PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Anna Szymańska
Uniwersytet Łódzki

WPŁYW PARAMETRÓW ROZKŁADU LICZBY SZKÓD NA WSPÓŁCZYNNIKI *BONUS-MALUS* W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH OC

1. Wstęp

Podstawą działalności ubezpieczeniowej jest prawidłowe szacowanie składek ubezpieczeniowych. Składki powinny być tak oszacowane, aby towarzystwo nie ponosiło strat finansowych, a ubezpieczony nie płacił za dużo lub za mało.

Składka brutto to składka netto powiększona o dodatek bezpieczeństwa oraz o koszty działalności ubezpieczeniowej. W pracy podjęto próbę oceny wpływu parametrów rozkładu liczby szkód na wyznaczane za pomocą estymatorów bayesowskich współczynniki *bonus-malus*. Składkę wyznaczono metodą wartości oczekiwanej. Badanie przeprowadzono na podstawie danych rzeczywistych, pochodzących z łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego, danych rzeczywistych pochodzących z prac [2; 3] oraz na podstawie wygenerowanych prób.

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC klasyfikacja ubezpieczonych do grup taryfowych odbywa się na podstawie czynników *a priori* (obserwowalnych czynników ryzyka, takich jak np. rodzaj i rok produkcji samochodu, pojemność silnika, wiek i płeć kierowcy) oraz czynników *a posteriori* (historia szkodowości kierowcy). Dlatego składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC są wyznaczane w dwóch etapach. Pierwszy to obliczenie składki podstawowej na podstawie czynników *a priori*, drugi etap to taryfikacja *a posteriori* (por. [4]). W pracy skoncentrowano się na drugim etapie nazywanym systemem *bonus-malus*.

Systemem *bonus-malus* nazywa się metody wyznaczania indywidualnych składek, uwzględniające liczbę szkód spowodowanych przez kierowcę w przeszłości. W każdym systemie *bonus-malus* muszą być ustalone: klasa startowa, do której trafiają ubezpieczeni bez historii szkodowości; wektor stawek składki podstawowej oraz zasady przejść między klasami. Aby system mógł funkcjonować, portfel ubezpieczeń powinien być niejednorodny, czyli ubezpieczeni powinni charakteryzować się inną przeciętną liczbą szkód w przeszłości (por. [2]).

Roczna składka netto jest wyznaczana jako iloczyn składki podstawowej obowiązującej w klasie taryfowej (taryfikacja *a priori*) oraz współczynnika *bonus-malus*.

W pracy nie uwzględnia się dodatkowych zwyżek i zniżek, charakterystycznych dla poszczególnych ubezpieczycieli, np. za posiadanie innego ubezpieczenia w danym towarzystwie ubezpieczeniowym.

W ubezpieczeniach majątkowych składkę brutto oblicza się jako sumę trzech składników: składki netto, dodatku bezpieczeństwa i kosztów działalności ubezpieczeniowej. Pomijamy trzeci z tych składników. Składką brutto będziemy zatem nazywać składkę netto powiększoną o dodatek bezpieczeństwa.

2. Badanie jednorodności portfela

W ubezpieczeniach komunikacyjnych zakłada się, że liczba szkód K w jednorodnym portfelu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem intensywności szkód λ:

$$P(K=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad (k=0,1,2,...). \tag{1}$$

Jeżeli portfel jest niejednorodny, to parametr intensywności szkód ma najczęściej rozkład gamma z parametrami α i β, liczba szkód ma zaś rozkład ujemny dwumianowy z parametrami p i q (por. [2]), czyli rozkład o funkcji prawdopodobieństwa o postaci:

$$P(K=k)=\binom{q+k-1}{k}p^q(1-p)^k,\quad (k=0,1,2,...), \tag{2}$$

gdzie

$$q=\alpha \quad \text{i} \quad p=\beta/(1+\beta). \tag{3}$$

Badanie przeprowadzono na podstawie danych z łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego w odniesieniu do ubezpieczeń komunikacyjnych OC za rok 2000. Z całego portfela liczącego 31 734 polis wylosowano w sposób niezależny 15 867. Wylosowane polisy pogrupowano według wieku kierowcy i oznaczono I – kierowcy mający do 25 lat, II – kierowcy w wieku powyżej 25 lat. Dane przedstawia tab. 1.

Na podstawie danych z tab. 1 oszacowano parametr rozkładu Poissona przyjmując, że

$$\hat{\lambda}=\overline{k} \tag{4}$$

oraz parametry rozkładu ujemnego dwumianowego, przyjmując że

$$\hat{p} = \frac{\overline{k}}{s^2}, \tag{5}$$

$$\hat{q} = \frac{s^2 \hat{p}^2}{1 - \hat{p}}, \tag{6}$$

gdzie $\overline{k}$ jest wartością średniej z próby, s^2 – wariancją z próby. Estymatory uzyskano metodą momentów (por. [4]). Parametry rozkładu gamma wyznaczono ze wzoru (3).

Tabela 1. Struktura liczby szkód według grup portfela ubezpieczeń komunikacyjnych

Liczba szkód \ Grupa portfela	I	II
0	2 907	10 221
1	592	1 843
2	66	210
3	5	18
4	0	5
Suma	3 570	12 292

Źródło: badania własne.

Tabela 2. Charakterystyki rozkładu częstotliwości roszczeń

	Średnia liczba szkód	Wariancja liczby szkód	Parametry rozkładu ujemnego dwumianowego		Parametry rozkładu gamma	
			p	q	α	β
I	0,207	0,209	0,98	16,95	16,95	81,88
II	0,19	0,2	0,95	3,61	3,61	19

Źródło: obliczenia własne na podstawie tab. 1.

W celu oceny jednorodności grup portfela z tab. 1 zbadano, za pomocą testu chi-kwadrat (por. [1; 4]), zgodność rozkładu liczby roszczeń z rozkładem Poissona oraz z rozkładem ujemnym dwumianowym.

Na poziomie istotności 0,05 brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że rozkład liczby szkód w grupie I jest rozkładem Poissona ($\chi^2 = 0{,}5049$; $\chi^2_\alpha = 5{,}99$). Na poziomie istotności 0,05 odrzucamy hipotezę zerową, że rozkład liczby szkód w grupie I jest rozkładem ujemnym dwumianowym na korzyść hipotezy alternatywnej ($\chi^2 = 11{,}34$; $\chi^2_\alpha = 5{,}99$). W związku z tym można przyjąć, że rozkład liczby szkód w grupie I jest jednorodny.

Na poziomie istotności 0,05 odrzucamy hipotezę zerową, że rozkład liczby szkód w grupie II jest rozkładem Poissona na korzyść hipotezy alternatywnej (χ^2 = = 27,349; $\chi^2_\alpha = 5,99$). Na poziomie istotności 0,05 brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że rozkład liczby szkód w grupie II jest rozkładem ujemnym dwumianowym (χ^2 = 0,07; $\chi^2_\alpha = 5,99$). W związku z tym można przyjąć, że rozkład liczby szkód w grupie II jest niejednorodny.

3. Systemy *bonus-malus*

System *bonus-malus*, wyznaczony za pomocą analizy bayesowskiej, jest nazywany systemem optymalnym (por. [3]). W tak rozumianym systemie wyznacza się składkę *a priori*, a następnie uwzględnia się indywidualny parametr ryzyka. Do wyznaczania indywidualnych parametrów ryzyka wykorzystuje się estymatory bayesowskie (por. [1]).

Funkcjonowanie systemu ma sens, gdy portfel ubezpieczeń jest niejednorodny. W związku z tym w dalszych badaniach uwzględniono tylko grupę II z portfela przedstawionego w tab. 1. Tabela 3 przedstawia system *bonus-malus* badanego towarzystwa ubezpieczeniowego. System ten zawiera 11 klas. Klasa 4 jest klasą startową. Tabela 4 opisuje zasady przejść między klasami.

Tabela 3. Zwyżki i zniżki ubezpieczeń OC komunikacyjnych według klas

Klasa	% składki podstawowej	Klasa	% składki podstawowej	Klasa	% składki podstawowej
1	200			9	50
2	150			10	50
3	125			11	40
4	100				
5	90	7	70		
6	80	8	60		

Źródło: dane uzyskane z badanego towarzystwa ubezpieczeniowego.

Tabela 4. Numer klasy, do której trafia ubezpieczony, w zależności od liczby szkód w okresie poprzednim

Klasa \ Liczba szkód	0	1	2	3 lub więcej	Klasa \ Liczba szkód	0	1	2	3 lub więcej
1	4	1	1	1	7	8	5	3	1
2	4	1	1	1	8	9	6	4	2
3	4	1	1	1	9	10	7	5	3
4	5	2	1	1	10	11	8	6	4
5	6	3	2	1	11	11	9	7	5
6	7	4	3	1					

Źródło: jak w tab. 3.

Niech K_j będzie zmienną losową oznaczającą liczbę szkód w roku j dla danej polisy; $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ – wektorem obserwacji liczby szkód przez t lat dla danej polisy; $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, ..., k_t)$ będzie nieznanym parametrem szkodowości w roku $t+1$ dla polisy opisanej wektorem obserwacji $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$. Parametr λ jest realizacją zmiennej losowej Λ o dystrybuancie $U(\lambda)$. Nieznany parametr $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, ..., k_t)$ oszacowano za pomocą estymatora bayesowskiego na podstawie wektora obserwacji $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$.

Zakładamy, że rozkład liczby szkód w tym portfelu jest ujemny dwumianowy i jest określony wzorem (2). Parametr intensywności szkód Λ ma rozkład *a priori* gamma z parametrami α i β. Zatem rozkład *a posteriori* parametru jest rozkładem gamma z parametrami $\hat{\alpha} = \alpha + k$ oraz $\hat{\beta} = \beta + t$. Estymator bayesowski parametru Λ jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* i ma postać

$$\lambda_{t+1}(k_1, ..., k_t) = E_\lambda[\Lambda | k_1, \ldots, k_t] = \int_0^\infty \lambda dU(\lambda | k_1, \ldots, k_t) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{\alpha + k}{\beta + t}, \tag{7}$$

gdzie $E_\lambda[\Lambda | k_1, \ldots, k_t]$ jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu a *posteriori* parametru Λ, $U(\lambda | k_1, \ldots, k_t)$ jest dystrybuantą warunkową zmiennej losowej Λ przy zaobserwowanych wartościach $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$.

Najprostszą zasadą kalkulacji składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych jest zasada wartości oczekiwanej. Według tej zasady szacowana indywidualna składka netto, powiększona o dodatek bezpieczeństwa θ, wynosi

$$P_{t+1}(k_1, ..., k_t) = (1+\theta) E_\lambda[\Lambda | k_1, \ldots, k_t] = (1+\theta)\frac{\alpha + k}{\beta + t}. \tag{8}$$

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC indywidualna składka wynosi:

$$P_{t+1}(k_1, ..., k_t) = (EX) \cdot (E\Lambda) \cdot b_{t+1}(k_1, ..., k_t), \tag{9}$$

gdzie $P_{t+1}(k_1, ..., k_t)$ – indywidualna składka netto, (EX) – przeciętna wielkość pojedynczej szkody, $(E\Lambda)$ – przeciętna liczba szkód, $b_{t+1}(k_1, ..., k_t)$ – współczynnik *bonus-malus*.

Przyjmijmy, że $(EX) = 1$ oraz $(E\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta}$. Wówczas równanie (9) ma postać

$$P_{t+1}(k_1, ..., k_t) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot b_{t+1}(k_1, ..., k_t). \tag{10}$$

Ponieważ celem badania jest oszacowanie, ile procent składki podstawowej powinien płacić kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, na podstawie równań (8) i (10) stawka szacowanej składki w systemie *bonus-malus* wynosi

$$b_{t+1}(k_1,\dots,k_t)=\left(1+\theta\right)\frac{\beta(\alpha+k)}{\alpha(\beta+t)}\cdot 100\%. \tag{11}$$

Jeśli przyjmiemy, że $\theta = 0$, to współczynnik *bonus-malus* wynosi

$$b_{t+1}(k_1,\dots,k_t)=\frac{\beta(\alpha+k)}{\alpha(\beta+t)}\cdot 100\%. \tag{12}$$

4. Zastosowania

Dla grupy II portfela ubezpieczeń z tab. 1 oszacowano współczynniki *bonus-malus* za pomocą wzoru (12). Wyniki zawiera tab. 6.

Tabela 5. Współczynniki *bonus-malus*

Liczba szkód k / Nr roku t	0	1	2	3	4 i więcej
0	100				
1	90	150	200	200	200
2	80	125	150	200	200
3	70	100	125	200	200
4	60	90	125	200	200
5	50	80	100	150	150
6	50	60	80	100	100
7	40	50	70	90	90

Źródło: badania własne na podstawie danych towarzystwa ubezpieczeniowego.

Tabela 6. Porównanie współczynników *bonus-malus* oszacowanych (E) oraz stosowanych w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU); $\left(\left(q=\alpha=3{,}61;\ p=0{,}96;\ \beta=19\right)\right.$; próba 12 292 polis; $\bar{k}=0{,}19$; $S^2=0{,}20$)

Liczba szkód k / Nr roku t	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	95	90	121	150	148	200	148	200
2	90	80	116	125	141	150	141	200
3	86	70	110	100	134	125	134	200
4	83	60	105	90	128	125	128	200
5	79	50	101	80	123	100	123	150
6	76	50	97	60	118	80	118	100
7	73	40	93	50	114	70	113	90

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z tab. 5

Tabela 7. Porównanie współczynników *bonus-malus* oszacowanych (E) oraz stosowanych w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU);
($q = \alpha = 1,6$; $p = 0,94$; $\beta = 15,88$; próba 106 974 polis; $\bar{k} = 0,10$; $S^2 = 0,11$)

Liczba szkód k / Nr roku t	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	94	90	153	150	211	200	270	200
2	89	80	144	125	199	150	255	200
3	84	70	137	100	189	125	241	200
4	80	60	130	90	179	125	229	200
5	76	50	123	80	171	100	218	150
6	73	50	118	60	163	80	208	100
7	69	40	113	50	156	70	199	90

Źródło: na podstawie danych zawartych w pracy [4].

Tabela 8. Porównanie współczynników *bonus-malus* oszacowanych (E) oraz stosowanych w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU);
($q = \alpha = 3,5$; $p = 0,97$; $\beta = 28,47$; próba 100 000 polis; $\bar{k} = 0,12$; $S^2 = 0,13$)

Liczba szkód k / Nr roku t	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	97	90	124	150	152	200	179	200
2	93	80	120	125	147	150	174	200
3	90	70	116	100	142	125	168	200
4	88	60	113	90	138	125	163	200
5	85	50	109	80	134	100	158	150
6	83	50	106	60	130	80	153	100
7	80	40	103	50	126	70	149	90

Źródło: na podstawie danych zawartych w pracy [3].

W celu zbadania wpływu parametrów rozkładu liczby szkód na wielkości estymowanych współczynników *bonus-malus* wygenerowano cztery 10 000 próby z rozkładów ujemnych dwumianowych o różnych parametrach.

Tabela 9. Porównanie współczynników *bonus-malus* oszacowanych (E) oraz stosowanych w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU);
($q = \alpha = 6$; $p = 0,6$; $\beta = 1,505$; próba 10 000 polis, $\bar{k} = 4,0236$; $S^2 = 6,6969$)

Liczba szkód k / Nr roku t	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	60	90	70	150	80	200	90	200
2	43	80	50	125	57	150	64	200
3	33	70	39	100	45	125	50	200
4	27	60	32	90	36	125	41	200
5	23	50	27	80	31	100	35	150
6	20	50	23	60	27	80	30	100
7	18	40	21	50	24	70	27	90

Źródło: opracowanie na podstawie badań symulacyjnych.

Tabela 10. Porównanie współczynników *bonus-malus* oszacowanych (E) oraz stosowanych w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU); ($q = \alpha = 6$; $p = 0,5$; $\beta = 0,946$; próba 10 000 polis, $\bar{k} = 6,0164$; $S^2 = 12,3790$)

Liczba szkód k / Nr roku t	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	49	90	57	150	65	200	73	200
2	32	80	37	125	43	150	48	200
3	24	70	28	100	32	125	36	200
4	19	60	22	90	26	125	29	200
5	16	50	19	80	21	100	24	150
6	14	50	16	60	18	80	20	100
7	12	40	14	50	16	70	18	90

Źródło: opracowanie na podstawie badań symulacyjnych.

Tabela 11. Porównanie współczynników *bonus-malus* oszacowanych (E) oraz stosowanych w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU); ($q = \alpha = 6$; $p = 0,4$; $\beta = 0,681$; próba 10 000 polis, $\bar{k} = 8,9553$; $S^2 = 22,1137$)

Liczba szkód k / Nr roku t	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	41	90	47	150	54	200	61	200
2	25	80	30	125	34	150	38	200
3	19	70	22	100	25	125	28	200
4	15	60	17	90	19	125	22	200
5	12	50	14	80	16	100	18	150
6	10	50	12	60	14	80	15	100
7	9	40	10	50	12	70	13	90

Źródło: opracowanie na podstawie badań symulacyjnych.

Tabela 12. Porównanie współczynników *bonus-malus* oszacowanych (E) oraz stosowanych w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU); ($q = \alpha = 6$; $p = 0,3$; $\beta = 0,424$; próba 10 000 polis, $\bar{k} = 14,0318$; $S^2 = 47,1629$)

Liczba szkód k / Nr roku t	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	30	90	35	150	40	200	45	200
2	17	80	20	125	23	150	26	200
3	12	70	14	100	17	125	19	200
4	10	60	11	90	13	125	14	200
5	8	50	9	80	10	100	12	150
6	7	50	8	60	9	80	10	100
7	6	40	7	50	8	70	9	90

Źródło: opracowanie na podstawie badań symulacyjnych.

Tabela 13. Średniokwadratowy błąd szacunku w zależności od parametrów rozkładu liczby szkód

Parametry rozkładu		Błąd średniokwadratowy	Parametry rozkładu		Błąd średniokwadratowy
q	p		p	q	
3,61	0,95	1,49	6	0,5	4,86
1,6	0,94	0,93	6	0,4	5,20
3,5	0,97	0,59	6	0,3	5,59
6	0,6	4,32			

Źródło: obliczenia własne.

5. Wnioski

Szacowane współczynniki *bonus-malus* (tab. 6) różnią się znacznie w niektórych klasach od współczynników danego towarzystwa ubezpieczeniowego (tab. 5), co oznacza, że system nie ocenia kierowców w sposób prawidłowy.

Patrząc zarówno na dane rzeczywiste, jak i parametry wygenerowanych rozkładów, można zauważyć, że współczynniki *bonus-malus* zależą od parametrów rozkładu liczby szkód. Parametry ryzyka powinny być zatem inne dla różnych grup portfela i powinny być modyfikowane co pewien okres.

W celu oceny wpływu parametrów rozkładu liczby szkód na wielkość współczynników *bonus-malus* porównano współczynniki szacowane w odniesieniu do różnych rozkładów ze współczynnikami badanego towarzystwa ubezpieczeniowego (tab. 14). Błąd średniokwadratowy jest najmniejszy dla rozkładu liczby szkód o parametrach $q = 3{,}5$; $p = 0{,}97$, największy – jeżeli parametry wynoszą: $q = 6$; $p = 0{,}3$.

Literatura

[1] Domański C., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.

[2] Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B., *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambridge 1999.

[3] Lemaire J. , *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

[4] *Metody statystyczne*, red. C. Domański, Wydawnictwo UŁ, Łódź 2001.

THE INFLUENCE OF CLAIM DISTRIBUTION PARAMETERS ON BONUS-MALUS COEFFICIENTS IN CR CAR INSURANCE

Summary

In CR car insurance premium is determined in a two stage process. The first stage is the basic premium calculation based on prior factors. The second stage is the posterior classification called the bonus-malus system.

In the paper the influence of a number of parameters of claims distribution on the size of the bonus-malus coefficients is investigated.