PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 — 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Stanisław Wieteska
Uniwersytet Łódzki

ZASTOSOWANIE ROZKŁADU PARETO W KALKULACJI SKŁADKI REASEKURACJI NIEPROPORCJONALNEJ – NADWYŻKI SZKÓD

1. Wstęp

W przypadku ryzyka katastrofalnego najczęściej ma zastosowanie reasekuracja nieproporcjonalna. Duże szkody występują nieregularnie i stosunkowo rzadko, stanowią jednak duże zagrożenie dla gospodarki finansowej zarówno cedenta, jak i reasekuratora. To utrudnia badanie m.in. częstości ich występowania oraz wysokości szkody na podstawie obserwacji danych z przeszłości. Opieranie się głównie na obserwacji szkód, które wystąpiły w przeszłości, w odniesieniu do szkód katastrofalnych może prowadzić do błędnych wniosków. Nie jest to metoda wiarygodna i godna zaufania. Do ustalenia warstw, które ma pokryć w danej szkodzie katastrofalnej reasekurator, ma on tylko możliwość wykorzystania wiedzy o nielicznych lub podobnych przypadkach występujących w przeszłości. Model Pareto, podobnie jak inne modele statystyczne, stanowi uogólnienie i uproszczenie rzeczywistych wartości i ze względu na tę właściwość ma zastosowanie w szacowaniu wielu wartości w reasekuracji nieproporcjonalnej – przede wszystkim w umowach reasekuracji nadwyżki szkód (tzw. XL).

2. Charakterystyka rozkładu Pareto

Należy najpierw podać podstawowe cechy charakteryzujące dany rozkład statystyczny. Zatem zmienna losowa X (określająca wysokość szkody) ma rozkład Pareto wówczas, gdy jest opisana przez następującą funkcję gęstości:

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \tag{1}$$

gdzie: $x > 0$, $\alpha > 0$ i $\lambda > 0$.

Parametr α to parametr Pareto, natomiast parametr λ to stała, powyżej której rozważane są wartości zmiennych losowych[1]. Na podstawie funkcji prawdopodobieństwa można wnioskować, że im większa jest wartość powstałej szkody, tym mniejsze jest prawdopodobieństwo jej zajścia.

Parametr α może być wyznaczony za pomocą wzoru:

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{\lambda}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n \cdot \ln \lambda}, \tag{2}$$

gdzie: n – liczba szkód przekraczających wartość λ,
x_i – wartość i-tej szkody.

Oszacowana w ten sposób wartość parametru Pareto nazywana jest najbardziej prawdopodobnym oszacowaniem (*maximum likelihood estimation*). Wartość omawianego parametru przyjmuje różne wartości w zależności od rodzaju szkód[2], przy czym na podstawie obserwacji można dostrzec zależność, że im większa „dotkliwość" szkód, tym bliższy zeru jest parametr α. Wartości parametru Pareto dla przykładowych rodzajów ryzyka przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Przykładowe wielkości parametru Pareto α dla różnych rodzajów ryzyka

Wartość parametru Paretto	Ryzyko
$\alpha = 0,6$	trzęsienie ziemi
$\alpha = 0,8$	sztorm, grad
$\alpha = 1,2$	ryzyko ogólne
$\alpha = 1,4$	ryzyko zwyczajne (domy, mieszkania)
$\alpha = 1,6$	ryzyko handlowe (małe i średnie)
$\alpha = 1,8$	ryzyko przemysłowe (średnie)
$\alpha = 2,0$	ryzyko przemysłowe (duże)
$\alpha = 1,8 \div 2,0$	OC komunikacyjne (dla niskich layerów)
$\alpha = 2,0 \div 3,0$	OC komunikacyjne (dla wysokich layerów)

Źródło: [1].

Ważnymi miarami statystycznymi charakteryzującymi rozkład są wartość oczekiwana oraz wariancja. Wartość oczekiwana, którą można określić jako „przeciętną" wartość zmiennej losowej, określona jest wzorem:

$$\mathrm{E}(x) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \text{jeśli } \alpha > 1. \tag{3}$$

[1] Stała λ musi być mniejsza od priorytetu, czyli górnej granicy odpowiedzialności cedenta w szkodzie.

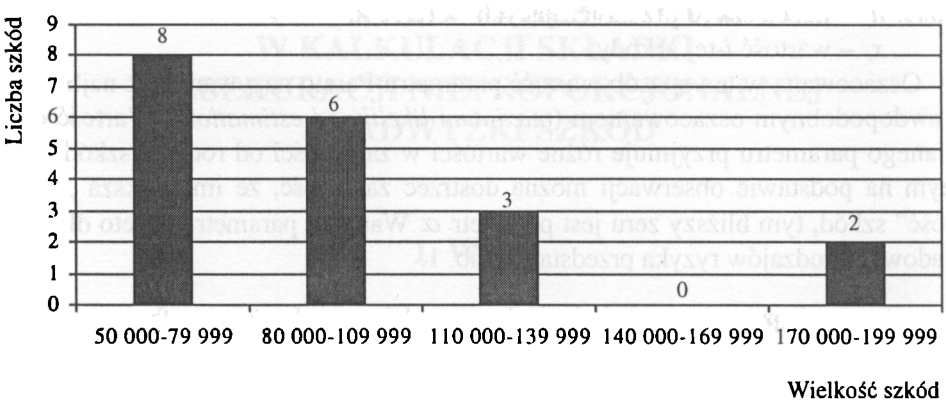
[2] Na przykład dla szkód ogniowych waha się między 1 i 2, dla szkód katastrofalnych (wichury, trzęsienia ziemi itp.) oscyluje wokół 1, ale może być też znacznie niższa (pomiędzy 0 i 1).

Wariancja opisuje stopień rozproszenia zmiennych losowych od wartości oczekiwanej i jest wyznaczona za pomocą równania:

$$Var(X) = \frac{\alpha \cdot \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 \cdot (\alpha - 2)}, \quad \text{jeśli } \alpha > 2. \tag{4}$$

Dla $\alpha \leq 1$ wartość oczekiwana jest nieskończona. Dla $\alpha \leq 2$ wariancja nie istnieje [2, s. 142].

W celu dalszej analizy rozważmy rozkład wysokości dużych szkód. Graficznie przedstawia to rys. 1.



Rys. 1. Rozkład szkód z trzech lat – rozpiętość przedziałów klasowych: 30 000

Źródło: opracowanie własne.

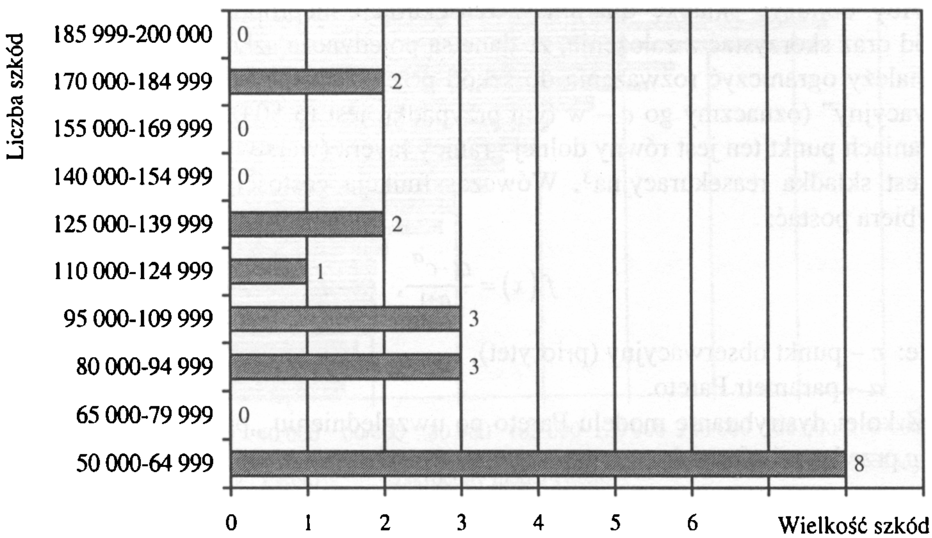
Rozpiętość przedziałów można ustalać dowolnie według potrzeb, np. co 15 000. Wówczas rozkład szkód przedstawia się następująco:

Tabela 2. Szkody rozmieszczone w przedziałach klasowych – rozpiętość przedziałów klasowych: 15 000

Przedział	Liczba szkód	Przedział	Liczba szkód
50 000÷64 999	8	125 000÷139 999	2
65 000÷79 999	0	140 000÷154 999	0
80 000÷94 999	3	155 000÷169 999	0
95 000÷109 999	3	170 000÷184 999	2
110 000÷124 999	1	185 000÷200 000	0

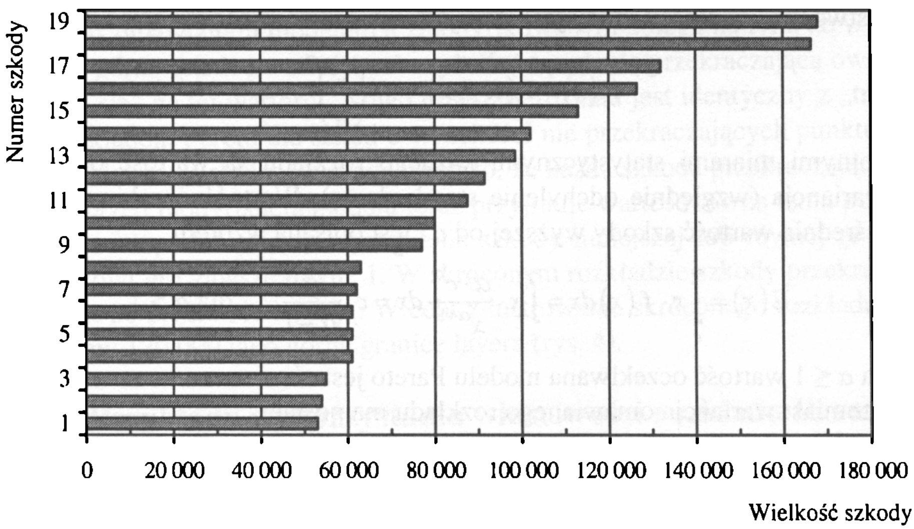
Źródło: opracowanie własne.

Istnieje lepsza – wykluczająca dowolność wyboru rozpiętości przedziału klasowego – metoda prezentacji danych. Polega ona na uporządkowaniu szkód według wielkości, w kolejności od najmniejszej do największej (tzn. narastająco). Graficznie przedstawia to rys. 3.



Rys. 2. Rozkład szkód z trzech lat – rozpiętość przedziałów klasowych: 15 000

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Rozkład szkód w porządku narastającym

Źródło: opracowanie własne.

Z tak przedstawionego wykresu można odczytać, ile szkód wystąpiło danej wielkości lub jej nie przekraczających. Przykładowo – 13 szkód (co stanowi 68,42% wszystkich szkód) przyjęło wartość do 100 000.

Aby obliczyć składkę dla umów reasekuracji nieproporcjonalnej nadwyżki szkód oraz skorzystać z założenia, że dane są pojedyncze szkody z pewnego okresu, należy ograniczyć rozważania do szkód przewyższających pewien „punkt obserwacyjny" (oznaczmy go c – w tym przypadku jest to 50 000). W naszych rozważaniach punkt ten jest równy dolnej granicy layera (warstwy), dla którego liczona jest składka reasekuracyjna[3]. Wówczas funkcja gęstości dla rozkładu szkód przybiera postać:

$$f(x)=\frac{\alpha\cdot c^{\alpha}}{c^{\alpha+1}}, \tag{5}$$

gdzie: c – punkt obserwacyjny (priorytet),
α – parametr Pareto.

Z kolei dystrybuantę modelu Pareto po uwzględnieniu „punktu obserwacyjnego" c przedstawia formuła:

$$F(x)=\int_{c}^{\infty}\frac{\alpha\cdot c^{\alpha}}{y^{\alpha+1}}dy=1-\left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha}. \tag{6}$$

Interpretacja dystrybuanty sprowadza się do tego, że wyraża ona prawdopodobieństwo, że wartość szkody X nie przekroczy wartości x. Zatem jest to prawdopodobieństwo, że wielkość szkody jest mniejsza lub równa x. Można więc zapisać:

$$F(x)=\mathrm{P}(X\le x)=1-\left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha}. \tag{7}$$

Istotnymi miarami statystycznymi każdego rozkładu są wartość oczekiwana oraz wariancja (względnie odchylenie standardowe). Wartość oczekiwana przedstawia średnią wartość szkody wyższej od c i jest opisana wzorem:

$$\mathrm{E}(x)=\int_{c}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{c}^{\infty}x\cdot\frac{\alpha\cdot c^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}dx=c\cdot\frac{\alpha}{\alpha-1},\qquad \text{dla } \alpha>1. \tag{8}$$

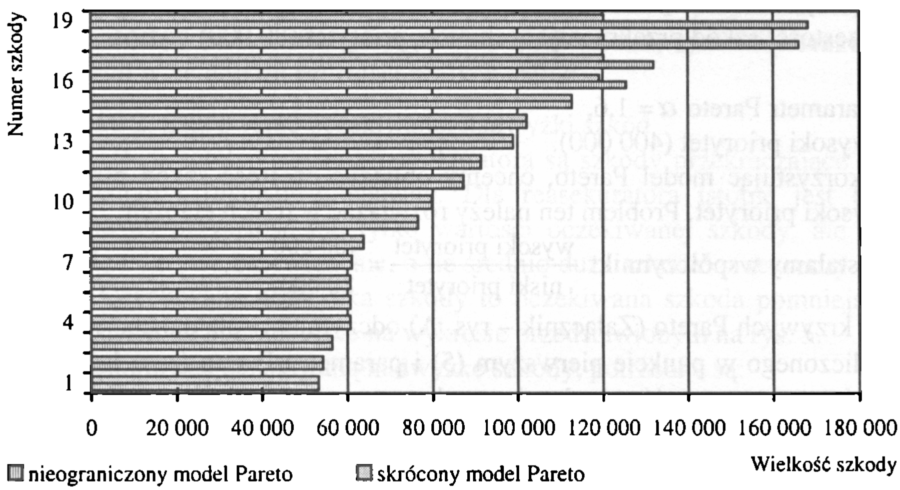
Dla $\alpha\le 1$ wartość oczekiwana modelu Pareto jest nieoznaczona.

Natomiast wariancja omawianego rozkładu ma postać:

$$Var(X)=\frac{c^{2}\cdot\alpha}{(\alpha-1)^{2}\cdot(\alpha-2)},\qquad \text{jeśli } \alpha>2. \tag{9}$$

W praktyce wykorzystuje się odchylenie standardowe liczone jako pierwiastek kwadratowy z wariancji. Miara ta wskazuje, o ile średnio różnią się rozmiary szkód od średniej szkody liczonej jako wartość oczekiwana.

[3] Oznacza to, że „punkt obserwacyjny" c to priorytet, powyżej którego rozpoczyna się odpowiedzialność reasekuratora w wypłacie odszkodowania.



Rys. 4. Nieograniczony i skrócony model Pareto

Źródło: opracowanie własne.

Warto przyjrzeć się także skróconemu rozkładowi Pareto. Różnica pomiędzy dotychczas omawianym modelem a zmodyfikowanym polega na tym, że w drugim ustala się górną granicę wartości szkody[4]. Każdą szkodę przekraczającą ową granicę „ucina się” na tej wartości. Nowo powstały rozkład jest identyczny z „tradycyjnym” rozkładem Pareto dla szkód o wysokości nie przekraczających punktu obcięcia. Konsekwencją skrócenia modelu jest to, że każda szkoda przekraczająca punkt obcięcia przed modyfikacją modelu teraz przyjmuje wartość równą temu punktowi. Zatem prawdopodobieństwo wystąpienia szkody mniejszej lub równej granicznemu punktowi jest zawsze równe 1. W skróconym rozkładzie szkody przekraczające taki punkt po prostu nie istnieją. W celu zilustrowania skróconego rozkładu Pareto przyjmijmy 120 000 jako górną granicę layera (rys. 4).

3. Przykłady wykorzystania właściwości rozkładu Pareto w praktyce ubezpieczeniowej

Przykład 1. Szacowanie częstości szkód powyżej wysokiego priorytetu

W przypadku dużych szkód jest mała historia szkodowości. Brakuje doświadczenia z przeszłości. Dlatego częstość ich występowania oblicza się na podstawie dostępnych informacji, tzn. znając częstość występowania mniejszych szkód.

---

[4] Jako górną granicę wysokości szkody w zmodyfikowanym rozkładzie Pareto ustala się górną, graniczną wartość layera, dla którego obliczana jest składka reasekuracyjna.

Załóżmy, że dane są:

1) częstość[5] szkód przekraczających niski priorytet (80 000) wynosi 2,5 szkody rocznie,

2) parametr Pareto $\alpha = 1,6$,

3) wysoki priorytet (400 000).

Wykorzystując model Pareto, chcemy obliczyć częstość szkód przekraczających wysoki priorytet. Problem ten należy rozwiązać w trzech etapach:

1) ustalamy współczynnik: $\frac{\text{wysoki priorytet}}{\text{niski priorytet}} = \frac{400\,000}{80\,000} = 5$,

2) z krzywych Pareto (Załącznik – rys. A) odczytujemy dla danego współczynnika obliczonego w punkcie pierwszym (5) i parametru Pareto ($\alpha = 1,6$) prawdopodobieństwo, że wartość szkody nie przekroczy wysokiego priorytetu (400 000); odczytana wartość to 0,92; stąd prawdopodobieństwo, że wartość szkody przekroczy wysoki priorytet wynosi $1 - 0,92 = 0,08$,

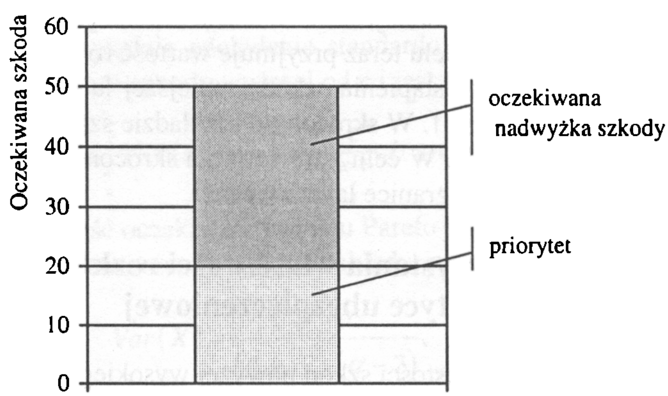
3) częstość szkód powyżej wysokiego priorytetu (zatem szukana częstość) jest iloczynem następujących wartości:

– częstości szkód powyżej niskiego priorytetu,

– prawdopodobieństwa, że wartość szkody przekroczy wysoki priorytet;

stąd: $2,5 \cdot 0,08 = 0,2$.

Na podstawie danych informacji można się spodziewać, że szkody przekraczające wysoki priorytet wystąpią z częstością 0,2. Oznacza to, że taka szkoda zajdzie przeciętnie jeden raz na pięć lat.



Rys. 5. Oczekiwana nadwyżka szkody

Źródło: opracowanie własne.

---

[5] Przez częstość szkód rozumiemy przeciętną liczbę szkód, które zaszły w ciągu jednego okresu (najczęściej roku).

Obserwując krzywe Pareto, które zostały zastosowane w przykładzie 1, można dojść do wniosku, że: **im mniejszy parametr Pareto α, tym większa częstość dużych szkód w relacji do częstości małych szkód.**

Przykład 2. Szacowanie oczekiwanej nadwyżki szkód

Przedmiotem zainteresowania reasekuratora są szkody przekraczające poziom odpowiedzialności finansowej cedenta. Dla reasekuratora istotne jest bowiem oszacowanie na przyszłość nie tylko wartości oczekiwanej szkody, ale jeszcze większą rolę odgrywa przewidzenie, o ile średnio duża szkoda[6] przekroczy poziom priorytetu. Oczekiwana nadwyżka szkody to oczekiwana szkoda pomniejszona o priorytet. Zostało to zobrazowane na wykresie przedstawionym na rys. 5.

Aby skalkulować oczekiwaną nadwyżkę szkody, potrzebne są:

1) parametr Pareto α,

2) priorytet,

3) przedział wielkości szkód, za które odpowiada reasekurator (pokrycie reasekuratora, tzw. layer, warstwa reasekuracyjna).

Do obliczeń wykorzystuje się krzywą (Załącznik – rys. B) będącą wykresem następującej funkcji:

$$f\left(\frac{\text{priorytet} + \text{pokrycie reasekuratora}}{\text{priorytet}}\right) = \frac{\text{oczekiwana nadwyżka szkody}}{\text{pokrycie cedenta}}. \qquad (10)$$

Przykład 3

Dane:

1) parametr Pareto $\alpha = 1{,}4$,

2) priorytet = 80 000,

3) pokrycie reasekuratora = 160 000.

Oczekiwaną nadwyżkę szkody znajdujemy w trzech krokach:

1) wyznaczamy współczynnik:

$$\frac{\text{priorytet} + \text{pokrycie reasekuratora}}{\text{priorytet}} = \frac{80\,000 + 160\,000}{80\,000} = 3,$$

2) dla obliczonego argumentu 3 i dla danego parametru α odczytujemy wartość funkcji (wartość na pionowej osi): 0,44,

3) oczekiwana nadwyżka szkód jest iloczynem layera (czyli pokrycia reasekuracyjnego) oraz odczytanej wartości.

Zatem oczekiwana nadwyżka szkody = layer · wartość na pionowej osi = = 160 000 · 0,44 = 70 400.

[6] Duża szkoda, tzn. będąca przedmiotem umowy reasekuracji XL, a więc taka, w razie wystąpienia której reasekurator bierze udział w wypłacie odszkodowania.

Przykład 4. Szacowanie obciążenia związanego z oczekiwaną nadwyżką szkód

Wykorzystując umiejętność wyznaczania oczekiwanej częstości szkód podlegających reasekuracji oraz o jaką kwotę średnio przewyższą one priorytet w razie zajścia takiego zdarzenia, jesteśmy w stanie oszacować, jakie koszty (odpowiedzialność, ciężar) poniesie w danym okresie reasekurator (*risk premium* lub *the expected excess loss burden*). Skalę odpowiedzialności cesjonariusza uzyska się poprzez przemnożenie wielkości ustalonych w przykładzie 1 i w przykładzie 2:

$$\boxed{\text{odpowiedzialność reasekuratora}} = \boxed{\text{częstość szkody powyżej wysokiego priorytetu}} \quad \boxed{\text{oczekiwana nadwyżka szkody}}$$

Aby zilustrować omawiany przykład załóżmy, że:

1) parametr $\alpha = 1{,}5$,

2) częstość szkód przekraczających niski priorytet 100 000 wynosi 4,5,

3) umowie reasekuracyjnej podlegają szkody przekraczające 500 000 oraz zakres odpowiedzialności reasekuratora to layer stanowiący 500 000 (czyli szkody 500 000 xs 500 000).

Jakiego obciążenia na dany okres ubezpieczeniowy powinien spodziewać się reasekurator przy danych założeniach?

Należy oszacować oba elementy iloczynu:

1. Zgodnie z wytycznymi przedstawionymi w przykładzie 1 ustalamy, z jaką częstością spodziewamy się wystąpienia szkód przekraczających wysoki priorytet:

1.1. Ustalamy współczynnik:

$$\frac{\text{wysoki priorytet}}{\text{niski priorytet}} = \frac{500\,000}{100\,000} = 5,$$

1.2. Odczytujemy z krzywych Pareto dla danego parametru $\alpha = 1{,}5$ i przy współczynniku 5 (obliczonym w punkcie 1.1), że prawdopodobieństwo wystąpienia szkody nie przekraczającej 500 000 wynosi 0,91. Zatem prawdopodobieństwo wystąpienia szkody przekraczającej wysoki priorytet stanowi $1 - 0{,}91 = 0{,}09$.

1.3. Częstość szkód przekraczających 500.000 (wysoki priorytet) to $0{,}09 \cdot 4{,}5 = 0{,}405$.

2. Postępując według wskazówek podanych w przykładzie 2, szacujemy oczekiwaną nadwyżkę szkody:

2.1. Wyznaczamy współczynnik:

$$\frac{\text{priorytet + pokrycie reasekuratora}}{\text{priorytet}} = \frac{500\,000 + 500\,000}{500\,000} = 2.$$

2.2. Z odpowiednich krzywych Pareto odczytujemy na pionowej osi wartość (dla danego parametru α i obliczonego w punkcie 2.1. współczynnika): 0,59.

2.3. Zatem oczekujemy następującej nadwyżki szkody: $500\,000 \cdot 0{,}59 = 295\,000$.

3. Wyznaczamy spodziewane na okres umowy finansowe obciążenie reasekuracyjne: $0{,}405 \cdot 295\,000 = 119\,475$.

Oznacza to, że przy danych założeniach reasekurator powinien się spodziewać poniesienia kosztów w wysokości 119 475 przez cały okres trwania umowy. Są to koszty oczekiwane w związku z ocenioną częstością występowania szkód będących przedmiotem porozumienia (0,405 szkody rocznie) oraz ocenioną nadwyżką szkody, jeśli taka zajdzie. Jednak w praktyce ubezpieczeniowej obciążenie to nie jest faktyczną składką reasekuracyjną, którą powinien zapłacić cedent za udzielaną mu ochronę. Dzieje się tak m.in. dlatego, że w ten sposób oszacowane obciążenie nie uwzględnia kilku czynników. Jednym z nich jest niewiedza o czasie wystąpienia dużej szkody, w związku z czym reasekurator musi dysponować przez cały okres trwania umowy wolną pulą środków na wypadek powstania jego odpowiedzialności. Rzeczywiste koszty[7], które ponosi reasekurator (i nimi będzie obciążał ubezpieczyciela w składce), zawierają dwa podstawowe elementy:

1) kompensatę za konieczność zachowania do ciągłej dyspozycji ogromnych funduszy, wynikającą z nieregularności (i co za tym idzie niepewności) zdarzeń, ta część kosztów określana jest jako ładunek wahań lub ładunek zmienności (*fluctuation loading*).

2) kompensatę za koszty związane z obsługą umowy reasekuracyjnej, czyli wszelkie dodatkowe wydatki.

Ładunek zmienności odgrywa bardzo ważną rolę dla reasekuratora, bowiem zabezpiecza go przed utratą funduszy mogącą wynikać z niedokładnej bądź błędnej estymacji parametru Pareto oraz częstości. Ten temat wymaga jednak odrębnego opracowania.

4. Podsumowanie i wnioski

Aktualnie zakłady ubezpieczeń zmierzają w kierunku stosowania reasekuracji nieproporcjonalnej. Wynika to z faktu, że zakład ubezpieczeń oceniany jest na podstawie rezerw brutto i spełniona jest nierówność, że rezerwy brutto muszą być mniejsze od aktywów. Powstaje problem kalkulacji składki dla reasekuracji nieproporcjonalnej. Jednym z głównych sposobów jest zastosowanie rozkładu Pareto.

Z opracowania wynikają następujące wnioski:

1. Rozkład Pareto jest powszechnie stosowany w krajach zachodnich, gdzie mamy do czynienia z dużymi szkodami o wymiarze katastrofalnym. W warunkach polskich ma to miejsce zdecydowanie rzadziej.

2. Na podstawie modelu Pareto można obliczyć składkę reasekuracyjną, częstość zachodzenia szkód przekraczających priorytet oraz obciążenie finansowe reasekuratora na okres zawierania umowy.

3. Rozkład Pareto ma zastosowanie w umowach reasekuracji nieproporcjonalnej nadwyżki szkód, konieczne są badania w przypadku umów reasekuracji nieproporcjonalnej nadwyżki szkodowości.

[7] W odróżnieniu od kosztów obliczanych w przykładzie 3.

4. Występują trudności w ustaleniu parametru Pareto. W opracowaniu nie udało się określić go jednoznacznie. W Polsce brakuje dostatecznych danych w tym obszarze wiedzy, w literaturze przedmiotu dostępne są tylko orientacyjne dane. Zagadnienie to wymaga kolejnych badań.

Praca nie wyczerpała problematyki, lecz jedynie ją zasygnalizowała. Konieczne są dalsze prace w tym zakresie.

Literatura

[1] Haunold J., Gardesty T., *Reinsurance Course*, Le Rocher Re Ltd., Belgian Branch, Warszawa, wrzesień 1994.

[2] Niemiro W., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Szkoła Nauk Ścisłych, Warszawa 1999.

[3] Schmitter H., *Property Excess Los Rating by Means of the Pareto Models*, Swiss Reinsurance Company, Zurich 1978.

APPLICATION OF THE PARETO DISTRIBUTION FOR THE CALCULATION OF NON-PROPORTIONAL EXCESS OF LOSS REINSURANCE PREMIUM

Summary

In insurance practice there exist catastrophic losses. One kind of security against it is reinsurance.

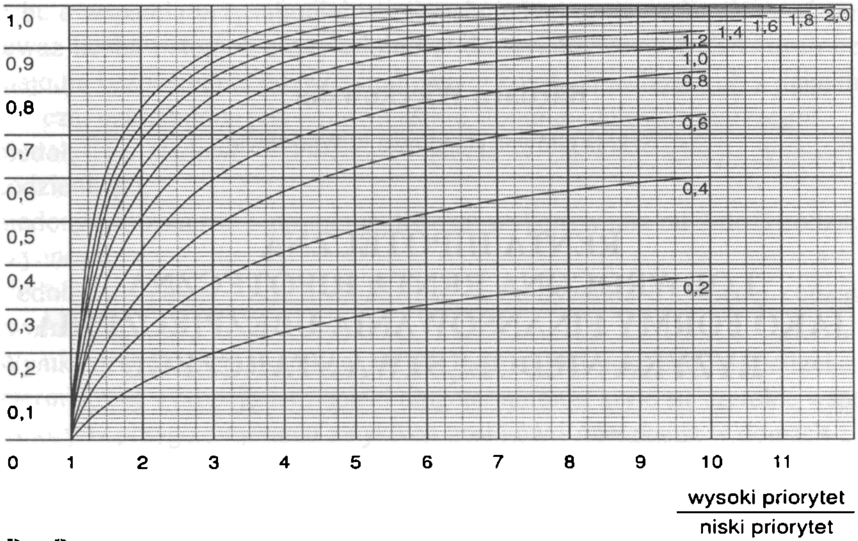
The goal of the paper is to calculate reinsurer's premium for excess of loss contract. For this purpose the property of the Pareto distribution is applied.

The author introduces the characteristics of the Pareto distribution and the method of parameters estimation.

In the last part of the article the example of frequency calculation and the expected value of loss calculation was proposed for the purpose of the reinsurer's net premium settlement.

Załącznik

Rys. A.



Rys. B.