

Marta Jarząb, Kinga Migdał, Anna Nikodem

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WYZNACZANIE ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIENSTWA ZAGREGOWANYCH WYPŁAT FIRMY UBEZPIECZENIOWEJ

1. Wstęp

Podstawą działalności firmy ubezpieczeniowej jest przyjęcie zobowiązania wypłaty określonego w umowie świadczenia w razie zajścia zdarzenia ubezpieczeniowego w zamian za składkę wpłacaną przez ubezpieczającego. Wpływy ze składek mają zapewnić płynność finansową ubezpieczyciela i zabezpieczyć firmę przed bankructwem. Aby można było posłużyć się statystycznymi metodami wyznaczania składek, konieczne jest przyjęcie modelu opisującego proces wypłat generowanych z portfela. Portfel ubezpieczeniowy rozpatrywany jest tutaj jako zbiór polis generujący wypłaty w losowych momentach czasu. Należy zatem dopasować model opisujący łączną wielkość wypłacanych przez firmę odszkodowań, czyli model uwzględniający zarówno liczbę dokonywanych z portfela wypłat, jak i wielkość wypłacanych odszkodowań.

W artykule przedstawiono sposoby wyznaczania rozkładów zagregowanych wypłat ubezpieczyciela. Zaprezentowano model klasyczny, w którym zakłada się niezależność wypłat. Uwzględniono również model ilustrujący sytuację, w której portfel złożony jest z dwóch współzależnych klas ryzyka.

2. Rozkład złożony jako model zagregowanych wypłat ubezpieczyciela

Oznaczmy rozkład łącznych wypłat ubezpieczyciela jako S . Na rozkład S ma wpływ liczba dokonywanych z portfela wypłat, jak i wielkość wypłacanych odszkodowań. Zazwyczaj zakłada się, że wypłacane kolejno odszkodowania X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. W celu uproszcze-

nia modelu przyjmuje się, że na wielkość wypłacanych odszkodowań nie ma wpływu ich liczba. Zatem zmienne X_1, X_2, \dots oraz zmienna N , licząca wypłaty, są wzajemnie niezależne. Przyjmując przedstawione założenia, wielkość zagregowanych odszkodowań S wypłacanych przez ubezpieczyciela w jednostkowym przedziale czasowym można modelować za pomocą rozkładu złożonego (por. [1; 7; 10]):

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{dla } N \geq 1 \\ 0 & \text{dla } N = 0. \end{cases}$$

Dla tak zdefiniowanego modelu zagregowanych wypłat ubezpieczyciela (przy założeniu, że pierwsze dwa momenty rozkładów N , X istnieją) wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu S oblicza się z następujących wzorów (por. [10]):

$$E(S) = E(N) \cdot E(X), \quad (1)$$

$$V(S) = V(N) \cdot (E(X))^2 + E(N) \cdot V(X). \quad (2)$$

Gdy za rozkład N opisujący liczbę odszkodowań wypłaconych w jednostkowym odcinku czasu przyjmuje się rozkład Poissona ze stałą intensywnością λ , wówczas prawdopodobieństwo wystąpienia n wypłat wynosi:

$$p_n = P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Przyjmując jako rozkład liczby wypłat N rozkład Poissona z parametrem λ , o zagregowanej wielkości wypłat S mówimy, że ma złożony rozkład Poissona z parametrami (λ, F_X) (por. [8]). Parametr λ jest intensywnością występowania wypłat wynikającą z rozkładu Poissona, natomiast F_X jest rozkładem wielkości indywidualnych wypłat.

Dla niejednorodnego portfela zakłada się, że liczba szkód wynikających z polis należących do niego ma uogólniony rozkład Poissona, czyli rozkład Poissona ze zmiennym parametrem λ . Intensywność λ występowania szkód z danej polisy jest zatem realizacją zmiennej losowej Λ , nazywanej zmienną strukturalną (zamiennie można ją określać mianem zmiennej mieszającej). O rozkładzie zmiennej N mówi się w takim przypadku, że jest mieszanką rozkładów Poissona o parametrze strukturalnym Λ (por. [5; 10]). Prawdopodobieństwo wystąpienia n wypłat dla mieszanki rozkładów Poissona wynosi:

$$p_n = P(N = n) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dF_{\Lambda}(\lambda), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie F_{Λ} jest dystrybuantą rozkładu strukturalnego Λ .

Wartość oczekiwaną i wariancję mieszanki rozkładów Poissona o parametrze strukturalnym Λ można obliczyć, korzystając z następujących zależności (por. [10]):

$$E(N) = E(\Lambda), \quad (3)$$

$$V(N) = E(\Lambda) + V(\Lambda). \quad (4)$$

Przyjmując za rozkład liczby wypłat N mieszany rozkład Poissona z parametrem strukturalnym Λ , o zagregowanej wielkości wypłat S mówimy, że ma złożony mieszany rozkład Poissona z parametrami (Λ, F_X) .

Do klasycznych postaci rozkładu zmiennej strukturalnej Λ , mających zastosowanie w praktycznym rachunku aktuarialnym ubezpieczeń komunikacyjnych, należy rozkład gamma $G(\alpha, \theta)$ o gęstości (por. [4; 5; 10]):

$$f(\lambda) = \theta^\alpha \lambda^{\alpha-1} \frac{e^{-\theta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \lambda \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0. \quad (5)$$

Przy założeniu rozkładu gamma $G(\alpha, \theta)$ zmiennej strukturalnej Λ zmienna N ma rozkład ujemnie dwumianowy $NB\left(\alpha, p = \frac{1}{1+\theta}\right)$. Prawdopodobieństwo wystąpienia n wypłat dla tak zdefiniowanego rozkładu liczby odszkodowań wynosi:

$$p_n = P(N = n) = \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^\alpha \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n = \binom{\alpha+n-1}{n} (1-p)^\alpha (p)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wartość oczekiwana i wariancja rozkładu ujemnie dwumianowego wynoszą odpowiednio $E(N) = \frac{\alpha p}{1-p}$, $V(N) = \frac{\alpha p}{(1-p)^2}$.

Szczególnym przypadkiem rozkładu gamma (dla parametru $\alpha = 1$) jest rozkład wykładniczy. Gdy za rozkład zmiennej strukturalnej Λ przyjmiemy rozkład wykładniczy z parametrem θ , wówczas zmienna N , licząca odszkodowania, ma rozkład geometryczny z parametrem $p = \frac{1}{1+\theta}$.

3. Metoda analityczna wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej S

Dla większości postaci rozkładów liczby wypłat N oraz wielkości indywidualnych wypłat F_X znalezienie rozkładu prawdopodobieństwa wielkości łącznych wypłat ubezpieczyciela jest bardzo skomplikowane obliczeniowo. Istnieją jednak przypadki, dla których możliwe jest wyznaczenie rozkładu zmiennej S w sposób analityczny (por. [6]).

3.1. Rozkład wykładniczy wielkości indywidualnych wypłat

Jeżeli przyjmiemy za rozkład wielkości indywidualnych odszkodowań F_X rozkład wykładniczy z parametrem θ , to splot n niezależnych zmiennych o rozkładzie F_X ma rozkład gamma $G(n, \theta)$. Gęstość tego rozkładu dla naturalnych wartości parametru $\alpha = n$, zgodnie ze wzorem 5, ma postać:

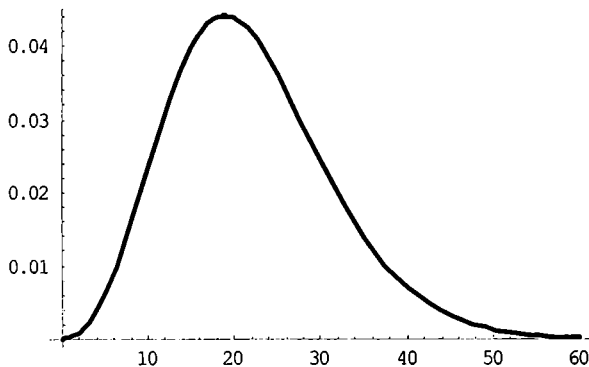
$$f_X^{*n}(x) = \theta^n x^{n-1} \frac{e^{-\theta x}}{(n-1)!}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wielkości łącznych wypłat ubezpieczyciela ma następującą postać:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot f_X^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot \theta^n x^{n-1} \frac{e^{-\theta x}}{(n-1)!}. \quad (6)$$

Przykład 1a

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 11, natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. Dokładny rozkład prawdopodobieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela, wyznaczony ze wzoru 6 przedstawiono na rys. 1a.

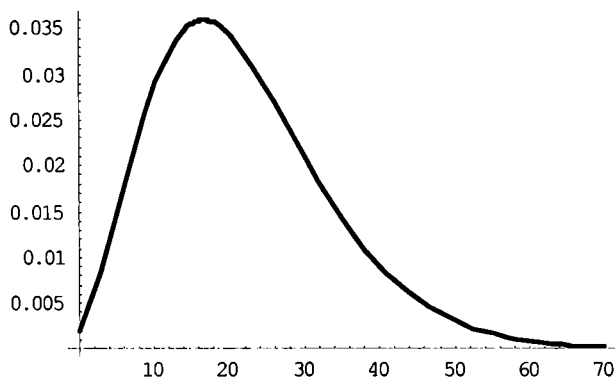


Rys. 1a. Funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu Poissona (11) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 1b

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład ujemnie dwumianowy (9; 0,45), natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. Dokładny rozkład prawdopodobieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela, wyznaczony ze wzoru 6, przedstawiono na rys. 1b.



Rys. 1b. Funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu ujemnie dwumianowego (9; 0,45) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

3.2. Klasy rozkładów wielkości indywidualnych wypłat zamkniętych ze względu na operację splotu

Mianem klasy rozkładów zamkniętych ze względu na operację splotu nazywa się taką klasę rozkładów, dla której rozkład sumy niezależnych zmiennych z tej klasy również do niej należy. Znajomość rozkładu sumy n niezależnych, jednakowych rozkładów wielkości indywidualnych wypłat ułatwia wyznaczanie rozkładu prawdopodobieństwa łącznych wypłat. Nie jest już bowiem konieczne wyznaczanie rozkładów kolejnych splotów (por. [6]).

Przyjmijmy, że wielkości indywidualnych wypłat X_i zadane są rozkładem $f_X(x; a)$ o takiej własności, że w wyniku dodania do siebie n niezależnych zmiennych $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ otrzymuje się rozkład o parametrze przemnożonym przez n , tzn. $f_X^{*n}(x; a) = f_X(x; na)$. Wówczas funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat ma postać:

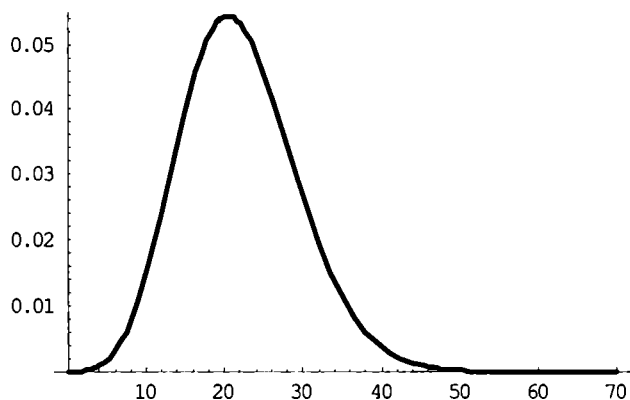
$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x; a) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_X(x; na). \quad (7)$$

Do zbioru rozkładów zamkniętych na operację splatania należą m.in. rozkład gamma i odwrócony gaussowski.

Przykład 2a

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 11, natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład gamma o parametrach $\alpha = 0,5$; $\theta = 0,25$. Dokładny rozkład prawdopodo-

bieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela, wyznaczony ze wzoru 7, przedstawiono na rys. 2a.

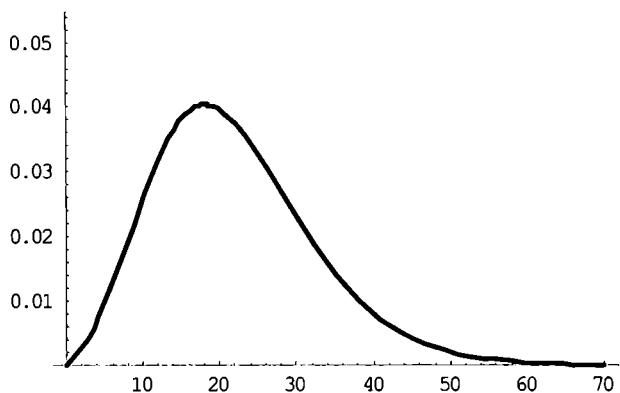


Rys. 2a. Funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu Poissona (11) liczby wypłat i rozkładu gamma (0,5; 0,25) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 2b

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład ujemnie dwumianowy (9; 0,45), natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład gamma o parametrach $\alpha = 0,5$; $\theta = 0,25$. Dokładny rozkład prawdopodobieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela, wyznaczony ze wzoru 7, przedstawiono na rys. 2b.



Rys. 2b. Funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu ujemnie dwumianowego (9; 0,45) liczby wypłat i rozkładu gamma (0,5; 0,25) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

4. Metody aproksymacji rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej S

W celu uniknięcia bezpośredniego wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa łącznych wypłat, powszechnie stosowane są aproksymacje rozkładów złożonych.

4.1. Aproksymacja rozkładem normalnym

Jednym spośród wielu sposobów przybliżania rozkładów złożonych jest metoda bazująca na centralnym twierdzeniu granicznym (por. [5; 7]).

Twierdzenie 1a

Niech zmienna S ma złożony rozkład Poissona z intensywnością λ oraz z rozkładem wielkości odszkodowań o skończonej wariancji. Zgodnie ze wzorami 1, 2, parametry rozkładu S wynoszą $\mu = E(S) = \lambda \cdot E(X)$ oraz $\sigma^2 = \text{Var}(S) = \lambda \cdot E(X^2)$.

Wówczas dla dużych wartości parametru λ zachodzi:

$$\Pr\left[\frac{S - \mu}{\sigma} \leq x\right] \approx \Phi(x).$$

Analogiczne twierdzenie prawdziwe jest dla rozkładu ujemnego dwumianowego.

Twierdzenie 1b

Niech zmienna S ma złożony rozkład ujemnie dwumianowy $NB(\alpha, p)$ oraz z rozkładem wielkości odszkodowań o skończonej wariancji. Zgodnie ze wzorami 1, 2, parametry rozkładu S wynoszą $\mu = E(S) = \frac{\alpha p}{1-p} E(X)$ oraz $\sigma^2 = \text{Var}(S) =$

$= \frac{\alpha p}{1-p} V(X) + \frac{\alpha p}{(1-p)^2} (E(X))^2$. Wówczas dla dużych wartości parametru λ za-

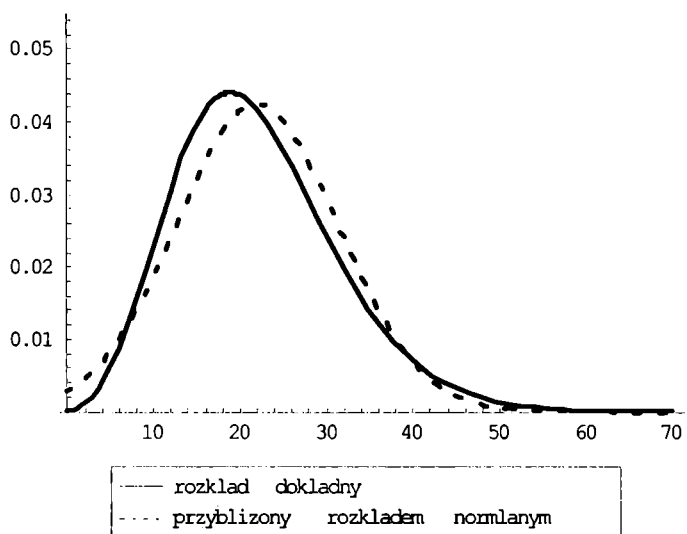
chodzi:

$$\Pr\left[\frac{S - \mu}{\sigma} \leq x\right] \approx \Phi(x).$$

Przybliżanie złożonego rozkładu Poissona rozkładem normalnym daje dobre rezultaty, gdy intensywność λ występowania wypłat przyjmuje duże wartości. Metodę można również stosować w odniesieniu do złożonego rozkładu ujemnie dwumianowego $NB(\alpha, p)$ dla dużych wartości parametru α . Metoda nie nadaje się jednak do przybliżania zagregowanych wypłat generowanych z portfela, w którym rozkład indywidualnych odszkodowań charakteryzuje się silną asymetrią.

Przykład 3a

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 11, natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. Dokładną oraz przybliżoną rozkładem normalnym gęstość rozkładu prawdopodobieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela przedstawiono na rys. 3a.



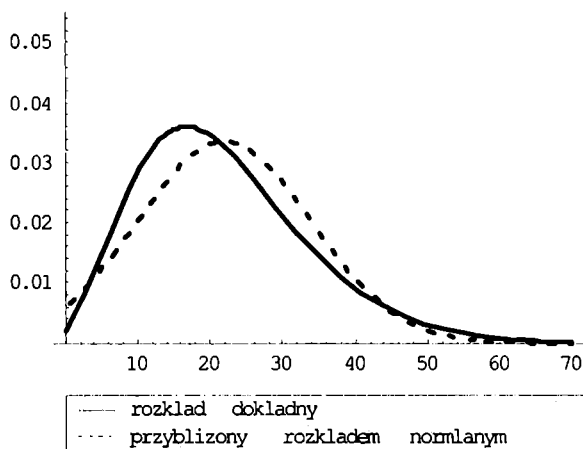
Rys. 3a. Dokładna i przybliżona rozkładem normalnym funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu Poissona (11) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 3b

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład ujemnie dwumianowy (9; 0,45), natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. Dokładną oraz przybliżoną rozkładem normalnym gęstość rozkładu prawdopodobieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela przedstawiono na rys. 3b.

Jak można zauważyć na rys. 3a, 3b, przybliżenie rozkładem normalnym gęstości łącznych wypłat ubezpieczyciela powoduje niedoszacowanie odszkodowań wysokich. Może to być szczególnie niebezpieczne w przypadku ciężkoogonowego rozkładu rzeczywistych wielkości szkód.



Rys. 3b. Dokładna i przybliżona rozkładem normalnym funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu Poissona (11) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

4.2. Aproksymacja przesuniętym rozkładem gamma

Aby uwzględnić silną skośność rozkładu zmiennej S , aproksymuje się go przesuniętym rozkładem gamma (por. [7; 12]).

Przesunięty rozkład gamma zadany jest następującą funkcją gęstości:

$$f_Y(y) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (y - \gamma)^{\alpha-1} e^{-\theta(y-\gamma)}, \quad \text{dla } y \geq \gamma, \alpha, \theta, \gamma > 0.$$

Momenty tego rozkładu wynoszą odpowiednio $E(Y) = \gamma + \frac{\alpha}{\theta}$, $V(Y) = \frac{\alpha}{\theta^2}$,

$$E(Y - E(Y))^3 = \frac{2\alpha}{\theta^3}.$$

Rozkład łącznych wypłat S aproksymuje się przesuniętym rozkładem gamma w taki sposób, żeby zachodziła równość trzech przedstawionych momentów rozkładu S oraz Y . Z porównania momentów otrzymuje się następującą postać parametrów rozkładu gamma:

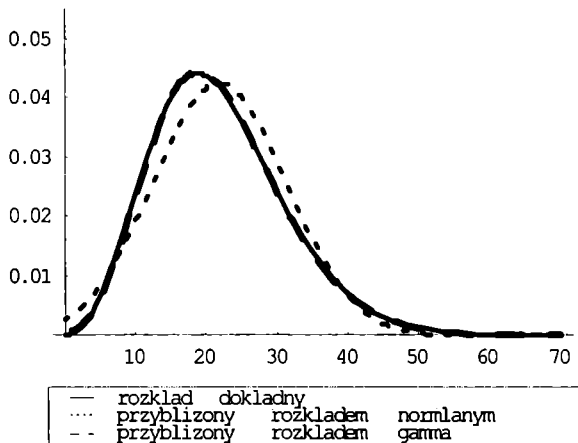
$$\gamma = E(S) - 2 \frac{(V(S))^2}{E(S - E(S))^3}, \quad \alpha = 4 \frac{(V(S))^3}{E(S - E(S))^6}, \quad \theta = 2 \frac{V(S)}{E(S - E(S))^3}.$$

W przypadku aproksymacji złożonego rozkładu Poissona parametry przesuniętego rozkładu gamma wynoszą odpowiednio:

$$\gamma = \lambda E(X) - 2\lambda \frac{(E(X^2))^2}{E(X)^3}, \quad \alpha = 4\lambda \frac{(E(X^2))^3}{(E(X^3))^2}, \quad \theta = 2 \frac{E(X^2)}{E(X^3)}.$$

Przykład 4a

Założmy, jak w poprzednim przykładzie, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 11, natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. Dokładną oraz przybliżoną rozkładem normalnym i przesuniętym rozkładem gamma gęstość rozkładu prawdopodobieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela przedstawiono na rys. 4a.



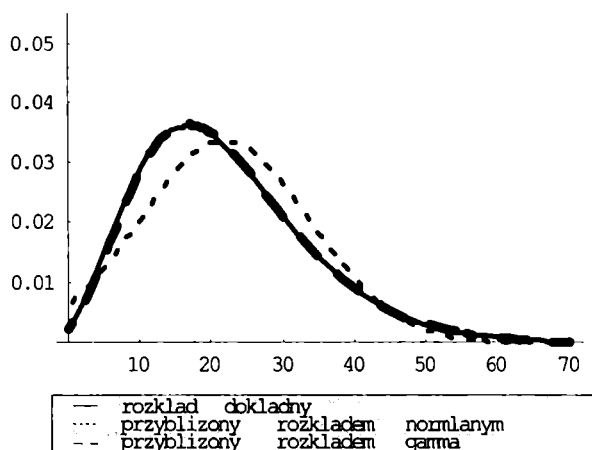
Rys. 4a. Dokładna oraz przybliżona rozkładem normalnym i przesuniętym rozkładem gamma funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu Poissona (11) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 4b

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład ujemnie dwumianowy (9; 0,45), natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. Dokładną oraz przybliżoną rozkładem normalnym i przesuniętym rozkładem gamma gęstość rozkładu prawdopodobieństwa łącznych wypłat generowanych z tego portfela przedstawiono na rysunku 4b.

Jak można zauważyć na rysunkach, przybliżenie przesuniętym rozkładem gamma gęstości łącznych wypłat ubezpieczyciela daje w tych przypadkach lepsze rezultaty niż przybliżenie rozkładem normalnym.



Rys. 4b. Dokładna oraz przybliżona rozkładem normalnym i przesuniętym rozkładem gamma funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu ujemnie dwumianowy (9; 0,45) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

4.3. Metoda rekurencyjna wyznaczania rozkładu zagregowanych wypłat

Dokładny rozkład prawdopodobieństwa łącznych wypłat ubezpieczyciela można wyznaczać w sposób rekurencyjny. Rozkłady złożone, dla których metoda rekurencyjna wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa może mieć zastosowanie, należą do rodziny rozkładów spełniających następujące warunki (por. [1]).

1. Rozkład liczby wypłat spełnia formułę rekurencyjną:

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n} \right) \cdot p_{n-1} \quad \text{dla} \quad n = m, m+1, m+2, \dots, m \in N,$$

gdzie a oraz b są stałymi określającymi rozkład prawdopodobieństwa liczby wypłat.

2. Rozkład wielkości wypłat jest nieujemny, dyskretny i spełniający następującą zależność:

$$X_i = i \cdot C \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \dots, r,$$

gdzie C jest dodatnią stałą nazywaną długością kroku.

Warunek 1 spełniony jest dla rozkładów Poissona, dwumianowego oraz ujemnie dwumianowego (warunek 1 spełniony jest również dla rozkładu geometrycznego jako szczególnego przypadku rozkładu ujemnie dwumianowego). Wartości stałych a i b dla wymienionych rozkładów przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Wartości stałych a i b dla rozkładów prawdopodobieństwa spełniających warunek 1

Rozkład liczby wypłat	Stała	
	a	b
Poissona(λ)	0	λ
$B(n, p)$	$\frac{p}{1-p}$	$\frac{(n+1)p}{1-p}$
$NB(\alpha, p)$	$\frac{p}{p+\alpha}$	$\frac{(\alpha-1)p}{p+\alpha}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [2].

Rozkłady złożone S , które spełniają warunki 1, 2, są rozkładami dyskretnymi przyjmującymi jedynie wartości będące krotnościami kroku C . Oznaczmy jako f_j prawdopodobieństwa postaci:

$$f_j = P(S = j \cdot C) \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Prawdopodobieństwa te można obliczyć w sposób rekurencyjny z równań:

$$f_0 = \begin{cases} p_0 & \text{dla } s_0 = 0 \\ M_N(\ln s_0) & \text{dla } s_0 > 0, \end{cases}$$

$$f_j = \frac{1}{1-a \cdot s_0} \sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a + \frac{i \cdot b}{j} \right) \cdot s_i \cdot f_{j-i}, \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \dots,$$

gdzie $s_i = P(X = i \cdot C)$ ($0 \leq i \leq r$) jest rozkładem prawdopodobieństwa wielkości

wypłat, natomiast $M_N(\ln s_0) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot s_0^i$ jest funkcją tworzącą momenty rozkładu

liczby wypłat.

Prawdopodobieństwa s_i mogą przyjmować wartość 0 dla niektórych $0 \leq i \leq r$.

Dla $i < 0$ oraz $i > r$ prawdopodobieństwa $s_i = 0$. Wartości prawdopodobieństw

f_0 dla rozkładów Poissona, dwumianowego oraz ujemnie dwumianowego przedstawiono w tab. 2.

Jeżeli rozkład wielkości wypłat jest ciągły, to pierwszym krokiem rekurencyjnego wyznaczania rozkładu złożonego jest przybliżenie tego rozkładu rozkładem dyskretnym spełniającym warunek 2.

Tabela 2. Wartości prawdopodobieństw f_0 dla rozkładów prawdopodobieństwa spełniających warunek 1

Rozkład liczby wypłat	Poissona (λ)	$B(n, p)$	$NB(\alpha, p)$
f_0	$f_0 = e^{\lambda \cdot s_0 - \lambda}$	$f_0 = \left(\frac{a-1}{a \cdot s_0 - 1} \right)^{\frac{a+b}{a}}$	$f_0 = \left(1 + \frac{a \cdot n \cdot (1-s_0)}{a+b} \right)^{-\frac{a+b}{a}}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [2].

Pierwszą z prezentowanych w artykule metod dyskretyzacji rozkładu X jest metoda środków przedziałów (*midpoint metod, mass dispersal*) (por. [1; 6]). W metodzie należy skoncentrować jednostki masy rozkładu w środkach przedziałów postaci $(0, C/2], (C/2, 3 \cdot C/2], \dots$ w środkach tych przedziałów. Jako przybliżenie oryginalnego rozkładu wielkości wypłat X otrzymuje się wówczas rozkład dyskretny o nośniku w punktach $0, C, 2 \cdot C, \dots, r \cdot C$.

Prawdopodobieństwa w wymienionych punktach wynoszą odpowiednio:

$$s_0 = F_X\left(\frac{C}{2}\right),$$

$$s_i = F_X\left(i \cdot C + \frac{C}{2}\right) - F_X\left(i \cdot C - \frac{C}{2}\right) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, r$$

oraz $s_i = 0$ poza tym zakresem.

Wartość r powinna być wystarczająco duża, żeby prawdopodobieństwo $P(X > r \cdot C + C/2)$ było już pomijalnie małe.

Wadą tej metody dyskretyzacji rozkładu wielkości wypłat jest występowanie różnic wartości oczekiwanej i wyższych momentów rozkładu dyskretnego w stosunku do oryginalnego ciągłego rozkładu. Ponieważ funkcja gęstości rozkładu wielkości wypłat jest na ogół funkcją malejącą w ogonie, większe prawdopodobieństwo będzie zawsze osiągane w pierwszych połowach wyznaczonych przedziałów, zatem momenty funkcji dyskretnej liczone w ogonie rozkładu będą systematycznie obciążone. Aby poprawić zgodność dopasowania rozkładu dyskretnego do przybliżanego ciągłego rozkładu wielkości wypłat, należy brać coraz większe wartości r i jako końcowe rozwiązanie wybrać to, dla którego poprawa zgodności nie jest już znacząca. Może to jednak doprowadzić do wyboru tak dużej wartości r , że numeryczne kalkulacje staną się bardzo czasochłonne.

Drugą z prezentowanych w artykule metod dyskretyzacji rozkładu X jest metoda zachowująca wartość oczekiwaną (*matching-mean method*) (por. [6; 13]).

W metodzie tej jako przybliżenie oryginalnego rozkładu wielkości wypłat X wybiera się rozkład dyskretny o nośniku w punktach $0, C, 2 \cdot C, \dots, r \cdot C$ oraz

prawdopodobieństwach ustalonych w taki sposób, żeby wartość oczekiwana rozkładu wielkości wypłat pozostała niezmienną.

W pierwszym kroku należy wyznaczyć wartości oczekiwane rozkładu F_X uciętego w punktach będących wielokrotnościami C :

$$E[X; i \cdot C] = \int_0^{i \cdot C} (1 - F_X(u)) du \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, r.$$

Wartości prawdopodobieństw rozkładu dyskretyzowanego oblicza się następująco:

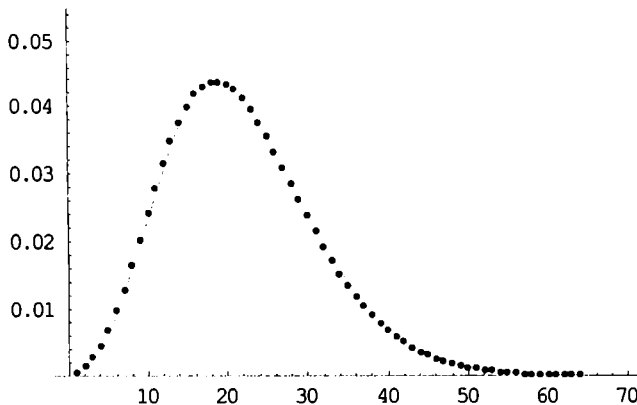
$$s_0 = P(X = 0) = 1 - \frac{E[X; C]}{C}$$

$$s_i = P(X = i \cdot C) = 1 - \frac{2E[X; i \cdot C] - E[X; (i-1) \cdot C] - E[X; (i+1) \cdot C]}{C} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, r.$$

Wartość r wyznaczająca największą realizację rozkładu dyskretnego powinna być wystarczająco duża, żeby różnica pomiędzy wartością oczekiwaną rozkładu ciągłego F_X a wartością oczekiwaną rozkładu dyskretnego była pomijalnie mała.

Przykład 5a

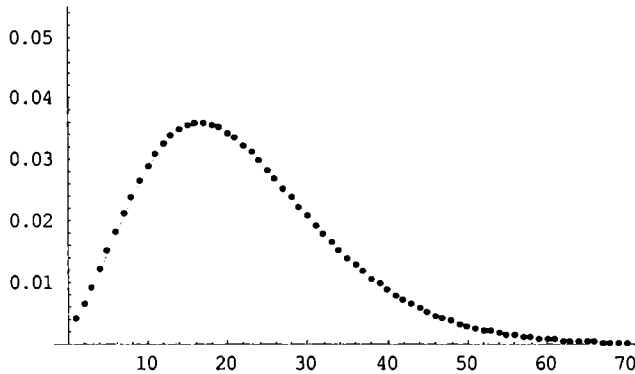
Załóżmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 11, natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. W celu zastosowania metody rekurencyjnej wyznaczania rozkładu złożonego ciągły rozkład wielkości odszkodowań dyskretyzowano metodą środków przedziałów. Dokładną oraz wyznaczoną rekurencyjnie postać rozkładu łącznych wypłat generowanych z tego portfela przedstawiono na rys. 5a.



Rys. 5a. Dokładna i wyznaczona rekurencyjnie funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu Poissona (11) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Przykład 5b

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład ujemnie dwumianowy (9; 0,45), natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. W celu zastosowania metody rekurencyjnej wyznaczania rozkładu złożonego ciągły rozkład wielkości odszkodowań dyskretyzowano metodą środków przedziałów. Dokładną oraz wyznaczoną rekurencyjnie postać rozkładu łącznych wypłat generowanych z tego portfela przedstawiono na rys. 5b.



Rys. 5b. Dokładna i wyznaczona rekurencyjnie funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu ujemnie dwumianowego (9; 0,45) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

4.4. Metoda odwrotnej funkcji charakterystycznej

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej S ze znaną funkcją charakterystyczną $\Phi_S(t)$ może być wyznaczony za pomocą metody odwrotnej funkcji charakterystycznej.

W modelu ryzyka kolektywnego funkcja charakterystyczna sumy S ma postać:

$$\Phi_S(t) = E[e^{itS}] = E_N \left[E \left[e^{i(X_1 + X_2 + \dots + X_N)} / N \right] \right] = E_N [\Phi_X(t)^N] = P_N [\Phi_X(t)], \quad (8)$$

gdzie $P_N(z)$ jest funkcją tworzącą zmiennej N , a $\Phi_X(t)$ jest funkcją charakterystyczną zmiennej X .

Dla każdych ciągłych zmiennych losowych S , dla których funkcja charakterystyczna $\Phi_S(z)$ jest bezwzględnie całkowna, można określić funkcję gęstości poprzez przekształcenie funkcji charakterystycznej według wzoru (por. [3]):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) e^{-ixz} dz.$$

W przypadku rozkładów dyskretnych stosuje się szybką transformatę Fouriera (*fast Fourier transform* – FFT) (por. [1; 12; 13]). Metoda FFT wzajemnie jednoznacznie przekształca n -elementowy wektor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ w wektor n -elementowy $\tilde{f} = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-1})$, zgodnie z formułą:

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} jk\right) \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n-1,$$

gdzie f_j oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa S przyjmie wartość j .

Do wyznaczenia funkcji rozkładu zmiennej losowej S wykorzystuje się odwrotną szybką transformatę Fouriera (*inverse fast Fourier transform* – IFFT), która jest jednoznacznym przekształceniem, zgodnie z formułą:

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} kj\right) \quad \text{dla } j=0, 1, \dots, n-1.$$

Szybką transformatę Fouriera oraz odwrotną szybką transformatę Fouriera można przedstawić jako iloczyn macierzy:

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix} = W f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{(n-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(n-1)} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$f = W^{-1} \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-2(n-1)} & \dots & \omega^{-(n-1)^2} \end{bmatrix},$$

gdzie $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$.

Przekształcenie to nazywane jest szybką transformatą Fouriera ze względu na to, że dla wektora f o długości 2^r liczba rekurencyjnych obliczeń redukuje się do stopnia $n \log_2 n$. Przy takich założeniach przekształcenie może być zapisane jako suma dwóch przekształceń o długości $m = n/2 = 2^{r-1}$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}_k &= \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} jk\right) = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2j} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} 2jk\right) + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2j+1} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} (2j+1)k\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} f_{2j} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} jk\right) + \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} f_{2j+1} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} jk\right),\end{aligned}$$

stąd

$$\tilde{f}_k = \tilde{f}_k^a + \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right) \tilde{f}_k^b,$$

gdzie: $\tilde{f}_k^a = \sum_{j=0}^{m-1} f_{2j} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} jk\right)$, $\tilde{f}_k^b = \sum_{j=0}^{m-1} f_{2j+1} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} jk\right)$.

Powyższe wyrażenia przekształcając wektor o długości $m = \frac{n}{2} = 2^{r-1}$ można ponownie podzielić na przekształcenia o połowie długości. Postępując tak r razy, dostaniemy r przekształceń o długości 1, na podstawie których można dostać wektor o długości $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^r$.

W celu znalezienia rozkładu sumy zagregowanych wypłat należy wykonać następujące kroki:

Krok 1. Określić maksymalny możliwy rozmiar wypłaty $X - n = 2^r$. Liczby $0, 1, \dots, n-1$ będą oznaczały możliwe wartości wypłaty X . Określenie liczby n powoduje przyjęcie założenia, że poza tym zbiorem dla wypłat większych od $n-1$ prawdopodobieństwa ich realizacji są nieistotne.

Krok 2. W przypadku ciągłości rozkładu zmiennej losowej X opisującej wysokości indywidualnych wypłat należy dokonać dyskretyzacji.

Krok 3. Jeśli $f = (f_0, f_1, \dots, f_{m-1})$ oznacza dyskretny rozkład zmiennej X , to do wektora należy dodać odpowiednią ilość zer, tak aby jego długość wynosiła $n = 2^r$.

Krok 4. Zastosować FFT do przedłużonego wektora f , $F: (f) \rightarrow (\tilde{f})$.

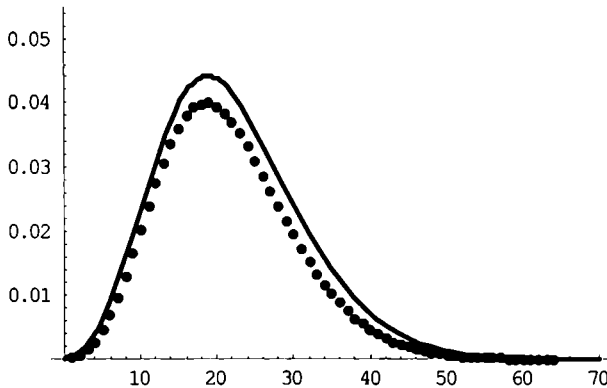
Krok 5. Na wektor \tilde{f} nałożyć funkcję tworzącą prawdopodobieństwa dla zmiennej N zliczającej wypłaty w portfelu: $\tilde{f}_y = P_N(\tilde{f}_x)$.

Krok 6. Stosując IFFT, wyznaczyć wektor f_y .

Algorytmy FFT i IFFT są m.in. w programach Microsoft Excel oraz Mathematica.

Przykład 6

Założmy, że liczba wypłat generowanych z portfela ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 11, natomiast wielkości wypłacanych odszkodowań mają rozkład wykładniczy o parametrze 2. W celu zastosowania metody odwracania transformaty Fouriera do wyznaczenia rozkładu złożonego ciągły rozkład wielkości odszkodowań dyskretyzowano metodą środków przedziałów. Dokładną oraz wyznaczoną metodą FFT postać rozkładu łącznych wypłat generowanych z tego portfela przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Dokładna i wyznaczona metodą FFT funkcja gęstości rozkładu łącznych wypłat w przypadku rozkładu Poissona (11) liczby wypłat i rozkładu wykładniczego (2) wielkości odszkodowań

Źródło: opracowanie własne.

5. Zastosowanie metody odwrotnej funkcji charakterystycznej do wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa dla modelu Poissona ze współzależnymi klasami ryzyka

Przedstawione dotychczas sposoby znajdowania rozkładu zagregowanych kompensat dotyczyły modelu, dla którego założono niezależność wypłat. W praktyce spotyka się jednak portfele polis, dla których założenie o niezależności nie jest spełnione. Zależność może przybierać różne formy (por. [8]).

W tym punkcie pracy przedstawiony zostanie model portfela złożonego z dwóch klas o skorelowanej liczbie wypłat. Przyjmijmy założenie, że liczba wypłat generowanych z każdej klasy ma rozkład Poissona. Łączna wartość wypłaconych z portfela odszkodowań wyraża się jako suma (por. [1; 13])

$$S = W^{(1)} + W^{(2)}, \quad (9)$$

gdzie $W^{(j)} = \sum_{i=1}^{N^{(j)}} X_i^{(j)}$ dla $j = 1, 2$.

O łącznych wypłatach generowanych z j -tej klasy zakłada się, że spełniają przedstawione warunki:

- wielkości wypłat $X^{(j)}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach ($j = 1, 2, \dots, m$),
- $X^{(j)}$ i $N^{(j)}$ są niezależne,
- $N^{(j)}$ są zależnymi zmiennymi losowymi.

Rozważmy uproszczony model, w którym odszkodowania wypłacane z portfela, ze względu na czynniki powodujące powstanie roszczeń, można podzielić na trzy grupy: dwie grupy wypłat generowanych przez czynniki typowe wyłącznie dla klasy pierwszej albo drugiej (o liczebnościach oznaczonych odpowiednio jako N_{11}, N_{22}) oraz grupę wypłat generowanych przez czynniki wspólne dla obydwu klas polis (o liczebności N_{12}). Liczba wypłat w każdej z klas może być zatem wyrażona jako:

$$N^{(1)} = N^{(11)} + N^{(12)}, \quad N^{(2)} = N^{(22)} + N^{(12)},$$

gdzie $N^{(uv)} \sim \text{Poisson}(\lambda_{uv})$ ($u, v = 1, 2$).

Suma n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem λ_i ma również rozkład Poissona, z parametrem $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Gdy skorzysta się z tego, wówczas otrzymuje się:

$$N^{(r)} \sim \text{Poisson}(\lambda_r) \quad (r = 1, 2),$$

gdzie parametry wynoszą odpowiednio $\lambda_1 = \lambda_{11} + \lambda_{12}$, $\lambda_2 = \lambda_{22} + \lambda_{12}$.

Łączna funkcja tworząca prawdopodobieństwa dwuwymiarowego rozkładu $(N^{(1)}, N^{(2)})$ ma następującą postać:

$$\begin{aligned} P_{N^{(1)}, N^{(2)}}(t_1, t_2) &= E \left[t_1^{N^{(11)} + N^{(12)}} t_2^{N^{(22)} + N^{(12)}} \right] = \\ &= E \left[t_1^{N^{(11)}} \right] E \left[t_2^{N^{(22)}} \right] E \left[t_{12}^{N^{(12)}} \right] = P_{N^{(11)}}(t_1) P_{N^{(22)}}(t_2) P_{N^{(12)}}(t_1 t_2). \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja tworząca prawdopodobieństwa dla rozkładu Poissona z parametrem λ ma postać $P_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$, otrzymujemy:

$$P_{N^{(1)}, N^{(2)}}(t_1, t_2) = e^{\lambda_{11}(t_1-1)} e^{\lambda_{22}(t_2-1)} e^{\lambda_{12}(t_1 t_2 - 1)}. \quad (10)$$

Gdy podstawimy otrzymaną funkcję tworzącą prawdopodobieństwa rozkładu liczącego do wzoru na funkcję charakterystyczną rozkładu złożonego (por. wzór (14)), otrzymujemy następującą postać funkcji charakterystycznej rozkładu łącznych wypłat z portfela ($W^{(1)}, W^{(2)}$):

$$\begin{aligned}\phi_{W^{(1)}, W^{(2)}}(t_1, t_2) &= P_{N^{(1)}, N^{(2)}}(\phi_{X^{(1)}}(t_1), \phi_{X^{(2)}}(t_2)) = \\ &= e^{\lambda_{11}(\phi_{X^{(1)}}(t_1)-1)} e^{\lambda_{22}(\phi_{X^{(2)}}(t_2)-1)} e^{\lambda_{12}(\phi_{X^{(1)}}(t_1)\phi_{X^{(2)}}(t_2)-1)}.\end{aligned}$$

Dla jednakowych wartości argumentu $t_1 = t_2 = t$ otrzymujemy:

$$\phi_S(t) = \phi_{W^{(1)}, W^{(2)}}(t, t) = e^{\lambda(\phi_X(t)-1)}, \quad (11)$$

gdzie:

$$\lambda = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{12}, \quad (12)$$

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda} \phi_{X^{(1)}}(t) + \frac{\lambda_{22}}{\lambda} \phi_{X^{(2)}}(t) + \frac{\lambda_{12}}{\lambda} \phi_{X^{(1)}}(t) \phi_{X^{(2)}}(t). \quad (13)$$

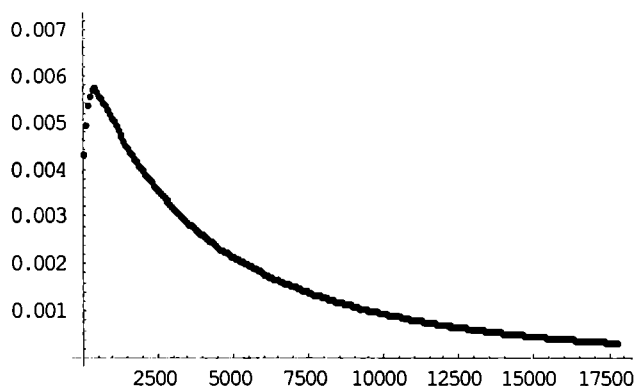
Zmienna losowa $S = W^{(1)} + W^{(2)}$ w rozważanym modelu ma złożony rozkład Poissona z parametrem λ (12) i rozkładem indywidualnych wypłat o funkcji charakterystycznej $\phi_X(t)$ zadanej wzorem (13). Z postaci funkcji charakterystycznej $\phi_X(t)$ wynika, że dystrybuanta rozkładu indywidualnych wypłat ma postać:

$$F_X(t) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda} F_{X^{(1)}}(t) + \frac{\lambda_{22}}{\lambda} F_{X^{(2)}}(t) + \frac{\lambda_{12}}{\lambda} F_{X^{(1)}+X^{(2)}}(t).$$

Przykład 7

Rozważmy portfel ubezpieczeń komunikacyjnych złożony z klasy polis ubezpieczenia OC oraz klasy polis ubezpieczenia AC. Załóżmy, że wypłaty generowane przez czynniki typowe wyłącznie dla klasy ubezpieczeń OC (N_{11}) mają rozkład Poissona z parametrem 0,2, natomiast wypłaty generowane przez czynniki typowe wyłącznie dla klasy ubezpieczeń AC (N_{22}) mają rozkład Poissona z parametrem 0,3. Załóżmy ponadto, że grupa wypłat generowanych przez czynniki wspólne dla obydwu klas polis (N_{12}) ma rozkład Poissona z parametrem 0,15. O rozkładzie wielkości odszkodowań generowanych z klasy ubezpieczeń OC ($X^{(1)}$) załóżmy, że jest Pareto z parametrami $\lambda = 3,2$ i $\theta = 10\,000$, natomiast rozkład wypłat z klasy ubezpieczeń AC ($X^{(2)}$) jest logarytmiczno-normalny ze średnią 7,7 i odchyleniem standardowym 1,2247. W celu zastosowania metody FFT do wyznaczenia rozkładu łącznych wypłat ciągle rozkłady wielkości odszkodowań zdyskretyzowano metodą środków przedziałów. Dla każdego z tych rozkładów określono funkcję charakterystyczną ($\phi_{X^{(1)}}$, $\phi_{X^{(2)}}$ odpowiednio). W kolejnym kroku ze wzoru (13) wyznaczono funkcję charakterystyczną indywidualnych wypłat rozkładu złożonego $\phi_X(t)$, a następnie ze wzoru (11) – funkcję charakterystyczną łącznych wypłat S .

Wyznaczoną metodą FFT postać rozkładu łącznych wypłat generowanych z rozważanego portfela ubezpieczeń komunikacyjnych przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Złożony rozkład Poissona z parametrem $\lambda = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{12}$ (dla $\lambda_{11} = 0,2$, $\lambda_{22} = 0,3$, $\lambda_{12} = 0,15$) i rozkładami indywidualnych wypłat w klasach: Pareto z parametrami $\lambda = 3,2$ i $\theta = 10000$ oraz logarytmiczno-normalny ze średnią 7,7 i odchyleniem standardowym 1,2247

Źródło: opracowanie własne.

Literatura

- [1] Cossette H., Etienne M., *The Discrete-Time Risk Model with Correlated Classes of Business*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2000, nr 26, s. 133-149.
- [2] Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.
- [3] Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
- [4] Hogg R.V., Klugman S.A., *Loss Distributions*, John Wiley & Sons, New York 1984.
- [5] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston 2001.
- [6] Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E., *Loss Models. From Data to Decision*, John Wiley & Sons, New York 1998.
- [6] *Modele aktuarialne*, red. W. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2000.
- [7] Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe. Część I. Teoria ryzyka*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [8] Panjer H.H., Willmot G.E., *Insurance Risk Models*, Society of Actuaries, Schaumburg 1992.
- [9] Rolski T., Schmidli H.P., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Chichester 1999.
- [10] Stroiński E., *Ubezpieczenia na życie*, Wyższa Szkoła Ubezpieczeń i Bankowości, Warszawa 1996.
- [11] Tomaszewska D., *Wpływ oceny ryzyka na tworzenie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych w zakładach ubezpieczeń majątkowych*, rozprawa doktorska, AE, Wrocław 2004.
- [12] Wang S.S., *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society 1998, s. 848-939.

THE SETTLEMENT OF THE DISTRIBUTION OF AGGREGATED CLAIMS IN INSURANCE

Summary

The main idea of insurance is that an insurance company assumes responsibility to compensate for financial losses resulting from any damage insured against in insurance contract, in return for a premium paid by the client. That's why the basic element of insurance activity is proper premium calculation.

The model of insurance portfolio in this article is the set of policies generating claims in random moments of time. The basis of appropriate insurer's premium calculation is statistical methods application. This helps to analyze events in order to determine the frequency at which these events occur as well as the amount of financial losses involved.

The model of aggregated claims is often of the complicated form. The purpose of this paper is to present the methods of calculating the distribution of aggregated claims amount generated from the insurance portfolio.