PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 — 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Krzysztof Piasecki
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

O PROBLEMIE MODELOWANIA STOPY PROCENTOWEJ

1. Wstęp

Na dowolnym rynku finansowym znajdują się instrumenty finansowe obarczone ryzykiem wartości początkowej lub też ryzykiem wartości końcowej. W tej pracy ograniczymy się do problematyki instrumentów finansowych obarczonych ryzykiem wartości końcowej. Inżynieria finansowa dostarcza wielu różnych modeli stopy procentowej. Przykładem mogą być tutaj dwa rodzaje stóp zwrotu: arytmetyczna i logarytmiczna. To rodzi pierwsze nasze pytanie: czy wymienione modele konkurują ze sobą, czy też uzupełniają się w celu stworzenia bardziej uniwersalnego modelu pojęcia stopy zwrotu?

W inżynierii finansowej ryzyko wartości końcowej każdego instrumentu jest opisane za pomocą procesu losowego opisującego ewolucję obarczonej ryzykiem „stopy procentowej". Literatura przedmiotu podaje wiele zaawansowanych formalnie modeli opisujących te stopy. Ta różnorodność rodzi drugie pytanie: czy różne modele ewolucji stopy procentowej konkurują ze sobą, czy też nawzajem uzupełniają się w celu stworzenia bardziej uniwersalnego ryzyka wartości końcowej?

Odpowiedzi na te pytania będziemy szukać, badając wzajemne relacje pomiędzy poszczególnymi procesami ewolucji ceny instrumentu finansowego i wynikającymi stąd procesami stóp procentowych. Punktem wyjścia do sformułowania definicji tych procesów będzie deterministyczna teoria krzywych terminowych. Ostatecznym celem niniejszej pracy jest usystematyzowanie pewnych szczegółowych teorii. W związku z tym, w celu uproszczenia całego wykładu, przyjmiemy tutaj, że proces przyrostów ceny instrumentu finansowego obarczonego ryzykiem jest ruchem Browna.

2. Modele deterministyczne – podstawowe pojęcia

Wyróżnijmy pewien instrument finansowy mający w momencie czasowym $t = 0$ znaną cenę C_0. Cena ta będzie opisywać równocześnie wartość początkową kapitału przypisanego temu instrumentowi. Obserwować będziemy **ewolucję ceny** $C:[0;T]\to R^+$ wyróżnionego instrumentu finansowego. Na cenę tę składa się cena początkowa powiększona o dodatkową premię za utratę płynności finansowej wynikającej z posiadania tego instrumentu. Przystępując do dokładniejszego opisu tej premii, w przedziale $[0,T]$ wyróżniamy ciąg $\{T_i\}_{i=0}^{n}$ momentów kapitalizacji premii spełniający dodatkowo warunek

$$0=T_0<T_1<T_2<\ldots<T_{n-1}<T_n=T. \tag{1}$$

Wymienione momenty są jedynymi momentami, w jakich następuje kapitalizacja premii. Kapitalizacja premii polega na dodaniu z dołu należnej premii do wartości kapitałowej przypisanej danemu instrumentowi finansowemu. Podstawą naliczenia premii za utratę płynności jest zawsze wartość kapitałowa obserwowanego instrumentu finansowego.

Formalnym obrazem premii za utratę płynności jest stopa *forward* rozumiana jako funkcja $F:\{(s,t):0\le s<t\le T\}\to R^+$, związana z procesem ceny zależnością

$$\forall i=1,2,\ldots,n:\ \ T_{i-1}\le s<t\le T_i \Rightarrow C(t)-C(s)=C(T_{i-1})\cdot(t-s)\cdot F(s,t). \tag{2}$$

O dowolnej stopie *forward* zakładamy dodatkowo, że spełnione są warunki

$$\lim_{t\to 0^+} F(0,t)=p_0, \tag{3}$$

$$\exists p_\infty\in R^+;\forall s\in[0,T]:\ \lim_{t\to+\infty} F(s,t)=p_\infty. \tag{4}$$

W [3] wartość p_0 zinterpretowano jako stopę *forward* inwestycji zero-kuponowej o horyzoncie wymagalności $\Delta t\to 0$. W [5] sformułowano sugestię identyfikującą opisaną powyżej stopę z bieżącą stopą kontraktu *overnight* notowaną dalej w skrócie O/N. Tamże wartość p_∞ zidentyfikowano jako stopę renty wieczystej.

Wygodnym narzędziem formalnym, pozwalającym opisać stopę *forward*, jest chwilowa stopa *forward* opisana jako funkcja $f:[0,T]\to R$, dana za pomocą tożsamości

$$f(t)=\lim_{s\to t^+} F(t,s). \tag{5}$$

Można pokazać, że dzięki (2) mamy tutaj

$$\forall i=1,2,\ldots,n:\ \ T_{i-1}\le s<t\le T_i \Rightarrow F(s,t)=\frac{1}{t-s}\int_s^t f(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Zgodnie z (3) i (4) otrzymuje się

$$f(0) = p_0, \tag{7}$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = p_\infty. \tag{8}$$

Innym narzędziem formalnym stosowanym do oceny ewolucji ceny instrumentu finansowego jest stopa *spot* opisana jako funkcja $y :]0, T] \to R$, dana za pomocą tożsamości

$$y(t) = F(0, t). \tag{9}$$

Dzięki (3) i (4) mamy

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = p_0, \tag{10}$$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = p_\infty. \tag{11}$$

Innym narzędziem formalnym często stosowanym do oceny procesu ewolucji ceny jest stopa zwrotu. Dla każdego $(i = 1, 2, \ldots, n)$ stopa zwrotu $r : [0, T] \to R^+ \cup \{0\}$ jest rozumiana jako opłata $r(t)$ należna za użytkowanie jednostki kapitału w przedziale $[0, t]$ spełniającym ograniczenia $[0, T_{i-1}] \subset [0, t] \subset [0, T_i[\subset [0, T]$. Opłata ta jest wnoszona z dołu w pełni w każdym momencie kapitalizacji premii $\{T_k\}_{k=1}^{i-1}$ oraz na koniec okresu użytkowania $t \in [0, T]$. Zgodnie z tą definicją stopa zwrotu jest opisana za pomocą tożsamości

$$r(t) = \sum_{j=1}^{i-1} F(T_{j-1}, T_j) \cdot (T_j - T_{j-1}) + F(t, T_{i-1})_i \cdot (t - T_{i-1}), \tag{12}$$

co razem z (6) daje

$$r(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \tag{13}$$

$$r(0) = 0. \tag{14}$$

Ponadto z (6) otrzymujemy tożsamość

$$y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{t} \cdot r(t). \tag{15}$$

Z zależności (13) otrzymujemy równanie różniczkowe trendu stopy zwrotu $r:[0,T_1]\to R^+\cup\{0\}$:

$$dr = f(t)dt. \tag{16}$$

Jedynym rozwiązaniem problemu początkowego (14) i (16) jest funkcja opisana za pomocą tożsamości (13).

Z zależności (15) otrzymujemy równanie różniczkowe stopy *spot* $y:[0,T_1]\to R^+$:

$$dy = \left(f(t) - y(t)\right)\cdot\frac{dt}{t}. \tag{17}$$

Jedynym rozwiązaniem problemu (10) i (17) jest funkcja opisana za pomocą tożsamości (15). Dodatkowo warto tutaj zwrócić uwagę na autokorekcyjny charakter równania (17). Łatwo można zauważyć, że znak przyrostu stopy *spot* powoduje zmniejszenie różnicy pomiędzy stopami *spot* i *forward*. Prędkość zbieżności stopy *forward* w stronę stopy nominalnej jest wprost proporcjonalna do różnicy pomiędzy tymi stopami i równocześnie jest odwrotnie proporcjonalna do długości horyzontu czasowego stopy *spot*. Identyczną własność ma uogólniony model Vasiceka[1] [6] ewolucji stopy procentowej obarczonej ryzykiem. Do problemu tego będziemy wracali w dalszych częściach tej pracy.

3. Jednookresowy model deterministyczny

W przypadku rozpatrywania instrumentów finansowych o bliskim terminie zapadalności[2] analizę procesu ewolucji ceny instrumentu finansowego ograniczamy do przedziału czasowego $[0,T_1]$. Oznacza to przyjęcie założenia, że wspomniany horyzont czasowy jest na tyle krótki, iż możemy wykluczyć przypadek kapitalizacji premii za utratę płynności. O kształcie budowanych modeli ewolucji ceny stóp procentowych decyduje tutaj rodzaj posiadanych informacji.

W przedziale $[0,T_1]$ znany jest przebieg zmienności krzywej chwilowej stopy *forward* $f:[0,T_1]\to R$. Wyróżniamy rosnący ciąg $\{\tau_j\}_{j=0}^{m}\subset[0,T_1]$ momentów czasowych, takich że spełniony jest warunek $(\tau_0=0;\tau_n=T_1)$. Dla dowolnej wartości początkowej $C_0\neq 0$ prześledźmy trend ewolucji ceny. W tym celu przyjmijmy następujące oznaczenia:

---

[1] Nazywany inaczej modelem Hulla-White'a.

[2] W szczególnym przypadku jest to termin planowanego zbycia instrumentu finansowego.

$$\forall j = 1, 2, \ldots, m \quad \Delta C_j = C(\tau_j) - C(\tau_{j-1}); \tag{18}$$

$$\forall j = 1, 2, \ldots, m \quad \Delta \tau_j = \tau_j - \tau_{j-1}. \tag{19}$$

Zależność (2) prowadzi wprost do modelu różnicowego

$$C(0) = C_0, \tag{20}$$

$$\forall j = 1, 2, \ldots, m \quad \frac{\Delta C_j}{C_0} = f(\tau_j) \cdot \Delta \tau_j. \tag{21}$$

Gdy zagęścimy podział przedziału $[0, T_1]$, to wtedy powyższe równanie różnicowe możemy zastąpić adekwatnym równaniem różniczkowym

$$dC = C_0 \cdot f(t) dt. \tag{22}$$

Jedynym rozwiązaniem problemu (20) i (22) jest trend ceny instrumentu $C : [0, T_1] \to R$ opisany za pomocą tożsamości

$$C(t) = C_0 \cdot \left(1 + \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = C_0 \cdot (1 + r(t)). \tag{23}$$

Dzięki temu ostatniemu równaniu możemy stwierdzić, że w przypadku inwestycji krótkoterminowych należy stosować arytmetyczną stopę zwrotu.

4. Wielokresowy model deterministyczny

W przypadku rozpatrywania instrumentów finansowych o odległym terminie zapadalności analizę procesu ewolucji ceny instrumentu finansowego prowadzimy w odniesieniu do całego przedziału czasowego $[0, T]$. Oznacza to zaakceptowanie możliwości kapitalizacji premii za utratę płynności, co prowadzi wprost do stwierdzenia, że w przypadku inwestycji długoterminowych trend wartości jest dany jako model wielookresowy. W przedziale $[0, T]$ znany jest przebieg zmienności krzywej chwilowej stopy *forward* $f : [0, T] \to R$. Dla dowolnej wartości początkowej C_0 prześledźmy trend ewolucji ceny. W tym celu przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \Delta C_i = C(T_i) - C(T_{i-1}); \tag{24}$$

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \Delta T_i = T_i - T_{i-1}. \tag{25}$$

Zależność (2) prowadzi wprost do równania różnicowego

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \frac{\Delta C_i}{C_{i-1}} = p_i \cdot \Delta T_i. \tag{26}$$

Jeśli w dowolny sposób zagęścimy podział przedziału $[0, T]$, to ostatnie równanie różnicowe można zastąpić adekwatnym równaniem różniczkowym

$$\frac{dC}{C(t)} = f(t) dt. \tag{27}$$

Jedynym rozwiązaniem problemu (20) i (27) jest funkcja opisana za pomocą tożsamości

$$C(t) = C_0 \cdot \exp\left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right\} = C_0 \cdot e^{r(t)}. \tag{28}$$

Z ostatniej zależności otrzymujemy bezpośrednio oszacowanie stopy zwrotu jako funkcji procesu ceny

$$r(t) = \ln\left(\frac{C(t)}{C_0} \right). \tag{29}$$

Oznacza to, że w przypadku inwestycji długoterminowych wprowadzone pojęcie stopy zwrotu jest identyczne z pojęciem logarytmicznej stopy zwrotu.

5. Modele stochastyczne – dobór rozkładu ryzyka

Oczekiwania inwestora co do przyszłych korzyści są obarczone niepewnością. Za Mantelbrotem [2] możemy przyjąć ogólne założenie, że trendy cen lub stóp procentowych podlegają przypadkowym niezależnym wahaniom o α-stabilnym rozkładzie $(1 < \alpha \leq 2)$. W przypadku polskiego rynku finansowego założenie to jest w pełni usprawiedliwione pilotażowymi badaniami ekonometrycznymi [1]. Przyjęcie tego założenia będzie gwarantować istnienie wartości oczekiwanych opisywanych procesów losowych. Posługiwanie się w analizie rynku finansowego rozkładami α-stabilnymi oznacza większą wierność obserwowanym realiom, co podnosi wiarygodność analiz rynku finansowego. Wiarygodność ta ma jednak swoją cenę. Aktualny stan wiedzy matematycznej nie pozwala w pełni badać wzajemnych relacji pomiędzy dwoma różniczkami stochastycznymi o dowolnych rozkładach α-stabilnych. Stanowi to przesłankę skoncentrowania uwagi na modelach rynku finansowego obciążonego ryzykiem z gaussowskim rozkładem. To ograniczenie nie obniża jednak jednoznacznie jakości formalnej badanych modeli, gdyż w zamian uzyskujemy możliwość skorzystania z lematu Ito (zob. [4]). Na końcu pracy zostanie wyraźnie zaznaczone, kiedy uzyskane wyniki można uogólnić do ogólnej klasy α-stabilnych rozkładów ryzyka.

Zebrane doświadczenia upoważniają nas do ograniczenia dalszych szczegółowych rozważań losowych modeli instrumentów finansowych jedynie do tych losowych procesów ceny, których wartości oczekiwane są opisane przez deterministyczne trendy cen. Z formalnego punktu widzenia oznacza to, że dowolny proces ceny będziemy opisywali za pomocą losowego procesu[3] ceny $\tilde{C}:[0,T]\cdot\Omega\rightarrow R$ spełniającego tutaj warunki:

$$\tilde{C}(0)=C_0\neq 0, \tag{30}$$

$$\forall t\in[0,T]:\quad \mathsf{E}\left(\tilde{C}(t)\right)=C(t), \tag{31}$$

gdzie $C:[0,T]\rightarrow R^{+}$ jest deterministycznym procesem ceny.

6. Model jednookresowy – ruchy arytmetyczne

Ze względu na bliski horyzont czasowy analizę ograniczamy do przedziału czasowego $[0,T_1]$. Przyjmujemy założenia identyczne z założeniami przyjętymi w punkcie 2. Rozważmy teraz ciąg zmiennych losowych $\left\{\tilde{C}(\tau_j)\right\}_{j=0}^{m}$. W tym celu przyjmujemy dodatkowo oznaczenia:

$$\forall j=1,2,\dots,m\quad \Delta\tilde{C}_j=\tilde{C}(\tau_j)-\tilde{C}(\tau_{j-1}). \tag{32}$$

W punkcie 2 własności procesu ceny zostały opisane za pomocą przyrostu względnego (21). Korzystając z zebranych tam doświadczeń, zakładamy teraz, że analogiczne przyrosty względne mają niezależne rozkłady normalne, co zapisujemy

$$\forall j=1,2,\dots,m,\ \exists(\mu_j,\sigma)\in R\cdot R^{+}:\quad \delta\tilde{C}_j=\frac{\Delta\tilde{C}_j}{C_0}\sim N(\mu_j,\sigma\cdot\Delta\tau_j)\cdot \tag{33}$$

Po skorzystaniu z zależności (21) i (31) oraz własności rozkładu normalnego otrzymujemy tutaj

$$\forall j=1,2,\dots,m:\ \Delta\tilde{C}_j=C_0\cdot f(\tau_j)\cdot\Delta\tau_j+C_0\cdot\sigma\cdot\Delta\tilde{W}(\tau_j), \tag{34}$$

gdzie $\Delta\tilde{W}(\tau_j)\sim N(0,\Delta\tau_j)$.

[3] Dowolny proces losowy $\tilde{A}:[0,T]\cdot\Omega\rightarrow R$ w razie potrzeby będziemy identyfikować ze zindeksowaną rodziną zmiennych losowych $\{\tilde{A}(t):\Omega\rightarrow R:\ t\in[0,T]\}$.

Z powyższego równania otrzymujemy następujące stochastyczne równanie różniczkowe procesu ceny $\tilde{C}:[0,T_1]\cdot\Omega\to R$:

$$d\tilde{C}=C_0\cdot f(t)\cdot dt+C_0\cdot\sigma\cdot d\tilde{W}(t), \tag{35}$$

gdzie $d\tilde{W}(t)\sim N(0,dt)$.

Jeśli skorzystamy teraz z (23), (35) i lematu Ito, to otrzymujemy następujące stochastyczne równanie różniczkowe opisujące proces stopy zwrotu

$$d\tilde{r}=f(t)dt+\sigma\cdot d\tilde{W}(t). \tag{36}$$

Jedynym rozwiązaniem powyższego zagadnienia jest proces losowy dany za pomocą tożsamości

$$\tilde{r}(t)=\int_0^t f(s)\,ds+\sigma\cdot\sqrt{t}\cdot\hat{W}(t). \tag{37}$$

Jedynym rozwiązaniem problemu (30) i (35) jest proces opisany za pomocą tożsamości

$$\tilde{C}(t)=C_0\times\left(1+\int_0^t f(s)\,ds\right)+C_0\cdot\sigma\sqrt{t}\cdot\tilde{W}(t)=C_0\cdot(1+\tilde{r}(t)). \tag{38}$$

Zajmijmy się teraz losowym procesem stopy *spot* $\tilde{y}:[0,T_1]\cdot\Omega\to R$. Gdy skorzystamy z lematu Ito, z (10), (15) i (38), wówczas otrzymamy

$$\lim_{t\to 0^+}\tilde{y}(t)=p_0, \tag{39}$$

$$d\tilde{y}=(f(t)-\tilde{y}(t))\cdot\frac{dt}{t}+\frac{\sigma}{t}\cdot d\tilde{W}(t). \tag{40}$$

Jedynym rozwiązaniem powyższego problemu jest trend stopy *spot* zadany za pomocą procesu

$$\tilde{y}(t)=\frac{\tilde{r}(t)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\int_0^t f(s)ds+\frac{\sigma}{\sqrt{t}}\cdot\tilde{W}(t). \tag{41}$$

Procesy (37), (38) i (41) należą do klasy procesów losowych nazywanych arytmetycznymi ruchami Browna.

7. Model wielookresowy – ruchy pseudogeometryczne

Ze względu na odległy termin zapadalności analizę procesu ewolucji ceny instrumentu finansowego prowadzimy dla całego przedziału czasowego $[0,T]$. Przyjmujemy założenia identyczne z założeniami przyjętymi w punkcie 3. Rozważmy teraz ciąg zmiennych losowych $\left\{\tilde{C}(T_i)\right\}_{i=0}^{n}$. W tym celu przyjmujemy dodatkowo oznaczenia:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \Delta\tilde{C}_i = \tilde{C}(T_i) - \tilde{C}(T_{i-1}). \tag{42}$$

W punkcie 3 opisano własności procesu ceny za pomocą przyrostu względnego (26). Korzystając z zebranych tam doświadczeń, zakładamy teraz, że analogiczne przyrosty względne mają niezależne rozkłady normalne, co zapisujemy jako:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n, \quad \exists(\mu_i, \sigma) \in R \cdot R^{+}: \quad \delta\tilde{C}_i = \frac{\Delta\tilde{C}_i}{\mathrm{E}(\tilde{C}_{i-1})} \sim N(\mu_i, \sigma \cdot \Delta T_i) \cdot \tag{43}$$

Zależności (26), (28) i (31) wraz z właściwościami rozkładu normalnego wprowadzą wprost do równania różnicowego

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n:$$

$$\Delta\tilde{C}_i = \mathrm{E}(\tilde{C}_{i-1}) \cdot p_i \cdot \Delta T_i + \mathrm{E}(\tilde{C}_{i-1}) \cdot \sigma \cdot \Delta\tilde{W}(T_i) = \tag{44}$$

$$= C_0 \cdot \exp\left\{\int_0^{T_{i-1}} f(s)\,ds\right\} \cdot p_i \cdot \Delta T_i + C_0 \cdot \exp\left\{\int_0^{T_{i-1}} f(s)\,ds\right\} \cdot \sigma \cdot \Delta\tilde{W}(T_i)$$

Z ostatniego równania otrzymujemy równanie różniczkowe procesu ceny

$$d\tilde{C} = C_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t f(s)\,ds\right\} \cdot f(t) \cdot dt + C_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t f(s)\,ds\right\} \cdot \sigma \cdot d\tilde{W}(t). \tag{45}$$

Proces ceny jest opisany za pomocą pseudogeometrycznego ruchu Browna

$$\tilde{C}(t) = C_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t f(s)\,ds\right\} \cdot \left(1 + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{W}(t)\right). \tag{46}$$

Po skorzystaniu z (29), (45) i lematu Ito wyznaczamy równanie różniczkowe procesu stopy zwrotu

$$d\tilde{r} = \left(f(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 \cdot t}{\left(1 + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{W}(t)\right)^2}\right) dt + \frac{\sigma \cdot \sqrt{t}}{1 + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{W}(t)} \Delta\tilde{W}(t). \tag{47}$$

Zagadnienie początkowe (14) i (47) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Równanie (47) prowadzi do równania różniczkowego procesu stopy *spot*

$$d\tilde{y} = \left(f(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 \cdot t}{\left(1 + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{W}(t)\right)^2} - \tilde{y}(t)\right) \cdot \frac{dt}{t} + \frac{\sigma \cdot d\tilde{W}(t)}{\sqrt{t} \cdot \left(1 + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{W}(t)\right)}. \tag{48}$$

Zagadnienie początkowe (10) i (48) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

8. Model wielookresowy – ruchy geometryczne

Ponownie, ze względu na odległy termin zapadalności, analizę procesu ewolucji ceny instrumentu finansowego prowadzimy dla całego przedziału czasowego $[0,T]$. Przyjmujemy założenia identyczne z założeniami przyjętymi w punktach 3 i 6. W punkcie 3 własności procesu ceny zostały opisane za pomocą przyrostu względnego (26). Korzystając z zebranych tam doświadczeń, zakładamy teraz, że analogiczne przyrosty względne mają niezależne rozkłady normalne, co zapisujemy jako:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n, \exists(\mu_i, \sigma) \in R \times R^+ : \overline{\delta}\tilde{C}_i = \frac{\Delta\tilde{C}_i}{\tilde{C}_{i-1}} \sim N(\mu_i, \sigma \cdot \Delta T_i) \cdot \tag{49}$$

Z (26), (28) i (31) mamy

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n: \quad \Delta\tilde{C}_i = \tilde{C}_{i-1} \cdot p_i \cdot \Delta T_i + \tilde{C}_{i-1} \cdot \sigma \cdot \Delta\tilde{W}(T_i). \tag{50}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy stochastyczne równanie różniczkowe procesu ceny

$$d\tilde{C} = \tilde{C} \cdot f(t)dt + \tilde{C} \cdot \sigma \cdot d\tilde{W}(t). \tag{51}$$

Jedyne rozwiązanie zagadnienia początkowego (30) i (51) jest dane jako geometryczny ruch Browna

$$\tilde{C}(t) = C_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t f(s)ds - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{W}(t)\right\}. \tag{52}$$

Biorąc pod uwagę (29), z równania (52) otrzymujemy równanie różniczkowe procesu stopy zwrotu

$$d\tilde{r} = \left(f(t) - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2\right)dt + \sigma \cdot d\tilde{W}(t). \tag{53}$$

Zagadnienie początkowe (14) i (53) ma dokładnie jedno rozwiązanie dane jako arytmetyczny ruch Browna

$$\tilde{r}(t) = \int_0^t f(s)ds - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{W}(t). \tag{54}$$

Krzywa terminowa chwilowej stopa *forward* może być interpretowana jako prognoza przyszłych oczekiwanych wartości stopy *forward* powiększonych o bieżącą premię wymaganą za ryzyko terminu, wynikające z utraty płynności implikowanej przez wydłużanie się horyzontu inwestycji. Zgodnie z tym, dowolną wartość

$f(t)$ interpretujemy jako wygasającą w momencie t prognozę wartości chwilowej stopy zwrotu powiększoną o bieżącą wartość premii za ryzyko terminu.

Z (15) i (54) otrzymujemy stochastyczne równanie różniczkowe procesu stopy *spot*

$$d\tilde{y} = \left(f(t) - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 - \tilde{y} \right) \cdot \frac{dt}{t} + \frac{\sigma}{t} d\tilde{W}(t). \tag{55}$$

Zagadnienie początkowe (10) i (55) ma dokładnie jedno rozwiązanie dane jako arytmetyczny ruch Browna

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 + \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \cdot \tilde{W}(t). \tag{56}$$

Równanie (55) nawiązuje w swej postaci modelu stopy procentowej Vasiceka [6]. Oznacza to, że procesowi stopy *spot* kapitalizacji ciągłej przysługują wszystkie własności formalne i możliwości zastosowania modelu Vasiceka.

9. Podsumowanie

Główny cel artykułu został osiągnięty. Przedstawiono logiczne powiązania pomiędzy poszczególnymi modelami stopy procentowej. Wykazano m.in., że stosowanie modeli opartych na geometrycznym ruchu Browna nie wyklucza równoczesnego stosowania modeli opartych na arytmetycznym ruchu Browna. Wskazano na fakt, że istotną przesłanką przy doborze właściwego modelu jest czasowy horyzont zapadalności inwestycji.

Każdy przedstawiony w artykule proces ceny można uogólnić do przypadku przyrostu względnego o rozkładzie α-stabilnym ze zmiennym parametrem skali σ. W sytuacji rozważania modelu jednokresowego rozszerzenie to możemy zastosować także w odniesieniu do procesów stopy zwrotu i stopy *spot*.

Przedstawiony w pracy zestaw modeli stanowi jedynie niewielki ułamek ogólnego dorobku nauki i praktyki w dziedzinie. W wyborze kierowano się kryterium prostoty wykładu. Niemniej warto zauważyć, że pominięte modele różnią się założonym kształtem krzywej terminowej chwilowej stopy *forward* oraz założeniami o zmienności odchylenia standardowego (parametru skali).

Literatura

[1] Gołębiewska A., *Analiza grubości ogona rozkładu stóp zwrotu*, [w:] *Matematyka w ekonomii*, red. E. Panek, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 41, AE, Poznań 2004, s. 230-239.

[2] Mantelbrot B.B., *The Variation of Certain Speculative Prices*, [w:] *The Random Character of Stock Market Prices*, red. P. Cootner, MIT Press, Cambridge 1964, s. 394-419.

[3] Siegel A.F., Nelson Ch.R., *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, „Journal of Business" 1987, nr 60.
[4] Sobczyk K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT, Warszawa 1996.
[5] Svensson L., *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*, National Bureau of Economic Research, Cambridge 1994.
[6] Vasicek O.A., *An Equilibrium Characterization of Term Structure*, J. Financial Economics, November 1977, s. 177-188.

INTEREST RATE MODELLING

Summary

The main goal of this paper is to present the relationship between some kinds of well-known stochastic processes of return rate and spot rate. All comparisons are considered for the case of Brownian motions. Most of the obtained results may be generalized for the case of Levy motions.