PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 — 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Magdalena Homa
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ROZKŁAD PROCESU SKUMULOWANYCH ŚWIADCZEŃ W INDYWIDUALNYM WIELOOPCYJNYM UBEZPIECZENIU NA ŻYCIE*

1. Wstęp

W literaturze opisywane są metody analizy i oceny tradycyjnych ubezpieczeń na życie oraz ubezpieczeń wielorakich. W praktyce zaś każdy prawie produkt ubezpieczeniowy jedynie oparty jest na modelowym kształcie ubezpieczenia, a w rzeczywistości jest bardziej złożony. Stanowiło to przesłankę przeprowadzenia analizy ubezpieczeń wieloopcyjnych, które wzbogacają atrakcyjność ubezpieczenia i lepiej dostosowują się do potrzeb klientów. Do analizy tej wykorzystana została głównie metodyka analizy przepływów pieniężnych i ich wartości aktuarialnych zaproponowana m.in. przez Hoema i Norberga (por. [6; 9]), podstawę której stanowią procesy Markowa. Istotą proponowanej w pracy analizy jest określenie dokładnego rozkładu procesu skumulowanej wypłaty (skumulowanych roszczeń) w indywidualnym ubezpieczeniu wieloopcyjnym. Znajomość tego rozkładu umożliwia dalszą analizę szkodowości portfela polis wieloopcyjnych bez dodatkowych założeń. Prezentowana w pracy analiza stanowi połączenie zagadnień statystycznych, aktuarialnych i finansowych, pozwalających ubezpieczycielowi dokonać poprawnej wyceny ubezpieczenia i oceny jego „ryzykowności".

2. Model Markowa ubezpieczeń wieloopcyjnych

Umowa ubezpieczenia obejmująca różne przypadki życiowe nazywana jest ubezpieczeniem wieloopcyjnym. Warunki ogólne ubezpieczenia specyfikują przy-

* Praca naukowa finansowana ze środków KBN w latach 2004-2005 jako projekt badawczy nr 1H02B00926.

padki życiowe, których dotyczy umowa ubezpieczenia podstawowego (opcje podstawowe) i ubezpieczeń dodatkowych (opcje dodatkowe). Każdemu z tych przypadków życiowych odpowiada odpowiednia opcja polisy ubezpieczeniowej. Innymi słowy, każdemu przypadkowi życiowemu osoby ubezpieczonej odpowiada określony stan ze zbioru $S = \{H, S_1, S_2, ..., S_k, D\}$ oznaczającego przestrzeń możliwych stanów. Zmiana sytuacji życiowej ubezpieczonego powoduje zmianę stanu (statusu) polisy ubezpieczeniowej. Zatem model opisujący dynamikę zmian sytuacji życiowych osoby ubezpieczonej jest jednocześnie modelem opisującym dynamiczny charakter aktywizacji możliwych opcji polisy (por. [8]).

Do opisu zmian stanów od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia wykorzystywana będzie funkcja $X(t)$, gdzie t ($t \in \mathrm{T}$) oznacza czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia. Zauważmy, że każdy przypadek życiowy jest zdarzeniem losowym, więc dla każdej chwili t $X(t)$ jest zmienną losową i $\{X(t); t \in \mathrm{T}\}$ jest procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S. Przy modelowaniu ubezpieczeń wieloopcyjnych należy więc uwzględnić uwarunkowania losowe, co związane jest z rezygnacją z modeli deterministycznych na rzecz probabilistycznych opartych na wykorzystaniu procesów stochastycznych. Wśród modeli probabilistycznych stosowanych w ubezpieczeniach na życie i dożycie szczególne miejsce zajmują modele Markowa czyli modele zbudowane z wykorzystaniem procesów Markowa (por. [4; 5; 9]). Są to również procesy, które umożliwiają opisanie procesu towarzyszącego ubezpieczeniu wieloopcyjnemu.

Podstawowymi wielkościami określającymi ewolucję procesu $\{X(t); t \in \mathcal{T}\}$ są prawdopodobieństwa przejścia między poszczególnymi stanami z przestrzeni S w dowolnych momentach trwania ubezpieczenia, czyli odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu j w momencie t do stanu k w momencie u dla $0 \le u < t$ wyraża się wówczas następująco:

$$\mathrm{P}_{jk}(u,t) = \mathrm{P}(X(t) = k \mid X(u) = j), \tag{1}$$

natomiast dla $u = t$ mamy:

$$\mathrm{P}_{jk}(t,t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ 1 & \text{dla } j = k. \end{cases} \tag{2}$$

Określenie prawdopodobieństwa przejść dla $t = u$ wynika z faktu, że proces $\{X(t)\}$ w momencie t może znajdować się tylko w jednym ze stanów.

Prawdopodobieństwo pozostania w stanie j od momentu t do momentu u zdefiniowane jest następująco:

$$P_{jj}(u,t) = P(X(z) = j \text{ dla } u \leq z \leq t \mid X(u) = j). \tag{3}$$

Interesująca jest zależność między matematyczną notacją stosowaną do opisu procesów Markowa a tradycyjną notacją aktuarialną stosowaną w ubezpieczeniach życiowych. Zauważmy, że w notacji matematycznej wiek wstępu osoby ubezpieczanej nie jest uwzględniony. Aby zastosować notację aktuarialną stosowaną w ubezpieczeniach na życie, należy w sposób jawny uwzględnić wiek wstępu ubezpieczonego, który oznaczamy x. Wówczas, zgodnie z notacją aktuarialną, prawdopodobieństwa przejścia oznaczone są następująco:

$${}_t p_x^{jk} = P(X(x+t) = k \mid X(x) = j) \tag{4}$$

oraz

$${}_t p_x^{\underline{jj}} = P(X(x+z) = j \text{ dla } 0 \leq z \leq t \mid X(x) = j). \tag{5}$$

Zmiany stanów mogą zachodzić w dowolnym momencie trwania ubezpieczenia, wówczas zamiast prawdopodobieństw przejścia stosowane są intensywności przejścia ze stanu i do stanu j oznaczane przez $\mu_{ij}(t)$ i zdefiniowane następująco (por. [1; 4]):

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{p_{ij}(t, t+dt)}{dt}. \tag{6}$$

Ponieważ wiek wstępu ma wpływ na indywidualną zachorowalność, rekonwalescencję i umieralność, matematyczna notacja intensywności $\mu_{ij}(t)$ musi być interpretowana w następujący sposób: $\mu_{ij}(t) = \mu(x+t)$ dla $t \geq 0$.

3. Rozkład procesu skumulowanej wypłaty

Procesami reprezentującymi wielkości wypłaconych świadczeń w ubezpieczeniu wieloopcyjnym są procesy oznaczone: $\{C_j(t)\}$, $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Są to odpowiednio: $C_j(\mathcal{T})$ to wypłacane w okresie $\mathcal{T}$ renty, $D_j(\mathcal{T})$ to jednorazowe świadczenia wypłacane z tytułu dożycia określonego wieku oraz $C_{jk}(\mathcal{T})$ to jednorazowe świadczenia wypłacane przez ubezpieczyciela z tytułu zajścia określonego zdarzenia losowego w okresie czasu $\mathcal{T}$. Świadczenia te możemy podzielić na dwa rodzaje: związane z określonym stanem j procesu $\{X(t), t \geq 0\}$, obejmujące renty i świadczenia wypłacane z tytułu dożycia określonego wieku, oraz świadczenia związane z przejściem procesu ze stanu j do stanu k, obejmujące wszystkie pozostałe świadczenia jednorazowe. Rozpatrując płatności związane ze zmianą stanu, należy zauważyć, że w dowolnym odcinku czasu $\mathcal{T}$ proces $\{X(t)\}$ może kilkakrotnie zmienić stan. Niech $N_{jk}(t)$ oznacza liczbę przejść procesu $\{X(t)\}$ ze stanu j do k w czasie $[0,t]$, co zapisuje się następująco:

$$N_{jk}(t) = \#\{\tau \in (0,t]: X(\tau - 0) = j, X(\tau) = k\}.$$

Odpowiednie złożenie procesów wielkości wypłaconych świadczeń prowadzi m.in. do ogólnego procesu skumulowanych świadczeń nazywanego również procesem skumulowanych roszczeń (por. [2; 7; 12]), oznaczonego w pracy $\{\mathcal{W}(t)\}$.

Definicja (por. [9])

Wycena strumienia finansowego $B(\mathcal{T})$ czyli funkcja zaktualizowanych (na moment t) wartości strumienia płatności dokonanych w okresie czasu $\mathcal{T}$ określona jest następującym wzorem:

$$ZB_t(\mathcal{T}) = \frac{1}{v(t)} \int_{\mathcal{T}} v(\tau) dB(\tau). \tag{7}$$

Gdy rozpatrywany jest model kapitalizacji ciągłej, stopy procentowe zastępowane są intensywnością oprocentowania. W tym przypadku funkcja dyskontująca dana jest wzorem:

$$v(t) = e^{-\delta \cdot t}. \tag{8}$$

Według wzoru (7) wycenia się poszczególne strumienie finansowe związane z ubezpieczeniem wieloopcyjnym. Innymi słowy, wyznacza się zaktualizowaną wartość wypłacanych rent $C_j(\mathcal{T})$, jak również jednorazowych świadczeń wypłacanych z tytułu dożycia określonego wieku – $D_j(\mathcal{T})$ i z tytułu zajścia określonego zdarzenia losowego – $C_{jk}(\mathcal{T})$. Stanowią one podstawę wyceny strumienia finansowego skumulowanych świadczeń $\mathcal{W}(t)$. Po uwzględnieniu strumieni płatności charakterystycznych dla ubezpieczenia wieloopcyjnego zaktualizowana wartość skumulowanych świadczeń zgodnie ze wzorami (7)-(8) jest procesem losowym następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
Z\mathcal{W}_t(\mathcal{T}) &= \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}d\mathcal{W}(\tau) = \\
&= \underbrace{\sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\mathrm{I}_j(\tau)dC_j(\tau) + \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\mathrm{I}_j(\tau)dD_j(\tau)}_{\text{świadczenia związane ze stanem } j} + \\
&+ \underbrace{\sum_j \sum_{k\neq j} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}c_{jk}(\tau)dN_{jk}(\tau)}_{\substack{\text{świadczenia związane z przejściem} \\ \text{procesu ze stanu } j \text{ do } k}},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

gdzie $I_{\{X(t)=j\}} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad X(t)=j, \\ 0 & \text{gdy} \quad X(t)\neq j. \end{cases}$

Równoważna postać wzoru (9) jest następująca:

$$
Z\mathcal{W}_t(\mathcal{T}) = \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\mathrm{I}_j(\tau)d(\mathcal{W}_j(t)) + \sum_j \sum_{k\neq j} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}c_{jk}(\tau)dN_{jk}(\tau), \tag{10}
$$

gdzie $\{\mathcal{W}_j(t)\}$ jest procesem uwzględniającym wszystkie świadczenia związane ze stanem j.

Problem rozkładu przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach podejmowało wielu autorów (por. [4; 8; 11; 13]). Adaptując uzyskane przez nich wyniki, w pracy określono dokładny rozkład skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu wieloopcyjnym i przedstawiono postać rekurencyjną dystrybuanty procesu skumulowanych świadczeń. Dystrybuanta rozkładu przyszłych skumulowanych świadczeń zdefiniowana jest następująco:

$$
\begin{aligned}
F^j_{\mathcal{W}(\cdot),t}(u) &= P^{\mathcal{W}}_j(t,u) = P\left[Z\mathcal{W}_t(t,n) \leq u \mid X(t)=j\right] = \\
&= P\left[\int_t^n e^{-\delta\cdot(\tau-t)}d\mathcal{W}(\tau) \leq u \mid X(t)=j\right].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Po podstawieniu zaktualizowanej wartości skumulowanych świadczeń dla ubezpieczenia wieloopcyjnego określonej wzorem (10), wzór (11) przybiera postać:

$$
\begin{aligned}
&P^{\mathcal{W}}_j(t,u) = \\
&= P\left[\left(\sum_j \int_t^n e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\mathrm{I}_j(\tau)d\mathcal{W}_j(\tau) + \sum_j\sum_{k\neq j}\int_t^n e^{-\delta\cdot(\tau-t)}c_{jk}(\tau)dN_{jk}(\tau)\right) \leq u \mid X(t)=j\right].
\end{aligned}
\tag{12}
$$

To, jakie świadczenia ubezpieczyciel wypłaci w przyszłości, determinuje określona realizacja procesu $\{X(t), t \geq 0\}$. Wiadomo, że mogą wystąpić dwie sytuacje: w dowolnym momencie $s > t$ nastąpi przejście procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ do innego stanu, wówczas przyszłe przepływy pieniężne do chwili s związane są ze stanem j i w chwili s wypłacane jest jednorazowe świadczenie w wysokości $c_{jk}(s)$ lub proces pozostanie w stanie j do końca trwania ubezpieczenia i wówczas przyszłe świadczenia związane są tylko z aktywną j-tą opcją ubezpieczenia. Po wykorzystaniu wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dystrybuanta określona wzorem (12) przybiera postać:

$$\begin{aligned} P_j^{\mathcal{W}}(t,u) = {} & \underbrace{\sum_{k \neq j} \int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{jj} \cdot \mu_{jk}(s)ds}_{\substack{\text{prawdopodobieństwo przejścia} \\ \text{ze stanu } j \text{ do } k \text{ w chwili } s}} \cdot \\ & \cdot P\left[\int_t^s e^{-\delta(\tau-t)} d\mathcal{W}_j(\tau) + e^{-\delta(s-t)} c_{jk}(s) + \int_s^n e^{-\delta(\tau-t)} d\mathcal{W}(\tau) \leq u \mid X(s) = k \right] + \\ & + \underbrace{{}_{n-t}p_{x+t}^{jj}}_{\substack{\text{prawdopodobieństwo pozostania} \\ \text{w stanie } j \text{ do końca ubezpieczenia}}} \cdot \mathbf{1}\left[\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} d\mathcal{W}_j(\tau) \leq u \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Dokonując przekształceń algebraicznych pierwszego czynnika w powyższym wzorze, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & P\left[\int_t^s e^{-\delta(\tau-t)} d\mathcal{W}_j(\tau) + c_{jk}(s) + \int_s^n e^{-\delta(\tau-t)} d\mathcal{W}(\tau) \leq u \mid X(s) = k \right] = \\ & = P\left[\int_s^n e^{-\delta(\tau-s)} d\mathcal{W}(\tau) \leq e^{-\delta(t-s)} u - \int_t^s e^{-\delta(\tau-s)} d\mathcal{W}_j(\tau) - c_{jk}(s) \mid X(s) = k \right] = \\ & = P_k^{\mathcal{W}}\left(s, e^{-\delta(t-s)} u - \int_t^s e^{-\delta(\tau-s)} d\mathcal{W}_j(\tau) - c_{jk}(s) \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Wówczas wzór (14), wyrażający dystrybuantę skumulowanych przyszłych świadczeń w ubezpieczeniu wieloopcyjnym, przybiera następującą rekurencyjną postać:

$$\begin{aligned} P_j^{\mathcal{W}}(t,u) = {} & \sum_{k \neq j} \int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{jj} \cdot \mu_{jk}(s) \cdot P_k^{\mathcal{W}}\left(s, e^{-\delta(t-s)} u - \int_t^s e^{-\delta(\tau-s)} d\mathcal{W}_j(\tau) - c_{jk}(s) \right) ds + \\ & + {}_{n-t}p_{x+t}^{jj} \cdot \mathbf{1}\left[\int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} d\mathcal{W}_j(\tau) \leq u \right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Na podstawie powyższego wzoru wyznaczono w pracy dokładną analityczną postać dystrybuanty całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu na życie i ubezpieczeniu na życie z opcją NW.

4. Indywidualne ubezpieczenie na życie

Najprostszym przykładem ubezpieczeń wieloopcyjnych są tradycyjne ubezpieczenia na życie. Ubezpieczenia te obejmują ubezpieczenie na życie (UŻ), czyste ubezpieczenie na dożycie (UD) oraz ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD). Przedmiotem takich ubezpieczeń jest życie ubezpieczonego. W wymienionych ubezpieczeniach wyodrębnione są dwa przypadki życiowe: życie i śmierć, które oznaczone są następująco:

H – ubezpieczony żyje,

D – ubezpieczony zmarł.

Procesami reprezentującymi wielkości roszczeń w tego typu ubezpieczeniu wieloopcyjnym są $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Rodzaj świadczenia zależy od zawartej umowy ubezpieczenia. W ubezpieczeniu na życie (UŻ) wypłata sumy ubezpieczenia w wysokości c jednostek pieniężnych następuje w razie zgonu ubezpieczonego w okresie trwania ubezpieczenia. W ubezpieczeniu na dożycie (UD) świadczenie w wysokości d jednostek pieniężnych wypłacane jest wówczas, gdy ubezpieczony dożył końca okresu ubezpieczenia. Natomiast ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD) obejmuje obie te sytuacje. Dla tych ubezpieczeń występują następujące strumienie płatności:

$$c_{HD}(t) = \begin{cases} c & \text{dla} \quad 0 < t \leq n \\ 0 & \text{dla} \quad t > n, \end{cases} \qquad d_H(t) = \begin{cases} d & \text{dla} \quad t = n \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w przypadku takiego ubezpieczenia, zgodnie z (15), określona jest następująco:

$$P_H^W(0,u) = \int_0^n {}_s p_x^{HH} \cdot \mu_{HD}(s) \cdot P_D^W\left(s, e^{\delta \cdot s}u - \int_0^s e^{-\delta \cdot (\tau - s)} d\mathcal{W}_H(\tau) - c_{HD}(s)\right) ds +$$

$$+ {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}\left[\int_0^n e^{-\delta \cdot \tau} d\mathcal{W}_H(\tau) \leq u\right].$$

Po uwzględnieniu strumieni płatności charakterystycznych dla ubezpieczenia UŻ wzór ten przybiera postać:

$$P_H^W(0,u) = \int_0^n {}_s p_x^{HH} \cdot \mu_{HD}(s) \cdot P_D^W\left(s, e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s)\right) ds + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \geq 0]. \quad (16)$$

Prawdopodobieństwo $P_D^{\mathcal{W}}\left(s, e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s)\right)$ występujące w pierwszym składniku sumy, zgodnie ze wzorem (11), można zapisać następująco:

$$P_D^{\mathcal{W}}\left(s, e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s)\right) = P\left(\int_s^n e^{-\delta \cdot (\tau - s)} d\mathcal{W}(\tau) \le e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s) \mid X(s) = D\right).$$

Oznacza to, że momentem śmieci ubezpieczonego jest chwila s zdefiniowana jako zmienna losowa. Niech więc T_x oznacza przyszły czas życia osoby w wieku x lat, wówczas wzór (16) przybiera postać:

$$P_H^{\mathcal{W}}(0,u) = \int_0^n {}_s p_x^{HH} \cdot \mu_{HD}(s) \cdot P\left(\int_s^n e^{-\delta \cdot (\tau - s)} d\mathcal{W}(\tau) \le e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s) \mid X(s) = D\right) ds +$$
$$+ {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] = P\left(e^{\delta \cdot T_x}u - c_{HD}(T_x) \ge 0\right) + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] =$$
$$= P\left(u \ge c \cdot e^{-\delta T_x}\right) + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] =$$
$$= P\left(T_x \ge \underbrace{\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{c}{u}\right)}_{t_1}\right) + P(T_x > n) \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] = {}_{t_1} p_x^{HH} + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0].$$

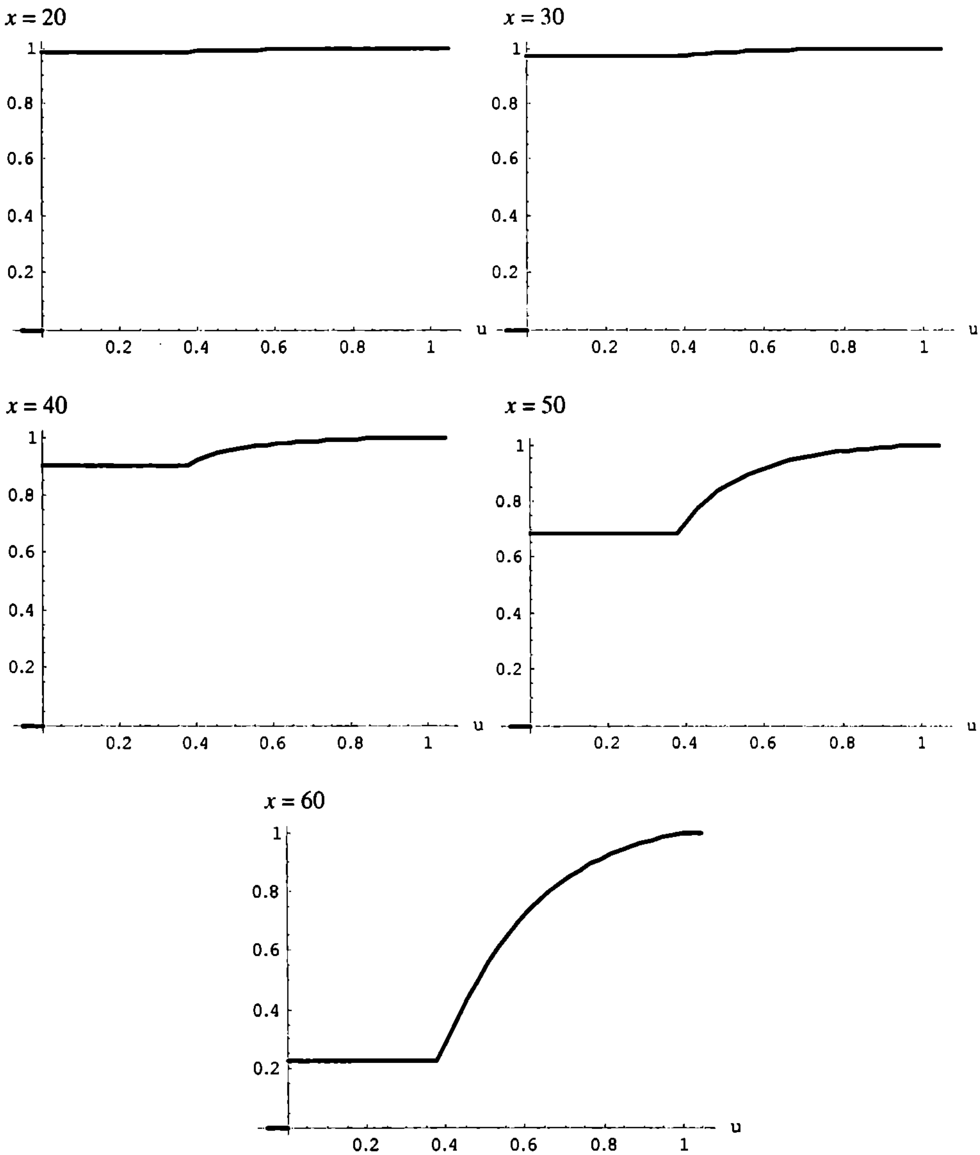
Korzystając z powyższego wzoru, otrzymuje się wzór dystrybuanty całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ:

$$F_{\mathcal{W}}^H(u) = P_H^{\mathcal{W}}(0,u) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad u < 0, \\ P(T_x > n) = {}_n p_x^{HH} & \text{dla} \quad 0 \le u < c \cdot e^{-\delta n}, \\ P\left(T_x > \underbrace{\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{c}{u}\right)}_{t_1}\right) = {}_{t_1} p_x^{HH} & \text{dla} \quad c \cdot e^{-\delta n} \le u < c, \\ 1 & \text{dla} \quad u \ge c. \end{cases} \tag{17}$$

Dystrybuanta dana tym wzorem zależy od dwóch parametrów: wieku ubezpieczonego i okresu trwania ubezpieczenia. Jej kształt zależy zarówno od wieku osoby ubezpieczanej, jak i okresu trwania ubezpieczenia. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy dystrybuant skumulowanych świadczeń dla 20-letniego ubezpieczenia UŻ zawartego z osobą w wieku x lat, natomiast wykresy przedstawione na rys. 2 to prezentacja graficzna dystrybuant skumulowanych świadczeń dla n-letniego ubezpieczenia UŻ zawartego z 30-letnim mężczyzną. Za intensywność zgonu przyjęto funkcję stosowaną przez duńskie towarzystwa ubezpieczeniowe[1] postaci (por. [4; 9]):

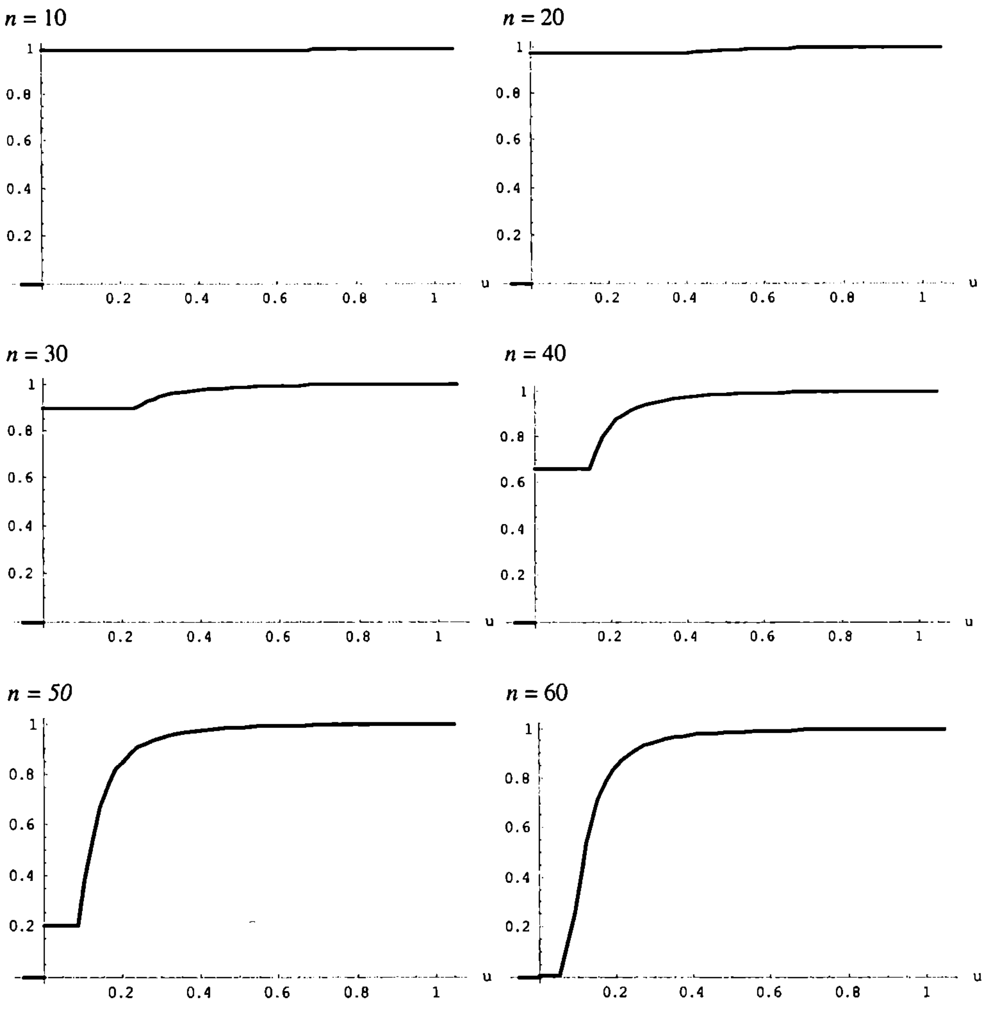
[1] Polskie firmy ubezpieczeniowe nie udostępniają informacji dotyczących stosowanych funkcji intensywności, nie udostępniają również danych umożliwiających ich aproksymację.

$$\mu_{HD}(t) = \mu(x+t) = 0{,}0004 + 0{,}0000034674 \cdot 10^{0{,}06(x+t)}.$$



Rys. 1. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ w zależności od wieku wstępu x

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ w zależności od okresu ubezpieczenia n

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione wykresy są prezentacją graficzną dystrybuant całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ, których postać analityczna określona jest wzorem (17). Pozwalają one określić asymetrię i kurtozę rozkładów analizowanego procesu.

W analogiczny sposób wyznacza się dystrybuantę rozkładu skumulowanych całkowitych świadczeń w ubezpieczeniu na dożycie (UD) oraz na życie i dożycie (UŻD), uwzględniając charakterystyczne dla tych ubezpieczeń strumienie płatności.

5. Indywidualne ubezpieczenie na życie z opcją NW

Rozważmy w tym przykładzie ubezpieczenie podstawowe, którym może być UŻ, UD lub UŻD z wykupioną opcją dodatkową – „trwałe inwalidztwo wskutek nieszczęśliwego wypadku (NW)". Przedmiotem ubezpieczenia umowy podstawowej jest życie ubezpieczonego w czasie trwania umowy lub dożycie ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia. Natomiast przedmiotem ubezpieczenia umowy dodatkowej jest zdrowie ubezpieczonego, a ochroną objęte jest całkowite lub częściowe trwałe inwalidztwo spowodowane nieszczęśliwym wypadkiem. Zgodnie z umową podstawową, firma ubezpieczeniowa wypłaca jednorazowe świadczenie w wysokości *c j.p.* w razie śmierci ubezpieczonego lub w wysokości *d j.p.* w razie dożycia do końca okresu ubezpieczenia (w zależności od przyjętego wariantu UŻ, UD lub UŻD). W przypadku doznania przez ubezpieczonego trwałego uszczerbku na zdrowiu w wyniku nieszczęśliwego wypadku firma ubezpieczeniowa, zgodnie z umową dodatkową, wypłaca jednorazowo świadczenie w wysokości *2c j.p.*, w momencie uznania inwalidztwa. Strumienie płatności wynikające z umowy podstawowej i dodatkowej są następujące:

$$d_H(t) = d_S(t) = \begin{cases} d & \text{dla } t = n \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases},$$

$$c_{HS}(t) = \begin{cases} 2c & \text{dla } 0 \le t \le n \\ 0 & \text{dla } t > n \end{cases}, \quad c_{HD}(t) = c_{SD}(t) = \begin{cases} c & \text{dla } 0 < t \le n \\ 0 & \text{dla } t > n \end{cases}.$$

W przypadku takich ubezpieczeń (UŻ, UD lub UŻD) procesami reprezentującymi wielkości roszczeń w tego typu ubezpieczeniu wieloopcyjnym są odpowiednio $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Złożenie tych procesów prowadzi do procesu całkowitych skumulowanych świadczeń (dla ubezpieczenia UŻ, UD i UŻD z opcją NW), którego dystrybuanta określona jest wzorem:

$$P_H^W(0,u) = P\left[\left(ZW_0(0,n)\right) \le u \mid X(0) = H\right] =$$

$$= P\left[\left(\underbrace{d \cdot e^{-\delta n}\left(\mathrm{I}_H(n) + \mathrm{I}_S(n)\right)}_{\text{świadczenie z tytułu dożycia}} + \underbrace{c\int_0^n e^{-\delta\tau}\left(dN_{SD}(\tau) + dN_{HD}(\tau)\right)}_{\text{świadczenie z tytułu śmierci}} + \underbrace{2c\int_0^n e^{-\delta\tau} dN_{HS}(\tau)}_{\text{świadczenia dodatkowe}}\right) \le u\right].$$

W przypadku tego typu ubezpieczenia zgodnie ze wzorem (13) dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń dana jest wzorem:

$$P_H^W(0,u)=\int_0^n {}_sp_x^{HH}\cdot\mu_{HS}(s)\cdot P_S^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-\int_0^s\frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}d\mathcal{W}_H(\tau)-c_{HS}(s)\right)ds+$$
$$+\int_0^n {}_sp_x^{HH}\cdot\mu_{HD}(s)\cdot P_D^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-\int_0^s\frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}d\mathcal{W}_H(\tau)-c_{HD}(s)\right)ds+$$
$$+{}_np_x^{HH}\cdot\mathbf{1}\left[\int_0^n\upsilon(\tau)d\mathcal{W}_H(\tau)\le u\right].$$

Jeśli uwzględni się strumienie płatności związane z ubezpieczeniem UŻ z opcją NW, to powyższy wzór przybiera postać:

$$P_H^W(0,u)=\int_0^n {}_sp_x^{HH}\cdot\mu_{HS}(s)\cdot P_S^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-2c\right)ds+$$
$$+\int_0^n {}_sp_x^{HH}\cdot\mu_{HD}(s)\cdot P_D^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-c\right)ds+$$
$$+{}_np_x^{HH}\cdot\mathbf{1}[u\ge 0].$$

Prawdopodobieństwa $P_S^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-2c\right)$ oraz $P_D^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-c\right)$, zgodnie ze wzorem (11), w tym przykładzie są odpowiednio równe:

$$P_S^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-2c\right)=P\left(\int_s^n\frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}d\mathcal{W}(\tau)\le\frac{1}{\upsilon(s)}u-2c \mid X(s)=S\right),$$

$$P_D^W\left(s,\frac{1}{\upsilon(s)}u-c\right)=P\left(\int_s^n\frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)}d\mathcal{W}(\tau)\le\frac{1}{\upsilon(s)}u-c \mid X(s)=D\right).$$

W zaprezentowanych wzorach moment s jest odpowiednio momentem zachorowania lub śmierci ubezpieczonego. Moment ten jest zmienną losową. Niech więc T_x oznacza przyszły czas życia osoby w wieku x lat oraz T_x^H odpowiednio przyszły czas życia w zdrowiu osoby w wieku x lat. Wówczas dystrybuantę tę wyznacza się następująco:

$$
\begin{aligned}
P_H^W(0,u) &= \int_0^n {}_s p_x^{HH} \cdot \mu_{HS}(s) \cdot P\left(\int_s^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)} d\mathcal{W}(\tau) \le \frac{1}{\upsilon(s)} u - 2c \mid X(s) = S \right) ds + \\
&+ \int_0^n {}_s p_x^{HH} \cdot \mu_{HD}(s) \cdot P\left(\int_s^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)} d\mathcal{W}(\tau) \le \frac{1}{\upsilon(s)} u - c \mid X(s) = D \right) ds + \\
&+ {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] = \\
&= P\left(2c \le \frac{1}{\upsilon(T_x^H)} u - 2c \right) + P\left(0 \le \frac{1}{\upsilon(T_x)} u - c \right) + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] = \\
&= P\left(u \ge 4e^{\delta T_x^H} \cdot c \right) + P\left(u \ge e^{\delta T_x} \cdot c \right) + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] = \\
&= P\left(T_x^H \ge \underbrace{\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{4c}{u} \right)}_{t_1} \right) + P\left(T_x \ge \underbrace{\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{c}{u} \right)}_{t_2} \right) + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0] = \\
&= {}_{t_1} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HS} + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0].
\end{aligned}
$$

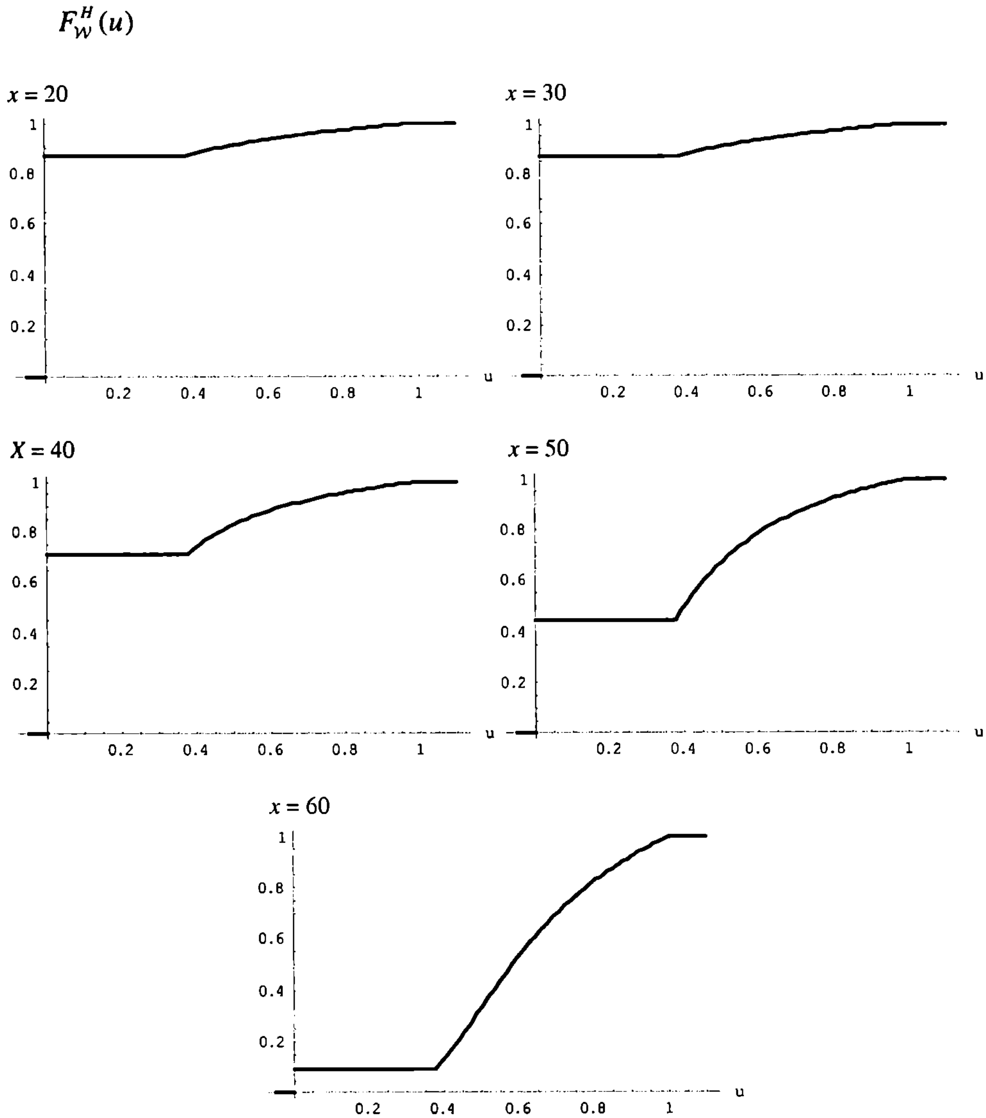
Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW dana jest następującym wzorem:

$$
F_W^H(u) = P_H^W(0,u) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad u < 0, \\ {}_n p_x^{HH} & \text{dla} \quad 0 \le u < c \cdot e^{-\delta n}, \\ {}_{t_1} p_x^{HH} & \text{dla} \quad c \cdot e^{-\delta n} \le u < 2c \cdot e^{-\delta n}, \\ {}_{t_2} p_x^{HH} + {}_{t_2} p_x^{HS} & \text{dla} \quad 2c \cdot e^{-\delta n} \le u < c, \\ 1 & \text{dla} \quad u \ge c. \end{cases}
$$

Wykresy dystrybuant całkowitych skumulowanych świadczeń dla 20-letniego ubezpieczenia UŻ z opcją NW zawartego z x-latkiem przedstawiono na rys. 3, przyjmując $x = 20, 30, 40, 50, 60$. Podobnie jak w przykładzie poprzednim, przyjęto funkcje intensywności stosowane przez duńskie towarzystwa ubezpieczeniowe, które są postaci (por. [4; 9]):

$$
\mu_{HS}(t) = \sigma(x+t) = 0{,}0004 + 0{,}0000034674 \cdot 10^{0{,}06(x+t)},
$$

$$
\mu_{HD}(t) = \mu_{SD}(t) = \mu(x+t) = 0{,}005 + 0{,}000075858 \cdot 10^{0{,}038(x+t)}.
$$

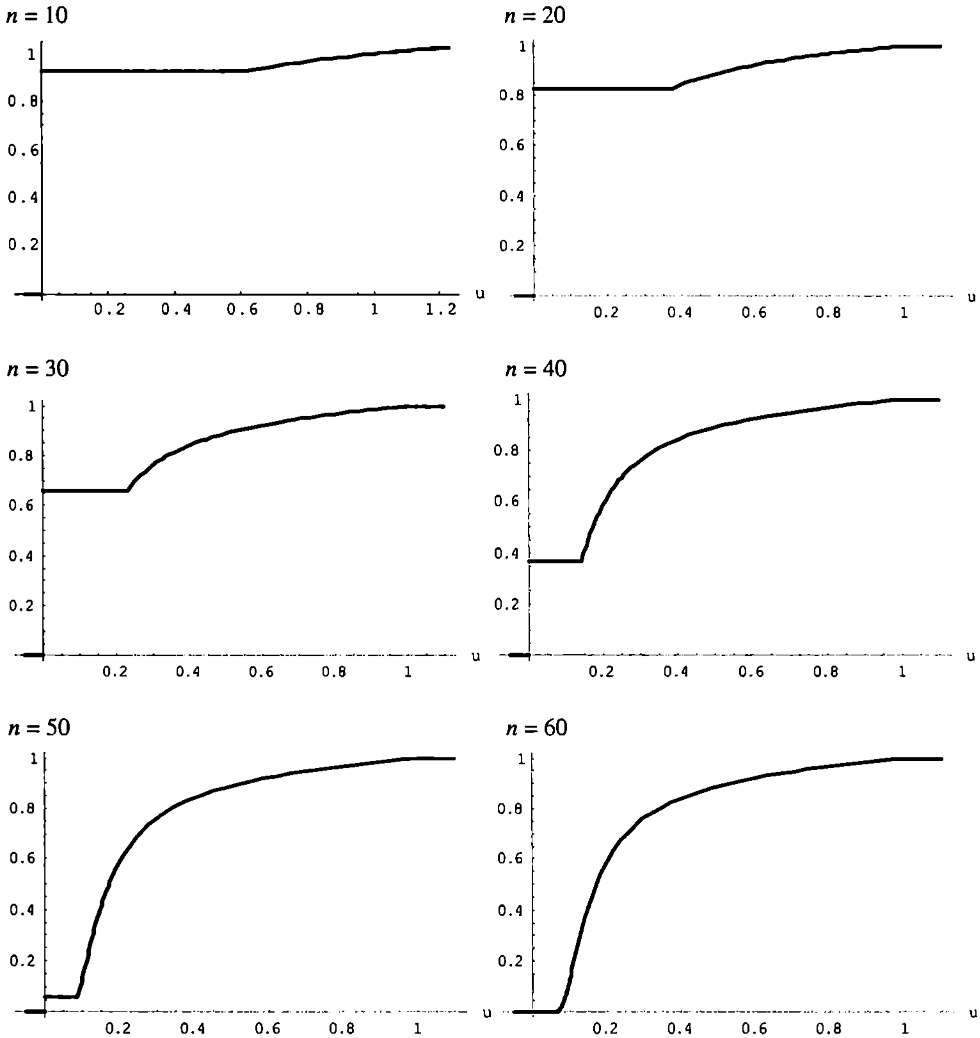


Rys. 3. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW w zależności od wieku osoby ubezpieczanej x

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione wykresy pokazują, że wiek osoby ubezpieczanej wpływa na wzrost kurtozy, choć skośność rozkładu jest podobna (wiek ubezpieczonego nie wpływa znacząco na asymetrię rozkładu).

Na rysunku 4 przedstawiono prezentację graficzną dystrybuant skumulowanych świadczeń dla ubezpieczenia UŻ z opcją NW zawartego z mężczyzną w wieku 30 lat i różnych okresów ubezpieczenia $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.



Rys. 4. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW dla różnych wartości n

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie zaprezentowanych wykresów można zaobserwować, że wraz z wydłużającym się okresem ubezpieczenia rozkład skumulowanych świadczeń charakteryzuje się coraz silniejszą asymetrią prawostronną oraz że wzrasta kurtoza (współczynnik skupienia), co oznacza, że charakteryzuje się większą koncentracją wokół wartości oczekiwanej.

Aby określić rozkład skumulowanych przyszłych (po czasie t) świadczeń, należy uwzględnić aktywną w danym momencie opcję polisy. Wówczas rozkład ten dla dowolnego $t \le n$, w zależności od aktywnej opcji, jest następującym rozkładem warunkowym:

$$F^{H}_{\mathcal{W}(\tau),t}(u) = P^{\mathcal{W}}_{H}(t,u) = P\left[\int_t^n \frac{v(\tau)}{v(t)} d\mathcal{W}(\tau) \le u \mid X(t) = H\right]$$

lub

$$F^{S}_{\mathcal{W}(\tau),t}(u) = P^{\mathcal{W}}_{S}(t,u) = P\left[\int_t^n \frac{v(\tau)}{v(t)} d\mathcal{W}(\tau) \le u \mid X(t) = S\right].$$

Dla dowolnego momentu trwania ubezpieczenia dystrybuanty te wyznaczamy analogicznie z przypadkiem całkowitych skumulowanych świadczeń.

6. Wnioski

Procesami losowymi badanymi w ubezpieczeniach tradycyjnych są m.in. wielkość roszczeń i strata ubezpieczyciela. W pracy wyznaczono dokładny rozkład procesu skumulowanych zaktualizowanych świadczeń, który stanowi istotny miernik działalności finansowej ubezpieczyciela. Rozkład tego procesu losowego scharakteryzowano za pomocą dokładnej analitycznej postaci dystrybuanty. Znajomość tego rozkładu pozwala opisywać i mierzyć stopień „ryzykowności" indywidualnego ubezpieczenia i jest podstawą dalszej analizy szkodowości portfela ubezpieczeń wieloopcyjnych, bez dodatkowych założeń o rozkładzie procesu zgłoszeń.

Literatura

[1] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schamburg 1986.

[2] Błaszczyszyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.

[3] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1980.

[4] Habermann S., Pitaco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman&Hall/CRC, London 1999.

[5] Hoem J.M., *Markov Chain Models in Life Insurance*, „Blätter der deutschen gesellschaft für versicherungsmathematik" 1972, 9, s. 91-107.

[6] Hoem J.M., Aalen O.O., *Actuarial Values of Payment Streams*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1978, s. 38-47.
[7] Matłoka M., *Matematyka w ubezpieczeniach na życie*, Wydawnictwo WSB, Poznań 1997.
[9] Norberg R., *A Time-Continuous Markov Chain Interest Model with Applications to Insurance* „Applied Stochastic Models and Data Analysis" 1995, 11, s. 245-256.
[10] Norberg R., *On Probability Distributions of Present Values in Life Insurance*, „Insurance: Mathematics&Economics" 1996, 18, s. 35-42.
[8] *Modele aktuarialne*, red. S. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2000.
[11] Ramlau-Hansen H.: *Distribution of Surplus in Life Insurance*, „ASTIN Bulletin" 21, 1, s. 57-71.
[12] Skałba M., *Ubezpieczenia na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
[13] Waters H.R., Phil D., *The Moments and Distributions of Actuarial Functions*, JIA 1998, 105, s. 61-75.

DISTRIBUTION FUNCTION OF ACCUMULATED PAYMENTS IN INDIVIDUAL MULTI-STATE LIFE INSURANCE

Summary

In the literature the methods of analyzing and pricing in traditional life insurance are described. But in practice the traditional life insurance respects only the basic insurance products, which in reality are more complicated. This determined the fact that I consider in my article a multi-state insurance policies, which are more attractive and better adopted to the needs of clients. With the life insurance and in particular multi-state insurance is connected the analysis of the following stochastic processes: loss or income of the insurer, total payments stream and accumulated expenses. Therefore, the essence of my work is the discussion on the form and distribution of total accumulated payments in multi-state insurance. I presented the form and recursion formula for distribution function of total payments in individual multi-state insurance, which determines essential measure of financial activity of the insurer. Knowledge of this process permits to describe and estimate the "riskness" of an individual contract. This is also the basis for further analysis of the insurance portfolio.