PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 — 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Agnieszka Mruklik
Politechnika Wrocławska

PORÓWNANIE METOD ESTYMACJI PARAMETRÓW I WYBORU MODELI STÓP PROCENTOWYCH

1. Wstęp

Modelowanie struktury stóp procentowych zajmuje poczesne miejsce w badaniach naukowych poświęconych matematycznym podstawom teorii finansów i ubezpieczeń. Problematyka ta jest intensywnie rozwijana, począwszy od autorów takich pionierskich prac, jak: Vasicek [9], Cox, Ingersoll i Ross [3], Heath, Jarrow oraz Morton [4], których rezultaty i modele były rozwijane i uogólniane w różnych aspektach, na pracach Bouliera i in. [2], Moellera [5], Takamizawa i Shoji [8] skończywszy.

W artykule ograniczymy się do rozważenia wybranych modeli jednowymiarowych, ze szczególnym uwzględnieniem jednofaktorowych. Skupimy uwagę na chwilowej natychmiastowej stopie procentowej oraz stopie *forward.*

Celem niniejszego opracowania jest rozpatrzenie i jednoczesne porównanie kilku metod estymacji i wyboru modeli stóp procentowych pod kątem właściwości prognoz uzyskanych na ich podstawie, przy czym przez owe prognozy rozumiemy ceny obligacji zerokuponowych i wyznaczoną na ich podstawie krzywą dochodowości. Wspomniane uprzednio porównanie przedstawiono na przykładzie modelu Ornsteina-Uhlenbecka chwilowej stopy procentowej. W oszacowaniu parametrów modelu posłużono się metodami kalibracji oraz statystycznymi metodami estymacji. Rozważania teoretyczne zostaną uzupełnione o prezentację schematu eksperymentu symulacyjnego mającego ilustrować związek między metodami statystycznymi i metodami kalibracji.

W drugim punkcie niniejszego artykułu przedstawiono kalibrację jednofaktorowego modelu HJM dla rynku obligacji zerokuponowych. Punkt trzeci poświęcony jest estymacji parametrów procesu Ornsteina-Uhlenbecka metodą największej wiarogodności, z kolei na czwartą część składa się opis eksperymentu symulacyjnego.

2. Kalibracja jednofaktorowego modelu HJM dla rynku bonów skarbowych

Przypomnijmy, iż chwilowa natychmiastowa stopa procentowa $r(t)$ (*instantaneous interest rate*, *short term rate*) wyraża bieżący stan rynku stóp procentowych. Większą porcję informacji zawierają inne matematyczne sposoby opisania struktury terminowej tego rynku:

- krzywa dochodowości $YTM(t,T)$ (*yield curve*),
- proces ceny obligacji zerokuponowej $P(t,T)$,
- proces chwilowej stopy terminowej $f(t,T)$ (*instantaneous forward rate*).

Trzy ostatnie metody charakteryzacji rynku stóp procentowych są wzajemnie równoważne

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}, \tag{1}$$

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} YTM(t,T) &= -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T) = \\ &= \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds. \end{aligned} \tag{3}$$

Ponadto prawdziwa jest równość

$$f(t,t) = r(t). \tag{4}$$

Rozważmy teraz konkretny model stopy procentowej. W jednofaktorowym modelu HJM ('92) ustalamy $\tau > 0$ i rozważamy ekonomię z czasem ciągłym na przedziale $[0,\tau]$ oraz przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, z filtracją F_t generowaną przez jednowymiarowy ruch Browna $W(t)$. We wspomnianym modelu zakładamy, że zdefiniowana wzorem (1) chwilowa stopa terminowa $f(t,T)$ jest procesem Itô

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(v,T)\int_v^T \sigma(v,s)ds\,dv + \int_0^t \sigma(v,T)dW_v,$$

gdzie $\sigma:\{(t,T),0\le t\le T\}\to\Re$ jest dowolną funkcją spełniającą pewne ogólne warunki regularności, określaną mianem zmienności. Uwzględniając równość (4), możemy uzyskać postać chwilowej natychmiastowej stopy procentowej $r(t)$ w rozważanym modelu. Jeżeli odpowiednio dobierze się zmienność $\sigma(t,T)$ oraz warunek początkowy $f(0,\cdot)$ w modelu HJM, to można z niego otrzymać klasyczne modele chwilowej natychmiastowej stopy procentowej, takie jak m.in. model Vasicka [9] i model CIR (1985).

Przyjmując

$$\sigma(t,T)=\sigma\exp(-\alpha(T-t))$$

oraz

$$f(0,T)=\frac{\theta}{\alpha}+\exp(-\alpha T)\left(r(0)-\frac{\theta}{\alpha}\right)-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}[1-\exp(-\alpha T)]^2,$$

uzyskuje się model Vasicka stopy procentowej $r(t)$ o postaci

$$dr(t)=[\theta-\alpha r(t)]dt+\sigma dW(t), \tag{5}$$

gdzie α,σ to dodatnie stałe, a θ to stała nieujemna. W szczególności dla $\theta=0$ natychmiastowa chwilowa stopa procentowa $r(t)$ opisana jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka (OU)

$$dr(t)=-\alpha\, r(t)dt+\sigma dW(t). \tag{6}$$

Uwaga. Równania (5) i (6) opisują modele Vasicka oraz OU w rzeczywistej mierze prawdopodobieństwa. Dzięki temu możemy kalibrować te modele, wykorzystując rzeczywiste dane rynkowe.

Przez kalibrację modelu rozumiemy postępowanie, na które składają się następujące etapy, wymienione poniżej w porządku chronologicznym (por. [1]).

Schemat kalibracji – kolejne czynności

Chwila t_0

1. Ustalamy konkretny model chwilowej natychmiastowej stopy procentowej $r(t)$.
2. Używając następującego wzoru

$$P(t,T)=E^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\Big|\mathcal{F}_t\right],$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest miarą martyngałową na przestrzeni $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, wyznaczamy teoretyczną cenę obligacji zerokuponowej $P(t,T;\eta)$, gdzie η jest wektorem parametrów procesu $r(t)$.

3. Pozyskujemy dane rynkowe, które tworzą zbiór $\{P^*(0,T);T \geq 0\}$.

4. Wybieramy wektor parametrów η w ten sposób, aby elementy zbioru $\{P(0,T;\eta);T \geq 0\}$ były jak najlepiej dopasowane (według określonych kryteriów) do odpowiadających im elementów zbioru $\{P^*(0,T);T \geq 0\}$. W ten sposób uzyskujemy wektor $\hat{\eta}$ oszacowań elementów składowych wektora η.

Chwila t_1

5. Ponownie przeprowadzamy procedurę kalibracji, począwszy od punktu 1 itd.

Kalibracja jednofaktorowego modelu HJM o stałej zmienności $\sigma(t,T) \equiv \sigma_{const} > 0$ [7]

W rozważanym przypadku mamy

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma_{const}^2\, t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma_{const} W_t,$$

stąd

$$r(t) = f(0,t) + \sigma_{const}^2 \frac{t}{2} + \sigma_{const} W_t.$$

Jeśli wyznaczymy wzór na $\ln \frac{P(t_i,T_i)}{P(t_{i+1},T_{i+1})}$ oraz odpowiednio go przekształcimy, to otrzymujemy wektor $\underline{X}$ o rozkładzie normalnym. Można dla niego wyznaczyć wektor średnich oraz macierz kowariancji, a następnie oszacować nieznany parametr σ_{const}, zgodnie z metodą największej wiarogodności, rozwiązując równanie:

$$L(\hat{\sigma}_{const};\underline{x}) = max_{\sigma_{const}>0}\ L(\sigma_{const};\underline{x}),$$

gdzie wektor realizacji $\underline{x}$ jest wyznaczany na podstawie cen i rentowności bonów skarbowych z kolejnych przetargów, które odbyły się odpowiednio w chwilach $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Funkcja wiarogodności ma postać

$$L(\sigma_{const};\underline{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma_{const}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{const}^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i + \sigma_{const}^2 w_i\right)^2\right\},$$

gdzie

$$w_i = \frac{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}{2}\left(T_i + t_{i+1}\right),$$

$$x_i = \frac{1}{\sigma_{const}\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\ln\frac{P(t_{i+1},T_{i+1})}{P(t_i,T_i)} + \frac{T_{i+1}YTM(0,T_{i+1}) - t_{i+1}YTM(0,t_{i+1})}{\sigma_{const}\sqrt{t_{i+1}-t_i}} +$$
$$+\frac{-T_i YTM(0,T_i) + t_i YTM(0,t_i)}{\sigma_{const}\sqrt{t_{i+1}-t_i}},$$

dla $i = 0, ..., n-1$.

Po rozwiązaniu równania wiarogodności otrzymujemy

$$\hat{\sigma}_{const} = \sqrt{\frac{-n+\sqrt{n^2+4\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}x_i^2\right)}}{2\sum_{i=0}^{n-1}w_i^2}},$$

gdzie w_i oraz x_i zdefiniowane są jak poprzednio.

Kalibracja jednofaktorowego modelu HJM, w którym stopa procentowa $r(t)$ modelowana jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka

W rozpatrywanym przypadku mamy

$$f(t,T) = e^{-\alpha T} r_0 - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}[1-\exp(-\alpha(T-t))]^2 + \sigma\int_0^t \exp[-\alpha(T-v)]dW_v$$

oraz

$$dr(t) = -\alpha r(t)dt + \sigma dW(t).$$

Podobnie jak poprzednio chcemy dopasować rozważany model do rzeczywistych danych rynkowych, co sprowadza się do wyznaczenia oszacowań parametrów α i σ, tak aby było spełnione określone kryterium dopasowania. W naszym przypadku będzie to maksymalizacja logarytmu funkcji wiarogodności. Powtarzając schemat postępowania przedstawiony uprzednio, otrzymujemy równanie wiarogodności o postaci

$$-\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\ln\left[\frac{\sigma^{2n}}{\alpha^{2n}}(e^{\alpha\delta}-1)^{2n}\right](\det C_n)^2 \det\Sigma_{\underline{Y}_{n+1}}\right\} + \\ + \frac{\alpha^2}{\sigma^2(e^{\alpha\delta})^2}\underline{a}^T C_n^{-1}\Sigma_{\underline{Y}_{n+1}}^{-1}(C_n^{-1})^T\underline{a} = \underline{0}, \quad (7)$$

gdzie: $\eta = (\alpha, \sigma)$ – wektor nieznanych parametrów procesu $r(t)$,

$\delta = T_i - t_i = \frac{7g}{365}$ dla g-tygodniowego bonu skarbowego oraz $i = 0,1,...,n$,

$Y_{t_i} = \int_0^{t_i} e^{\alpha v}dW_v$,

$A_i = \frac{\sigma}{\alpha}(e^{\alpha\delta}-1)(Y_{t_{i+1}}e^{-\alpha t_{i+1}} - Y_{t_i}e^{-\alpha t_i})$, a_i jest realizacją zmiennej losowej A_i

oraz $\underline{a} = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$.

Pozostałe macierze występujące w równaniu (7) są zdefiniowane następująco:

$$C_n = \begin{bmatrix} -e^{-\alpha t_0} & 0 & 0 & & 0 \\ e^{-\alpha t_1} & -e^{-\alpha t_1} & 0 & & 0 \\ 0 & e^{-\alpha t_2} & -e^{-\alpha t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{-\alpha t_n} \end{bmatrix}, \quad C_n^{-1} = \begin{bmatrix} -e^{-\alpha t_0} & 0 & 0 & & 0 \\ e^{-\alpha t_0} & -e^{-\alpha t_1} & 0 & & 0 \\ e^{-\alpha t_0} & -e^{-\alpha t_1} & e^{-\alpha t_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha t_n} \end{bmatrix},$$

macierz kowariancji $\Sigma_{\underline{Y}_{n+1}}$ wektora losowego $\underline{Y}_{n+1} = (Y_{t_0}, Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ ma postać

$$\Sigma_{\underline{Y}_{n+1}} = \begin{bmatrix} e^{2\alpha t_0} - 1 & e^{2\alpha t_0} - 1 & e^{2\alpha t_0} - 1 & \cdots & e^{2\alpha t_0} - 1 \\ e^{2\alpha t_0} - 1 & e^{2\alpha t_1} - 1 & e^{2\alpha t_1} - 1 & \cdots & e^{2\alpha t_1} - 1 \\ e^{2\alpha t_0} - 1 & e^{2\alpha t_1} - 1 & e^{2\alpha t_2} - 1 & \cdots & e^{2\alpha t_2} - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{2\alpha t_0} - 1 & e^{2\alpha t_1} - 1 & e^{2\alpha t_2} - 1 & \cdots & e^{2\alpha t_n} - 1 \end{bmatrix},$$

natomiast macierz do niej odwrotna jest określona następująco

$$\Sigma_{\underline{Y}_{n+1}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2\alpha t_1} - 1}{(e^{2\alpha t_0} - 1)(e^{2\alpha t_1} - e^{2\alpha t_0})} & \frac{-1}{e^{2\alpha t_1} - e^{2\alpha t_0}} & \cdots & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ \frac{-1}{e^{2\alpha t_1} - e^{2\alpha t_0}} & \frac{e^{2\alpha t_2} - e^{2\alpha t_0}}{e^{2\alpha t_2}(e^{2\alpha t_1} - e^{2\alpha t_0})} & \cdots & - & 0 \\ & & \ddots & - & \\ 0 & 0 & \cdots & - & \frac{1}{e^{2\alpha t_n} - e^{2\alpha t_{n-1}}} \end{bmatrix}.$$

Dla dowolnej liczby naturalnej n można również wykazać poniższe równości

$$\det C_n = -1^{n-1} \exp(-\alpha \textstyle\sum_{i=0}^{n} t_i),$$

$$\det \Sigma_{\underline{Y}_{n+1}} = \tfrac{1}{(2\alpha)^{n+1}} (e^{2\alpha t_0} - 1) \textstyle\prod_{j=0}^{n-1} (e^{2\alpha t_{j+1}} - e^{2\alpha t_j}).$$

Wartości $\hat{\alpha}$, $\hat{\sigma}$ maksymalizujące funkcję wiarogodności są wyznaczane numerycznie.

Dotychczas kryterium dopasowania modelu była maksymalizacja logarytmu funkcji wiarogodności. Można też inaczej wybrać cechę, ze względu na którą dokonujemy dopasowania i np. minimalizować sumę kwadratów różnic pomiędzy obserwowanymi a teoretycznymi cenami obligacji zerokuponowych

$$\hat{\eta} = \min_{\eta} \sum_{T} [P^{Obs}(t,T) - P^{Teoret}(t,T;\eta)]^2,$$

gdzie $P^{Obs}(t,T)$ odpowiada rzeczywistej rynkowej cenie obligacji zerokuponowej, natomiast $P^{Teoret}(t,T;\eta)$ jest ceną takiej obligacji wyznaczoną dla danego modelu chwilowej natychmiastowej stopy procentowej. W przypadku modelu OU ta cena teoretyczna jest wyznaczona *explicite* (odpowiednie wzory zostaną podane w dalszej części artykułu). Jednak nie zawsze tak jest.

Omówione metody kalibracji nie wymagają dysponowania oszacowaniami realizacji procesu wartości chwilowej natychmiastowej stopy procentowej, co, rzecz jasna, można poczytywać za atut tych sposobów. Niedogodności stanowią natomiast niewątpliwie skomplikowane obliczenia oraz konieczność wykorzystywania metod numerycznych. Widoczne jest to zwłaszcza przy kalibracji konstruowanej w oparciu na metodzie największej wiarogodności. Wady tej pozbawione są statystyczne sposoby oszacowania parametrów procesu Ornsteina-Uhlenbecka.

3. Estymacja parametrów procesu Ornsteina-Uhlenbecka metodą największej wiarogodności

Nieznane parametry α i σ estymujemy na podstawie obserwacji $r_0, r_d, r_{2d}, \ldots, r_{nd}$, gdzie d to dodatnia stała. Po zastosowaniu tej metody punktowej estymacji parametrycznej otrzymujemy

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{2\kappa}{n(1-e^{-2\kappa d})} \sum_{i=1}^{n} (r_{id} - e^{-\kappa d} r_{(i-1)d})^2},$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{d} \ln \left(\frac{\sum_{j=0}^{n-1} [r(t_j) - \bar{r}]^2}{\sum_{j=0}^{n-1} [r(t_j) - \bar{r}][r(t_{j+1}) - \bar{r}]} \right),$$

gdzie $\bar{r}$ jest średnią próbkową oraz $t_{j+1} - t_j = d$.

Uwaga 1. Współczynnik korelacji ρ między $r(t)$ i $r(t+d)$ wyraża się wzorem $\rho_{r(t)r(t+d)} = \exp\{-\alpha d\}$. Jeśli skorzystamy z tej zależności oraz metody momentów, to możemy wyznaczyć estymator parametru α. Ponieważ proces OU jest gaussowski, postać estymatora jest taka sama bez względu na to, czy zastosujemy metodę największej wiarogodności, czy też metodę momentów. Podkreślmy jednak, że w drugim przypadku otrzymanie wyniku (wyznaczenie estymatora) jest znacznie prostsze.

Uwaga 2. W rozważanym przypadku znamy jawne wzory na estymatory parametrów procesu OU, jednak aby można je było wykorzystać, musimy oszacować realizacje chwilowej natychmiastowej stopy procentowej, która nie jest bezpośrednio obserwowana na rynku finansowym.

4. Opis eksperymentu symulacyjnego

Zadaniem eksperymentu komputerowego jest rozpatrzenie i jednoczesne porównanie kilku metod estymacji i wyboru modeli stóp procentowych pod kątem właściwości prognoz uzyskanych na ich podstawie. Przez owe prognozy rozumiemy ceny obligacji zerokuponowych i wyznaczoną na ich podstawie krzywą dochodowości, która, przypomnijmy, przedstawia zależność stóp zwrotu od terminów wykupu dla pewnej grupy obligacji.

Przeprowadzany eksperyment ma charakter symulacyjny, tak więc również wyjściowe „rzeczywiste dane rynkowe" będą uzyskane numerycznie. Otrzymamy je poprzez generowanie pseudoobserwacji stopy *forward* opisanej jednofaktorowym modelem HJM, w którym stopa procentowa $r(t)$ modelowana jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka. Wykorzystamy przy tym znajomość jawnego rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego określającego ten model. Przypomnijmy, iż wspomniane rozwiązanie ma postać

$$f(t,T) = e^{-\alpha T}\, r_0 - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}[1-\exp(-\alpha(T-t))]^2 + \sigma\int_0^t \exp[-\alpha(T-v)]dW_v,$$

gdzie r_0 jest zmienną „początkową" („startową") dla procesu OU. Jak wiadomo, zmienna ta ma rozkład $\mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$. Parametr T dobieramy tak, aby mieć do czynienia tylko z instrumentami rynku pieniężnego.

Kolejny etap to wyznaczenie cen obligacji zorokuponowych (a ściślej – bonów skarbowych) na podstawie otrzymanych uprzednio realizacji (a dokładniej – pseudorealizacji) stopy *forward*. Stosujemy w tym celu wzór

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\}$$

i przeprowadzamy całkowanie numeryczne, wcześniej ewentualnie zwiększając liczbę dostępnych danych (wartości funkcji podcałkowej) przez zastosowanie interpolacji.

Oszacowanie realizacji chwilowej natychmiastowej stopy procentowej

Jak już wspomnieliśmy, chwilowa natychmiastowa stopa procentowa nie jest bezpośrednio obserwowana na rynku finansowym. Z tego też względu musimy się zdecydować na jakiś sposób oszacowania jej realizacji. Wybór padł na metodę Svenssona [6]. W modelu tym stopy dochodowości obligacji zerokuponowych, obserwowane w chwili t, są funkcjami terminu zapadalności $\tilde{T}$

$$
\begin{aligned}
Y_t^S(\tilde{T}) = \mu_1 + \mu_2\left[\frac{1-\exp\left(-\frac{\tilde{T}}{\tau_1}\right)}{\frac{\tilde{T}}{\tau_1}}\right] + \mu_3\left[\frac{1-\exp\left(-\frac{\tilde{T}}{\tau_1}\right)}{\frac{\tilde{T}}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tilde{T}}{\tau_1}\right)\right] + \\
+\mu_4\left[\frac{1-\exp\left(-\frac{\tilde{T}}{\tau_2}\right)}{\frac{\tilde{T}}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{\tilde{T}}{\tau_2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{8}
$$

gdzie μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, τ_1 i τ_2 to stałe.

Parametry te mogą być oszacowane w wyniku dopasowania do danych rynkowych: cen lub dochodowości bonów skarbowych. Jeśli chodzi o ceny, to dane te już mamy, natomiast roczne rentowności (dochodowości, roczne stopy zwrotu) Y_1 możemy wyznaczyć ze wzoru

$$Y_1 = \left(\frac{FV}{P} - 1\right)\frac{D}{d},$$

gdzie: FV – nominalna wartość bonu,
P – rynkowa wartość (cena) bonu,
d – liczba dni do terminu wykupu,
D – liczba dni w roku (w Polsce D wynosi 360 dni).

Po przekształceniu ostatniego wzoru jesteśmy w stanie wyznaczyć również P_t^S. Wybierając teraz dowolnie małe $\tilde{T}$, np. $\tilde{T}$ równe jednemu dniowi, czyli $\tilde{T} = \frac{1}{360}$, możemy otrzymać oszacowania wartości procesu chwilowej natychmiastowej stopy procentowej. W ten sposób uzyskujemy z rynku obligacji zerokuponowych dane odnoszące się do implikowanej chwilowej stopy procentowej i korzystamy z równości $r(t) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}\Big|_{T=t}$.

Estymacja rynkowej ceny ryzyka

Jak już wspominaliśmy, równanie (6) opisuje model Ornsteina-Uhlenbecka w rzeczywistej mierze prawdopodobieństwa. Nas interesuje jednak cena obligacji zerokuponowej $P(r,t,T)$ właściwej dla tego modelu, a do tego konieczna jest znajomość rynkowej ceny ryzyka $\lambda(r,t)$. Dla rozpatrywanego modelu jest ona stała $\lambda(r,t)=\lambda$. Wielkość tę możemy oszacować po uprzednim wyestymowaniu parametrów α i σ procesu OU. Gdy wyznaczyliśmy już $\hat{\alpha}$ i $\hat{\sigma}$, wówczas aproksymacji rynkowej ceny ryzyka $\hat{\lambda}$ szukamy jako wartości λ takiej, która minimalizuje sumę kwadratów różnic między obserwowanymi a teoretycznymi cenami obligacji zerokuponowych, co możemy zapisać następująco:

$$\hat{\eta}=\min_{\lambda}\sum_{\tilde{T}}\left[P^{Obs}\left(t,\tilde{T}\right)-P^{Teoret}\left(t,\tilde{T};\hat{\eta}\right)\right]^2.$$

Występujące w tym wzorze symbole oznaczają odpowiednio cenę wyznaczoną dla modelu Svenssona ze wzoru $P^{Obs}\left(t,\tilde{T}\right)=\exp\left[-(\tilde{T}-t)Y_t^S\right]$ i teoretyczną cenę obligacji zerokuponowej opisaną modelem OU. Wymieniona cena teoretyczna wyraża się wzorem

$$P^{Teoret}\left(t,\tilde{T};\hat{\eta}\right)=B\left(t,\tilde{T}\right)\exp\left[-rA\left(t,\tilde{T}\right)\right],$$

gdzie: $A\left(t,\tilde{T}\right)=\dfrac{1-\exp\left[-\hat{\alpha}\left(\tilde{T}-t\right)\right]}{\hat{\alpha}}$,

$$B\left(t,\tilde{T}\right)=\exp\left\{\frac{\left[A\left(t,\tilde{T}\right)-\left(\tilde{T}-t\right)\right]\left(-\hat{\alpha}\lambda\hat{\sigma}-\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)}{\hat{\alpha}^2}-\frac{\left[\hat{\sigma}A\left(t,\tilde{T}\right)\right]^2}{4\hat{\alpha}}\right\}.$$

Metody oceny właściwości predyktorów

Chcemy porównać kilka metod estymacji i wyboru modeli stóp procentowych pod kątem właściwości prognoz uzyskanych na ich podstawie. Przez owe prognozy rozumiemy ceny obligacji zerokuponowych i wyznaczoną na ich podstawie krzywą dochodowości. Niech $Y(t)$ oznacza krzywą dochodowości wyznaczoną na podstawie rzeczywistych danych rynkowych, natomiast $\hat{Y}(t)$ – predykcyjną krzywą dochodowości. Jakość prognoz możemy sprawdzić np. za pomocą średniego całkowego błędu kwadratowego *IRMSE*

$$IRMSE=\int_a^b\sqrt{E\left[\hat{Y}(t)-Y(t)\right]^2}\,dt,$$

gdzie a, b to stałe, lub wykorzystując całkowy średni błąd całkowity $IMAE$

$$IMAE = \int_a^b E\,|\,\hat{Y}(t) - Y(t)\,|\,dt.$$

Wartości oczekiwane występujące w tych wzorach wyznacza się metodą Monte Carlo.

Schemat eksperymentu

- Ustalamy wektor chwil $(t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_N)$ oraz określamy wartość parametru $d > 0$. Ponadto odpowiednio dobieramy $T_j, j = 1,\ldots,M$ oraz $\tilde{T}_k, k = 1,\ldots,L$.
- Generujemy pseudoobserwacje stopy *forward* opisanej jednofaktorowym modelem HJM, w którym stopa procentowa $r(t)$ modelowana jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka, otrzymując macierz F o elementach $f(t_i, T_j)$, gdzie $i = 1,\ldots,N$ oraz $j = 1,\ldots,M$.
- Wykorzystując macierz F, wyznaczamy ceny obligacji zarokuponowych i dostajemy macierz $\tilde{\mathrm{P}}$. To są „rzeczywiste dane rynkowe". Dzielimy je na dwie części: $\tilde{P}_1$ i $\tilde{P}_2$. Pierwszą z nich wykorzystamy do oszacowania parametrów modelu OU (kalibracja i metody statystyczne), natomiast drugą – do porównania właściwości predykcyjnych.
- Na podstawie $\tilde{P}_2$ konstruujemy krzywą dochodowości Y_1.
- Przeprowadzamy kalibrację modelu HJM. Estymujemy rynkową cenę ryzyka. Wyznaczamy krzywą dochodowości Y_2.
- Oszacowujemy realizacje chwilowej natychmiastowej stopy procentowej. Estymujemy parametry procesu OU metodą największej wiarogodności. Oszacowujemy rynkową cenę ryzyka. Wyznaczamy krzywą dochodowości Y_3.
- Przeprowadzamy porównania krzywych dochodowości, stosując wybrane kryteria.

Literatura

[1] Björk T., Christensen B.J., Gombani A., *Some System Theoretic Aspects of Interest Rate Theory*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1998, 7, 17-23.

[2] Boulier J.F. i in., *Optimal Management Under Stochastic Interest Rates: the Case of a Protected Defined Contribution Pension Fund*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2001, 28, 173-189.

[3] Cox J.C., Ingersoll J.E. Jr., Ross S.A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, „Econometrica" 1985, 53, 384-407.

[4] Heath D., Jarrow R., Morton A., *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation*, „Econometrica" 1992, 60, 77-254.

[5] Moeller Ch.M., *A Counting Process Approach to Stochastic Interest.* „Insurance: Mathematics and Economics" 1995, 17, 181-192.
[6] Svenson L.E.O., *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates,* Sweden 1992-94, Working Paper, International Monetary Found, 1994, 114.
[7] Sztuba P., Weron A., *Pricing Forward-Start Optionsin the HJM Framework; Evidence from Polish Market,* „Applicationes Mathematicae" 2000.
[8] Takamizawa H., Shoji I., *Modeling the Term Structure of Interest Rates with General Short-Rate Models,* „Finance and Stochastics" 2003, 7, 323-335.
[9] Vasicek O., *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure,* „Journal of Financial Economics" 1977, 5, 177-186.

COMPARISON OF ESTIMATION METHODS OF PARAMETERS AND CHOICE MANNERS OF INTEREST RATES MODELS

Summary

In the paper, we consider the problem of comparison between statistical estimation and calibration for Ornstein-Uhlenbeckean model of instantaneous interest rate $r(t)$. Furthermore, we describe different approximation methods of realizations of process $r(t)$. We study the influence of these approximations on estimators. Moreover, some methods of computer simulations have been also described.