PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 — 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Joanna Dębicka
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

MACIERZOWA REPREZENTACJA UBEZPIECZENIA WIELOSTANOWEGO Z NIEJEDNORODNYM ŁAŃCUCHEM MARKOWA*

1. Wstęp

Dla każdej firmy ubezpieczeniowej szczególnie ważna jest ocena wysokości przyszłego świadczenia, które będzie musiała wypłacić z tytułu sprzedanego ubezpieczenia. Zagadnienie to jest ściśle związane ze stosowaną przez ubezpieczycieli zasadą równoważności, która zakłada, że składka netto jest równa wartości oczekiwanej przyszłych świadczeń wynikających z umowy ubezpieczenia. Ponadto w celu określenia tzw. dodatku bezpieczeństwa (inaczej – dodatku na ryzyko), czyli części składki przeznaczonej na pokrycie niekorzystnych odchyleń w przebiegu zdarzeń losowych, niezbędna jest znajomość wariancji wysokości przyszłego świadczenia.

Celem artykułu jest wyrażenie pierwszych dwóch momentów sumy zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych wynikających z umowy ubezpieczenia wielostanowego w formie macierzowej. Uzyskany zapis macierzowy umożliwia zastosowanie go do wszystkich rodzajów klasycznych rent i ubezpieczeń na życie oraz ubezpieczeń wieloopcyjnych; szczególnie do ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy.

Zarówno z aktuarialnego, jak i finansowego punktu widzenia określenie modelu wielostanowego, jego struktury probabilistycznej oraz strumieni finansowych powstałych w wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia jest niezbędne do analizy ubezpieczenia wielostanowego. Wszystkie wymienione zagadnienia zostały omówione w punkcie 2. W podpunkcie 2.1 opisany został model wielo-

* Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003-2005 jako projekt badawczy nr 0216/H02/2003/25.

stanowy ubezpieczenia w ujęciu klasycznym (por. np. [4; 14]), w którym każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy opcja lub umowa ubezpieczenia podstawowego, odpowiada stan w jakim znalazł się ubezpieczony. Przez S oznacza się przestrzeń stanów będącą skończonym zbiorem wszystkich możliwych stanów. Do opisu zmian stanów od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia używany jest proces stochastyczny $\{X(t); t \in T\}$ (gdzie t oznacza czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia) przyjmujący wartości z przestrzeni S. Do modelowania procesu opisującego zmiany stanów w trakcie trwania umowy ubezpieczenia wykorzystywane są m.in. procesy Markowa (np. [4; 15; 13; 19]). W szczególności zakłada się, że proces $\{X(t)\}$ jest jednorodnym w czasie łańcuchem Markowa (np. [9; 10]). Z obliczeniowego punktu widzenia takie założenie znacznie ułatwia analizę ubezpieczenia, ale bardzo upraszcza model. Dlatego bardziej realistycznym podejściem (stosowanym w tej pracy) jest przyjęcie założenia, że proces $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa (np. [5; 6; 7; 8; 12; 16; 17]).

W podpunkcie 2.3 omówiony został problem związany z określeniem przepływów pieniężnych powstających w wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia wielostanowego. Okazuje się, że danej realizacji procesu $\{X(t)\}$ nie zawsze jednoznacznie można przypisać przepływ pieniężny. W podpunkcie 2.4 zaproponowano rozwiązanie polegające na zdefiniowaniu rozbudowanej przestrzeni stanów S^*, która zależy nie tylko od przypadków życiowych, ale także od pewnych przepływów pieniężnych powstałych w wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia. Wprowadzenie nowej przestrzeni stanów wymagało określenia nowego procesu $\{X^*(t)\}$, a także prawdopodobieństw przejść między stanami przestrzeni S^*.

Punkt 3 poświęcony jest wyznaczaniu momentów sumy Z zaktualizowanych przyszłych przepływów pieniężnych powstałych w wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia wielostanowego. Przy zastosowaniu klasycznych metod rachunku aktuarialnego momenty Z zostały wyznaczone w podpunkcie 3.1. Ponadto zaproponowano notację macierzową do określania struktury prawdopodobieństwa oraz przepływów pieniężnych dla modelu wielostanowego, a w rezultacie wyznaczania momentów Z. W tym celu w podpunkcie 3.2 zdefiniowano potrzebne macierze oraz określono zależności między nimi. Wyprowadzone (w podpunkcie 3.3) wzory macierzowe na momenty Z zostały wykorzystane do wyznaczania ogólnych wzorów na okresową i jednorazową składkę netto dla ubezpieczenia wielostanowego (w podpunkcie 4.2). Przykłady zastosowania macierzowego zapisu w przypadku ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy zawarto w podpunktach 4.1 i 4.2.

2. Ubezpieczenia wielostanowe

Umowa ubezpieczenia obejmująca różne przypadki życiowe nazywana jest ubezpieczeniem wielostanowym. Ubezpieczenia tego typu składają się z podstawowej umowy ubezpieczenia (jest to zazwyczaj umowa ubezpieczenia na życie) oraz ubezpieczeń dodatkowych, tzw. opcji (np. umowa ubezpieczenia od trwałego inwalidztwa, niezdolności do pracy itp.). Dlatego też nazywane są niekiedy ubezpieczeniami wieloopcyjnymi. Podstawą – zarówno finansowej, jak i aktuarialnej – analizy ubezpieczenia jest skonstruowanie jego matematycznego modelu. Pierwszym krokiem jest opis możliwych zdarzeń losowych (przypadków życiowych), które obejmuje umowa ubezpieczenia podstawowego wraz z umowami ubezpieczeń dodatkowych, a następnie określenie wszystkich możliwych przebiegów ubezpieczenia. W tym celu definiuje się tzw. model wielostanowy, a następnie określa na nim strukturę probabilistyczną oraz przepływy pieniężne wynikające z zawarcia umowy ubezpieczenia.

2.1. Model wielostanowy

Każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy opcja lub umowa ubezpieczenia podstawowego (np. ubezpieczony żyje, ubezpieczony umarł, ubezpieczony stracił pracę), odpowiada stan, w jakim znalazł się ubezpieczony. Przyjmijmy, że N ($N < \infty$) oznacza liczbę wszystkich możliwych stanów oraz $S = \{1, 2, ..., N\}$ oznacza skończoną przestrzeń stanów. Ponadto niech para (i, j), gdzie $i \neq j$ oraz $i, j \in S$ oznacza bezpośrednie przejście ze stanu i do stanu j. Ponieważ nie wszystkie przejścia między stanami są dopuszczalne (ze względu na nieodwracalny charakter niektórych przypadków życiowych), T oznacza zbiór wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami.

Para (S,T), opisująca wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w życiu ubezpieczonego w okresie objętym umową ubezpieczenia, nazywana jest modelem wielostanowym (por. [4]).

2.2. Probabilistyczna struktura modelu

Do opisu zmian stanów od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia używana będzie funkcja czasu $X(t)$, gdzie t oznacza czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia. Zauważmy, że każdy przypadek życiowy jest zdarzeniem losowym, więc $X(t)$ jest zmienną losową dla każdej chwili t ($t \in \mathrm{T}$), a $\{X(t); t \in \mathrm{T}\}$ jest procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S.

Podstawowymi wielkościami opisującymi ewolucję procesu $\{X(t)\}$ są prawdopodobieństwa przejścia procesu $\{X(t)\}$ do stanu j w momencie u, pod warunkiem że w momencie t proces był w stanie i

$$\mathrm{P}_{ij}(t,u)=\mathrm{P}\big(X(u)=j\,|\,X(z)=x(z);0\le z<t \ \text{ i } \ x(t)=i\big), \tag{1}$$

gdzie $x(t)$ jest realizacją procesu $\{X(t)\}$; $i,j\in S$ oraz $0\le t<u$. W praktyce aktuarialnej znalezienie prawdopodobieństwa (1) jest bardzo trudne. Związane jest to z ograniczoną ilością dostępnych danych. Dlatego niekiedy zakłada się, że proces $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa. Wtedy prawdopodobieństwo (1) ma następującą postać:

$$\mathrm{P}_{ij}(t,u)=\mathrm{P}\big(X(u)=j\,|\,X(t)=i\big).$$

Dalsze rozważania dotyczą ubezpieczeń, w których jednorazowe świadczenia i raty renty płatne są na koniec okresu (rok, kwartał, miesiąc itp.) oraz składki płatne są z góry w takich samych odstępach czasu ($\mathrm{T}\subseteq\{0,1,2,...\}$). W takim modelu okres ubezpieczenia jest podzielony na rozłączne odcinki. Pojedynczy odcinek czasu może oznaczać np. dzień, miesiąc lub rok. Wtedy $\{X(t);t\in\mathrm{T}\}$ = $=\{X(t);t=0,1,2,...\}$ jest dyskretnym w czasie procesem stochastycznym.

Przy tych założeniach, w celu wyznaczenia rozkładu procesu $\{X(t)\}$ dla ubezpieczenia wielostanowego z n-letnim okresem ubezpieczenia, wystarczy wyznaczyć ciąg macierzy $\mathbf{Q}(0),\mathbf{Q}(1),\mathbf{Q}(2),...,\mathbf{Q}(n-1)$, gdzie $\mathbf{Q}(k)=\big(q_{ij}(k)\big)_{i,j=1}^{N}$, a $q_{ij}(k)=\mathrm{P}(X(k+1)=j\,|\,X(k)=i)$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia procesu $\{X(t)\}$ w momencie k w pojedynczym kroku (tzn. ze stanu i w momencie k do stanu j w momencie $k+1$).

Między ciągiem macierzy prawdopodobieństw przejść a zbiorem bezpośrednich przejść między stanami istnieją następujące zależności:

$$(i,j)\in T \Leftrightarrow \underset{k\in\{0,1,2,...,n-1\}}{\exists} 0<q_{ij}(k)\le 1 \quad \text{oraz} \quad (i,j)\notin T \Leftrightarrow \underset{k\in\{0,1,2,...,n-1\}}{\forall} q_{ij}(k)=0. \tag{2}$$

Dlatego na podstawie ciągu macierzy prawdopodobieństw przejść można wyznaczyć zbiór T.

2.3. Przepływy pieniężne

W wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia powstają dwa strumienie przepływów pieniężnych: strumień składek (skierowany od ubezpieczonego do ubezpieczyciela) oraz strumień świadczeń ubezpieczeniowych, np. sumy ubezpieczenia wypłacane w wyniku śmierci lub dożycia oraz różnego typu renty (skierowany w odwrotną stronę). Każdy ze strumieni składa się z przepływów pieniężnych, których wysokość i moment wypłaty określają warunki umowy ubezpieczenia.

Załóżmy, że umowa ubezpieczenia została zawarta w momencie 0 na okres n lat (n jest okresem ubezpieczenia). Niech $c_i(k)$ oznacza przepływ pieniężny realizowany w momencie k ($k = 0, 1, 2, ..., n$), jeżeli proces $\{X(t)\}$ jest w tym momencie w stanie i ($i = 1, 2, ..., N$), czyli $c_i(k) = c_{X(k)=i}(k)$. Zauważmy, że wysokość przepływu pieniężnego w momencie k zależy od tego, jaką wartość w tym momencie przyjmie proces $\{X(t)\}$. Zatem $c_X(k)$ jest zmienną losową, której rozkład zależy od rozkładu zmiennej losowej $X(t)$.

W literaturze aktuarialnej, dotyczącej ubezpieczeń wielostanowych (np. [4; 15]), rozróżnia się następujące typy przepływów pieniężnych:

- $p_j(k)$ – składka płacona w momencie k, gdy proces $\{X(t)\}$ w tym momencie jest w stanie j,
- $b_j(k)$ – renta płacona w momencie k, gdy proces $\{X(t)\}$ w tym momencie jest w stanie j,
- $d_j(t_k)$ – jednorazowe świadczenie płacone w ustalonym momencie t_k, jeżeli proces $\{X(t)\}$ w tym momencie znajduje się w stanie j,
- $c_{ij}(k)$ – jednorazowe świadczenie płacone w momencie k, gdy w tym momencie proces $\{X(t)\}$ znajduje się w stanie j, a w momencie $k - 1$ znajdował się w stanie i.

Do przepływów pieniężnych związanych z pobytem procesu $\{X(t)\}$ w danym stanie zalicza się $p_j(k)$, $b_j(k)$ i $d_j(t_k)$, $c_{ij}(k)$ oznacza zaś, że w jednostkach czasu, na jakie został podzielony okres ubezpieczenia, nastąpiło przejście procesu $\{X(t)\}$ ze stanu i do stanu j, więc $c_{ij}(k)$ zaliczany jest do grupy przepływów pieniężnych związanych ze zmianą stanu przez proces $\{X(t)\}$.

Zauważmy, że pomimo iż $d_j(t_k)$ i $c_{ij}(k)$ są świadczeniami jednorazowymi, to jednak bardzo się różnią. W przypadku przepływu pieniężnego $d_j(t_k)$ nie jest istotne, jak długo proces $\{X(t)\}$ przebywa w stanie j, gdyż niezależnie od tej informacji w ustalonym w warunkach ubezpieczenia momencie t_k następuje wypłata świadczenia, realizacja przepływu pieniężnego $c_{ij}(k)$ jest zaś losowa i związana z pobytem procesu $\{X(t)\}$ w stanie j. Na przykład załóżmy, że proces $\{X(t)\}$ przebywa w stanie j od momentu k_1 do momentu k_2. Z warunków ubezpieczenia wynika, że jeżeli proces $\{X(t)\}$ przejdzie z innego stanu do stanu j, to firma wypłaca świadczenie w wysokości 1 jednostki. Ponieważ $c_{ij}(k)$ jest świadczeniem jednorazowym, mamy, że dla $k \in [k_1, k_2]$

$$c_j(k) = c_{X(k)=j}(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad k = k_1 \\ 0 & \text{dla} \quad k = k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2. \end{cases}$$

Oznacza to, że informacja $X(k) = j$ nie jest wystarczająca do jednoznacznego określenia wysokości przepływu pieniężnego realizowanego w momencie k.

Ponieważ w momencie k mogą istnieć niezależnie wszystkie typy przepływów pieniężnych, $c_j(k)$ można przedstawić w postaci

$$c_j(k) = \begin{cases} p_j(k) + b_j(k) + d_j(k) + c_{ij}(k) & \text{gdy} \quad X(k-1) = i, \\ p_j(k) + b_j(k) + d_j(k) & \text{poza tym.} \end{cases} \tag{3}$$

W następnym podpunkcie zaproponowano rozwiązanie tego problemu polegające na odpowiednim rozbudowaniu przestrzeni stanów.

2.4. Rozbudowany model wielostanowy

Zauważmy, że jeżeli w wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia powstają przepływy pieniężne typu $c_{ij}(k)$, to zbiór bezpośrednich przejść T dzieli się na dwa podzbiory: bezpośrednich przejść, w wyniku których następuje wypłata typu $c_{ij}(k)$, oraz bezpośrednich przejść, w wyniku których nie następuje wypłata świadczenia jednorazowego.

Definicja 1

Para (i, j) $(i, j \in T)$ jest typu **pp** (przepływ pieniężny), jeżeli istnieje k ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$), dla którego $c_{ij}(k) \neq 0$.

Przyjmijmy, że T^{pp} ($T^{\text{pp}} \subseteq T$) oznacza zbiór wszystkich par (i, j) typu **pp**.

Rozbudowanie przestrzeni stanów S następuje przez podział niektórych jej stanów. Niech $S^* = S \cup S^+$, gdzie $S^+ = \{j_i^+ : (i, j) \in T^{\text{pp}}\}$, oraz $S \cap S^+ = \varnothing$. Zbiór S^* nazywamy rozbudowaną przestrzenią stanów, a jego podzbiór S^+ nazywamy zbiorem stanów wydzielonych. Stan j_i^+ nazywamy stanem wydzielonym ze stanu j. Jeżeli ze stanu j wydzielony został tylko jeden stan j_i^+, to wtedy pomijać będziemy w zapisie indeks dolny i przyjmiemy oznaczenie, że $j^+ = j_i^+$.

Liczebność zbioru S^+ zależy od wysokości potencjalnych przepływów pieniężnych typu $c_{ij}(k)$ w poszczególnych momentach trwania umowy ubezpieczenia. W dalszych rozważaniach przyjmijmy, że spełnione jest poniższe założenie.

Z0 Dla ustalonego j wysokość przepływu pieniężnego typu $c_{ij}(k)$ nie zależy od stanu, tzn.

$$\underset{\{i:(i,j)\in T^{pp}\}}{\forall} \underset{k\in\{1,2,\ldots,n\}}{\forall} c_{ij}(k) = c^j(k).$$

Przy takim założeniu, bez straty ogólności, wszystkie stany wydzielone ze stanu j można utożsamić z jednym stanem j^+. Dlatego w dalszej części pracy przy stanach wydzielonych indeks dolny został pominięty. Założenie **Z0** nie ogranicza w istotny sposób zakresu rozpatrywanych rodzajów ubezpieczeń, gdyż zazwyczaj wysokość wypłaty jest związana ze zdarzeniem losowym odpowiadającym stanowi j (np. ubezpieczony nie żyje), a nie poprzedzającej go historii (np. ubezpieczony był przed śmiercią zdrowy czy chory). Ponadto, jeśli odpowiednio określi się model wielostanowy (S,T), to dla każdego ubezpieczenia można określić rozbudowaną przestrzeń stanów S^*, dla której spełnione jest założenie **Z0**.

Jeżeli istnieje W ($W \le N$) różnych stanów wydzielonych ze stanów należących do przestrzeni stanów S, to $S^* = \{1, 2, \ldots, N\} \cup \{j_1^+, j_2^+, \ldots, j_W^+\}$.

Proces $\{X(t)\}$ przyjmuje wartości ze skończonej przestrzeni stanów S. Dlatego po zmianie S na S^* należy określić nowy proces stochastyczny $\{X^*(t)\}$, będący niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa i przyjmujący wartości ze skończonej przestrzeni stanów S^*.

Niech dany będzie ciąg macierzy $\mathbf{Q}^*(0), \mathbf{Q}^*(1), \mathbf{Q}^*(2), \ldots, \mathbf{Q}^*(n-1)$, gdzie $\mathbf{Q}^*(k) = \left(q_{ij}^*(k)\right)_{i,j=1}^{N+W}$, a $q_{ij}^*(k) = \mathrm{P}(X^*(k+1) = j \mid X^*(k) = i)$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia procesu $\{X^*(t)\}$ w momencie k w pojedynczym kroku. Prawdopodobieństwa przejść między stanami dla procesu $\{X^*(t)\}$ określa się, wykorzystując prawdopodobieństwa przejść między stanami określonymi dla procesu $\{X(t)\}$. Ponieważ S^* jest sumą dwóch zbiorów – S oraz S^+ – wygodnie jest podzielić prawdopodobieństwa przejść między stanami na cztery grupy i dla nich określić $q_{ij}^*(k)$.

Prawdopodobieństwa przejścia ze stanu należącego do S do stanu należącego do S^+

$$q^*_{ij^+} = \begin{cases} q_{ij}(k) & \text{dla} \quad i \in S \setminus \{j\} \wedge (i,j) \in T^{\text{pp}} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}.$$

Prawdopodobieństwa przejścia ze stanu należącego do S^+ do stanu należącego do S

$$q^*_{j^+i} = \begin{cases} q_{ii}(k) & \text{dla} \quad i = j, \\ q_{ji}(k) & \text{dla} \quad i \in S \setminus \{j\} \wedge (i,j) \notin T^{\text{pp}}, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Prawdopodobieństwa przejść między stanami należącymi do S

$$q^*_{ij} = \begin{cases} q_{ii}(k) & \text{dla} \quad i = j \\ q_{ij}(k) & \text{dla} \quad i \neq j \wedge (i,j) \notin T^{\text{pp}} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}.$$

Prawdopodobieństwa przejść między stanami należącymi do S^+

$$q^*_{i^+j^+} = \begin{cases} q_{ij}(k) & \text{dla} \quad i^+ \neq j^+ \wedge (i,j) \in T^{\text{pp}} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Zauważmy, że stany j i j^+ dotyczą tego samego zdarzenia losowego. Różnica polega na tym, że jeżeli $X^*(k) = j^+$, to następuje przepływ pieniężny typu $c_{ij}(k)$, a gdy $X^*(k) = j$, wówczas $c_{ij}(k) = 0$ dla wszystkich $i \in S^*$.

Początek formularza

Wydzielenie stanów j^+ nie tylko rozbudowuje przestrzeni stanów, ale także zmienia układ bezpośrednich przejść między stanami. Nowy zbiór bezpośrednich przejść między stanami T^* dla zbioru stanów S^* określa się na podstawie rozkładu procesu $\{X^*(t)\}$ (por. zależności (2)). Zauważmy, że z definicji 1 wynika, że świadczenia jednorazowe związane ze zmianą stanu mogą być wypłacane, jeżeli zdarzenie ubezpieczeniowe zajdzie w część okresu ubezpieczenia (np. w ostatnich 10 latach 20-letniego okresu ubezpieczenia), a mimo to bezpośrednie przejście (i, j), którego to dotyczy, jest typu **pp**. W takich sytuacjach w zbiorze T^* powstaje jedno przejście (i, j^+) (zamiast dwóch (i, j) oraz (i, j^+)) i mówimy, że w momentach, dla których $c_{ij}(k) = 0$ (tj. w pierwszych 10 latach 20-letniego okresu ubezpieczenia), istnieje przepływ pieniężny związany ze zmianą stanów o wartości zerowej. Oznacza to, że jeżeli istnieje k $(k \in \{1,2,\ldots,n\})$, dla którego $c_{ij}(k) \neq 0$, to ze stanu i można przejść do stanu j jedynie przez poprzednie przejście do stanu j^+ (tzn. $(i,j) \notin T^*$).

Dół formularza

Para (S^*, T^*) opisuje nie tylko wszystkie możliwe zdarzenia losowe, ale także jednoznacznie określa, z jakimi sytuacjami związane są niezerowe jednorazowe przepływy pieniężne.

3. Zaktualizowane łączne przepływy pieniężne

Niech $c_i^*(k)$ oznacza przepływ pieniężny realizowany w momencie k $(k = 0,1,2,\ldots,n)$, jeżeli proces $\{X^*(t)\}$ jest w tym momencie w stanie i $(i = 1,2,\ldots,N+W)$, czyli $c_i^*(k) = c_{X^*(k)=i}(k)$. Przepływ pieniężny $c_i^*(k)$ określa się na podstawie przepływów pieniężnych określonych w modelu (S^*, T^*) (por. formułę (3) oraz założenie **Z0**):

$$c_i^*(k) = \begin{cases} p_i(k) + b_i(k) + d_i(k) + c^i(k)^{\cdot} & \text{dla} \quad i \in S^+, \\ p_i(k) + b_i(k) + d_i(k) & \text{dla} \quad i \in S^* \setminus S^+. \end{cases}$$

Niech C oznacza sumę przepływów pieniężnych płatnych do końca okresu ubezpieczenia realizowanych zgodnie z indywidualną umową ubezpieczenia

$$C = \sum_{k=0}^{n} c_{X^*}(k).$$

Załóżmy że, kapitalizacja odbywa się na koniec każdego odcinka czasu (np. koniec dnia, miesiąca czy roku), na jaki został podzielony okres ubezpieczenia. Zakładamy, że stopa procentowa jest ustalona dla każdego odcinka czasu. Funkcja dyskontująca $v(k)$ oznacza aktualną wartość jednej jednostki (1 j.p.) płaconej w momencie k. Szczególnie przy założeniu, że stopa procentowa $\mathbf{i}$ jest stała przez cały okres ubezpieczenia, funkcja dyskontująca przybiera postać

$$v(k) = v^k = \left(\frac{1}{1+\mathbf{i}}\right)^k.$$

Aktualna wartość Z łącznych przyszłych przepływów pieniężnych C, liczona w momencie rozpoczęcia umowy ubezpieczenia, jest następująca:

$$Z = \sum_{k=0}^{n} c_{X^*}(k) v(k).$$

Zauważmy, że aktualna wartość $Z = Z_{X^*}$ jest zmienną losową, której rozkład zależy od rozkładu procesu $\{X^*(t)\}$.

Jeżeli przez L ($L \in \mathbb{N}$) oznaczymy liczbę osób w grupie (tzw. portfel polis ubezpieczeniowych), to $X_l^*(t)$ oznacza stan, w jakim znalazł się proces $\{X^*(t)\}$ określony dla l-tej osoby w grupie. Ponadto dla portfela L polis ubezpieczeniowych przez Z_l oznaczmy zaktualizowaną wartość łącznych przyszłych przepływów pieniężnych wynikających z l-tej umowy ubezpieczenia.

3.1. Momenty Z

W celu określenia momentów Z przyjmijmy następujące założenia:

Z1 Zmienne losowe X_l^* dla $l = 1, 2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie.

Z2 Funkcja dyskontująca $v(t)$ jest ustalona.

Z założenia **Z1** wynika, że dla portfela L polis zmienne losowe $Z_1, Z_2, \ldots Z_L$ są niezależne.

Jeżeli spełnione są założenia **Z0-Z2**, to wartość oczekiwaną zmiennej losowej Z oblicza się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{n} c_{X^*}(k) v(k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}\left(c_{X^*}(k)\right) v(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{N+W} c_i^{\bullet}(k) p_i^{\bullet}(k) v(k), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $p_i^{\bullet}(k) = \mathrm{P}(X^{\bullet}(k) = i)$ oznacza prawdopodobieństwo, że proces $\{X^*(t)\}$ w momencie k jest w stanie i.

Drugi centralny moment zmiennej losowej Z ma postać:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2) &= \mathrm{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} c_{X^*}(k)\upsilon(k)\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n} c_{X^*}(k_1)c_{X^*}(k_2)\upsilon(k_1)\upsilon(k_2)\right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\sum_{i_1=0}^{N+W}\sum_{i_2=0}^{N+W} c^*_{i_1}(k_1)c^*_{i_2}(k_2)p^*_{i_1 i_2}(k_1,k_2)\upsilon(k_1)\upsilon(k_2),\end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $p^*_{i_1 i_2}(k_1,k_2) = \mathrm{P}(X^*(k_1) = i_1, X^*(k_2) = i_2)$ oznacza prawdopodobieństwo, że proces $\{X^*(t)\}$ w momencie k_1 jest w stanie i_1, natomiast w momencie k_2 jest w stanie i_2.

3.2. Notacja macierzowa

Przed przedstawieniem głównego rezultatu rozdziału, w którym określono faktoryzację momentów zmiennej losowej Z, wprowadzona zostanie notacja macierzowa.

Przy określaniu macierzy istotny będzie porządek w zbiorze S^*, ponieważ składa się on ze stanów należących do zbioru S i zbioru S^+. Można przyjąć różne warianty porządkowania przestrzeni stanów S^*. Jedynym ograniczeniem jest, żeby dla raz przyjętego sposobu porządkowania określać wszystkie macierze. W artykule przyjmuje się, że jeżeli ze stanu j wyodrębniony został stan j^+, to w zbiorze S^* występują one jeden po drugim w następującej kolejności j^+, j. Wybór ten został podyktowany tym, że oba stany dotyczą tego samego zdarzenia losowego.

W pierwszej kolejności zdefiniowane zostaną wektory i macierze pomocnicze. Niech $\mathbf{S}$ będzie następującym wektorem $\mathbf{S} = (1, 1, ..., 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N+W}$. Ponadto dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$ niech dany będzie wektor $\mathbf{I}_{k+1} = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{k+1}, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ oraz dla $i = 1, 2, ..., N+W$ analogiczny wektor jednostkowy $\mathbf{I}^*_i = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i}, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^{N+W}$.

Dla dowolnego wektora $\mathbf{A} = (a_1, a_2, ..., a_{N+W})^T \in \mathbb{R}^{N+W}$ macierz $diag(\mathbf{A})$ jest macierzą diagonalną, której elementami przekątnej są elementy wektora $\mathbf{A}$

$$diag(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & a_{N+W} \end{pmatrix}.$$

Dla dowolnej macierzy $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n+1}$ macierz $Diag(\mathbf{B})$ jest macierzą diagonalną, której elementami przekątnej są elementy przekątnej macierzy **B**

$$Diag(\mathbf{B})=\begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n+1n+1} \end{pmatrix}.$$

Macierz funkcji dyskontującej ma postać $\mathbf{V}=\left(v(0),v(1),\ldots,v(n)\right)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Macierz przepływów pieniężnych rozmiaru $(n+1)\times(N+W)$ określona jest zaś następująco:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1^*(0) & c_2^*(0) & \cdots & c_{N+W}^*(0) \\ c_1^*(1) & c_2^*(1) & \cdots & c_{N+W}^*(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^*(n) & c_2^*(n) & \cdots & c_{N+W}^*(n) \end{pmatrix}.$$

Dla dowolnej chwili k niech dany będzie następujący wektor prawdopodobieństw pobytu procesu $\left\{X^*(t)\right\}$ w określonym stanie

$$\mathbf{P}(k)=(p_1^*(k),p_2^*(k),p_3^*(k),\ldots,p_{N+W}^*(k))^T \in \mathbb{R}^{N+W}.$$

Przyjmujemy, że dla $k=0$ macierz $\mathbf{P}(0)$ określa rozkład początkowy. W praktyce stan 1 jest stanem oznaczającym, że osoba została zaakceptowana do ubezpieczenia, co jest równoznaczne z tym, że $\mathbf{P}(0)=(1,0,\ldots,0)^T$. Jednak z teoretycznego punktu widzenia zakłada się, że proces $\left\{X^*(t)\right\}$ może startować z dowolnego stanu i należącego do przestrzeni stanów S^*, a wtedy $\mathbf{P}(0)=(0,0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^{N+W}$.

Dla dowolnych chwil $k_1,k_2 \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ niech określona będzie macierz prawdopodobieństw łącznych $\mathbf{P}(k_1,k_2)$ (rozmiaru $(N+W)\times(N+W)$), gdzie ij-ty element zdefiniowany jest następująco:

$$p_{ij}^*(k_1,k_2)=\mathrm{P}\left(X^*(k_1)=i,X^*(k_2)=j\right).$$

Ponieważ proces $\left\{X^*(t)\right\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa, macierze $\mathbf{P}(k)$ i $\mathbf{P}(k_1,k_2)$ można zapisać z użyciem wektora rozkładu początkowego oraz ciągiem macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}^*(0), \mathbf{Q}^*(1), \mathbf{Q}^*(2), \ldots, \mathbf{Q}^*(n-1)$, co zostało przedstawione odpowiednio w lemacie 1 i lemacie 2.

Lemat 1

Niech dla łańcucha Markowa $\{X^*(t)\}$ dany będzie ciąg macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}^*(k) = (q_{ij}^*(k))_{i,j=1}^{N+W}$ oraz macierz rozkładu początkowego $\mathbf{P}(0) \in \mathbb{R}^{N+W}$, wtedy

$$\mathbf{P}^T(k) = \mathbf{P}^T(0)\prod_{t=0}^{k-1}\mathbf{Q}^*(t). \tag{6}$$

Dowód

Ponieważ $\{X^*(t)\}$ jest łańcuchem Markowa, dla każdego t spełniona jest następująca równość $\mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}^T(t-1)\mathbf{Q}^*(t-1)$, a stąd bezpośrednio otrzymujemy (6). □

Własności i zależności między macierzami $\mathbf{P}(k)$ i $\mathbf{Q}^*(k)$ są takie same jak dla tych samych macierzy określonych w odniesieniu do procesu $\{X(t)\}$, których opis można znaleźć w pracy [1].

Lemat 2

Niech dla łańcucha Markowa $\{X^*(t)\}$ dany będzie ciąg macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}^*(k) = (q_{ij}^*(k))_{i,j=1}^{N+W}$ oraz macierz rozkładu początkowego $\mathbf{P}(0) \in \mathbb{R}^{N+W}$. Wtedy dla dowolnych chwil czasu

$$\mathbf{P}(k_1,k_2) = \begin{cases} diag\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{t=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^*(t)\right)\prod_{t=k_1}^{k_2-1}\mathbf{Q}^*(t) & \text{dla} \quad k_1 < k_2 \\ diag\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{t=0}^{k-1}\mathbf{Q}^*(t)\right) & \text{dla} \quad k_1 = k_2 = k. \\ diag\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{t=0}^{k_2-1}\mathbf{Q}^*(t)\right)\prod_{t=k_2}^{k_1-1}\mathbf{Q}^*(t) & \text{dla} \quad k_1 > k_2 \end{cases}$$

Dowód

W pierwszej kolejności rozpatrzony zostanie przypadek $k_1 < k_2$. Dowolny element macierzy $\mathbf{P}(k_1,k_2)$ można zapisać w następujący sposób:

$$p^{*}_{i_1 i_2}(k_1,k_2) = \mathrm{P}(X^{*}(k_1)=i_1)\cdot \mathrm{P}(X^{*}(k_2)=i_2 \mid X^{*}(k_1)=i_1). \tag{7}$$

Ponieważ proces $\{X^{*}(t)\}$ jest łańcuchem Markowa, $\mathrm{P}(X^{*}(k_2)=i_2 \mid X^{*}(k_1)=i_1)$ jest $i_1 i_2$ elementem macierzy $\prod_{k=k_1}^{k_2-1}\mathbf{Q}^{*}(k)$

$$\mathrm{P}(X^{*}(k_2)=i_2 \mid X^{*}(k_1)=i_1) = \mathbf{I}_{i_1}^{T}\prod_{k=k_1}^{k_2-1}\mathbf{Q}^{*}(k)\mathbf{I}_{i_2}. \tag{8}$$

Na podstawie lematu 1 możemy napisać, że

$$p^{*}_{i_1}(k_1) = \mathbf{P}^{T}(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^{*}(k)\mathbf{I}_{i_1}. \tag{9}$$

Ponieważ $p_{i_1}(k_1)$ jest liczbą, $p_{i_1}(k_1) = p_{i_1}^{T}(k_1)$, równanie (9) przekształcić można następująco

$$p^{*}_{i_1}(k_1) = \left(\mathbf{P}^{T}(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^{*}(k)\mathbf{I}_{i_1}\right)^{T} = \mathbf{I}_{i_1}^{T}\left(\mathbf{P}^{T}(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^{*}(k)\right)^{T}. \tag{10}$$

Jeśli podstawimy (8) oraz (10) do (7), to otrzymamy

$$p^{*}_{i_1 i_2}(k_1,k_2) = \mathbf{I}_{i_1}^{T}\left(\mathbf{P}^{T}(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^{*}(k)\right)^{T}\mathbf{I}_{i_1}^{T}\prod_{k=k_1}^{k_2-1}\mathbf{Q}^{*}(k)\mathbf{I}_{i_2}. \tag{11}$$

Niech $\mathbf{U}^{T} = \mathbf{P}^{T}(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^{*}(k)$. Wektor $\mathbf{U}^{T} = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1N+W})$, w zależności od rozkładu początkowego, jest równoważny jednemu z wierszy macierzy $\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^{*}(k)$. Ponadto dla dowolnego $i_1 \in S^{*}$

$$\left(\mathbf{I}_{i_1}\mathbf{U}^{T}\right)^{T} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & u'_{1i_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & u'_{2i_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & u'_{(N+W)i_1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $u'_{ii_1} = u_{1i}$ ($i \in S^*$), zatem $\mathbf{I}_{i_1}^T \left(\mathbf{I}_{i_1}\mathbf{U}^T\right)^T = \left(0,\ldots,0,u'_{i_1 i_1},0,\ldots,0\right) = \left(0,\ldots,0,u_{1i_1},0,\ldots,0\right)$.

Zauważmy, że $\mathbf{I}_{i_1}^T \left(\mathbf{I}_{i_1}\mathbf{U}^T\right)^T = \mathbf{I}_{i_1}^T diag\left(\mathbf{U}^T\right)$, a stąd wynika, że spełniona jest następująca równość

$$\mathbf{I}_{i_1}^T diag\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^*(k)\right) = \mathbf{I}_{i_1}^T\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^*(k)\right)^T \mathbf{I}_{i_1}^T. \qquad (12)$$

Po podstawieniu (12) do (11) otrzymujemy

$$p_{i_1 i_2}^*(k_1,k_2) = \mathbf{I}_{i_1}^T diag\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^*(k)\right)\prod_{k=k_1}^{k_2-1}\mathbf{Q}^*(k)\mathbf{I}_{i_2}. \qquad (13)$$

Ponieważ $p_{i_1 i_2}(k_1,k_2) = \mathbf{I}_{i_1}^T \mathbf{P}(k_1,k_2)\mathbf{I}_{i_2}$, to, porównując z (13), otrzymano, że dla $k_1 < k_2$

$$\mathbf{P}(k_1,k_2) = diag\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{k=0}^{k_1-1}\mathbf{Q}^*(k)\right)\prod_{k=k_1}^{k_2-1}\mathbf{Q}^*(k).$$

Aby określić macierz $\mathbf{P}(k_1,k_2)$ w przypadku, gdy $k_1 > k_2$, wystarczy zauważyć, że gdy korzysta się z własności prawdopodobieństwa łącznego, prawdziwa jest następująca równość $\mathbf{P}(k_1,k_2) = \mathbf{P}(k_2,k_1)$.

Ponieważ w ustalonym momencie czasu proces $\{X^*(t)\}$ może znajdować się tylko w jednym ze stanów przestrzeni S^*, otrzymuje się, że dla $k_1 = k_2 = k$

$$p_{ij}^*(k,k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ p_i^*(k) & \text{dla } i = j \end{cases},$$

a stąd wynika, że $\mathbf{P}(k,k) = diag\left(\mathbf{P}^T(k)\right)$. Gdy korzysta się z lematu 1, otrzymuje się, że

$$\mathbf{P}(k,k) = diag\left(\mathbf{P}^T(0)\prod_{l=0}^{k-1}\mathbf{Q}^*(k)\right). \square$$

Przedstawione macierze można podzielić na trzy grupy. Pierwsza grupa składa się z macierzy $\mathbf{Q}^*(0), \mathbf{Q}^*(1), \mathbf{Q}^*(2), \ldots, \mathbf{Q}^*(n-1)$ oraz $\mathbf{P}(0)$, na podstawie których określa się macierze $\mathbf{P}(k_1,k_2)$ oraz $\mathbf{P}(k)$. Wielkość elementów macierzy z tej grupy określa się na podstawie rozkładu procesu $\{X^*(t)\}$. Druga grupa związana jest ze stopą procentową i należy do niej wektor **V**. Ostatnią tworzy macierz **C**, która zależy od aktualnie rozpatrywanej strony umowy ubezpieczenia oraz warunków ogólnych ubezpieczenia określających wielkości świadczeń i składek.

3.3. Postać macierzowa momentów Z

W tym podpunkcie wprowadzona zostanie reprezentacja macierzowa E(Z) oraz $\mathrm{E}(Z^2)$. Okazuje się, że wprowadzenie notacji macierzowej znacznie upraszcza wyrażenia (4)-(5) oraz ułatwia obliczenia numeryczne.

Twierdzenie 1

Jeżeli Z i $v(t)$ spełniają założenia **Z0-Z2**, to

$$\mathrm{E}(Z)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{V}^T\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{C}\mathbf{P}(k,k)\mathbf{S}, \tag{14}$$

$$\mathrm{E}(Z^2)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\mathbf{V}^T\mathbf{I}_{k_1+1}\mathbf{I}_{k_1+1}^T\mathbf{C}\mathbf{P}(k_1,k_2)\mathbf{C}^T\mathbf{I}_{k_2+1}\mathbf{I}_{k_2+1}^T\mathbf{V}. \tag{15}$$

Dowód

Ze wzoru (4) otrzymuje się

$$\mathrm{E}(Z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{N+W}c_i^*(k)p_i^*(k)v(k)=\sum_{k=0}^{n}v(k)\sum_{i=1}^{N+W}c_i^*(k)p_i^*(k).. \tag{16}$$

Zauważmy, że prawdziwe są następujące równości:

$$v(k) = \mathbf{V}^T\mathbf{I}_{k+1}, \tag{17}$$

$$c_i^*(k) = \mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{C}\mathbf{I}_i, \tag{18}$$

$$p_i^*(k) = \mathbf{I}_i^T\mathbf{P}(k,k)\mathbf{S}. \tag{19}$$

Gdy podstawimy (17), (18) i (19) do wzoru (16), otrzymujemy

$$\mathrm{E}(Z)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{V}^T\mathbf{I}_{k+1}\sum_{i=1}^{N+W}\mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{C}\mathbf{I}_i\mathbf{I}_i^T\mathbf{P}(k,k)\mathbf{S}=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{V}^T\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{C}\left(\sum_{i=1}^{N+W}\mathbf{I}_i\mathbf{I}_i^T\right)\mathbf{P}(k,k)\mathbf{S}. \tag{20}$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^{N+W}\mathbf{I}_i\mathbf{I}_i^T=\mathbf{I}$, gdzie **I** jest macierzą identycznościową, z (20) otrzymujemy bezpośrednio (14).

W analogiczny sposób udowadnia się wzór (15). Zauważmy, że spełnione są następujące równości:

$$v(k) = \mathbf{I}_{k+1}^T \mathbf{V}, \tag{21}$$

$$c_i^*(k) = \mathbf{I}_i^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{k+1}, \tag{22}$$

$$p_{i_1 i_2}^*(k_1, k_2) = \mathbf{I}_{i_1}^T \mathbf{P}(k, k) \mathbf{I}_{i_2}. \tag{23}$$

Po podstawieniu wzorów (17)-(19) oraz (21)-(23) do równości (5) otrzymuje się

$$\mathrm{E}\left(Z^2\right) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} \sum_{i_1=1}^{N+W} \sum_{i_2=1}^{N+W} \mathbf{V}^T \mathbf{I}_{k_1+1} \mathbf{I}_{k_1+1}^T \mathbf{C} \mathbf{I}_{i_1} \mathbf{I}_{i_1}^T \mathbf{P}(k_1, k_2) \mathbf{I}_{i_2} \mathbf{I}_{i_2}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{k_2+1} \mathbf{I}_{k_2+1}^T \mathbf{V} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} \mathbf{V}^T \mathbf{I}_{k_1+1} \mathbf{I}_{k_1+1}^T \mathbf{C} \left(\sum_{i_1=1}^{N+W} \sum_{i_2=1}^{N+W} \mathbf{I}_{i_1} \mathbf{I}_{i_1}^T \mathbf{P}(k_1, k_2) \mathbf{I}_{i_2} \mathbf{I}_{i_2}^T \right) \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{k_2+1} \mathbf{I}_{k_2+1}^T \mathbf{V} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} \mathbf{V}^T \mathbf{I}_{k_1+1} \mathbf{I}_{k_1+1}^T \mathbf{C} \mathbf{I}^T \mathbf{P}(k_1, k_2) \mathbf{I} \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{k_2+1} \mathbf{I}_{k_2+1}^T \mathbf{V}$$

i ostatecznie otrzymuje się (15). □

Najczęściej wykorzystywaną wielkością przy wyznaczaniu jednorazowej i okresowej składki netto jest wartość oczekiwana zmiennej Z. Okazuje się, że wzór (14) można zapisać w bardziej zwięzły sposób. Udowodniony we wniosku 1 wzór (24) nie tylko upraszcza zapis E(Z), ale także ułatwia wyznaczenie składek netto, co zostało pokazane w podpunkcie 4.2.

Wniosek 1

Jeżeli Z i $v(t)$ spełniają założenia **Z0-Z2**, to

$$\mathrm{E}(Z) = \mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S}, \tag{24}$$

gdzie macierz **D** określona jest następująco:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(0)^T \\ \mathbf{P}(1)^T \\ \vdots \\ \mathbf{P}(n)^T \end{pmatrix}.$$

Dowód

Zauważmy, że $p_i^*(k) = \mathbf{I}_i^T \mathbf{P}(k,k)\mathbf{S} = \mathbf{I}_i^T \mathbf{P}(k) = \mathbf{I}_i^T \mathbf{D}^T \mathbf{I}_{k+1}$, a stąd

$$\mathbf{P}(k,k)\mathbf{S} = \mathbf{D}^T \mathbf{I}_{k+1}. \tag{25}$$

Gdy podstawimy (25) do (14), otrzymujemy

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{V}^T\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{CD}^T\mathbf{I}_{k+1}=\mathbf{V}^T\sum_{k=0}^{n}\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{CD}^T\mathbf{I}_{k+1}. \tag{26}$$

Zauważmy, że

$$\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{CD}^T\mathbf{I}_{k+1}=(0,0,\ldots,\underbrace{k+1\text{-element przekątnej macierzy } \mathbf{CD}^T}_{k+1},\ldots,0)^T,$$

z czego otrzymuje się

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\mathbf{CD}^T\mathbf{I}_{k+1}=Diag\left(\mathbf{CD}^T\right)\mathbf{S}. \tag{27}$$

Jeśli podstawimy (27) do (26), to otrzymujemy (24).□

4. Zastosowanie macierzowej reprezentacji modelu wielostanowego

4.1. Ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy

Ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy jest przeznaczone dla osób pracujących, które chcą zagwarantować sobie dodatkowe dochody (poza tymi z funduszu pracy) w razie utraty zatrudnienia. Wypowiedzenie umowy o pracę następuje zazwyczaj w ostatnim dniu miesiąca. Gdy ubezpieczony nie ma pracy na koniec miesiąca lub umowa o pracę kończy się ostatniego dnia miesiąca, a ubezpieczony nie podpisał nowej umowy o pracę z pierwszym dniem następnego miesiąca, oznacza to, że ubezpieczony ma status bezrobotnego. Wypłaty świadczenia z ubezpieczenia dokonywane są na końcu każdego miesiąca, jeżeli ubezpieczony jest bezrobotny (lub ubezpieczony traci pracę i nie ma nowej). W oczywisty sposób oznacza to także, że ubezpieczony żyje. Gdy ubezpieczony pracuje lub umarł wówczas w ostatnim miesiącu firma ubezpieczeniowa nic nie wypłaca.

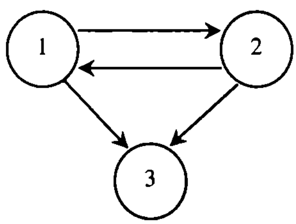
W tego typu ubezpieczeniach elementy przestrzeni stanów S określone są następująco:

1 – stan oznaczający, że ubezpieczony żyje i pracuje,

2 – stan oznaczający przypadek, że ubezpieczony żyje i nie pracuje,

3 – stan oznaczający śmierć ubezpieczonego.

Graficzną ilustrację przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi przedstawiono na rys. 1. Analogiczny opis takiego ubezpieczenia znaleźć można w [11; 15].



Rys. 1. Schemat przestrzeni stanów i przejść między nimi dla ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy

Źródło: opracowanie własne.

Ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy może być połączone z ubezpieczeniem na życie (np. terminowym ubezpieczeniem na wypadek śmierci albo z ubezpieczeniem na dożycie). W takich przypadkach podstawowym ubezpieczeniem jest ubezpieczenie na życie, a ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy jest ubezpieczeniem dodatkowym (tzw. opcją).

Przykład 1 (RUP)

Rozpatrzmy ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy (RUP), w którym wypłata świadczenia następuje na końcu miesiąca, jeżeli ubezpieczony nie pracuje. Niech a_k oznacza świadczenie płacone za okres $[k,k+1)$ $(k=0,1,2,\dots,n-1)$, jeżeli ubezpieczony żyje i nie pracuje w momencie $k+1$.

Ponieważ w warunkach ogólnych ubezpieczenia nie ma świadczeń jednorazowych związanych ze zmianą stanów, mamy, że $N=3$ i $W=0$, a stąd wynika, że $\{X^*(t)\}\equiv\{X(t)\}$ oraz $(S^*,T^*)=(S,T)=\{\{1,2,3\};\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\}$. Ilustracją graficzną pary (S,T) tego przykładu jest rys. 1.

Dla takiego ubezpieczenia strumień przepływów pieniężnych jest określony następująco:

$$c_{X^*}(k)=\begin{cases} a_{k-1} & \text{dla } X(k)=2 \text{ i } k\le 1,\\ 0 & \text{poza tym.}\end{cases}$$

Natomiast macierz przepływów pieniężnych uwzględniająca świadczenia ubezpieczeniowe ma postać

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & a_0 & 0\\ 0 & a_1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-1} & 0\end{pmatrix}. \tag{28}$$

W tym ubezpieczeniu strumień świadczeń a_k można traktować jak rentę płatną z dołu, gdy proces $\{X^*(t)\}$ jest w stanie 2.

Dla danej chwili k postać macierzy $\mathbf{Q}^*(k)$ jest następująca:

$$\mathbf{Q}^*(k)=\mathbf{Q}(k)=\begin{pmatrix} q_{11}(k) & q_{12}(k) & q_{13}(k)\\ q_{21}(k) & q_{22}(k) & q_{23}(k)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

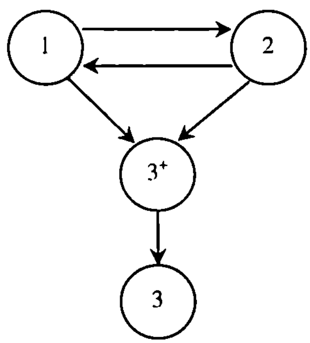
Przykład 2 (ubezpieczenie na życie i dożycie + RUP)

Rozpatrzmy ubezpieczenie na życie i dożycie połączone z ubezpieczeniem od ryzyka utraty pracy. W tego typu ubezpieczeniu RUP jest ubezpieczeniem dodatkowym (opcją) opisanym w przykładzie 1. W razie śmierci ubezpieczonego firma ubezpieczeniowa wypłaca osobie uprawnionej określoną sumę ubezpieczenia. Niech b_{k+1} oznacza jednorazowe świadczenie płacone w momencie $k+1$, jeżeli ubezpieczony umarł w okresie $[k, k+1)$. Dodatkowo, jeżeli ubezpieczony dożyje do końca okresu ubezpieczenia, to w chwili n ubezpieczyciel wypłaca mu kwotę e_n.

Zauważmy, że b_{k+1} jest przepływem pieniężnym typu $c_{ij}(k)$, ale wysokość świadczenia z tytułu śmierci ubezpieczonego zależy jedynie od momentu wypłaty $k+1$, dlatego spełniony jest warunek **Z0**. Oznacza to, że ze stanu 3 należy wydzielić stan $3^+ = 3_1^+ = 3_2^+$. Mamy więc $N = 3$ i $W = 1$, natomiast

$$(S^*, T^*) = \left\{\{1, 2, 3^+, 3\}, \{(1,2); (2,1); (1,3^+); (2,3^+); (3^+,3)\}\right\}.$$

W tym przykładzie ilustracją graficzną przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi jest rys. 2.



Rys. 2. Schemat przestrzeni stanów i przejść między nimi dotyczący ubezpieczenia na życie z opcją od ryzyka utraty pracy

Źródło: opracowanie własne.

Dla takiego ubezpieczenia strumień przepływów pieniężnych jest określony następująco

$$c_{X^*}(k) = \begin{cases} a_{k-1} & \text{dla } X^*(k) = 2 \quad \text{oraz} \quad k < 1 \\ a_{n-1} + e_n & \text{dla } X^*(n) = 2 \quad \text{oraz} \quad k = n \\ b_{k+1} & \text{dla } X^*(k+1) = 3^\dagger \quad \text{oraz} \quad k < n \\ e_n & \text{dla } X^*(n) = 1 \quad \text{oraz} \quad k = n \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Natomiast macierz przepływów pieniężnych ma postać

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ e_n & a_{n-1}+e_n & b_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Ponadto macierz prawdopodobieństw przejść w chwili k jest następująca

$$\mathbf{Q}^*(k)=\begin{pmatrix} q_{11}(k) & q_{12}(k) & q_{13}(k) & 0 \\ q_{12}(k) & q_{22}(k) & q_{13}(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przykłady 1-2 opisują jedynie strumienie płatności związane ze świadczeniami ubezpieczeniowymi, ale $c_{X^*}(k)$ może również uwzględniać przepływy pieniężne związane ze składką ubezpieczeniową, co zostało pokazane w podpunkcie 4.2.

4.2. Składka ubezpieczeniowa netto

Zgodnie z zasadami matematyki aktuarialnej (por. [2; 3; 15]) składkę netto wyznacza się w taki sposób, aby spełniona była następująca równość:

$$\mathrm{E}(\text{sumy aktualnych wartości składek}) = \mathrm{E}(\text{sumy aktualnych wartości świadczeń}). \tag{30}$$

Równanie (30) jest najprostszą zasadą wyznaczania składki ubezpieczeniowej (jednorazowej lub okresowej) i jest nazywane równaniem wartości składek netto. Po skorzystaniu z wniosku 1 oraz równania (30) otrzymuje się, że jednorazowa składka netto π dla danej umowy ma następującą postać:

$$\pi \;=\; \mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}_b \mathbf{D}^T\right)\mathbf{S}, \tag{31}$$

gdzie $\mathbf{C}_b$ jest macierzą przepływów pieniężnych uwzględniającą jedynie świadczenia ubezpieczeniowe.

Z równania (30) oraz wniosku 1 można również wyznaczyć składkę o stałej wysokości płatną w sposób okresowy. Niech p oznacza wysokość okresowej składki netto płatnej z góry (np. na początku każdego miesiąca) przez pierwszych m okresów, na jakie został podzielony okres ubezpieczenia. Wtedy p wyznacza się z następującej równości

$$\mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}_{\mathrm{p,m}}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S} = \mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}_{\mathrm{b}}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S}, \tag{32}$$

gdzie macierz $\mathbf{C}_{\mathrm{p,m}}$ zawiera jedynie składki ubezpieczeniowe.

Jeśli założy się, że składki ubezpieczeniowe płacone są jedynie wtedy, gdy proces $\left\{X^*(t)\right\}$ jest w stanie 1, to otrzymuje się

$$c_1^*(k) = \begin{cases} p & \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ 0 & \text{dla} \quad k = m, m+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Wtedy, niezależnie od typu ubezpieczenia, macierz $\mathbf{C}_{\mathrm{p,m}}$ przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{p,m}} = \begin{pmatrix} p & 0 & \ldots & 0 \\ p & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie liczba kolumn z samymi zerami dla ubezpieczenia RUP jest równa 2, a dla ubezpieczenia na życie i dożycie + RUP jest równa 3. Lewą stronę równania (32) przekształcić można w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}_{\mathrm{p,m}}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S} &= p\mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}_{\mathrm{1,m}}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S} = \\ &= p\mathbf{V}^T diag\left(\left[p_1(0), p_1(1), \ldots, p_1(m-1), 0, \ldots, 0\right]^T\right)\mathbf{S} = \\ &= p\mathbf{V}^T\left[p_1(0), p_1(1), \ldots, p_1(m-1), 0, \ldots, 0\right]^T \end{aligned}$$

i ostatecznie mamy następującą równość

$$\mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}_{\mathrm{p,m}}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S} = p\mathbf{V}^T\left[\mathbf{I} - \sum_{k=m}^{n}\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\right]\mathbf{D}\mathbf{I}_1^*. \tag{33}$$

Po wstawieniu (33) do (32) otrzymuje się wzór na stałą składkę okresową netto

$$p = \frac{\mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}_{\mathrm{p,m}}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S}}{\mathbf{V}^T\left[\mathbf{I} - \sum_{k=m}^{n}\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\right]\mathbf{D}\mathbf{I}_1^*}. \tag{34}$$

Zauważmy, że mianownik we wzorze (34) odpowiada wartości aktuarialnej jednostkowej renty pewnej płatnej z góry.

W przykładzie 1 macierz $\mathbf{C}_b$ określona jest przez (28), a w przykładzie 2 – przez (29).

Równoważnym do równania wartości składek netto (30) sposobem wyznaczania składki jest zasada równoważności $\mathrm{E}(L) = 0$, gdzie L oznacza całkowitą stratę ubezpieczyciela definiowaną jako różnicę między wartością obecną przyszłych świadczeń a zaktualizowaną wartością przyszłych składek. Z finansowego punktu widzenia przepływy pieniężne $c_{X}.(k)$ mogą być wpłatą reprezentującą wpływ do funduszu lub wypłatą, która oznacza wypływ kwoty pieniężnej z funduszu. Ponieważ z punktu widzenia ubezpieczyciela L oznacza ewentualną stratę wynikającą z zawarcia umowy ubezpieczenia, wszystkie świadczenia są wartościami dodatnimi, gdyż powiększają stratę ubezpieczyciela. Natomiast składki zmniejszają wielkość L, więc są ujemnymi wartościami. Zgodnie z wnioskiem 1 zasadę równoważności dla polis wieloopcyjnych można określić w następujący sposób:

$$\mathbf{V}^T Diag\left(\mathbf{C}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{S} = 0, \tag{35}$$

gdzie macierz $\mathbf{C}$ jest określona na podstawie strumienia składek i świadczeń wynikających z warunków umowy ubezpieczenia. Wzór (35) może być wykorzystany do wyznaczenia składki zarówno jednorazowej, jak i okresowej.

Przykład 1 (kontynuacja)

Zakładamy, że składka jednorazowa π płacona jest z góry na początku okresu ubezpieczenia. Wtedy wysokość składki π należy tak określić, aby było spełnione równanie (35), w którym macierz $\mathbf{C}$ określona jest następująco:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Przykład 2 (kontynuacja)

Zakładamy, że składka ubezpieczeniowa w wysokości P płacona jest z góry przez cały okres ubezpieczenia. Wtedy wysokość składki P należy tak określić, aby spełnione było równanie (35), w którym macierz $\mathbf{C}$ określona jest następująco:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ -p & a_0 & b_1 & 0 \\ -p & a_1 & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -p & a_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ e_n & a_{n-1}+e_n & b_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Do innych sposobów wyznaczania jednorazowej składki netto należą zasada wariancji $\pi = \mathrm{E}(Z_b) + \alpha \mathbf{Var}(Z_b)$ oraz zasada odchylenia standardowego $\pi = \mathrm{E}(Z_b) + {}$ $+ \alpha\sqrt{\mathbf{Var}(Z_b)}$, gdzie Z_b oznacza zaktualizowaną wartość świadczeń, a α – pewną stałą. Ponadto $\mathbf{Var}(Z_b) = \mathrm{E}(Z_b^2) - \mathrm{E}^2(Z_b)$, a momenty zmiennej losowej Z_b liczone są na podstawie twierdzenia 1, przy założeniu, że $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}$.

Literatura

[1] Amsler M.H., *Sur la Modé lisation des Risques Vie par les Chaê nes de Markov*, Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, vol. 5, München 1968, s. 731-746.

[2] Bowers N.L., Gerber H.U., Hichmann J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Illinois 1986.

[3] Gerber H.U., Life Insurance Mathematics, Springer-Verlag, Zurich 1990.

[4] Haberman S., Pitacco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall/CRC 1999.

[5] Hoem J.M., *Markov Chain Models in Life Insurance*, vol. IX, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, 1969, s. 91-107.

[6] Hoem J.M., *Some Notes on the Qualifying Period in Disability Insurance, Part I: Actuarial Values*, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1969, s. 105-116.

[7] Hoem J.M., *Some Notes on the Qualifying Period in Disability Insurance. Part II: Problems of Maximum Likelihood Estimation*, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1969, s. 301-316.

[8] Hoem J.M., *The Versality of the Markov Chain as a Tool in the Mathematics of Life Insurance*, Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, vol. R, Helsinki 1988, s. 171-202.

[9] Janssen J., *Application des processus semi-markoviens à un problè me d'invalidité*, Bulletin de l'Association Royale de Actuaries Belges vol. 63, 1966, s. 35-52.

[10] Jones B.I., *Actuarial Calculation Using a Markov Model*, Transactions of the Society of Actuaries 1994, vol. XLVI, s. 227-250.

[11] *Metodologia pomiaru jakości życia*, red. W. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2000, s. 136-159.

[12] Norberg R., *Reserves in Life and Pension Insurance*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1991, vol. 74, nr 1, s. 1-22.

[13] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.L., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Willey & Sons, Chichester 1999.
[14] Seal H.L., *Probability Distributions Aggregate Sickness Duration*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1970, vol. 53, s. 193-204.
[15] *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, red. W. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2004.
[16] Waters H.R., *An Approach to the Study of Multiple State Models*, „Journal Institute of Actuaries" 1984, vol. 111, część II, nr 448, s. 363-374.
[17] Wolthuis H., *Actuarial Equivalence. Insurance*, „Mathematics and Economics" 1994, nr 15, s. 163-179.
[18] Wolthuis H., *Life Insurance Mathematics (The Markovian Model)*, CAIRE Education Series, nr 2, Bruxelles 1994.

A MATRIX REPRESENTATION OF MULTISTATE INSURANCE WITH NON-HOMOGENOUS MARKOV CHAIN

Summary

A model for the cash value of a stream of future payments arising from a multistate insurance contract is analyzed. A matrix form for formulas for the first two moments of the cash value of the stream of future payments is derived. The complete theory is illustrated by the analysis of unemployment insurance.