

Piotr Śliwka

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**SYSTEM *BONUS-MALUS*
– MIERNIKI TEMPRA ZBIEŻNOŚCI MODELU
DO STANU STACJONARNEGO**

1. Wstęp

Przedmiotem artykułu jest przegląd proponowanych w literaturze mierników tempa zbieżności łańcucha Markowa do stanu stacjonarnego i ich adaptacji na grunt systemu *bonus-malus* (w skrócie SBM).

W niniejszej pracy dokonano przeglądu zawartych w literaturze mierników tempa zbieżności, zbadano ich własności pod względem użyteczności dla SBM, dokonano wyboru najbardziej odpowiednich z nich, w zależności od charakteru analizy, oraz wyznaczono miernik, który dokładniej – w stosunku do istniejących – określa tempo zbieżności modelu SBM do stanu stacjonarnego.

W punkcie 2 zawarto podstawowe informacje pozwalające modelować SBM. W punkcie 3 przedstawiono rys historyczny stosowanych miar. W punktach 5-6 zawarto nowe oszacowanie tempa zbieżności w normie całkowitego wahanía, które precyzyjniej (w stosunku do istniejących) pozwala oszacować podstawową kwestię rozważaną w artykule w przypadku pojedynczych wartości własnych macierzy P , natomiast w przypadku wielokrotnych wartości własnych – nie zależy od stanów nieistotnych łańcucha.

2. Podstawy SBM

Od blisko pięćdziesięciu lat system *bonus-malus* stanowi podstawę ubezpieczeń komunikacyjnych. Jego zadaniem jest klasyfikacja ubezpieczonych klientów w określonym portfelu względem liczby zgłoszonych szkód i przypisanie im sto-

sownej składki. Podstawowe założenia, za pomocą których modeluje się system, można znaleźć w pracach Lemaire'a (por. [26; 27]).

Modelem SBM jest skończony jednorodny łańcuch Markowa (w skrócie SJŁM), przy czym:

- klasy SBM utożsamia się ze stanami łańcucha Markowa,
- macierz prawdopodobieństw przejścia $P = [p_{ij}]$ opisuje się za pomocą prawdopodobieństw p_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ zgłoszenia przez kierowcę k szkód,
- frakcję klientów wstępujących do firmy na początku działania systemu opisuje się za pomocą wektora początkowego d_0 ,
- frakcję klientów przebywających w firmie w roku n wyznacza się za pomocą wektora $d_n = d_0 P^n$,
- istnieje dokładnie jeden rozkład stacjonarny (w szczególności ergodyczny) łańcucha $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$, który stanowi podstawę wnioskowania o portfelu po dostatecznie długim czasie funkcjonowania SBM.

Oceny jakości SBM można dokonać za pomocą mierników, których konstrukcja w większości przypadków bazuje na rozkładzie stacjonarnym d (por. [26]). Wyznaczenie analitycznej postaci miernika, dzięki któremu można oszacować tempo zbieżności modelu systemu do stanu stacjonarnego, pozwala rozwiązać dwie zasadnicze kwestie:

- określić, po jakim czasie powszechnie stosowane charakterystyki SBM (oparte na rozkładzie stacjonarnym) właściwie oceniają jakość systemu oraz sklasyfikować (bądź skonstruować ranking) w sytuacji wyboru alternatywnych systemów o różnych zasadach przejścia pomiędzy klasami systemu, który z rozpatrywanych systemów wcześniej osiągnie stan stacjonarny, oraz
- określić, po jakim czasie rynek ubezpieczeń komunikacyjnych (złożony z wielu działających systemów i dopuszczających przemieszczanie się między sobą ubezpieczonych z uwzględnieniem ich historii szkodowości z poprzednich firm bądź nie) osiągnie stan stacjonarny.

Problem tempa zbieżności łańcucha Markowa do stanu stacjonarnego próbowano rozwiązać z użyciem różnorodnego aparatu matematycznego. W literaturze rozważane są dwa główne nurty:

1) szacowanie drugiej, co do modułu, wartości własnej macierzy P (SLEM), która ściśle wiąże się z badaniem tempa zbieżności ciągu d_n do rozkładu stacjonarnego d (tzw. problem współczynnika ergodyczności $\tau_\rho(P)$),

2) bezpośrednio szacowanie tempa zbieżności ciągu d_n do rozkładu stacjonarnego d (paralelnie: ciągu macierzy P^n do macierzy ergodycznej E).

W artykule zaproponowano dwa typy miernika pozwalające odpowiedzieć na pytanie, ile czasu potrzebuje SBM modelowany łańcuchem Markowa do osiągnięcia stanu stacjonarnego:

- pierwszy typ miernika (należący do tzw. współczynników ergodyczności), pozwalający dokonać wstępnej analizy systemu (bądź konstrukcji rankingu wielu systemów),
- drugi typ miernika, związany z szacowaniem tempa zbieżności ciągu d_n do d .

3. Współczynniki ergodyczności

Wyznaczenie numerycznych wartości szukanych pierwiastków równania $\det(P - \lambda I) = 0$ dla dowolnie dużej macierzy nie stwarza, dzięki obecnej technice komputerowej, większych trudności (por. [18]). Jednak problemy z podaniem analitycznej postaci pierwiastków zaczynają się w przypadku macierzy modelujących SBM o kilku bądź kilkudziesięciu tysiącach stanów (np. opisujących model europejskiego rynku ubezpieczeń komunikacyjnych). W kontekście badania tempa zbieżności SBM do stanu stacjonarnego pożądana jest znajomość analitycznej postaci poszczególnych pierwiastków (w szczególności SLEM), ewentualnie funkcji, która pozwoli je ograniczyć.

Podjęte w literaturze próby wyznaczenia funkcji szacującej SLEM funkcjonują pod nazwą współczynników ergodyczności.

Próby oszacowania tempa zbieżności ciągu macierzy P^n do macierzy E za pomocą współczynnika ergodyczności pojawiły się po raz pierwszy w pracy Kołmogorowa z 1931 r. (por. [25]). Kołmogorow rozważał iloczyny prospektywnych macierzy P_k dla niejednorodnych łańcuchów Markowa o macierzach postaci

$\prod_k P_k$ i spełniających:

$$\forall_{i,j,r} \forall_{k \geq 1} p_{irk} \geq \lambda_k p_{jrk},$$

dla pewnych $\lambda_k \geq 0$ i $\sum \lambda_k = \infty$.

W wersji pierwotnej właśnie współczynniki λ_k nazwano po raz pierwszy współczynnikami ergodyczności.

W kolejnych kilkudziesięciu latach opublikowano zaledwie kilkanaście prac poświęconych problemowi współczynnika ergodyczności. Do najważniejszych należą prace [12; 22; 41; 57]. Ważniejsze współczynniki omówiono poniżej.

Współczynnik Senety (por. [42; 45])

Współczynnikiem ergodyczności nazywa się funkcję skalarną τ zdefiniowaną na zbiorze macierzy stochastycznych P i spełniającą warunki:

- 1) $\tau(P) \geq 0$,
- 2) $\tau(P) = 0 \Leftrightarrow P$ jest macierzą o identycznych wierszach,
- 3) dla wszystkich macierzy stochastycznych P_1, P_2 spełniony jest warunek:

$$\tau(P_1 P_2) \leq \tau(P_1) \tau(P_2),$$

przy czym w szczególności $\tau(P^{m_1} P^{m_2}) \leq \tau(P^{m_1}) \tau(P^{m_2})$.

Seneta zauważył, że współczynnik ergodyczności $\tau_{\|\cdot\|}^R(P)$ (czyli z normą określoną w ciele liczb rzeczywistych R) spełnia zależność:

$$\forall_{i=2,3,\dots,s} |\lambda_i| \leq \tau_{\|\cdot\|}^R(P) < 1.$$

Tym samym $\tau_{\|\cdot\|}^R(P)$ stanowi górne ograniczenie SLEM. Ponadto Seneta (por. [43]) rozszerzył definicję $\tau_{\|\cdot\|}^R(P)$ na ciało liczb zespolonych C i pokazał, że: $\tau_{\|\cdot\|}^R(P) \leq \tau_{\|\cdot\|}^C(P)$.

Początkowo współczynnik ergodyczności przybrał postać:

$$\sup_{x, y \in Z^+} \frac{d(x^T P, y^T P)}{d(x, y)}, \quad (1)$$

gdzie $x \neq y$ oraz $Z^+ = \{z; z^T 1 = 1, z_i > 0\}$.

Zastępując metrykę $d(x, y)$ normą $\|x - y\|$, Seneta sprowadził wzór (1) do

$$\tau_p(P) = \sup_{\|\delta\|_p = 1} \|\delta^T P\|_p, \quad (2)$$

Wektor δ z przestrzeni R^s we wzorze (2) spełnia warunek: $\delta^T 1 = 0$. Ponadto supremum w (2) wzięto względem normy l_p .

W zależności od przyjętej normy l_p współczynnik $\tau_p(P)$ podany przez Senetę ma postać (por. [43; 44]):

$$\tau_1(P) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{k=1}^s |p_{i,k} - p_{j,k}| \text{ w przypadku } l_1$$

bądź

$$\tau_{\infty}(P) = \sup_{\substack{\max |\delta_i|=1 \\ \delta^T 1=0}} \|\delta^T P\|_{\infty} \text{ w przypadku } l_{\infty}. \quad (3)$$

Współczynnik Tana (por. [51; 52])

Tan podał w pracach [51; 52] górne ograniczenie dla $\tau_{\infty}(P)$. Ponadto zastąpił poszukiwanie maksimum względem ortogonalnych wektorów δ oraz 1 ($\delta^T 1 = 0$) wektorami $d^T z = 0$, gdzie d jest wektorem stacjonarnym, z – dowolnym wektorem kolumnowym:

$$\tau_p(P) = \sup_{\|z\|_p=1} \{\|Pz\|_p\},$$

zachowując własności definicji współczynnika Senety.

Współczynnik Rothbluma i Tana

Modyfikacji pierwotnej wersji współczynnika ergodyczności dokonali Rothblum i Tan. W pracy (por. [40]) wykazali, że jeśli wartość własna $\lambda \neq 0$ macierzy P jest różna od promienia spektralnego $\rho(P)$, to z zależności

$$\rho v^T u = v^T (Pu) = (v^T P)u = \lambda v^T u$$

wynika, iż $vu^T = 0$ (v – lewostronny wektor własny związany z λ). Zależność ta pozwala na oszacowanie $|\lambda|$ z góry

$$|\lambda| = |\lambda| \|x_L\| \leq \|\lambda x_L\| \leq \max_{\|x\|<1} \|x^T P\|$$

względem wszystkich $x \in R^s$ i spełniających $x^T u = 0$.

Przy dodatkowym założeniu, że u jest prawostronnym wektorem własnym macierzy P współczynnik ergodyczności ma postać

$$\tau_{11}(P) = \max_{\|x\| \leq 1} \|xP\|.$$

Przypadek dowolnej normy

Niech $\|x\|_{N_u}$ będzie normą określoną wzorem

$$\|x\|_{N_u} = \sum_{i=1}^s a_i |x_i|,$$

przy czym x – niesymetryczne wektory normujące, $a = (a_1, \dots, a_s)$, $\forall i \ a_i > 0$ oraz $a, x \in R^s$.

Wówczas współczynnik ergodyczności podany przez Lesanowsky'ego (por. [28]) ma postać

$$\tau_{N_u}(P) = \max_{x_e \in U_s} \frac{\|x_e P\|_{N_u}}{\|x_e\|_{N_u}},$$

Gdzie: $P \in S_s$ – macierz stochastyczna P ze zbioru stochastycznych macierzy S_s stopnia s ,

$$U_s = \{u^{(i,j)} = e^i - e^j\},$$

e^i – s -wymiarowy wektor jednostkowy z przestrzeni R^s z 1 na i -tym miejscu.

Podobny tok rozumowania znajduje się w pracy Rhodiusa (por. [38]).

Współczynnik Vesely'ego

Uzyskanie dokładnych wartości współczynnika ergodyczności dzięki zastosowaniu pewnej klasy norm (np. w l_p gdzie $1 < p < \infty$) jest możliwe tylko metodami symulacyjnymi. To rzutuje na jakość uzyskanego oszacowania. Kwestię tę rozwiązał Vesely (por. [55]).

Twierdzenie 1

Niech: P – macierz stochastyczna stopnia s ,

$$H_s = \left\{ x : x \in R^s, x \neq 0, \sum_{i \in S} x_i = 0 \right\},$$

X_ε – skończony podzbiór H_s taki, że $\forall x^{(\varepsilon)} \in X_\varepsilon \setminus \{0\} \min_{x \in X_\varepsilon} \left\| \frac{x^{(\varepsilon)}}{\|x^{(\varepsilon)}\|_2} - \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 \leq \varepsilon$.

Wówczas dla każdego $p \in [1, 2)$ $\tau_p(P) - \max_{x \in X_\varepsilon} \frac{\|x^{(\varepsilon)T} P\|_p}{\|x^{(\varepsilon)}\|_p} \leq \frac{3}{2} \sqrt[2]{2s} \varepsilon$, dla każde-

go $p \in [2, \infty)$ $\tau_p(P) - \max_{x \in X_\varepsilon} \frac{\|x^{(\varepsilon)T} P\|_p}{\|x^{(\varepsilon)}\|_p} \leq \frac{3}{2} \sqrt[2]{2s} \varepsilon^{2-\frac{1}{p}}$ oraz $\tau_\infty(P) - \max_{x \in X_\varepsilon} \frac{\|x^{(\varepsilon)T} P\|_\infty}{\|x^{(\varepsilon)}\|_\infty} \leq \frac{3}{2} s^2 \varepsilon$.

Współczynnik Diaconisa i Stroocka (por. [9])

Diaconis i Stroock do budowy współczynnika ergodyczności wykorzystali teorię grafów. Rozważyli przypadek macierzy sprzężonych względem iloczynu skalarowego (ogólnie macierzy hermitowskich). W odniesieniu do łańcuchów Markowa sprzężenie oznacza, iż związana z nim macierz stochastyczna jest macierzą łańcucha odwracalnego, co w tradycyjnych systemach *bonus-malus* występuje bardzo rzadko. W związku z tym w artykule tylko zasygnalizowano problem oszacowania SLEM.

Macierz P^H jest sprzężona z P względem rozkładu d , jeśli

$$P^H = D_d^{-1} P^T D_d,$$

gdzie D_d jest macierzą diagonalną z elementami wektora d na przekątnej.

Można zauważyć, że jeśli wektor $d = e$ i macierz P jest symetryczna, wówczas P^H jest macierzą prawdopodobieństw przejścia łańcucha odwracalnego (por. [14; 21]). Ponadto ze względu na symetryczność macierzy P^H jej wartości własne są rzeczywiste, co istotnie ułatwia szacowanie SLEM.

Jeśli przez γ_{ij} oznaczy się ścieżkę przejścia ze stanu i do stanu j taką, że $p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{k-1} j} > 0$ (i która nie zawiera dwóch identycznych łuków), to długość ścieżki wyraża się wzorem

$$|\gamma_{ij}|_Q = \frac{1}{e_i p_{i i_1}} + \frac{1}{e_{i_1} p_{i_1 i_2}} + \dots + \frac{1}{e_{i_{k-1}} p_{i_{k-1} j}},$$

gdzie γ_{ij} jest elementem zbioru Γ wszystkich ścieżek.

W przypadku nieprzywiedlnego odwracalnego łańcucha Markowa Diaconis i Stroock, korzystając z nierówności Poincare'go, ograniczyli λ_2 podane we wzorze (4) (por. [9])

$$\lambda_2 \leq 1 - \frac{1}{\kappa}. \quad (4)$$

W wzorze (4) κ oznacza współczynnik Poincarego, wyznaczony poprzez maksimum z sum wziętych po wszystkich skierowanych łukach (i, j) należących do ścieżki γ_{ij} względem wszystkich ścieżek przechodzących ze stanu i do j w grafie, co można zapisać wzorem:

$$\kappa = \max_{\kappa=(i,j)} \sum_{\gamma_{ij} \supset \kappa} |\gamma_{ij}| e_i e_j$$

Podobne oszacowanie Diaconis i Stroock podali dla $\lambda_{\min} \geq -1$ dla łańcucha nieokresowego (por. [9]).

„Odległość” między $\rho(P)$ a SLEM

W literaturze poza próbą bezpośredniego oszacowania SLEM podjęto również problem wyznaczenia maksymalnej „odległości” pomiędzy promieniem spektralnym $\rho(P)$ a SLEM macierzy P . Hartfiel i Meyer (por. [18]) wyznaczyli różnicę pomiędzy rzeczywistymi wartościami własnymi rzeczywistych macierzy A , co w języku macierzy stochastycznych przekłada się właśnie na oszacowanie różnicy pomiędzy $\rho(P) = 1$ a SLEM. W tak ogólnym przypadku wykorzystali współczynnik $\tau_{\infty}(A)$ pozostawiając jednak otwartą kwestię wyznaczenia ograniczenia $\forall k \quad |1 - \lambda_k|$. Próbę rozwiązania tego problemu podjął Pokarowski (por. [36; 37]).

Niech S oznacza zbiór stanów SJŁM o macierzy prawdopodobieństw przejścia P stopnia s , natomiast $C_1, C_2 \subset S$ – niepuste podzbiory zbioru S . Najmniejsza z sum prawdopodobieństw przejścia p_{ij} wziętych względem rozłącznych podzbiorów C_1, C_2

$$\sigma_2 = \min_{C_1, C_2} \sum_{L=1}^2 \sum_{i \in C_L} \sum_{j \notin C_L} p_{ij}$$

pozwoiliła Pokarowskiemu oszacować $|1 - \lambda_k|$ w przypadku $k = 2$ (por. [37]):

$$\tau_G(P) = (s-1)\sigma_2 \geq |1 - \lambda_2|,$$

$$|1 - \lambda_2| \geq 2 \left(\frac{\sigma_2}{s^2} \right)^{s-1} = \tau_D(P). \quad (5)$$

4. Wnioski dotyczące współczynników ergodyczności

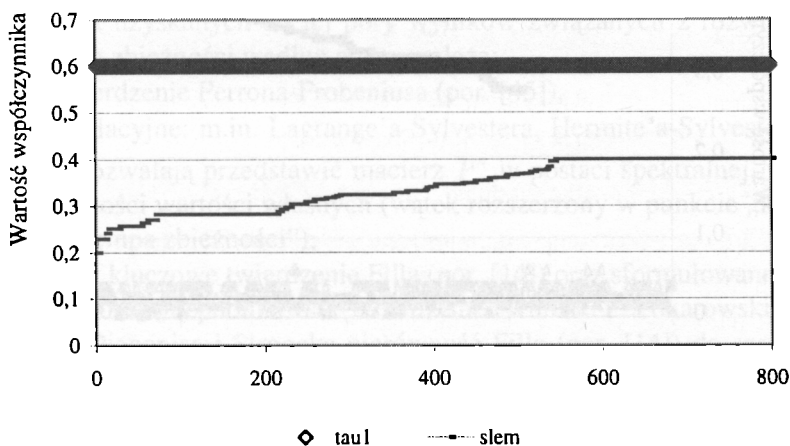
Na podstawie wstępnej weryfikacji zaprezentowanych mierników dla macierzy P niskich stopni wyodrębniono trzy mierniki $\tau_1(P)$, $\tau_{\infty}(P)$ oraz $\tau_D(P)$ o postaci:

$$\tau_1(P) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{k=1}^s |p_{ik} - p_{jk}|,$$

$$\tau_{\infty}(P) = \sup_{\{\delta: \delta^T \mathbf{1} = 0, \max |\delta_i| = 1\}} \|\delta^T P\|_{\infty},$$

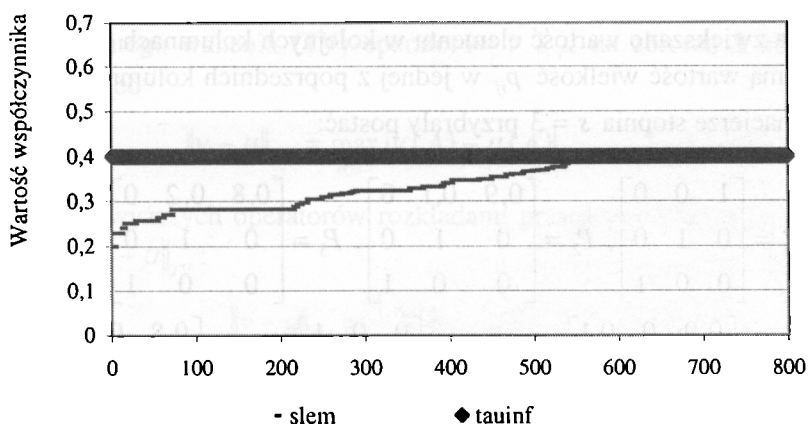
$$\tau_D(P) = 2 \left(\frac{\sigma_2}{s^2} \right)^{s-1}$$

Przeprowadzone badania dotyczące macierzy niskich stopni nasuwają wniosek, iż prostota w konstrukcji mierników nie koreluje z jakością oszacowania SLEM. Spośród zaprezentowanych oszacowań (rys. 1-3) największa precyzja oszacowania – zgodnie z wykresem na rys. 2 – cechuje $\tau_{\infty}(P)$ podany wzorem (3).



Rys. 1. Porównanie oszacowania: SLEM oraz $\tau_1(P)$

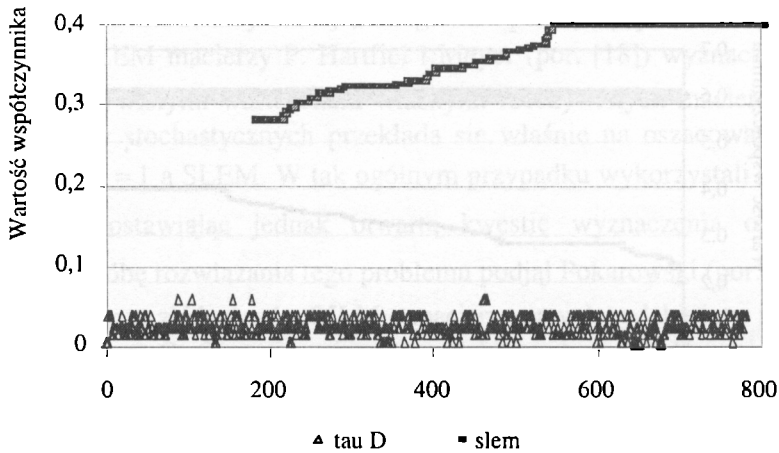
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 2. Porównanie oszacowania: SLEM oraz $\tau_{\infty}(P)$

Źródło: obliczenia własne.

Zgodnie z sugestią poczynioną w punkcie 2, zaproponowane mierniki mogą znaleźć zastosowanie podczas wstępnej analizy pojedynczego systemu, wyboru jednego spośród kilku możliwych systemów bądź wstępnej oceny rynku ubezpieczeń komunikacyjnych.



Rys. 3. Porównanie oszacowania: SLEM oraz $\tau_D(P)$

Źródło: obliczenia własne.

Macierze, na bazie których zbadano przydatność mierników, wygenerowano, startując z macierzy identycznościowej $P_1 = I$, a następnie dla każdego ustalonego wiersza zwiększano wartość elementu w kolejnych kolumnach o 0,1 (zmniejszając o tę samą wartość wielkość p_{ij} w jednej z poprzednich kolumn). Na przykład kolejne macierze stopnia $s = 3$ przybrały postać:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{22} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ itd.}$$

5. Tempo zbieżności d_n do rozkładu stacjonarnego d

Problem tempa zbieżności SJŁM do stanu stacjonarnego wiąże się bezpośrednio z badaniem zbieżności ciągu macierzy P^n do macierzy ergodycznej E bądź odpowiedniego ciągu d_n do rozkładu stacjonarnego d (por. m.in. [7; 20; 23]).

Spośród wielu uzyskanych do tej pory wyników związanych z rozwiązaniem zagadnienia tempa zbieżności według autora należą:

- klasyczne twierdzenie Perrona-Frobeniusa (por. [45]),
- wzory interpolacyjne: m.in. Lagrange’a-Sylwestera, Hermite’a-Sylwestera (por. [15]), które pozwalają przedstawić macierz P^n w postaci spektralnej, w zależności od krotności wartości własnych (wątek rozszerzony w punkcie „Propozycja miernika tempa zbieżności”),
- teoria grafów i kluczowe twierdzenie Filla (por. [14]) oraz sformułowane na jego podstawie wnioski (niepublikowane twierdzenie i wnioski P. Pokarowskiego).

Użyta przez Diaconisa i Stroocka nierówność Filla (por. [14]) do szacowania tempa zbieżności wymaga zdefiniowania normy całkowitego wahania (TV) (por. [9]) oraz iloczynu skalarnego w sensie rozkładu prawdopodobieństwa. Większość istniejących w literaturze oszacowań uzyskano w normie l_p (por. [2; 31]). Autor niniejszego artykułu jest przekonany, iż w przypadku badania tempa zbieżności norma TV – w przeciwieństwie do l_p – dokładniej różnicuje fluktuacje pomiędzy różnicami poszczególnych współrzędnych wektorów $\|d_n - d\|$ dlatego tę normę wykorzystano w dalszym badaniu tempa zbieżności.

Norma całkowitego wahania (TV) operatorów ν i μ na zbiorze S zdefiniowana jest następująco

$$\|\nu - \mu\|_{TV} = \max_{A \subset S} |\nu(A) - \mu(A)|.$$

Zastąpienie powyższych operatorów rozkładami prawdopodobieństwa upraszcza wzór normy $\|\nu - \mu\|_{TV}$:

$$\|\nu - \mu\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\nu_i - \mu_i|. \quad (8)$$

Fill połączył szacowanie zbieżności wektora d_n do rozkładu stacjonarnego d (paralelnie: P^n do E) z drugą wartością własną macierzy P sprzężonych względem rozkładu d , formułując twierdzenie 2 (por. [14]).

Twierdzenie 2

Niech (d_0, P) będzie nieprzywiedlnym, nieokresowym łańcuchem Markowa o rozkładzie początkowym d_0 , rozkładzie stacjonarnym d oraz $d_n = d_0 P^n$, natomiast P^H macierzą sprzężoną z P względem rozkładu d . Wówczas

$$4 \|d_n - d\|_{TV}^2 \leq \lambda_2^n (PP^H) \sum_{i \in S} \frac{(d_i - d_{0i})^2}{d_i}, \quad (9)$$

gdzie: d_{0i} – i -ta współrzędna wektora d_0 ,
 d_i – i -ta współrzędna wektora d ;
 $\lambda_2 (PP^H)$ – wartość własna macierzy PP^H .

Uogólnienia i wzmocnienia twierdzenia 2 dokonał Pokarowski (niepublikowane twierdzenie Pokarowskiego). Ponadto, korzystając z normy TV, podał wnioski przydatne w praktycznych poszukiwaniach dokładnego oszacowania tempa zbieżności. Wniosek 1 Pokarowskiego z uogólnionego twierdzenia 2 dotyczy zbieżności elementów macierzy P^n do macierzy ergodycznej E przy znanym rozkładzie stacjonarnym d .

Wniosek 1

Przy założeniach twierdzenia 2 prawdziwe są następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left| p_{ij}^{(n)} - d_i \right| \leq \lambda_2^{\frac{n}{2}} (PP^H) \sqrt{\frac{d_j}{d_i} (1 - d_j) (1 - d_i)}, \\ \text{b)} \quad & \max_{i,j} \left| p_{ij}^{(n)} - d_i \right| \leq \frac{1}{2 \min_i \sqrt{d_i}} \lambda_2^{\frac{n}{2}} (PP^H). \end{aligned} \quad (10)$$

6. Propozycja miernika tempa zbieżności

Problem przedstawienia P^n w postaci spektralnej w zależności od krotności wartości własnych macierzy P zamieszczono w wielu pozycjach (por. m.in. [2; 31]):

$$f(P) = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{\alpha_j} f^{(m-1)}(\lambda_j) Z_{jm}, \quad (11)$$

gdzie: $f^{(m-1)}$ – pochodna rzędu $m-1$ dowolnego wielomianu względem λ ,
 α_m – krotności algebraiczne pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy P ,
 k – liczba różnych wartości własnych.

Jeśli funkcja $f(P)$ jest n -tą potęgą macierzy P , wówczas wzór (11) ma postać

$$P^n = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{\alpha_j} \frac{n!}{(n-m+1)!} \lambda_j^{n-m+1} Z_{jm}. \quad (12)$$

Aparo (por. [2]) podał sposób wyznaczenia składowych macierzy Z_{jm} , bazując na wielomianie minimalnym macierzy P oraz związanych z tym wielomianem krotności α_j wartości własnych λ_j :

$$Z_{jm} = \frac{1}{(m-1)!(\alpha_m - j)!} \left[(z - \lambda_j)^{\alpha_j} (zI - P)^{-1} \right]_{z=\lambda_j}^{(\alpha_j - m)},$$

przy czym $\left[(z - \lambda_j)^{\alpha_j} (zI - P)^{-1} \right]_{z=\lambda_j}^{(\alpha_j - m)}$ – pochodna rzędu $(\alpha_j - m)$ w punkcie $z = \lambda_j$.

W przypadku nierozkładalnej macierzy stochastycznej P macierz $Z_{11} = E$. W pozostałych przypadkach ($m \neq 1, j \neq 1$) suma elementów w wierszach macierzy Z_{jm} wynosi 0 (inny sposób wyznaczenia składowych Z_{jm} , korzystający z uproszczonej metody Aparo (por. [2]), zawarto m.in. w pracach Nykowskiej (por. [31])).

W przypadku macierzy P o pojedynczych wartościach własnych można założyć, iż rozkład spektralny macierzy P^n , opisany wzorem (12), sprowadza się do

$$P^n = \sum_{j=1}^s \lambda_j^n Z_{j1}. \quad (13)$$

Przy identycznych założeniach prawdziwa pozostaje również postać spektralna P^n (wzór (14); por. [39]):

$$P^n = \sum_{j=1}^s \lambda_j^n x_{pj} x_{lj}^T. \quad (14)$$

Zatem ze względu na jednoznaczność rozkładu zarówno we wzorze (13), jak i we wzorze (14) uzyskuje się alternatywną do istniejących metodę wyznaczenia składowych Z_{j1} postaci spektralnej P^n , czyli $Z_{j1} = x_{pj} x_{lj}^T$.

Teza wniosku 1 eliminuje możliwość uzyskania oszacowania tempa zbieżności w przypadku łańcucha Markowa ze stanami nieistotnymi, co z kolei motywuje do podjęcia ponownych prób oszacowania tempa zbieżności w normie TV (niezależnego od łańcucha ze stanami nieistotnymi).

Twierdzenie 3

Niech $d_0 = [d_i]_{i=1,2,\dots,s}$ będzie rozkładem początkowym, $d_n = d_0^T P^n$, d – rozkładem stacjonarnym. Dla każdej regularnej macierzy stochastycznej P w zależności od krotności wartości własnych α_j następujące oszacowania są prawdziwe:

a) $\forall_j \alpha_j = 1$, wówczas

$$\|d_n - d\|_{TV} \leq \frac{s(s-1)}{2} z^* |\lambda_2|^n, \quad (15)$$

b) $\exists_j \alpha_j \neq 1$, wówczas

$$\|d_n - d\|_{TV} \leq \frac{s}{2} (k-1) \alpha^* z^* \frac{n!}{(n - \alpha^* + 1)!} |\lambda_2|^{n - \alpha^* + 1} \quad (16)$$

gdzie: $(d_0^T Z_{jm})_i$ – i -ta współrzędna wektora $d_0^T Z_{jm}$,

$$z^* = \max_{jm} \{Z_{jm}\},$$

$$\alpha^* = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \text{ oraz } n \geq \alpha^* - 1.$$

Dowód

W dowodzie wykorzystano podstawowe definicje normy l_p dla macierzy (por. [17]):

$$|A|_p = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|A\|_p = \max \{ |Ax|_p : x \in C^n, \|x\|_p = 1 \}$$

oraz wektorów: $|x|_p = \left(\sum_j |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$

Zgodnie z (8) w przypadku rozkładów prawdopodobieństwa normę całkowitego wahanía można wyrazić jako:

$$\|d_n - d\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |d_{ni} - d_i| = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \left| (d_0^T P^n)_i - (d_0^T E)_i \right|.$$

Rozkład P^n na sumę macierzy spektralnych Z_{jm} podano we wzorze (12),

$$P^n = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{\alpha_j} \frac{n!}{(n-m+1)!} \lambda_j^{n-m+1} Z_{jm}.$$

Dowód części a) twierdzenia 3

Z założenia twierdzenia 3 macierz P jest regularna, ponadto w podpunkcie a) przyjęto, iż $\alpha_i = 1$, stąd

$$P^n = \sum_{j=1}^s \lambda_j^n Z_{j1} = Z_{11} + \sum_{j=2}^s \lambda_j^n Z_{j1}.$$

Macierze Z_{jm} jako składowe postaci spektralnej spełniają (por. [35])

$$\text{a) } \sum_{j=1}^s Z_{j1} = I \quad (17)$$

$$\text{b) } Z_{i1} Z_{j1} = \begin{cases} Z_{i1} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (18)$$

czyli są macierzami idempotentnymi oraz parami ortogonalnymi składowych, ponadto

$$Z_{11} = E.$$

$$\text{Stąd } P^n - E = \sum_{j=2}^s \lambda_j^n Z_{j1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \|d_n - d\|_{TV} &= \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \left| (d_0^T P^n)_i - (d_0^T E)_i \right| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=2}^s |\lambda_j|^n \left| (d_0^T Z_{j1})_i \right| \leq \\ &\leq |\lambda_2|^n \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=2}^s \left| (d_0^T Z_{j1})_i \right|. \end{aligned}$$

Niech $z^* = \max_{i,j} \left\{ \left| (d_0^T Z_{j1})_i \right| \right\}$. W związku z tym następujące oszacowanie jest prawdziwe:

$$\|d_n - d\|_{TV} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=2}^s |\lambda_2|^n z^* = \frac{s(s-1)}{2} |\lambda_2|^n z^*, \quad (19)$$

co kończy dowód części a).

Dowód części b) twierdzenia 3

W przypadku wielokrotnych wartości własnych macierzy P tempo zbieżności ciągu d_n do d oszacowano w sposób podobny do dowodu w części a).

$$\begin{aligned} \|d_n - d\|_{TV} &= \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \left| (d_0^T P^n)_i - (d_0^T E)_i \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=2}^k \sum_{m=1}^{\alpha_j} \frac{n!}{(n-m+1)!} |\lambda_j|^{n-m+1} \left| (d_0^T Z_{jm})_i \right|. \end{aligned}$$

Niech:

- z^* oraz α^* – identyczne jak w tezie twierdzenia 3,
- K – jest liczbą różnych wartości własnych λ_i ,
- $n > \alpha^* - 1$ (co w rzeczywistości jest spełnione).

Ma miejsce następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} \|d_n - d\|_{TV} &\leq z^* |\lambda_2|^{n-\alpha^*+1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=2}^k \sum_{m=1}^{\alpha_j} \frac{n!}{(n-m+1)!} \leq \\ &\leq \frac{s(k-1)}{2} |\lambda_2|^{n-\alpha^*+1} z^* \alpha^* \frac{n!}{(n-\alpha^*+1)!}. \end{aligned} \quad (20)$$

To kończy dowód twierdzenia 3.

Udowodnione twierdzenie pozwala wyciągnąć następujący wniosek.

Wniosek 2

Niech $\|d_n - d\|_{TV} \leq \varepsilon$ dla ustalonego ε . Wtedy w przypadku pojedynczych wartości własnych ocenę tempa zbieżności ciągu d_n do d na podstawie oszacowania danego wzorem (15) można mierzyć za pomocą miernika η_n , który jest funkcją zależną od zadanej dokładności oszacowania ε , stopnia s macierzy P , maksymalnej wartości elementu z^* wektora $(d_0^T Z_{jm})$ pochodzących z rozkładu spektralnego macierzy P^n oraz $|\lambda_2|$ o postaci:

$$\eta_n(\varepsilon, s, z^*, |\lambda_2|) = \left\lceil \ln \left(\frac{2\varepsilon}{s(s-1)z^*} \right) / \ln |\lambda_2| \right\rceil + 1, \quad (21)$$

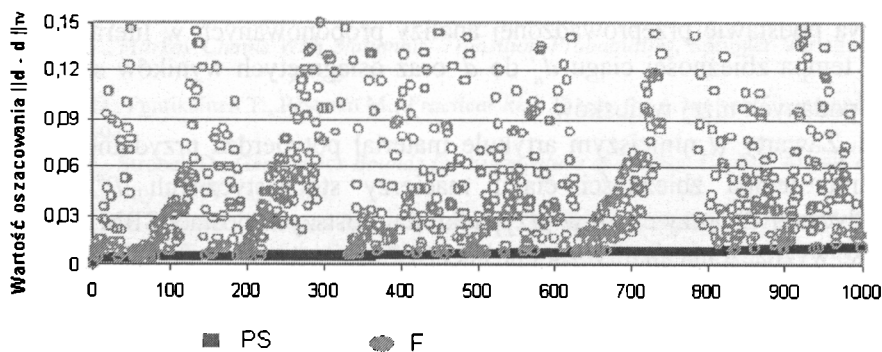
gdzie: $\lceil x \rceil$ – część całkowita liczby x .

Uwaga

Podane w twierdzeniu 3 oszacowanie znajduje zastosowanie w szczególności podczas występowania stanów nieistotnych badanego łańcucha.

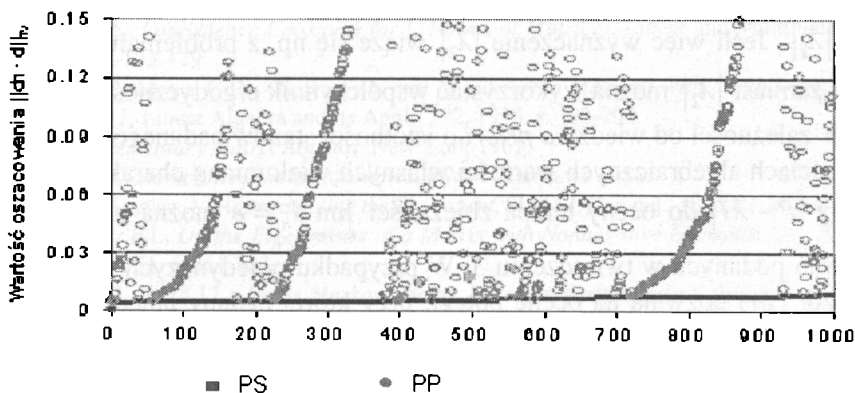
Autor artykułu nie zdołał udowodnić metodami analitycznymi, iż uzyskana teza twierdzenia 3 podana wzorami (15)-(16) dostarcza dokładniejszego oszacowania

tempa zbieżności w normie $\|d_n - d\|_{TV}$ odpowiednich ciągów niż np. oszacowanie (9) w twierdzeniu 2, bądź (10) we wniosku 1. W związku z tym wykonano badanie symulacyjne dla macierzy stopnia $s \leq 4$. W badaniu porównano (po sprowadzeniu do wielkości porównywalnych) odpowiednie elementy prawych stron oszacowań podanych wzorami odpowiednio: (9)-(10) i (15)-(16) przy ustalonym n , w zależności od krotności wartości własnych. Reprezentatywne wyniki (bazując na zbiorze macierzy wykorzystanych w punkcie „Wnioski dotyczące współczynników ergodyczności”) dla np. $n = 10$ oraz $\varepsilon = 10^{-5}$ przedstawiono na rys. 4-5. Oś odciętych



Rys. 4. Porównanie oszacowania $\|d_n - d\|_{TV}$ na podstawie wzorów: Fill (F) oraz Śliwka (PS) – przypadek pojedynczych wartości własnych

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 5. Porównanie oszacowania $\|d_n - d\|_{TV}$ na podstawie wzorów: Pokarowski (PP) oraz Śliwka (PS) – przypadek pojedynczych wartości własnych

Źródło: obliczenia własne.

opisuje numer badanej macierzy P (podobnie jak w przypadku wykresów na rys. 1-3). Na wykresie z rys. 4 oś rzędnych zawiera oszacowanie prawej strony wzorów: (9) (na rys. 4 oznaczone przez F) i (15) (na rys. 4 oznaczone przez PS), natomiast na rys. 5 – oszacowanie prawej strony (10) (na wykresie prezentowanym na rys. 5 oznaczonym przez PP) oraz (15) (na wykresie 5 oznaczonym przez PS), czyli w przypadku pojedynczych wartości własnych. W celu uzyskania większej przejrzystości wykresów na rys. 4-5 zakres osi rzędnych nie przekracza 0,15.

7. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy proponowanych w literaturze mierników tempa zbieżności ciągu d_n do d oraz osiągniętych wyników sformułowano pięć podanych niżej wniosków.

1. Zawarty w niniejszym artykule materiał potwierdza przydatność SLEM w badaniu tempa zbieżności ciągu macierzy stochastycznych P^n do postaci ergodycznej E , przy czym w przypadku najprostszych postaci SBM istnieje możliwość wyznaczenia analitycznej postaci SLEM.

2. W zależności od posiadanej wiedzy o macierzy P można wykorzystać oszacowania SLEM, zwane współczynnikami ergodyczności. Na podstawie badania symulacyjnego dla macierzy niskich stopni użytecznym współczynnikiem może być $\tau_\infty(P)$ podany w (3). Ponadto należy stwierdzić, iż prostota konstrukcji współczynnika ergodyczności nie koreluje z jakością uzyskanego oszacowania. Scharakteryzowane współczynniki mogą jednak zostać wykorzystane do wstępnej oceny tempa osiągnięcia przez SBM stanu stacjonarnego.

3. W twierdzeniach wykorzystujących SLEM tempo zbieżności uzależnione jest od $|\lambda_2|$. Jeśli więc wyznaczenie $|\lambda_2|$ wiąże się np. z problemami natury technicznej, zamiast $|\lambda_2|$ można wykorzystać współczynnik ergodyczności $\tau_\infty(P)$.

4. W zależności od wiedzy *a priori* o istotności stanów badanego łańcucha oraz o krotnościach algebraicznych wartości własnych wielomianu charakterystycznego macierzy $|P - \lambda I|$ do oceny tempa zbieżności $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = e$ można użyć jednego z oszacowań podanych w twierdzeniu 3. W przypadku pojedynczych wartości własnych wzór (21) pozwala na ocenę potęgi, przy której badany łańcuch osiąga stan stacjonarny z zadaną dokładnością ε .

5. Jednoznaczność rozkładu postaci spektralnej macierzy P^n na macierze składowe Z_{j1} podana we wzorach (13) oraz (14) pozwala na konstrukcję macierzy Z_{j1} za pomocą lewo- i prawostronnych wektorów własnych w przypadku pojedynczych wartości własnych.

Literatura

- [1] Aldous D., Diaconis P., *Shuffling Cards and Stopping Times*, Amer. Math. Monthly, 93, 1986, s. 333-348.
- [2] Aparo E.L., *Spectral Decomposition of Matrices and z-Transforms*, Proceedings of V-th International Conference of Operational Research, 1970, s. 833-837.
- [3] Arens R., Goldberg M., *Weighted l_p Norms for Matrices*, Linear Algebra and its Applications, 201, 1984, s. 155-163.
- [4] Bonsdorff H., *On the Convergence of Bonus-Malus Systems*, ASTIN Bulletin, 22, No2, 1992, s. 217-223.
- [5] Bowers N., Gerber H. i in., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, New York 1986.
- [6] Buhlman H., *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag, Berlin 1970.
- [7] Chung K.L., *Markov Chains With Stationary Transition Probabilities*, Springer-Verlag, Berlin 1960.
- [8] Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman&Hall, London 1994.
- [9] Diaconis P., Stroock D., *Geometric Bounds for Eigenvalues of Markov Chains*, Annals of Applied Probability 1, 1991, s. 36-61.
- [10] De Pril N., *The Efficiency of Bonus-Malus System*, ASTIN Bulletin, 10, nr 1, 1978, s. 55-72.
- [11] Dufresne F., *The Efficiency of the Swiss Bonus-Malus System*, Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker, Heft 1/1995, s. 1-25;
- [12] Dmitriev N., Dynkin E., *On Characteristic Roots of Stochastic Matrices*, Izvest. Akad. Nauk SSSR, 10, 1946, s. 167-184.
- [13] Fiedler M., *Bounds for Eigenvalues of Doubly Stochastic Matrices*, Linear Algebra and its Applications, 5, 1972, s. 299-310.
- [14] Fill J.A., *Eigenvalue Bounds on Convergence to Stationarity for Nonreversible Markov Chains with an Application to the Exclusion Process*, Annals of Applied Probability 1, 62-87, 1991, s. 62-87.
- [15] Gantmacher F.R., *The Theory of Matrices*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [16] Gelfand I.M., *Wykłady z algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1978.
- [17] Goldberg M., *Equivalence Constants for l_p Norms of Matrices*, Linear and Multilinear Algebra 21, 1987, s. 173-179.
- [18] Hartfiel D.J., Meyer C.D., *On the Structure of Stochastic Matrices with a Subdominant Eigenvalue Near 1*, Linear Algebra and its Appl., 272, 1998, s. 193-203.
- [19] Hohn F., *Elementary Matrix Algebra*, New York 1961.
- [20] Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa*, PWN, Warszawa 1988.
- [21] Jerrum M., Sinclair A., *Approximating the Permanent*, SIAM J. Comput., 18, 2001, s. 1149-1178.
- [22] Karpelewicz F.I., *On the Eigenvalues of a Matrix with Nonnegative Elements*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 15, 1951, s. 361-383.
- [23] Kemeny J.G., Snell J.L., *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, New York 1976
- [24] Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E., *Loss Models*, John Wiley&Sons, 1998.
- [25] Kolmogorov A.N., *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeits-rechnung*, Math. Ann. 104, 1931, s. 415-458.
- [26] Lemaire J., *Automobile Insurance*, Kluwer-Nijnhoff, Boston 1985.
- [27] Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer, Boston 1995.
- [28] Lesanovsky A., *Coefficients of Ergodicity Generated by Non-Symmetrical Vector Norms*, „Czechoslovak Mathematical Journal” 40 (115), 1990, s. 284-294.

- [29] Loimaranta K., *Some Asymptotic Properties of Bonus Systems*, ASTIN Bulletin, 1972, s. 233-245.
- [30] Marshall A.W., Olkin I., *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York 1979.
- [31] Nykowska M., *Prognozowanie struktury za pomocą łańcuchów Markowa*, Prace i Materiały, Instytut Cybernetyki i Zarządzania, SGPiS, Warszawa 1980, s. 142-161.
- [32] Panjer H., *Models in Risk Theory*, Proceed. of Symp. Appl. Mathematica, 35, 1986.
- [33] Panjer H., Willmot G.E., *Insurance Risk Models*, Society of Actuaries 1992.
- [34] Pinquet J., *Designing Optimal Bonus-Malus Systems from Different Types of Claims*, ASTIN Bulletin 1998, s. 205-220.
- [35] Podgórska M., Śliwka P. i in., *Łańcuchy Markowa i ich zastosowania*, SGH, Warszawa 2000.
- [36] Pokarowski P., *Directed Forests with Applications to Algorithms Related to Markov Chains*, Applicationes Mathematicae 26(4), 1999, s. 395-414.
- [37] Pokarowski P., *Uncoupling Measures and Eigenvalues of Stochastic Matrices*, „Journal of Applied Analysis” 4(2), 1998, s. 261-269.
- [38] Rhodius A., *The Maximal Value for Coefficients of Ergodicity*, Stochastic Processes and their Applic., 29, 1988, s. 141-145.
- [39] Rolski T. i in., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, Chichester 1999.
- [40] Rothblum U.G., Tan Ch.P., *Upper Bounds on the Maximum Modulus of Subdominant Eigenvalues of Nonnegative Matrices*, Linear Algebra Appl., 66, 1985, s. 45-86.
- [41] Sarymsakov T.A., *On the Theory of Inhomogenous Markov Chains*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 8, 1958, s. 3-7.
- [42] Seneta E., *Ergodicity Coefficient*, Adv. Appl. Prob., 11, 1979, s. 576-590.
- [43] Seneta E., *Explicit Forms for Ergodicity Coefficients and Spectrum Localization*, Linear Algebra Appl., 60, 1984, s. 187-197.
- [44] Seneta E., *Explicit Forms for Ergodicity Coefficients of Stochastic Matrices*, Linear Algebra Appl., 191, 1993, s. 245-252.
- [45] Seneta E., *Non-Negative Matrices and Markov Chains*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg and Berlin 1981.
- [46] Smith G.D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, University Press, Oxford 1965.
- [47] Stone B.J., *Bests Ratios of Certain Matrix Norms*, Numer. Math., 4, 1962, s. 114-116.
- [48] Straub E., *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [49] Śliwka P., *Ocena jakości systemu bonus-malus przy wybranych metodach estymacji parametrów*, praca doktorska, SGH, Warszawa 2003.
- [50] Śliwka P., Topolewski M., *Zjawisko łaknienia zniżek w ubezpieczeniach komunikacyjnych*, Roczniki KAE SGH, 1998, s. 234-249.
- [51] Tan Ch.P., *A Functional Form for a Particular Coefficient of ergodicity*, J. Appl. Prob., 19, 1982, s. 858-863.
- [52] Tan Ch.P., *Coefficient of Ergodicity with Respect to Vector Norms*, J. Appl. Prob., 20, 1983, s. 272-287.
- [53] Van der Waerden B., *Moderne Algebra I, II*, Berlin 1960.
- [54] Venter G., *A Comparative Analysis of Most European and Japanese Bonus-Malus Systems: Extension*, „Journal of Risk and Insurance”, 58, 1991, s. 542-547.
- [55] Vesely P., *Two Contributions to the Theory of Coefficients of Ergodicity*, „Czechoslovak Mathematical Journal” 42 (117), Praha 1992.
- [56] Vose D., *Risk Analysis. A quantitative guide*, 2nd edition, Wiley&Sons 2000.
- [57] Wilkinson J.H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford 1965.

BONUS MALUS SYSTEM – THE MEASURES OF CONVERGENCE SPEED OF THE MODELS TO THE STATIONARY STATE

Summary

Applied measures of quality of the bonus-malus system include stationary distribution in the analytical structure. This is directly connected with the estimate of convergence rapidity of matrix \mathbf{P}^n to ergodic matrix \mathbf{E} . A new appraisal of convergence rapidity \mathbf{P}^n to \mathbf{E} , which depend on multiplicity of the modulus of the second largest eigenvalue in TV norm is proposed in this article. The new appraisal in the case of single eigenvalues of matrix \mathbf{P} is more precise than existing in literature, and in the case of multiple eigenvalues does not depend on unessential states of Markov chains.