnego określania ich wielkości. W rozdziale 2 przedstawiono sposób wyznaczania m_y, jednak zbyt ogólny aby można było przedstawić wielkość poszukiwaną w postaci funkcji kilku zmiennych [66] . W ogólności m_y przyjmie postać

$$m_y = F\left(F_p,\ F_g,\ F_s,\ F_o\right) \quad , \qquad /3.9/$$

gdzie F_j są funkcjami:

$$F_p = f_p\left(X,Y\right) \qquad /3.10/$$

położenia punktu /przekroju/ w płaszczyźnie X,Y,

$$F_g = f_g\left(l,b,t,b_1,t_1,h,t_z,i\right) \qquad /3.11/$$

parametrów geometrycznych konstrukcji,

$$F_s = f_s\left(D_x,\ D_y,\ D_{xy},\ \nu_x,\ E_x,\ E_y, G_{xy}, \dot{\nu}_x\right) \qquad /3.12/$$

cech sprężystych elementów oraz

$$F_o = f_o\left(Y_p,\ X_p,\ v_p,\ u_p,\ r_p,\ c_p\right) \qquad /3.13/$$

położenia i rozkładu obciążenia.

Jak wynika z powyższych równań dokonanie pełnej analizy wielkości m_y /3.9/, dla ogólnego przypadku konstrukcji i obciążenia, wydaje się być niemożliwe ze względu na zbyt dużą liczbę zmiennych niezależnych. Wyrywkowe badania numeryczne funkcji /3.10/ ÷ /3.13/ nie wskazują na możliwość eliminowania wpływu większości z nich.

Poniżej zostanie przedstawiona postać m_y (X,Y) jako funkcja trzech, ważniejszych zmiennych i, Y_p, t_z oraz stałej m_o /rys. 3.17b/

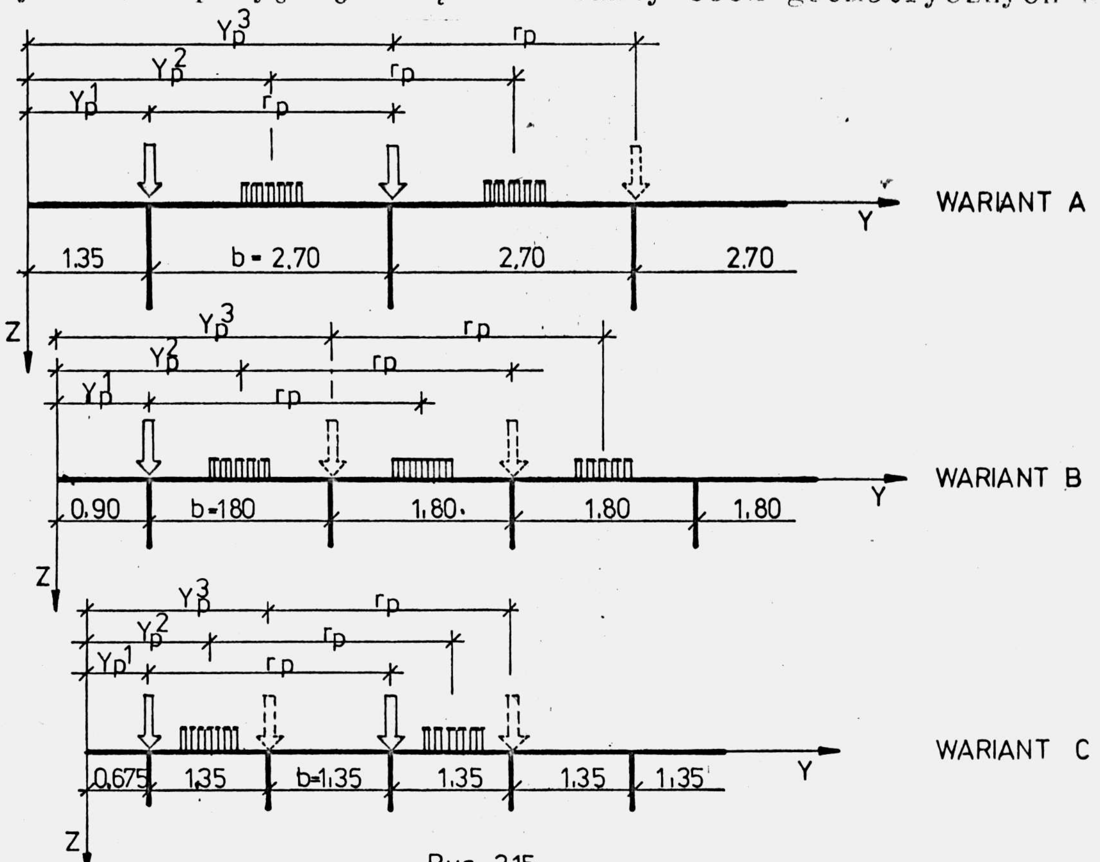
$$m_y\left(X,Y\right) = \zeta\left(i,Y_p,t_z\right).\ m_o \quad , \qquad /3.14/$$

którą uzyskano poprzez następujące założenia:

1. obciążeniem jest ciągnik K-80 [52] ustawiony w połowie rozpiętości ; X_p = l/2 /3.13/ ,
2. ustalone są cechy sprężyste elementów /materiał izotropowy, ν = 0.16/ /3.12/ ,

3. wymiary wspornika $b_1 = 0.5b$, $t_1 = t$ /3.11/ .

Dla zrealizowania trzech schematów ustawień poprzecznych obciążenia jak na rys. 3.15 przyjmuje się 3 warianty cech geometrycznych kon-



Rys. 3.15

strukcji /tabela 3.3/, natomiast obciążenie w każdym wariancie/rys. 3.15/ ulega przesunięciu poprzecznemu tak, że

$$Y_p^{n+1} = Y_p^n + 0.5.b \qquad n = 0,1,2,3...; \; Y_p^o = 0 \quad . \qquad /3.15/$$

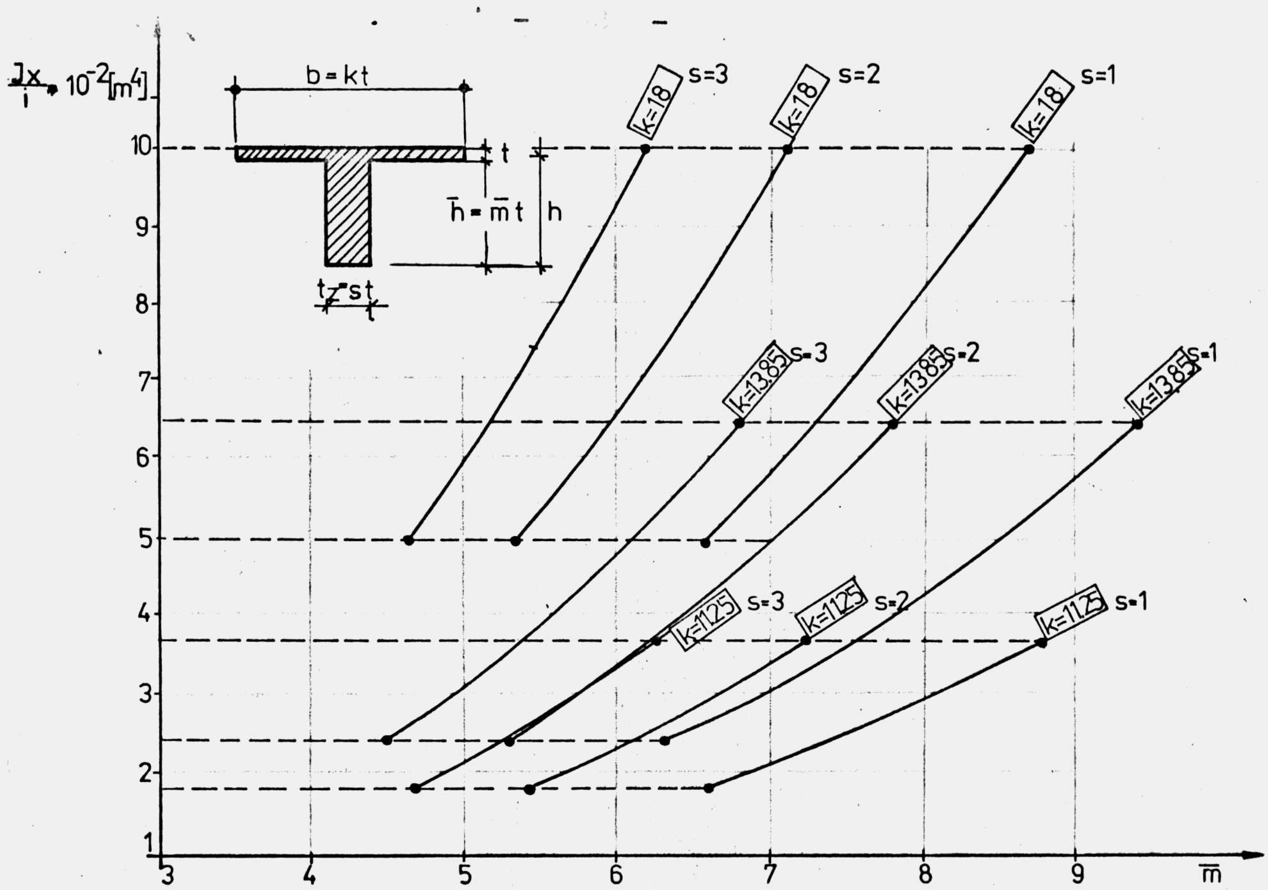
Tabela 3.3

WARIANT	b [m]	t [m]	i . J_x [m^4]	l
A /r_p=b/	2.7	0.15	0.300	
B /r_p=1.5b/	1.8	0.13	0.195	150·t
C /r_p=2b/	1.35	0.12	0.154	

Wymiary konstrukcji w poszczególnych wariantach spełniają następujące założenia:

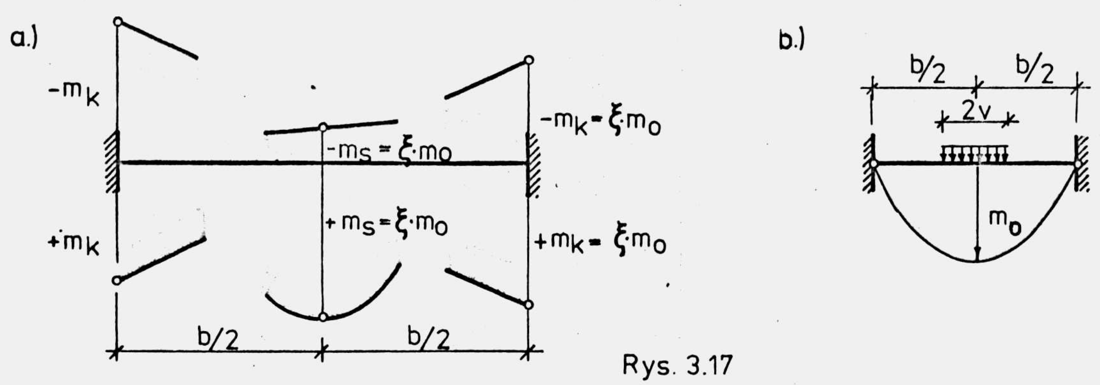
1. stałej sztywności płyty w kierunku y rozumianej jako: D_y/b=const.
2. stałych ugięć dźwigarów /ugięć średnich/ czyli l^3/EJ_x = const. , natomiast grubość oraz liczba żeber będą zmieniały się niezależnie: $t_z = (1,2,3)\cdot t$ oraz i = 3,4,5,6,7,8.

Dla tak ustalonych cech geometrycznych konstrukcji wysokość przekrojó można określić z wykresów rys. 3.16 na podstawie J_x/i,s,k.Przykładowo dla wariantu B oraz i=5,t_z=2·t otrzymamy /tabela 3.3/ b=13.85·t, J_x/i = 0.039 m^4, a z wykresu /rys.3.16/ $\overline{m}$=6.35 stąd h=6.85·t.



Rys. 3.16

Ogólna liczba wariantów numerycznych dla każdej liczby żeber /i = 3,4,5,6,7,8/, rozstawów poprzecznych obciążenia /r_p=b,3/2b,2b oraz grubości żebra /t_z = t,2t,3t/ ulega zmniejszeniu po wyeliminowaniu przypadków powtarzających się /symetria/, obiektów zbyt szerokich /wariant A dla i = 7,8/ oraz zbyt wąskich /wariant C dla i = 3/. Pozostałe, 165 wariantów, poddano analizie numerycznej, a na jej podstawie określono ekstremalne wartości m_y na brzegach /m_k/ i w środku /m_s/ elementu /rys. 3.17a/, przyjmując m_o podobnie jak w [66] /rys. 3.17b/.



Rys. 3.17

Mnożniki $\xi \cdot 10^{-2}$ dla poszczególnych wariantów konstrukcji, które są odpowiednimi rzędnymi obwiedni m_y w płycie przedstawiają tabele 3.4, 3.5, 3.6.

Tabela 3.4

Wariant B : $r_p = 1.5b$, $t_z = s{\cdot}t$

i	s	$+m_s$	$-m_s$	$-m_k$	$+m_k$
3	1.	71.02	6.90	35.71	5.47
	2.	63.25	3.31	37.07	10.34
	3.	58.67	1.27	48,36	14.56
4	1,	82.79	6.55	29.94	42.10
	2.	71.44	7.83	37.93	39.59
	3.	65.44	8.40	53.56	40.34
5	1.	91.69	13.16	29.94	50.76
	2.	75.78	10.95	38.51	47.90
	3.	66.56	12.13	52.76	53.34
6	1.	97.49	17.38	29.37	58.29
	2.	80.78	15.40	38.68	54.48
	3.	71.47	14.00	52.37	58.77
7	1.	99.16	19.88	28.70	61.49
	2.	83.87	17.00	38.39	57.75
	3.	75.80	14.28	51.72	62.14
8	1.	102.82	22.44	27.97	65.64
	2.	88.53	18.15	38.48	62.31
	3.	79.79	15.00	51.43	66.98

Tabela 3.5

Wariant A : $r_p = b$, $t_z = s{\cdot}t$

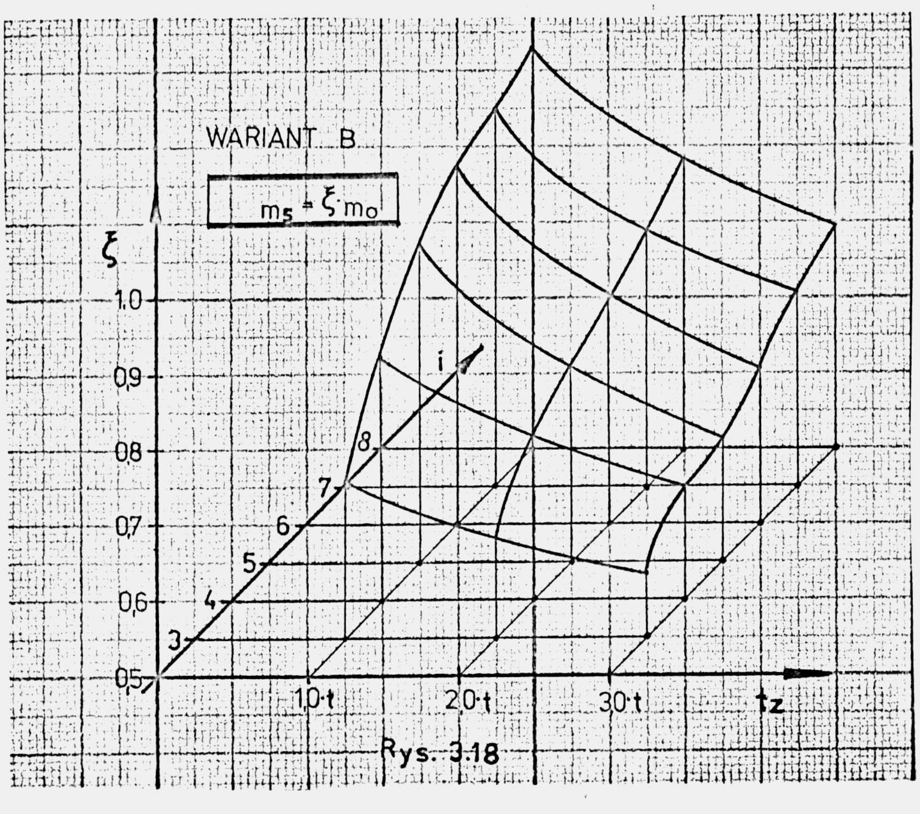
i	s	$+m_s$	$-m_s$	$-m_k$	$+m_k$
3	1.	73.78	———	31.39	22.04
	2.	63.54	———	40.85	26.46
	3.	57.27	———	53.09	33.29
4	1.	79.39	11,18	23.00	45.19
	2,	69.72	11.81	39.20	43.91
	3.	63.19	11.57	55.22	44.95
5	1.	88.23	19.48	29,27	50.55
	2.	76.88	16.35	38.82	50.52
	3.	69.46	13.59	54.43	55.04
6	1.	92.04	23.10	32.16	55.77
	2.	80.47	18.41	38.67	55.73
	3.	72.67	14.44	53.33	59.79

Tabela 3.6

Wariant C : $r_p = 2b$, $t_z = s{\cdot}t$

i	s	$+m_s$	$-m_s$	$-m_k$	$+m_k$
4	1.	75.49	17.51	52.43	47.33
	2.	62.33	12.20	53.75	47.51
	3.	55.74	9.20	57.48	50.67
5	1.	92.67	11.77	52.43	73.08
	2.	75.06	13.96	53.45	67.28
	3.	64.81	15.80	59.47	67.93
6	1.	103.29	20.12	54.24	86.00
	2.	84.52	19.54	54.20	80.93
	3.	72.34	18.12	63.09	83.36
7	1.	108.58	27.48	55.40	95.67
	2.	90.20	22.40	55.12	88.37
	3.	77.31	19.22	64.45	92.60
8	1.	113.63	31.27	56.15	100.33
	2.	94.31	23.63	55.55	93.37
	3.	82.36	20.11	65.77	99.44

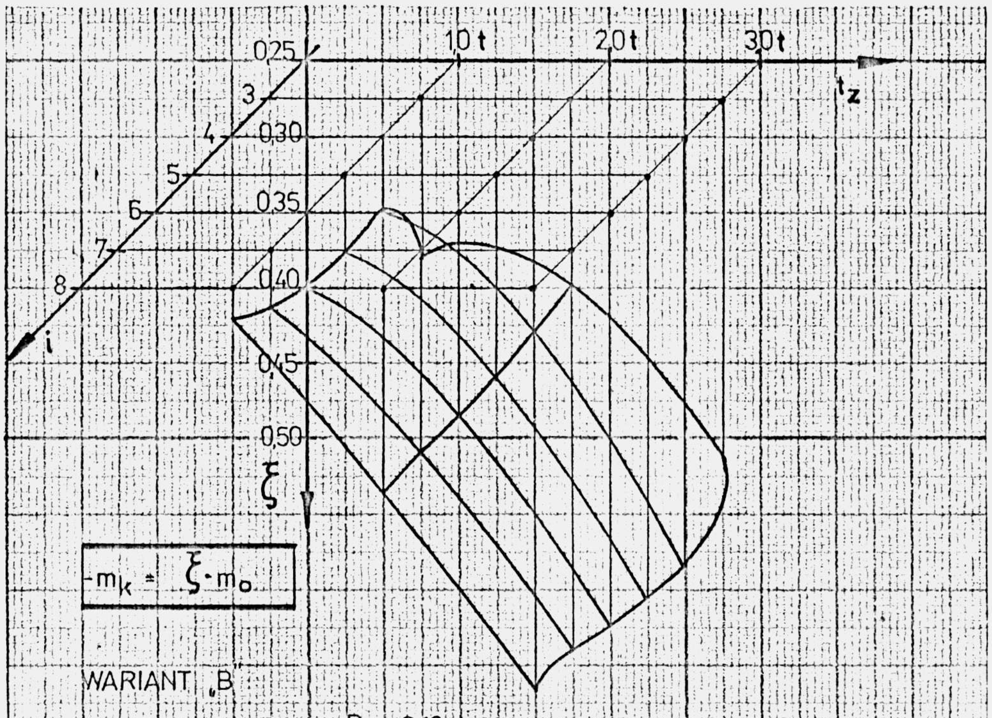
Momenty $+m_s$ wykazują zbliżoną zmienność we wszystkich wariantach /A, B i C/ wymiarów konstrukcji, natomiast wyraźnie zależą od liczby i wymiarów żebra /GJ_s/. Zależność tą dla wariantu B przedstawia rys. 3.18.



Rys. 3.18

Momenty $-m_s$ wykazują złożoną zmienność, ale z reguły są kilkakrotnie mniejsze od $+m_s$.

Momenty $-m_k$ w wariancie C nieznacznie zależą od liczby i wymiarów żebra, natomiast w wariancie A i C wykazują podobną zmienność. Na rys. 3.19 przedstawiono powierzchnię $-m_k$ dla wariantu B, z której



Rys. 3.19

wynika znaczny wpływ szerokości $/GJ_s/$ żebra, natomiast nieznaczny wpływ liczby żeber.

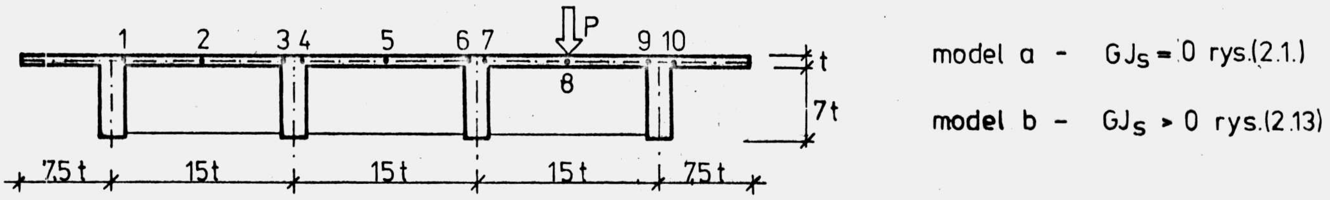
Momenty $+m_k$ wykazują słabą zależność od wymiarów i liczby żeber w wariancie A i B, natomiast w wariancie C wpływ liczby żeber jest znaczny.

Przedstawiona powyżej analiza pozwala określić obwiednię momentów m_y w płycie pomostowej jak na rys. 3.17 na podstawie momentu m_o /określonego dla płyty zawiasowo podpartej na wszystkich krawędziach o wymiarach b, l/ oraz od liczby i wymiarów /zmieniających się w dość szerokich granicach/ żebra. Na sformułowanie generalnych wniosków nie można sobie pozwolić, gdyż nie rozpatrzono wszystkich możliwych cech geometrycznych konstrukcji.

3.2. Płyty użebrowane podłużnie z poprzecznicami

Poniżej rozpatruje się konstrukcje, których rozwiązanie uzyskuje się z algorytmu przedstawionego w rozdziale 2.6. W części pierwszej oszacowano wpływ poprzecznicy skrajnej $/GJ_s/$, a w części drugiej analizuje się wpływ poprzecznicy przęsłowej na rozkład sił wewnętrznych w płycie.

Do wyznaczenia udziału poprzecznicy skrajnej przyjęto konstrukcję o wymiarach jak na rys. 3.20 z poprzecznicą skrajną o prze-



Rys. 3.20

kroju poprzecznym żebra podłużnego $/t_{ps} = t_z = 2t$ rys.2.13/. Jako obciążenie ruchome przyjęto pojedyńczą siłę rozłożoną na obszarze 2tx2t ustawioną w środku rozpiętości $X_p=1/2$, a porównanie rezultatów dla obu modeli /rys.3.20/ zamieszczono w tabeli 3.7.

Tabela 3.7

punkt		1	3	4	6	7	8	9	10
m_x	a	-3.972	0.502	-5.650	20.32	-57.21	373.6	-50.02	22.31
	b	-2.035	1.222	-4.399	18.70	-58.28	372.5	-51.46	21.23
m_y	a	-22.87	-28.45	-65.37	-18.71	-483.9	728.8	-464.8	-29.67
	b	-19.12	-26.74	-60.47	-25.29	-487.2	726.2	-467.4	-30.19
$X_p = X = 1/2$									
punkt		1	2	4	5	7	8	9	11
n_x	a	16.11	1369.	2876.	4656.	7930.	7684.	10335.	9936.
	b	37.48	1588.	2990.	4659.	7817.	7466.	9975.	9474.
n_y	a	40.73	112.2	132.1	48.57	-336.0	220.1	-758.6	0.
	b	36.81	117.2	135.5	47.71	-340.4	214.4	-755.0	0.

Jak można zauważyć, wpływ sztywności na skręcanie poprzecznicy skrajnej jest minimalny /punkty 7, 8, 9/. Nieco większe różnice występują gdy przekrój przez powierzchnię sił będzie się zbliżał do podpory /tabela 3.8/, jednak ze względu na to, że wielkości tam występujące są na ogół mniejsze, nie ma to większego znaczenia praktycznego.

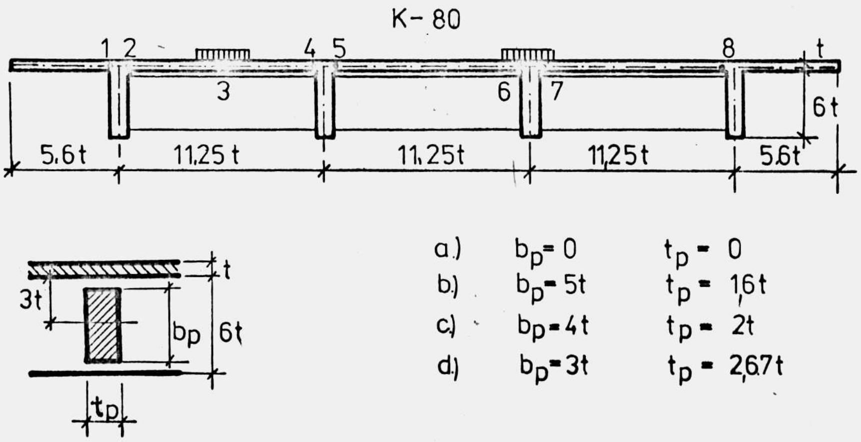
Poniżej rozpatruje się udział poprzecznicy przęsłowej w rozkładzie sił wewnętrznych w płycie. Zastosowany typ poprzecznicy /rys. 2.13/ oddzielonej od płyty pomostowej prowadzi do uproszczenia technologii [60] oraz pozwala na znaczne ułatwienie obliczeń

Tabela 3.8

punkt		1	3	4	6	7	8	9	10
m_x	a	-1.497	0.098	-2.585	8.323	7.242	22.04	8.943	6.431
	b	-0.735	0.271	-1.644	7.269	6.808	21.12	8.531	6.088
m_y	a	-8.508	-11.68	-27.76	23.91	17.42	34.40	18.01	3.132
	b	-7.407	-11.27	-22.77	18.37	15.61	32.89	18.07	3.607
				$X_p = 1/2 \quad X = 1/8$					
punkt		1	2	4	5	7	8	9	11
$-n_x$	a	57.01	503.0	968.1	1276.	1592.	2016.	2448.	2859.
	b	416.7	783.7	1124.	1257.	1407.	1735.	2116.	2470.
n_y	a	5.709	25.62	57.48	20.31	-26.38	-8.474	7.702	0.
	b	29.01	44.21	82.80	12.08	-67.86	-33.23	-11.91	0.
				$X_p = 1/2 \quad X = 0$					
punkt		1	3	4	6	7	9	10	11
n_{xy}	a	75.75	443.1	320.1	979.2	946.1	1094.	1349.	0.
	b	657.9	867.3	732.4	467.5	402.9	632.0	865.8	0.

[25,31,61,64] . Przeprowadzone badania numeryczne pozwalają stwierdzić, że ten typ poprzecznicy współpracuje w układzie nie tylko jak belka, na zginanie, lecz jak dźwigar zespolony z płytą pomostową na wzór belek złożonych, klockowych. Wpływ zespolenia potwierdzają rozkłady n_y na rys. 3.23 i rys. 3.22, na których można zauważyć "szerokość współpracującą" płyty z poprzecznicą. Powyższe spostrzeżenie pozwala sądzić, że tego typu rozwiązanie konstrukcyjne niewiele odbiega /przy węzłowych obciążeniach/ od rozwiązania poprzecznicy połączonej z płytą pomostową.

Dla ustalenia wpływu sztywności giętnej poprzecznicy przeprowadzono wyrywkową analizę, do której przyjętu układ czterobelkowy o cechach geometrycznych jak na rys. 3.1 oraz poprzecznicę o zmieniających się wymiarach jak na rys. 3.21, zakładając przy tym stałe jej pole przekroju.



Rys. 3.21

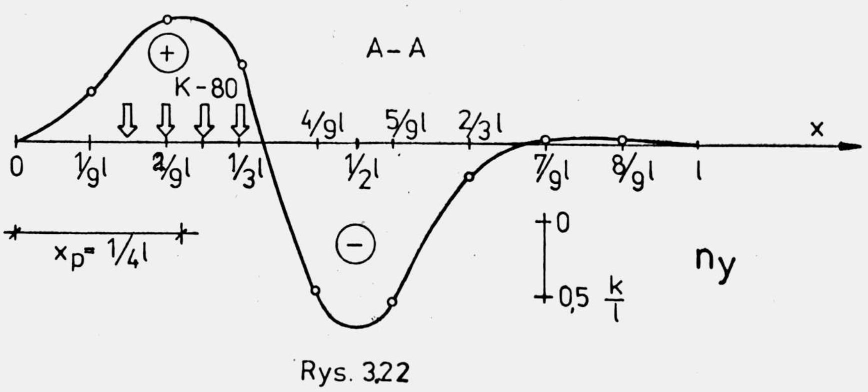
Z zestawionych w tabeli 3.9 rezultatów analizy numerycznej wynika nieznaczny wpływ sztywności giętnej poprzecznicy na siły wewnętrzne

Tabela 3.9

punkt		1	2	3	4	5	6	7	8
m_x	a	5.419	3.809	9.693	4.522	5.417	7.218	8.245	1.748
	b	6.735	1.847	7.078	2.366	5.193	4.014	4.792	2.982
	c	6.757	2.088	7.073	2.139	5.375	3.744	4.139	3.616
	d	6.775	2.226	7.064	2.001	5.480	3.573	3.750	3.988
m_y	a	-1.327	-11.39	27.78	-8.569	-2.979	10.73	17.15	-13.34
	b	3.717	-26.84	17.10	-18.96	-1.301	-3.079	1.783	-8.808
	c	3.599	-25.58	17.07	-20.35	-0.131	-3.981	-1.509	-5.412
	d	3.547	-24.88	17.03	-21.19	0.545	-4.575	-3.464	-3.435
$X = X_p = 1/2$									
$-n_x$	a	1713.	1712.	1611.	1631.	1631.	1480.	1480.	1129.
	b	1753.	1802.	1587.	1554.	1568.	1357.	1332.	1289.
	c	1759.	1808.	1590.	1552.	1568.	1340.	1314.	1303.
	d	1763.	1810.	1592.	1552.	1568.	1329.	1304.	1310.
$-n_y$	a	-27.62	-29.91	-7.039	-49.23	-46.43	-63.17	-63.56	-11.97
	b	-98.68	212.8	174.1	92.46	183.8	211.7	50.59	176.4
	c	-98.49	204.2	168.0	85.49	186.1	218.7	56.72	175.4
	d	-96.65	193.2	160.8	79.37	182.3	217.4	59.73	170.3

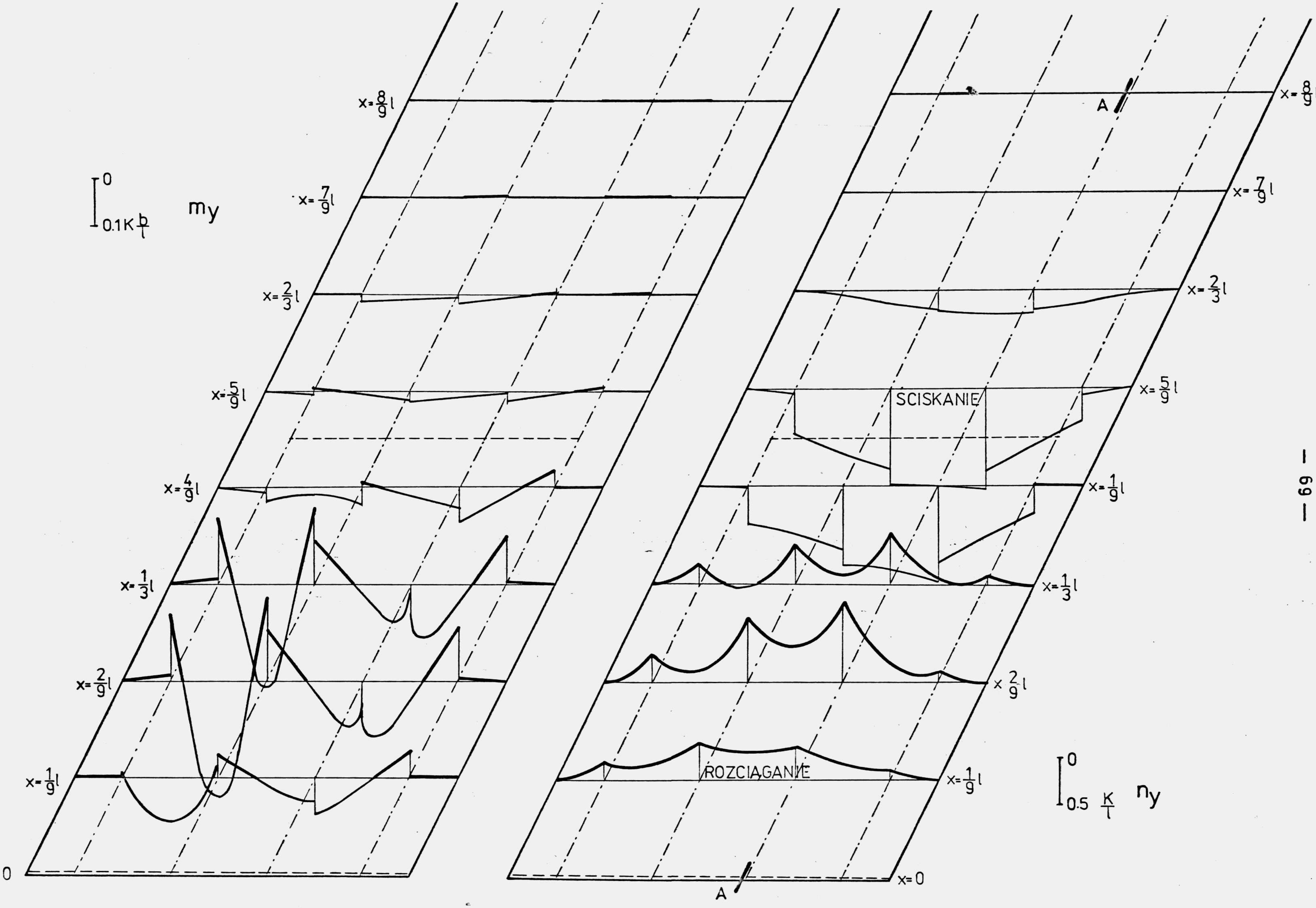
w płycie /nieco większy w poprzecznicy/, co potwierdzałoby tezę pracy dźwigara złożonego. Natomiast porównanie wariantu /a/ z pozostałymi wskazuje na duży jej wpływ na rozkład sił wewnętrznych, szczególnie m_y i n_y.

Na rys. 3.23 przedstawiono rozkłady m_y i n_y dla konstrukcji i obciażenia jak na rys. 3.21 ustawionym w $x_p = 1/4$ /poprzecznica wariant C/. Dla zilustrowania zmienności n_y na długości przedstawiono na rys. 3.22 przekrój podłużny /A-A/ przez powierzchnię n_y z rys. 3.23.



Rys. 3.22

Przedstawione tu rezultaty miały na celu zobrazowanie pracy konstrukcji z pewnym typem poprzecznic, ukazaniem charakterystycznych zmian w rozkładzie sił wewnętrznych oraz możliwości programu



$x=\frac{8}{9}l$
$x=\frac{7}{9}l$
$x=\frac{2}{3}l$
$x=\frac{5}{9}l$
$x=\frac{4}{9}l$
$x=\frac{1}{3}l$
$x=\frac{2}{9}l$
$x=\frac{1}{9}l$
0
$0.1K\frac{b}{l}$
m_y
A
SCISKANIE
ROZCIAGANIE
$x=0$
$0.5\ \frac{K}{l}$
n_y

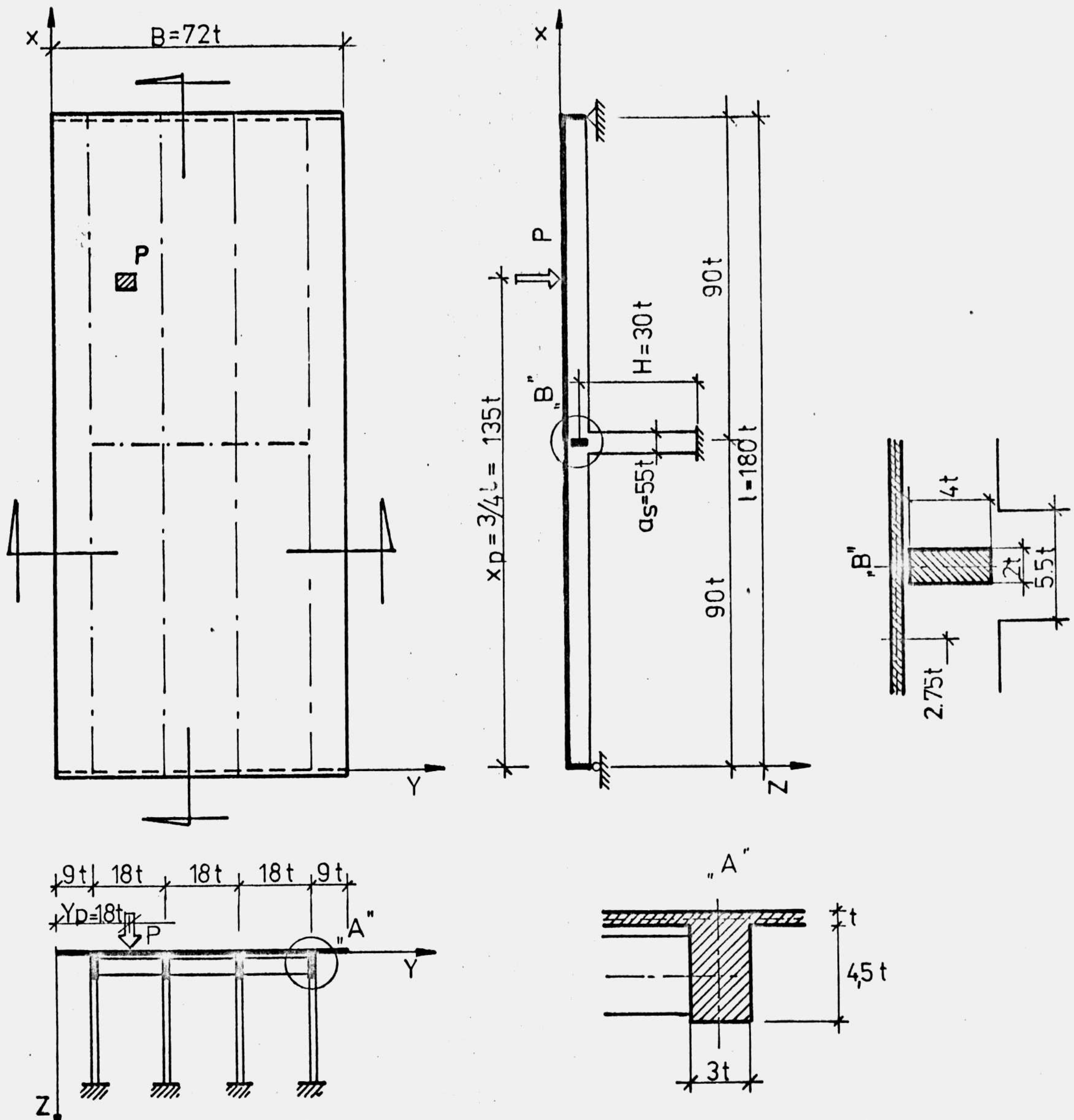
Rys. 3.23

do analizowania wytężenia płyty. Analogiczne rozwiązanie lecz przy przyjęciu innego rodzaju obciążenia przedstawione będzie w rozdziale 4.2.

3.3. Płyty użebrowane z podporami pośrednimi

Częstym przypadkiem występującym w płytach użebrowanych typu mostowego są konstrukcje z podporami pośrednimi w postaci łożyska stałego lub ruchomego /wieloprzęsłowe/ albo słupa /ramowe/. Poniżej przedstawiony będzie przykład rozwiązania konstrukcji ramowej jak na rys. 3.24, dla której obciążenie ruchome stanowi pojedyncza siła P rozłożona na powierzchni 2t x 2t.

W rozwiązaniu ogólnym przedstawionym w rozdziale 2.6 wektor sił nadliczbowych /2.115/ będzie postaci



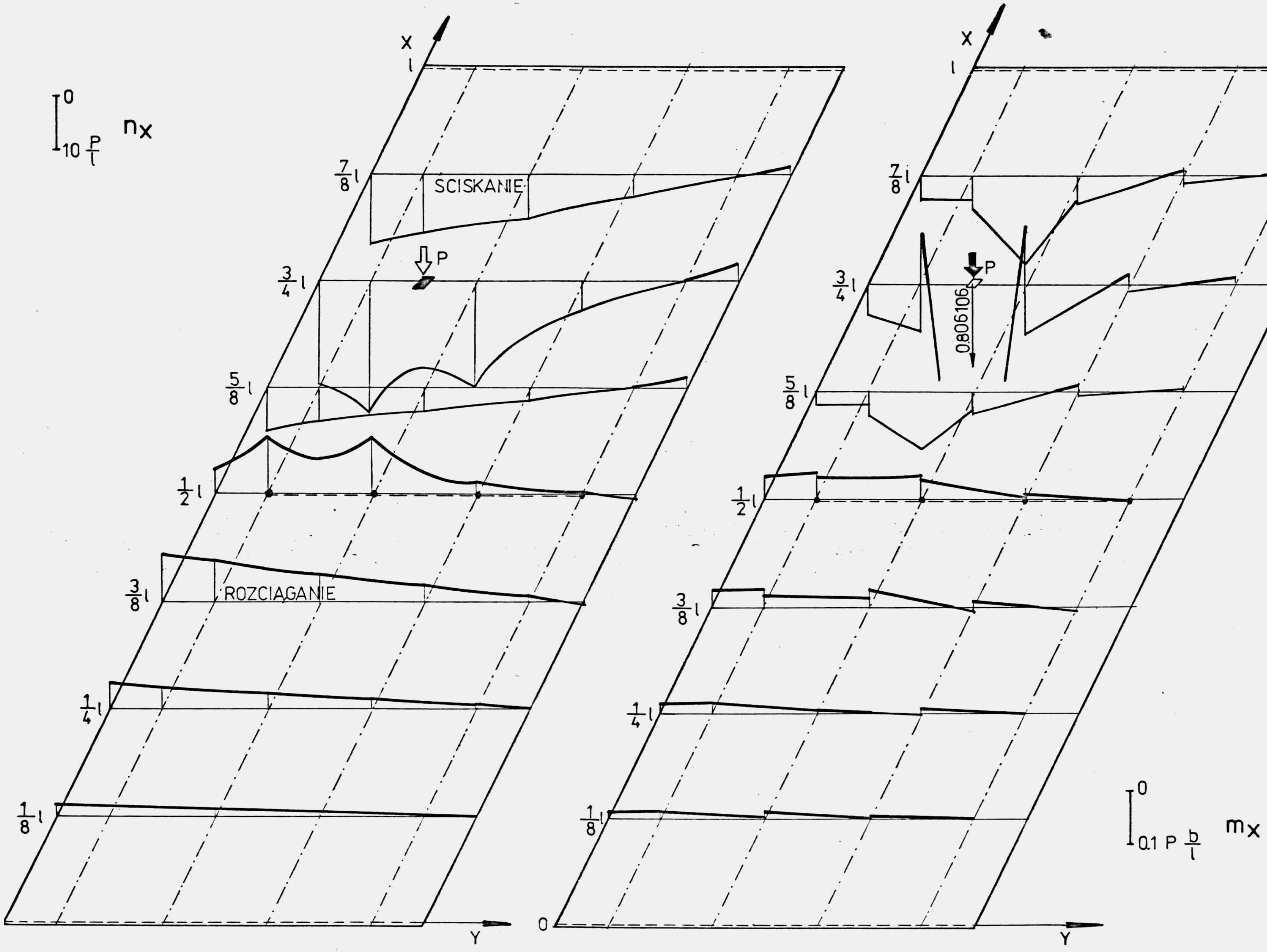
Rys. 3.24

$$\mathbf{x}^i = \left[M_y^i(o)\ M_y^i(l) \,\middle|\, T_x^i\ M_x^i\ N_y^i\ M_y^i\ T_z^i\ M_z^i \,\middle|\, T_{xo}^j\ M_{yo}^j\ T_{yo}^j\ M_{yo}^j\ N_{zo}^j\ M_{zo}^j \right]^T \qquad /3.16/$$

$i = 1,2...r-1 \quad , \quad j = 1,2...r \quad ,$

gdzie występują kolejno siły nadliczbowe: poprzecznic skrajnych, poprzecznicy podpory pośredniej oraz podpory pośredniej /w przypadku innego typu podpory niektóre siły grupy trzeciej są z założenia zerowe/. Dalsze rozumowanie przedstawione zostało w rozdziale 2.6, a przebieg liczenia zilustrowany jest na rys. 2.16.

Na rys. 3.25 zamieszczono rozkłady sił n_x i momentów m_x dla konstrukcji i obciążenia jak na rys. 3.24. Analizując rozkład sił n_x na długości można zauważyć podobny charakter zmian jak momentów zginających w wydzielonej ramie płaskiej. W przekroju obciążonym oraz w przekroju podpory pośredniej pojawiają się charakterystyczne zmiany n_x na szerokości elementu. Momenty m_x w części obciążonej $/0,5 \cdot l < X < l/$ płyty wykazują znaczne różnice od charakteru n_x, co jest skutkiem dominującej roli momentów m_y w tym obszarze.



X
l
0
10 P/l
nx
7/8 l
SCISKANIE
P
3/4 l
5/8 l
1/2 l
3/8 l
ROZCIAGANIE
1/4 l
1/8 l
Y
0.806106
0.1 P b/l
mx

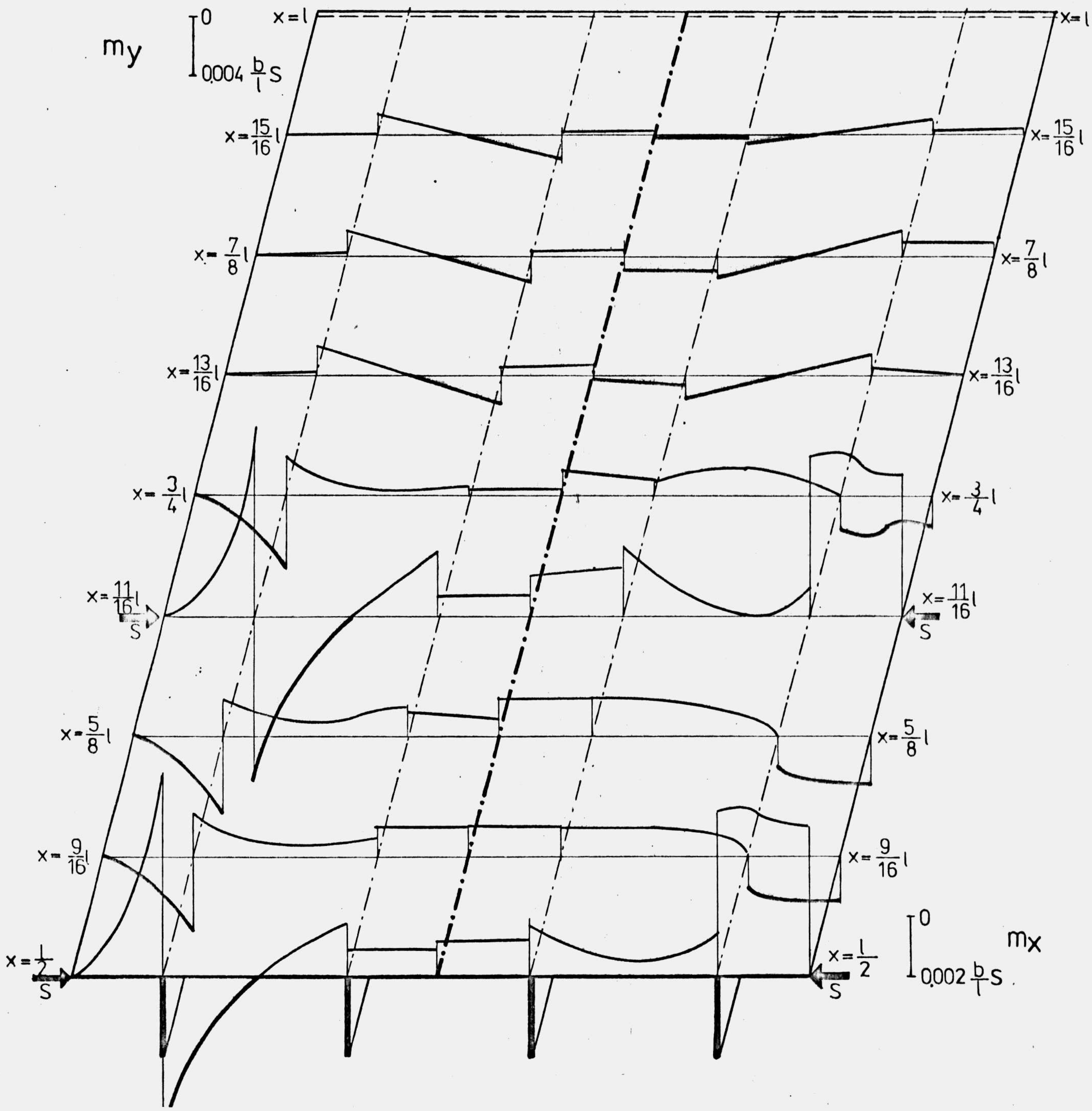
Rys. 3.25

4. ROZKŁAD SIŁ OD SPRĘŻENIA

4.1. Sprężenie poprzeczne poprzez płytę

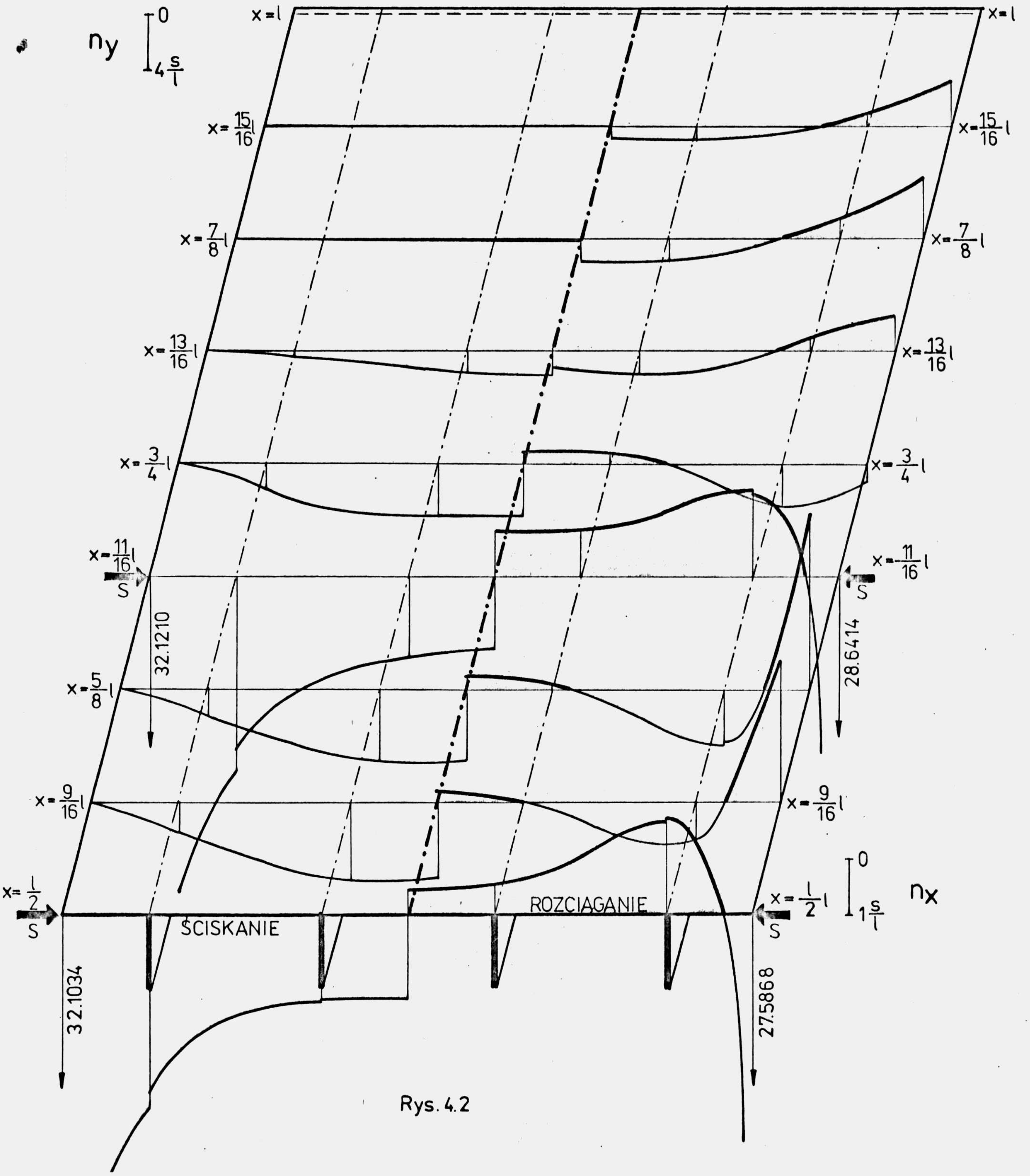
Poniżej przedstawiono rozwiązanie płyty użebrowanej podłużnie o wymiarach jak na rys. 3.1 poddaną działaniu trzech, równych sił sprężających rozmieszczonych na długości w X_s = 5/16 l, 1/2 l, 11/16 l /rys. 4.1/. Ze względu na symetrię konstrukcji i obciążenia odpowiednie powierzchnie sił wewnętrznych przedstawione będą na 1/4 części płyty.

Na rys. 4.1 zamieszczono rozkłady momentów: w części lewej m_y, a w części prawej m_x. Złożony ich przebieg wskazuje na zmienność krzywizn powierzchni ugięcia. Ze względu na małe wartości naprężeń jakie wywołują momenty,



w porównaniu do odpowiednich naprężeń od sił tarczowych,mają one charakter drugorzędny.

Na rys. 4.2 zamieszczono rozkłady sił tarczowych : w części lewej n_y, a w części prawej n_x. Przypominają one swym charakterem rozpatrywane w [29] rozkłady sił dla płyt nieużebrowanych,przy czym tutaj występują pewne nieciągłości powierzchni w miejscach żeber podłużnych. W obszarze przyłożenia obciążenia uwydatniają się miejsca osobliwe algorytmu. Przedstawione w rozdziałach 2.4.2 i 2.4.3 rozwiązanie jest wystarczające dla konstrukcji traktowanej

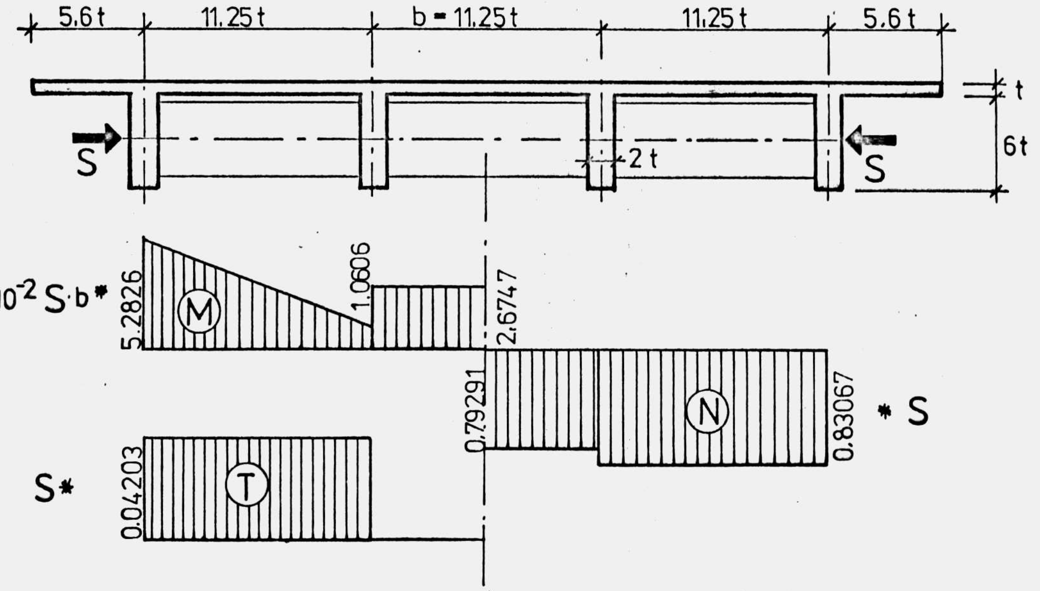


Rys. 4.2

jako całość, jednak dla elementu bezpośrednio obciążonego i w obszarze przyłożenia siły konieczne jest odmienne podejście. Wynika to z faktu, że zbieżność sił w obszarze odległym od punktu przyłożenia obciążenia jest dobra /rys. 5.5/, natomiast w bezpośrednim otoczeniu zbieżność jest słaba.
Rozkład sił w bezpośrednim sąsiedztwie siły sprężającej można otrzymać z odpowiednich badań doświadczalnych dla poszczególnych typów zakotwień /typowych/ lub z rozwiązań szczególnych tarcz obciążonych na brzegu swobodnym np: [45], natomiast tutaj głównym celem było określenie rozkładu sił wywołanych sprężeniem w onszarach płyty poza miejscem zakotwienia cięgna.

4.2. Sprężenie poprzeczne poprzez poprzecznicę

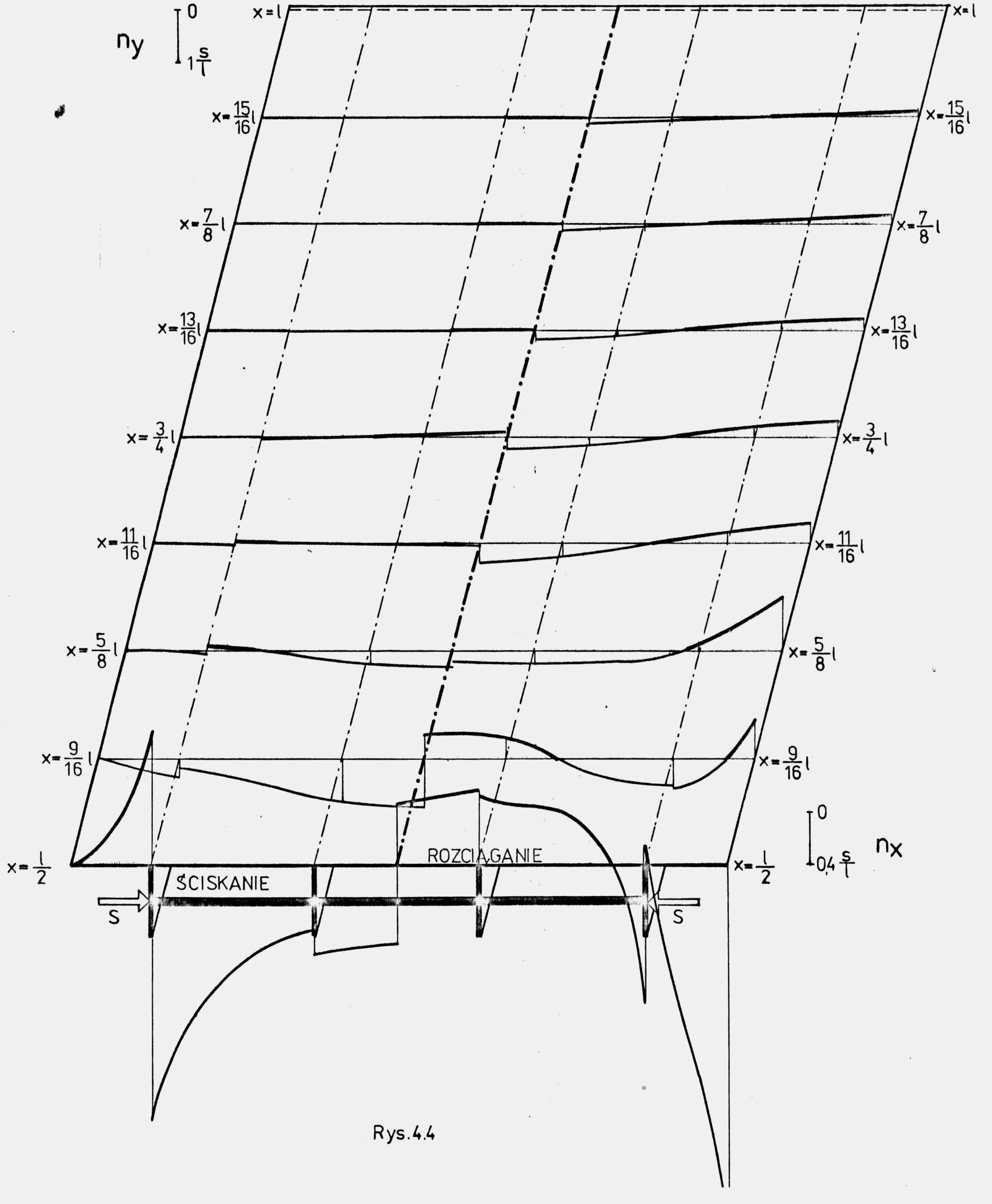
Poniżej przedstawiono rozwiązanie konstrukcji o modelu obliczeniowym jak na rys. 2.14 poddaną działaniu sprężenia poprzez poprzecznicę jak na rys. 4.3.



Rys. 4.3

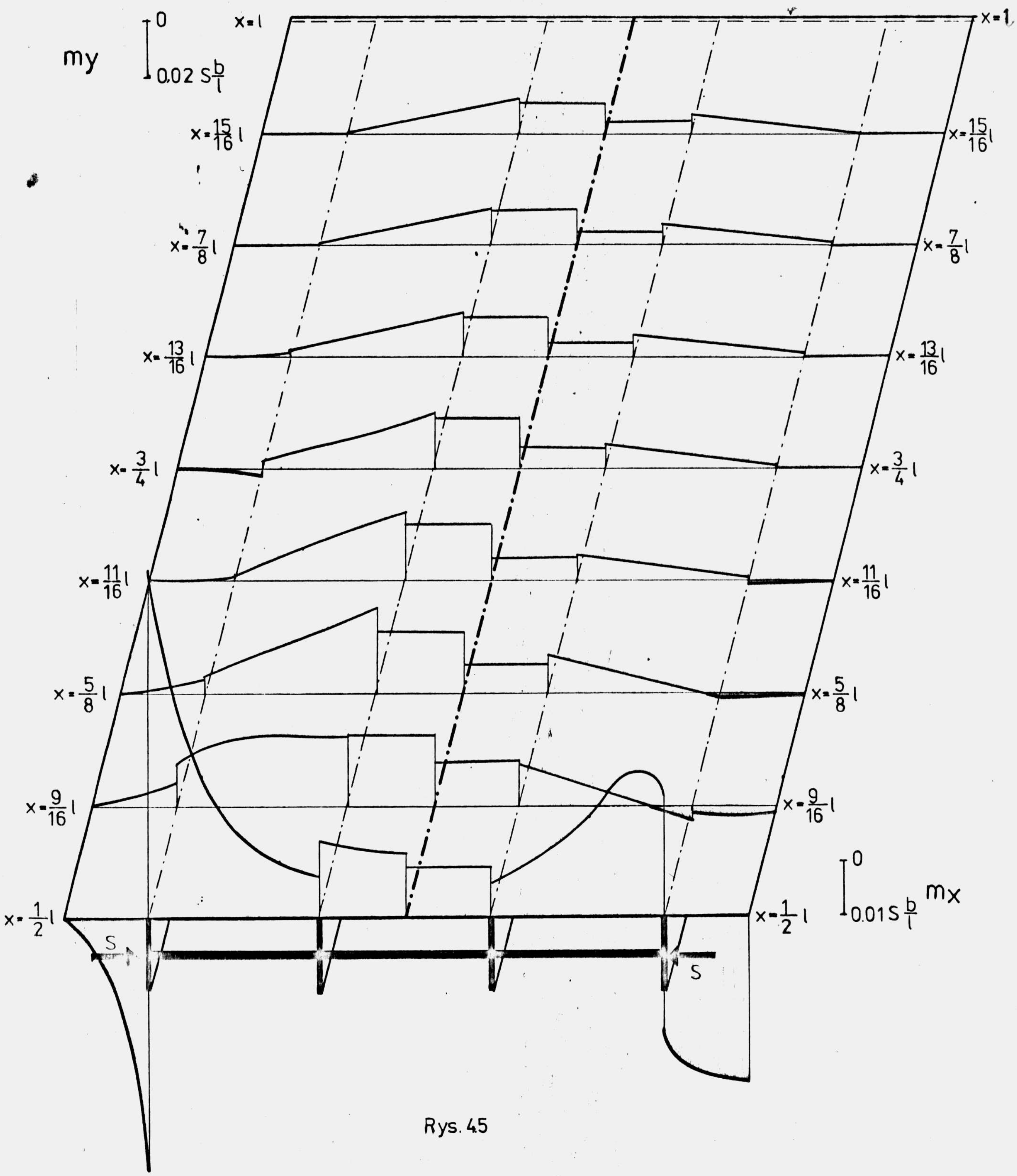
Uzupełnieniem rozkładów sił wewnętrznych w płycie są siły wewnętrzne w poprzecznicy przedstawione na rys. 4.3.
Z wykresu sił osiowych N w poprzecznicy można określić udział płyty pomostowej w przenoszeniu siły sprężającej /szerokość współpracująca płyty/. Zmienność siły osiowej w poprzecznicy koresponduje z nieciągłościami powierzchni n_y /rys.4.4/ w pobliżu żeber podłużnych.

Na rys. 4.4 przedstawiono powierzchnię sił tarczowych n_y w części lewej oraz n_x w części prawej. Z rozkładu sił n_y wynika niewielki zasięg sprężenia /podobny efekt wywołuje obciążenie ruchome - tabela 3.9/. Wypływa stąd wniosek, że sprężenie poprzez poprzecznicę nie powinno mieć na celu polepszenie pracy betonowej płyty pomostowej, gdyż taki sam efekt wywołuje sama poprzecznica przy środkowym położeniu obciążenia ruchomego.



Rys.4.4

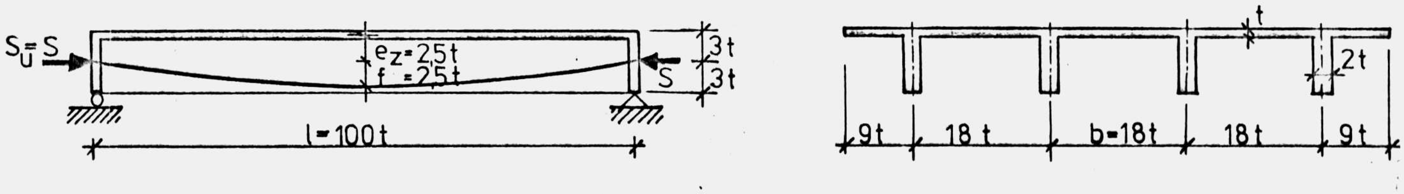
Na rys. 4.5 przedstawiono powierzchnię momentów zginających m_y w części lewej oraz m_x w części prawej. Momenty w całej płaszczyźnie płyty są regularne za wyjątkiem obszaru bezpośrednio obciążonego.



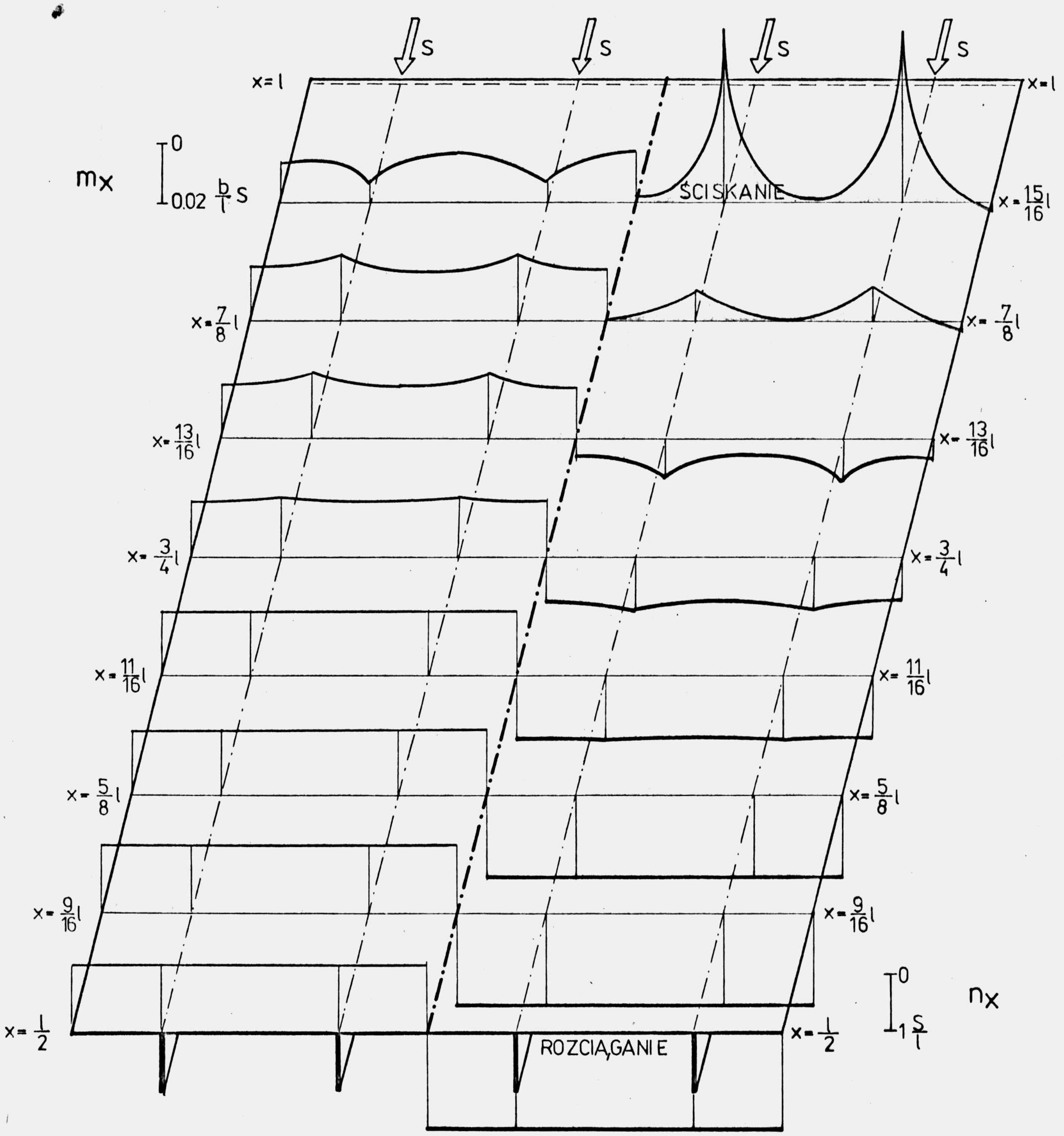
Rys. 45

4.3. Sprężenie podłużne poprzez żebro podłużne

Poniżej przedstawiono rozwiązanie płyty użebrowanej podłużnie, poddanej sprężeniu podłużnemu za pomocą cięgna o trasie parabolicznej jak na rys. 4.6.



Rys. 4.6



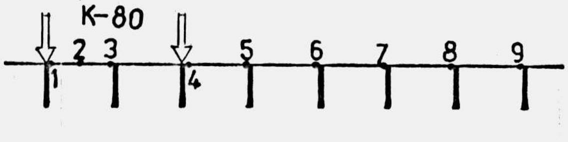
Rys. 4.7

Na rys. 4.7 przedstawiono powierzchnię momentów m_x w części lewej oraz sił n_x w części prawej. Powierzchnia momentów m_x niemal w całej płaszczyźnie płyty jest płaska, jedynie w pobliżu miejsca przyłożenia obciążenia ulega pewnym zniekształceniom. Siły tarczowe n_x w środkowej części przęsła wykazują stały rozkład, a wraz ze zbliżaniem się do strefy zakotwienia można zauważyć tworzenie się ekstremów w pobliżu żebra. W bezpośrednim obszarze sprężenia rozkład sił /naprężeń/ można wyznaczyć z badań doświadczalnych dla różnych typów bloków kotwiących lub na podstawie analizy elastooptycznej czy też z obliczeń wykonanych za pomocą innych sposobów.

5. ANALIZA UZUPEŁNIAJĄCA

5.1. Wpływ cech sprężystych elementów na rozkład sił wewnętrznych

Wprowadzone w rozdziale 2 równania są w dużym stopniu ogólne, gdyż pozwalają na uwzględnienie różnych ortogonalnych /stałych na długości i szerokości elementu/ cech sprężystych układu. Ogólność, uzyskana poprzez żmudne przekształcenia wzorów, prowadzi do zawiłych równań typu [50],[54], natomiast pewne uproszczenia /$\nu=0$ [22], $\alpha=1$ ale $D_x \neq D_y$ [8]/ mogą budzić wątpliwości co do poprawności uzyskiwanych rezultatów. Próbę oszacowania wpływu tych wielkości na rozkład sił wewnętrznych, dla konstrukcji /rys. 3.1/ i obciążenia jak na rys. 5.1, przedstawia tabela 5.1.



Rys. 5.1

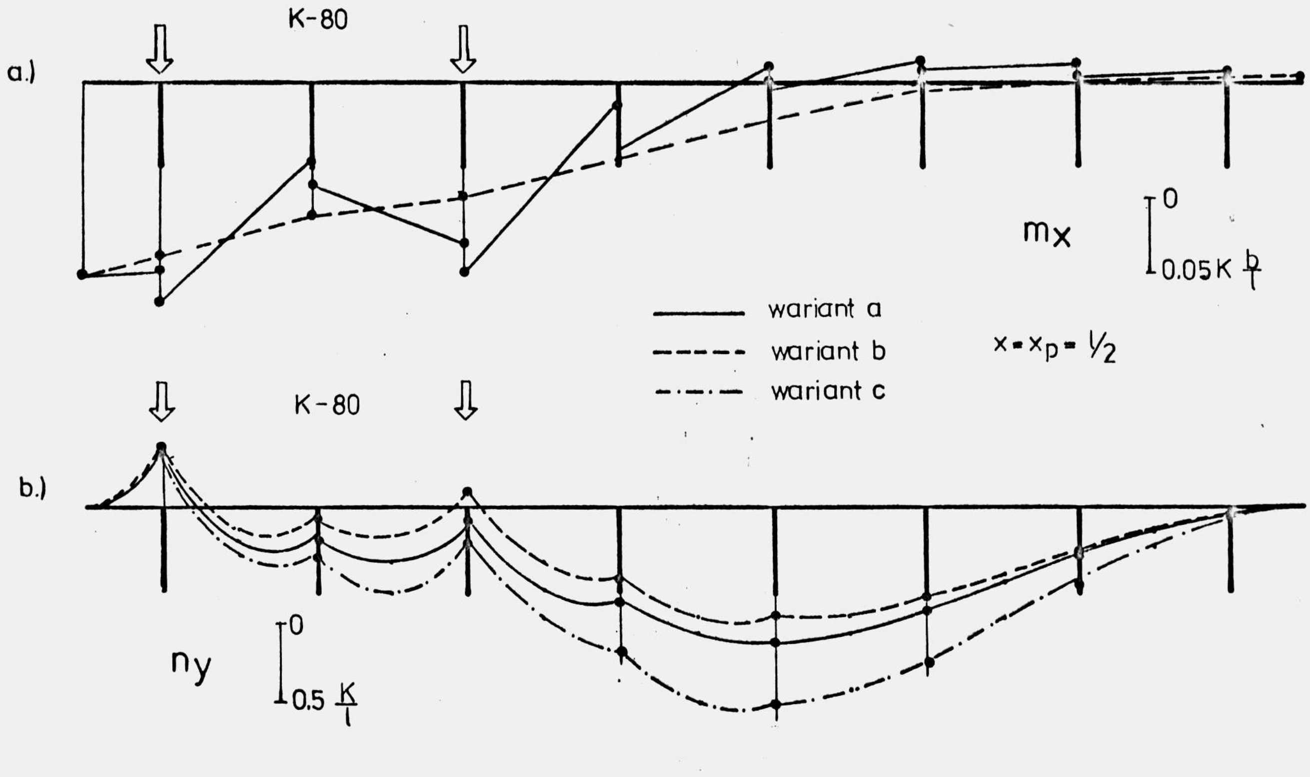
a/ $E_x=E_y$ $\beta=1$ $D_x=D_y$ $\alpha=1$ $\nu=0.16$

b/ $E_x=E_y$ $\beta=1$ $D_x=D_y$ $\alpha=1$ $\nu=0$

c/ $E_x=E_y$ $\beta=\nu$ $D_x=D_y$ $\alpha=1$ $\nu=0.16$

d/ $E_x=E_y$ $\beta=1$ $D_x=D_y$ $\alpha=\nu$ $\nu=0.16$

Porównując wyniki otrzymane dla wariantu a i b można zauważyć, że największy wpływ stałej Poissona uwydatnia się w siłach n_y i m_x zaś nieznacznie w siłach m_y i n_x. Momenty podłużne m_x przybierają charakterystyczną postać jak na rys. 5.2a, natomiast siły



Rys. 5.2

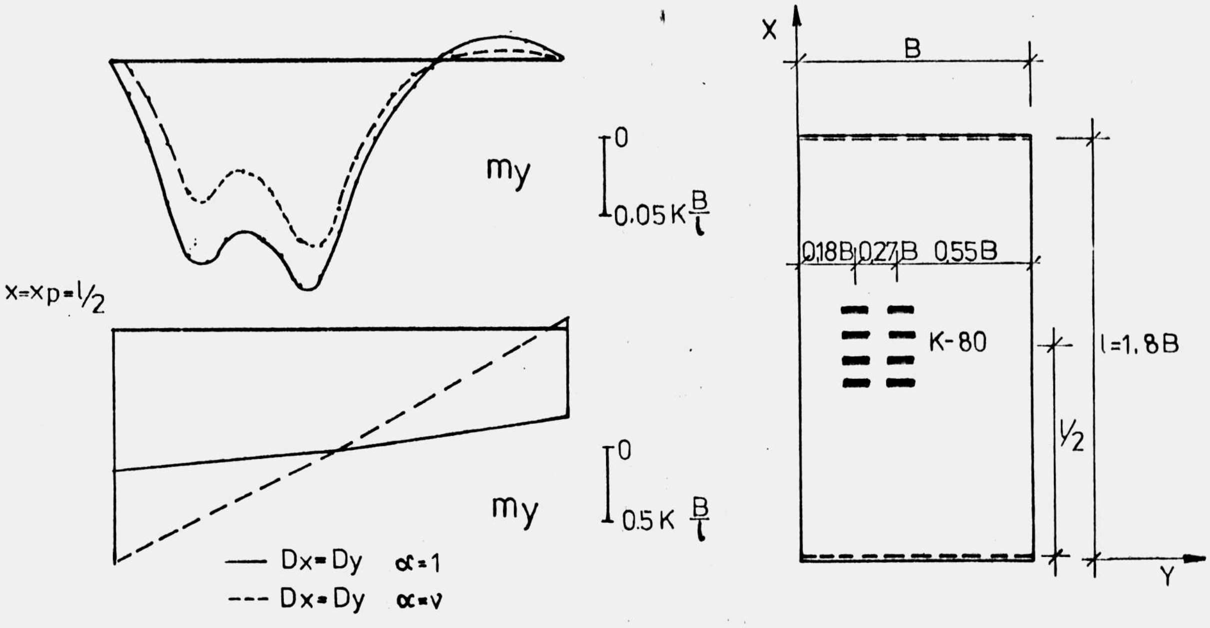
Tabela 5.1

punkt		1	3	4	5	6	7	8	9
m_x	a	145.0	48.39	126.3	12.26	-7.281	-11.81	-10.81	-9.019
	b	113.7	87.36	75.77	46.66	25.14	11.92	3.579	-2.001
	c	145.0	50.36	126.3	14.24	-5.530	-11.16	-11.28	-10.04
	d	149.5	48.18	128.3	11.25	-8.561	-13.11	-12.06	-10.66
m_y	a	182.0	-249.3	313.9	-214.4	-199.8	-144.2	-84.66	-36.74
	b	190.0	-256.3	312.4	-229.4	-207.8	-148.7	-88.23	-39.53
	c	178.8	-244.0	310.8	-208.3	-195.4	-143.6	-87.07	-39.74
	d	179.1	-268.2	314.5	-224.5	-206.2	-147.4	-84.67	-36.02

$X = X_p = l/2$

punkt		1	2	3	4	5	6	7	8
$-n_x$	a	31669	28215	26015	21417	15167	9581.	4937.	734.9
	b	31527	27952	25629	20987	14908	9525.	5066.	1054.
	c	32258	29959	27430	21956	16605	11101	5729.	545.4
	d	34319	30544	28111	23010	16202	10087	4979.	333.0
$-n_y$	a	-370.7	220.2	182.5	55.82	627.7	835.6	658.1	330.1
	b	-376.5	162.3	76.72	-114.7	461.6	710.9	582.7	297.2
	c	-335.2	319.2	310.9	207.3	928.6	126.8	967.2	453.6
	d	-396.4	239.1	200.7	77.28	678.2	895.0	700.7	351.4

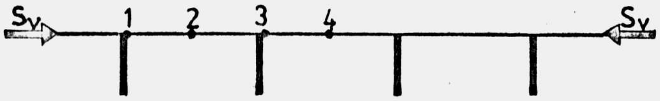
n_y są najbardziej wrażliwe na zmianę cech sprężystych elementów /rys. 5.2b/. Nieznaczne zmiany sił wywołane wpływem D_{xy} / $\alpha = \nu$/ wynikają wyraźnie z roli żeber podłużnych. Dużo większy wpływ będzie można zauważyć przy niskich żebrach, przyjmując w stanie granicznym postać jak na rys. 5.3 dla płyty nieużebrowanej. Z rys. 5.3 wynika



Rys. 5.3

również wniosek że sztywność płytowa D_{xy} jest ważniejszą cechą sprężystą, natomiast ν pełni w płytach rolę drugorzędną /rys. 2.21 [60]/.

Do uchwycenia wpływu stałej Poissona na rozkład sił wewnętrznych od sprężenia poprzecznego posłużono się przykładem konstrukcji i obciążenia jak na rys. 5.4 /rys. 4.1/.



wariant a /rys. 4.1/
wariant b j.w. lecz $\nu = 0$

Rys. 5.4

Tabela 5.2

punkt		1	2	3	4
n_x	a	1.70731	0.961727	0,455493	0.349881
	b	1.89012	1.05833	0.550716	0.436005
$-n_y$	a	12.6007	7.52269	6.14355	5.88259
	b	12.6429	7.51708	6.14345	5.87812

Porównanie wielkości sił /dla X = 1/2/ tarczowych obu wariantów pozwala stwierdzić, że siły n_y praktycznie nie uległy zmianie, natomiast siły n_x doznały przyrostu /11 % ÷ 25 %/.

Analiza wpływu stałej Poissona pozwala wyróżnić podstawowe i drugorzędne kierunki pracy konstrukcji. Kierunki podstawowe nie są wrażliwe na zmiany stałej Poissona, natomiast w drugorzędnych kierunkach różnice będą się zwiększały wraz z jej wzrostem. Przy obciążeniu ruchomym kierunkiem podstawowym jest Y dla momentów oraz X dla sił tarczowych, natomiast przy sprężeniu poprzecznym odwrotnie.

Spostrzeżenia powyższe mogą mieć dość duże znaczenie praktyczne przy formułowaniu uproszczonych algorytmów do celów projektowych.

5.2. Zbieżność rozwiązania

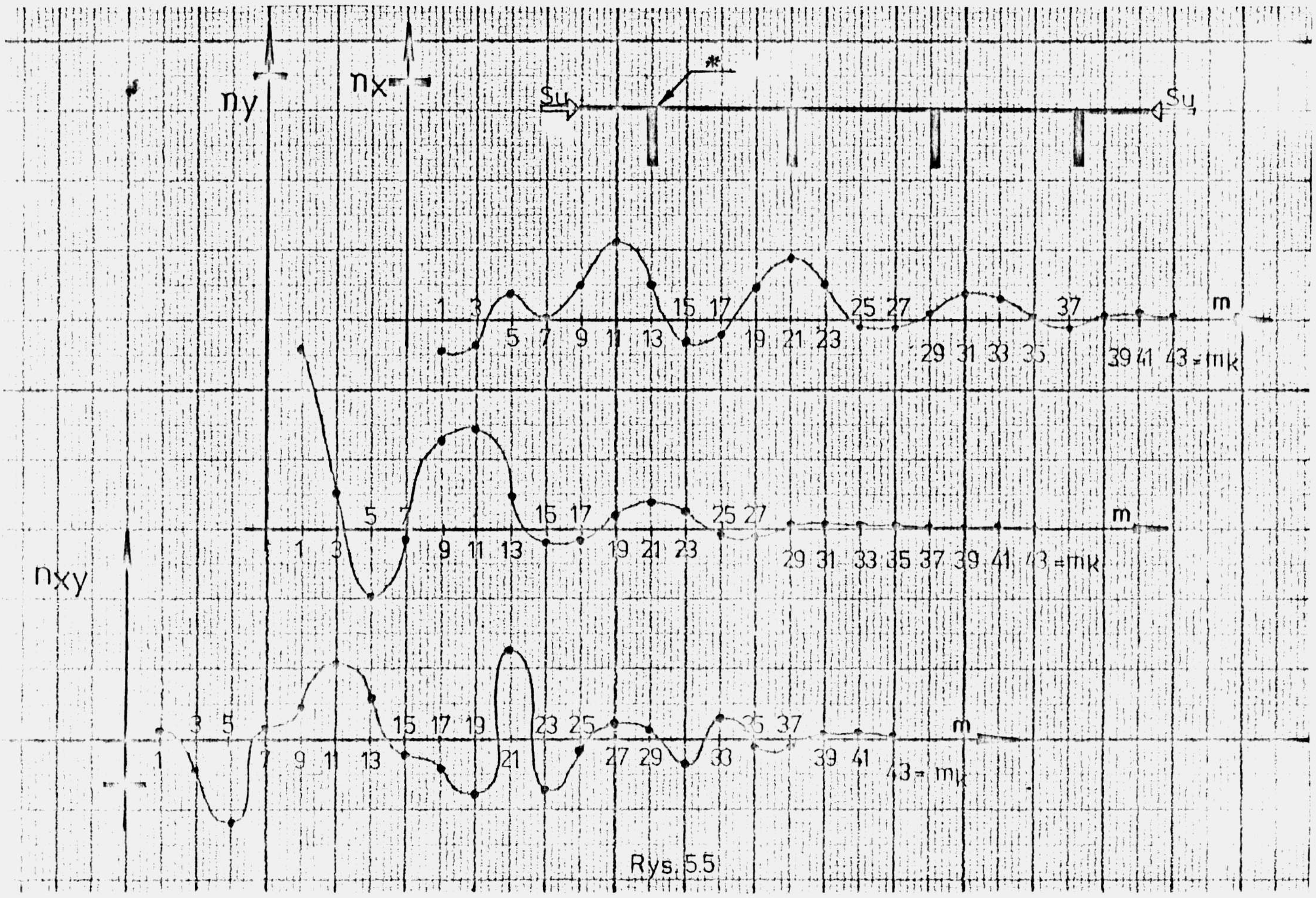
Przy wyznaczaniu sił wewnętrznych mamy do czynienia z sumowaniem wyników dla każdej harmonicznej /2.113/ nie znając liczby wyrazów /m_k/ wystarczających do uzyskania technicznie poprawnych rezultatów. Przyjmowanie mniejszej wartości m_k powoduje skrócenie czasu obliczeń, co może mieć duże znaczenie przy układach złożonych /rys. 3.24/ lub przy powtarzających się obliczeniach pewnego typu /rozdział 3.1.2/, natomiast może być powodem znacznych rozbieżności niektórych wyników /rys. 5.5 i rys. 5.6/.

Zabezpieczenie się w programie przed zbędnym liczeniem poprzez ustalenie przyrostu granicznego $\varepsilon \rightarrow 0$ takiego, że będzie spełniona nierówność

$$Z(m_k + 1) \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{m=1}^{m_k} Z(m) \quad , \qquad /5.1/$$

przy obliczaniu pewnej wielkości Z, nie prowadzi do celu, gdyż szeregi te są na ogół przemienne. Z tego powodu przy początkowych realizacjach obliczeń konieczne jest przeprowadzanie analizy zbieżności rozwiązania w pewnych punktach konstrukcji /NP - KARTA 1/.

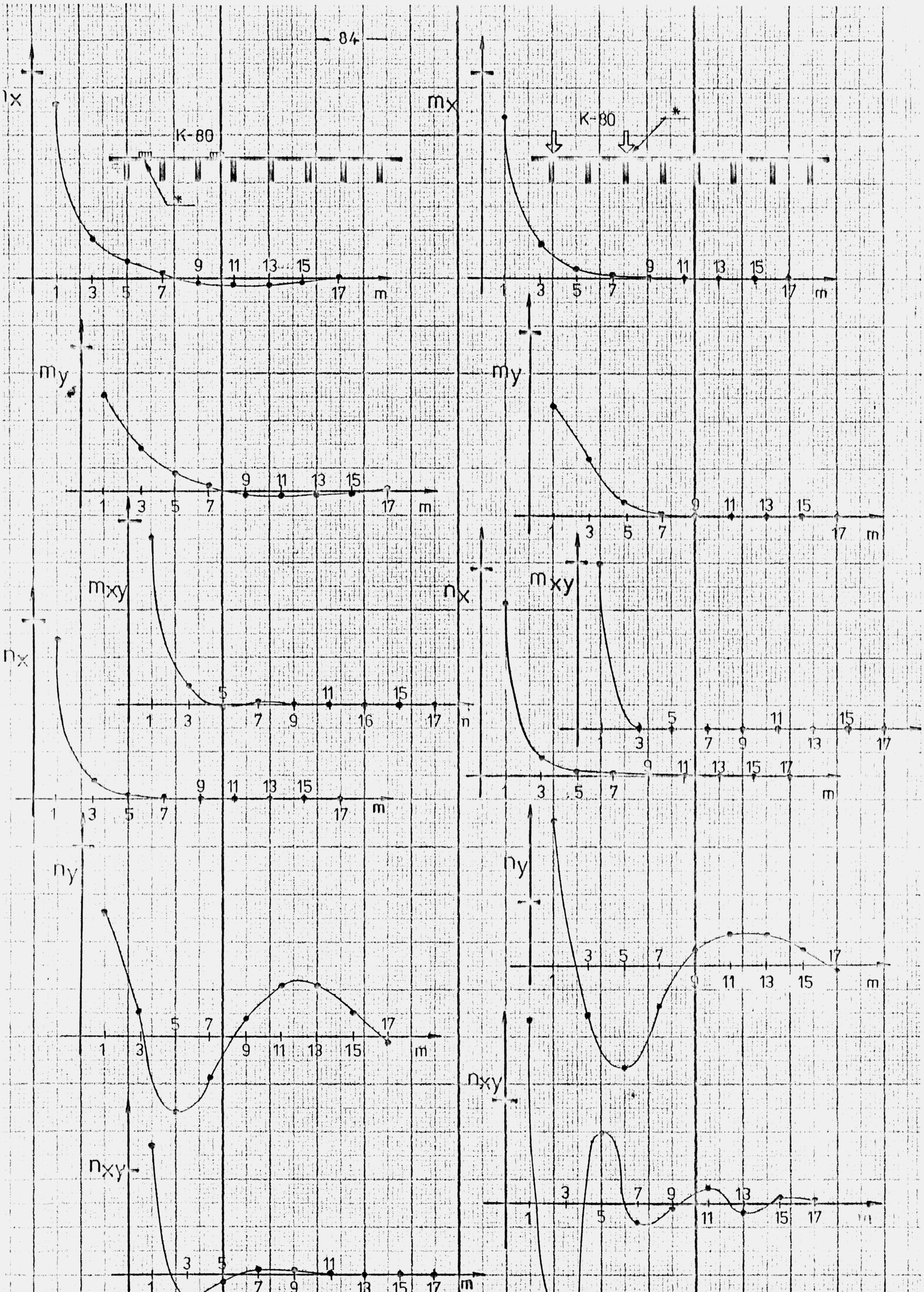
Poniżej przedstawiony zostanie przebieg zbieżności sił tarczowych przy sprężeniu poprzecznym dla konstrukcji i obciążenia jak na rys. 4.1. Jak wynika z wykresów /rys. 5.5/ zbieżność jest wyraźnie słaba, co pociąga za sobą konieczność uwzględniania dość znacznej liczby wyrazów rozwinięcia /m_k = 43/, jednak jest wystar-



Rys. 5.5

czająca dla przekroju oznaczonego / * /. Wyniki cząstkowe Z(m) /5.1/, dla polepszenia czytelności, połączone są linią ciągłą, a na osi pionowej wykresów zaznaczone są wielkości uzyskane po sumowaniu /rys. 4.2/.

Znacznie lepszy przebieg zbieżności występuje przy obciążeniu ruchomym i konstrukcji jak na rys. 3.2, rys. 3.3 i rys. 3.4. Przedstawione wykresy /rys. 5.6/ ukazują ogólnie dobrą zbieżność za wyjątkiem n_y , dla których konieczne jest przyjmowanie większej liczby wyrazów /m_k/. Dla innych cech geometrycznych konstrukcji i takim samym obciążeniu proces zbieżności przedstawiono na rys. 11 w [41] .

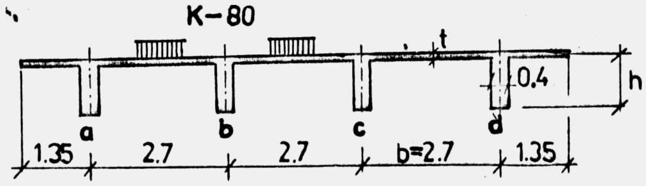


Rys. 5.6

5.3. Współdziałanie płyty w rozdziale obciążenia.

Ważnym problemem występującym przy projektowaniu przęseł bez poprzecznic pośrednich jest przyjęcie odpowiedniej grubości płyty pomostowej oraz liczby żeber w przekroju poprzecznym mostu. Wagą problemu wynika ze szczególnej roli płyty przy wymuszaniu współpracy dźwigarów bezpośrednio nieobciążonych.

Dla ustalenia wpływu grubości płyty na rozdział poprzeczny obciążeń /r.p.o./ przeprowadzono analizę dla konstrukcji o stałym momencie bezwładności J_x dźwigara i obciążeniu jak na rys. 5.7. Współczynniki r.p.o. dla poszczególnych grubości płyty zestawione są w tabeli 5.3. Z porównania ich wielkości można wyciągnąć wniosek,



Rys. 5.7

Tabela 5.3

L.p.	t [cm]	h [cm]	K_a	K_b	K_c	K_d
1	8.	117.	0.30196	0.40247	0.23885	0.05671
2	10.	113.	0.30156	0.40771	0.23861	0.05213
3	12.	109.	0.30432	0.39452	0.23931	0.06184
4	14.	106.	0.30472	0.38737	0.24148	0.06641
5	16.	103.	0.30679	0.37960	0.24266	0.07094
6	18.	101.	0.30919	0.37188	0.24327	0.07564
7	*12.	*109.	*0.34926	*0.30386	*0.22126	*0.12562

że sztywność płyty D_y nie ma decydującego wpływu na r.p.o, gdyż dominującą rolę ma tutaj stan tarczowy, a nie zgięciowy. Powyższy wniosek potwierdza dodatkowe badanie przeprowadzone dla konstrukcji jak w pozycji 4 tabeli 5.3 przy założeniu dodatkowym $D_y=0.000001\ D_x$.

Powyższa analiza prowadzi do wniosku, że przy ustalaniu grubości płyty pomostowej należy się kierować względami wytrzymałościowymi i technologicznymi, a nie statycznymi. Znaczny wpływ na r.p.o wywołuje poprzecznica przęsłowa co obrazują zamieszczone w pozycji 7 tabeli 5.3 współczynniki.

Przeprowadzona analiza wpływu liczby żeber /i/, przy przyjęciu $i\ .\ J_x$ = const, $i\ .\ J_s$ = const, oraz przy ustalonych wymiarach ogólnych konstrukcji B i l wykazuje podobnie słaby wpływ na r.p.o.

Przy projektowaniu przęseł bez poprzecznic przęsłowych zachodzi konieczność zastanowienia się nad wytrzymałością zmęczeniową pomostów z betonu zbrojonego. Wielokrotne zmiany momentów m_y z /+/ na /-/ mogą powodować pewną redukcję współpracy pomostu z żebrami, czego dotychczas nie brano pod uwagę.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Zastosowane w pracy płaskie elementy powierzchniowe pozwalają na geometryczne odwzorowanie szerokiej klasy przęseł mostowych płytowych i użebrowanych podłużnie, o przekroju otwartym czy zamkniętym. Uzupełnienie elementów powierzchniowych elementami pryzmatycznymi [5] , [6] , w miejscach gdzie płaskie elementy powierzchniowe nie odzwierciedlają w pełni pracy konstrukcji, jest pewną drogą rozwoju tego sposobu w kierunku pełniejszej analizy wytężenia konstrukcji.

Wyprowadzone wzory transformacyjne metody przemieszczeń elementów powierzchniowych umożliwiają, w technicznym ujęciu, dyskretyzację konstrukcji elementami o cechach sprężystych betonu zbrojonego czy też pewnych typów stalowych pomostów użebrowanych. Łatwe przekształcenia wzorów dla różnych cech sprężystych tworzywa /tabela 2.1/ wskazują na dużą uniwersalność wyprowadzonych równań. Rozpatrzenie elementów o różnych warunkach brzegowych sygnalizowane w równaniu /2.50/ pozwala na subtelniejszą analizę pracy współczesnych konstrukcji prefabrykowanych.

Uwzględnienie możliwości występowania różnorodnych obciążeń dowolnie położonych w stosunku do elementu pozwala na odwzorowanie typowych, dla mostów, obciążeń takich jak obciążenie ruchome, sprężenie poprzeczne czy sprężenie podłużne. Przyjęcie metody mieszanej /sił i przemieszczeń/ pozwoliło na rozszerzenie algorytmu na układy nie tylko swobodnie podparte i bezpoprzecznicowe.

Wyznaczane rozkłady sił wewnętrznych, w poszczególnych elementach układu, na podstawie przemieszczeń brzegowych umożliwiają określenie powierzchni sił wewnętrznych czy przemieszczeń w całej płaszczyźnie elementów. Zastosowanie sposobu opartego na wykorzystywaniu macierzy stałych oraz macierzy wpływu sił lub przemieszczeń pozwoliło na znaczne usprawnienie obliczeń.

Algorytm numeryczny rozwiązania zestawiono dla płyt użebrowanych o przekroju otwartym, co pozwoliło na objęcie swym zasięgiem płyt nieużebrowanych /poprzez pominięcie sztywności żebra/. Rozszerzenie zakresu programu na płyty użebrowane o przekroju zamkniętym, polegające na zbudowaniu odmiennej postaci macierzy sztywności, nie było tutaj konieczne ze względu na cel i zakres pracy.

Mimo dużej złożoności różnych wariantów obciążenia jak również charakterystyk geometrycznych konstrukcji czy cech sprężystych elementów program odznacza się krótkim czasem liczenia na co miał duży wpływ sam algorytm, jak również organizacja obliczeń /nie uwypuklona w pracy/. Ze względu na dużą sprawność rachunkową algorytmu i programu istnieje możliwość rozwinięcia programu w kierunku analiz racjonalnego kształtowania konstrukcji.

Jak wynika z zamieszczonych w pracy, z konieczności fragmentarycznych, rezultatów analizy różnych wielkości, opracowany program umożliwia przeprowadzenie szerszej analizy, która eliminowałaby konieczność każdorazowego wykorzystywania programu. Jest też oczywista możliwość takiej modyfikacji programu, która pozwalałaby na automatyzację prac studialnych.

Jako końcowe wnioski pracy można podać :

1. Założony, jako cel pracy algorytm, w ocenie autora posiada elementy nowości ujęcia oraz dużą skuteczność obliczeń dla szerokiej klasy przęseł mostowych.

2. Przedstawiona w pracy analiza sił wewnętrznych w płycie wykazała, że znajomość tych wielkości jest konieczna do właściwej oceny wytężenia tego elementu konstrukcji oraz dla racjonalnego ukształtowania przęseł mostowych. Uzyskanie powierzchni tych sił przy zastosowaniu znanych sposobów obliczeń byłaby, według rozeznania autora niemożliwa. Tak więc, według autora, cel pracy został osiągnięty a teza udowodniona.

L I T E R A T U R A

[1] Aleksandrow A.W.: Metod pieremieszczenij dla rasczota plitobałocznych konstrukcyj. Trudy M I I T, Wyp. 174, Transżeldorizdat 1963.

[2] Avent R.R., Bounin D.: Discrete Field Stability Analysis of Ribbed Plates. J. Struct. Div.Proc. ASCE, Vol. 102, No ST9, 1976.

[3] Bień J.: Analiza statyczna przęseł mostowych metodą pryzmatycznych elementów skończonych. Inst. Inż. Ląd. Pol. Wrocl., Raport nr. 1/79 - PRE3, Wrocław 1979.

[4] Bień J., Machelski Cz.: Hybrydowy sposób analizy konstrukcji pryzmatycznych. Prace Nauk. Inst. Inż. Ląd. Pol. Wrocł., 26, Konferencje 8, Wrocław 1978.

[5] Bień J., Machelski Cz.: Dyskretny sposób analizy konstrukcji pryzmatycznych. IV Konf. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, Koszalin 1979.

[6] Borcz A.: Płyty wzmocnione belkami. Rozpr. Inż., Vol. 6,3,1958.

[7] Bray K.H.M., Croxton P.C.L., Martin L.H.: Matrix Analysis of Structures. Edward Arnold, London 1976.

[8] Brilla J.: Riešenie artotropických dosák afinou transformáciou. Stavebnicky časopis SAV VIII, 1, Bratislava 1960.

[9] Cheung M.S., Cheung Y.K., Ghali A.: Analysis of slab and girder bridges by the finite strip method, Building Science, Vol. 5, 1970.

[10] Cheung Y.K.: Folded plate structures by the finite strip method. J. Struct. Div. Proc. ASCE, Vol. 95, No ST 12, 1969.

[11] Cheung Y.K.: The finite strip in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends. Proc. Instn Civ.Engrs, Vol. 40, 1968.

[12] Chozowa L.M.: Rasčet ortotropnych składčatych sistem. Awtoreferat kandidatskoi dissertacii, M I I T, 1973.

[13] Cousens A.R., Loo Y.C.: Applications of the finite strip method in the analysis of concrete box bridges. Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 57, 1974.

[14] Czudek H., Pietraszek T.: Stalowe pomosty użebrowane. Obliczanie i konstruowanie. Arkady, Warszawa 1974.

[15] Dean D.L., Abdel-Malek R.A.: Rational Analysis of Orthotropic Bridge Decks. Int. J. of Mech. Sci., Vol. 16, No 3, Mar., 1974.

[16] Dean D.L., Omid'Varan C.: Analysis of Ribbed Plates. J. Struct. Div. Proc. ASCE, Vol. 95, No ST 3, 1969.

[17] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. P.W.N., Warszawa 1969.

[18] Gawrych-Żukowski E.: O strukturze metody przemieszczeń. Prace Nauk. Inst. Inż. Ląd. Pol. Wrocł., 12, Konferencje 1, Wrocław 1973.

[19] Gawrych-Żukowski E.: Macierze i rozwiązania blokowe w analizie konstrukcji. Arch. Inż. Ląd., t. 23, 3, 1977.

[20] Gierszewski M.: Ramy. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1960.

[21] Girkman K.: Dźwigary powierzchniowe. Arkady, Warszawa 1957.

[22] Graßhoff S.: Einflußflächen für Plattenanschnittsmomente zweistegiger Plattenbalkenbrücken. Werner-Verlag, Düsseldorf 1973.

[23] Grycz J.: Analiza statyczna ukośnych ustrojów belkowo-płytowych. Arch. Inż. Ląd., t. 19, 1, 1973.

[24] Grycz J.: Analiza statyczna mostowych ustrojów belkowo-płytowych mających odkształcalne poprzecznice przęsłowe oparte na podatnych słupach. COBiRTD, Warszawa 1974.

[25] Grycz J.: Analiza statyczna belkowo-płytowych ustrojów mostowych o zmiennych sztywnościach. Arch. Inż. Ląd., t. 17, 1, 1971.

[26] Grycz J.: Analiza sił wewnętrznych i ugięć w ustrojach mostowych ciągłych składających się z płyt i belek monolitycznie połączonych. COBiRTD, Warszawa 1967.

[27] Grycz J.: O metodach analizy statycznej ustrojów mostowych składających się z płyt i belek. Arch. Inż. Ląd., t. 16, 1, 1970.

[28] Grycz J.: O wyznaczaniu sił wewnętrznych i ugięć ustrojów wielobelkowych mających sztywne poprzecznice. Arch. Inż. Ląd., t. 14, 2, 1968.

[29] Hampe E.: Vorgespante Konstruktionen Bd. 2, VEB Verlag fuer Bauwesen, Berlin 1965.

[30] Hennigs E.: Beitrag zur vereinfachten Berechnung von Trägerrosten. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1938.

[31] Hota V.S. i inni: Maccoapproach for Ribbed and Grid Plate Systems. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, Vol. 101, No EM 1, 1975.

[32] Huber M.T.: Die Teorie kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendung auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben über rechteckige Platten. Der Bauingenieur, Vol. 4,H. 12 i H. 13, 1923.

[33] Huber M.T.: Ogólna teoria płyt żel.-betonowych i jej praktyczne zastosowanie. Czas. Techn., Lwów 1914.

[34] Huber M.T.: Teorya płyt prostokątnie-różnokierunkowych wraz z technicznemi zastosowaniami do płyt betonowych, krat belkowych itp. Lwów 1921.

[35] Jackson N.: The torsional rigidity of concrete bridge decks. Concrete, Nov. 1968.

[36] Karaśkiewicz E.: Zarys teorii wektorów i tensorów. PWN, Warszawa 1974.

[37] Kączkowski Z.: Płyty. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1968.

[38] Khachaturian N. i inni: Multibeam bridges with elements of channel section. J. Struct. Div. Proc. ASCE, Vol. 93, No ST 6, 1967.

[39] Kehlbeck F.: Einfluß der Sonnenstrahlung bei Brückenbauwerke. Werner-Verlag, Düsseldorf 1975.

[40] Klasztorny M.: Dynamiczne wytężenie ortotropowych przęseł mostów drogowych. Arch. Inż. Ląd., t. 24, 4, 1978.

[41] Kmita J., Machelski Cz.: Analiza pracy mostowych płyt pomostowych. Arch. Inż. Ląd., t. 24, 4, 1978.

[42] Koppel R.: Charakterystyka metod obliczania mostów wielodźwigarowych. Praca studialna z FPT-E nr.2.7.4.1, Gliwice 1972.

[43] Kupfer H.B., Gerstle K.H.: Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, Vol. 99, No EM 4, 1973.

[44] Lechnicki S.G.: Teoria uprugnosti anizotropnogo tela. Nauka, Moskwa 1977.

[45] Łukasiewicz S.: Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach. PWN, Warszawa 1976.

[46] Machelski Cz.: Koncepcja rozwiązania przęseł mostowych. Inst. Inż. Ląd. Pol. Wrocł., Komunikat nr. 31/77, Wrocław 1977.

[47] Mańko Z.: Analiza statyczna wybranych stalowych przęseł mostowych. Inst. Inż. Ląd. Pol. Wrocł., Komunikat nr. 6/75, Wrocław 1975.

[48] Mańko Z.: Analiza statyczna skrzynkowych przęseł mostowych. Arch. Inż. Ląd. t. 24, 1, 1978.

[67] Wolpe M., Pańkowski Z.: Obliczanie płyt prostokątnych przy zastosowaniu maszyn cyfrowych. Arch. Inż. Ląd., t. 16, 4, 1970.

[68] Vo Kim Cuong: Obliczanie ugięć płyt prostokątnych obciążonych w sposób nieciągły. Arch. Inż. Ląd., t. 19, 3, 1973.

[69] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.

PLATE EFFORT IN PLATE - BEAM SYSTEMS

Summary

The paper presents a spatial statical analysis of rectangular ribbed plates with two opposite simply supperted ends with special reference to bridge decks. In the discretization procedure the orthotropic plane surface elements are used and the ribs contribution into the stiffness matrix is based on the slope and deflection method of the beam theory. Using the displacement method an algorithm of solution has been prepared and subsequently computer program was written. Prepared computer program can be used to the study of displacement and internal forces distribution in prismatic structures with or without special intermediate cross-beams and with internal supports. Presented solution requires the operation on smoll matrices and the computations involved are remarkably less then in other similar methods. The practical use of the program is illustrated by the analysis of choosen bridge spans by various kinds of loading.

O d b i o r c y :	Egz.
1. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
2. Biblioteka i Ośrodek Informacji Naukowo-Technicznej Instytutu Inżynierii Lądowej	1
3. Redakcja Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych Instytutu Inżynierii Lądowej	1
4. Dyrekcja Instytutu Inżynierii Lądowej	2
5. Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej	1
6. Promotor	1
7. Recenzenci	2
8. Ośrodki obce	7
Instytut Budownictwa Politechniki Gdańskiej	
Instytut Dróg, Kolei i Mostów Politechniki Krakowskiej	
Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Poznańskiej	
Instytut Dróg i Mostów Politechniki Śląskiej	
Instytut Dróg i Mostów Politechniki Warszawskiej	
Instytut Badawczy Dróg i Mostów Ministerstwa Komunikacji w Warszawie	
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie	
9. Autor	2
	18