

Tomasz Rolski

Uniwersytet Wrocławski

METODY MC ZDARZEŃ RZADKICH I ICH ZASTOSOWANIE W TEORII UBEZPIECZEŃ

1. Wstęp

Celem artykułu jest zasygnalizowanie pewnych kierunków obecnie prowadzonych badań dotyczących symulacji metodą Monte Carlo (MC), tzw. zdarzeń rzadkich. Podamy krótki zarys tej teorii oraz, w celu ilustracji, dwa przykłady mające charakter aktuarialny. Więcej na temat samej metody Monte Carlo można przeczytać w książkach: P. Glassermana [8], N. Madrasa [9], S. Rossa [15], R. Zielińskiego [16], ale szczególnie ważnymi odniesieniami dla tego artykułu jest skrypt S. Asmussena [2] lub autora niniejszej publikacji [13].

Metoda MC jest eksperymentalnym sposobem obliczania szukanego prawdopodobieństwa $p = P(A)$. Celem prymitywnej metody MC (*crude Monte Carlo*) jest przeprowadzenie N niezależnych eksperymentów zdarzenia A i zapisanie wyników w postaci ciągu zero-jedynkowego η_1, \dots, η_N . Można wtedy mówić o metodzie CMC (*crude Monte Carlo*). Naturalnym estymatorem p jest wtedy

$$\hat{\eta} = \frac{\sum_{j=1}^N \eta_j}{N},$$

gdzie η_j jest jedynką, jeśli w i -tym eksperymencie zaszło zdarzenie A , oraz zero w przeciwnym razie. Estymator $\hat{\eta}$ jest oczywiście nieobciążony, tj. $E\hat{\eta} = p$. Przeprowadzona teraz zostanie analiza błędu estymatora $\hat{\eta}$. Analiza ta jest prawdziwa dla dowolnego ciągu eksperymentów η_1, \dots, η_N , niekoniecznie zero-jedynkowych, byleby $E\eta = p$. W przeciwieństwie do deterministycznych szacowań, tutaj dokładność ε (tzn. dany błąd bezwzględny) można uzyskać z zadaniem z góry prawdopodobieństwem, powiedzmy $1 - \delta$. Typowo stosuje się $\delta = 0,1$. Wtedy $\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2}) = 1,96$,

gdzie $\Phi^{-1}(x)$ oznacza funkcję odwrotną do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego. Stosując centralne twierdzenie graniczne, można oszacować, że liczba prób potrzebnych do uzyskania takiej dokładności wynosi

$$N = \frac{(\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2}))^2 \sigma_\eta^2}{\varepsilon^2},$$

gdzie σ_η^2 jest wariancją η . Równoważnie można zapisać, że błąd ε w przypadku N prób wynosi

$$\varepsilon = \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2}) \sigma_\eta}{\sqrt{N}}. \quad (1)$$

W praktyce wielkość σ_η jest również nieznaną i szacuje się ją za pomocą metody Monte Carlo, przyjmując

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\eta_j - \bar{\eta})^2.$$

W artykule rozpatrywany będzie przypadek, gdy p jest bardzo małe. Wtedy analiza błędu bezwzględnego nie jest tak ważna, należy bowiem kontrolować błąd względny. Matematycznie postulat ten jest modelowany następująco: rozważa się rodzinę eksperymentów $A(n)$, takich że $p(n) = \mathbf{P}(A(n)) \rightarrow 0$. Mówi się wtedy o rodzinie zdarzeń rzadkich, jeśli $p(n) \rightarrow 0$. Jako $\eta_1(n), \dots, \eta_N(n)$ oznacza się niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie, takie że:

$$\mathbf{E}\eta(n) = p_n = \mathbf{P}(A(n)).$$

Wariancję $\eta(n)$ oznaczono przez $\sigma^2(n)$. Niech teraz ε będzie zadany błądem względnym. Podobnie jak poprzednio, można pokazać, że liczba prób potrzebnych do uzyskania takiej dokładności wynosi

$$N = \frac{(\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2}))^2}{\varepsilon^2} \times \frac{\sigma_\eta^2(n)}{p(n)^2}.$$

W przypadku zmiennych $\eta_i(n)$ zero-jedynkowych $\sigma^2(n) = p(n)(1 - p(n))$, stąd liczba prób jest proporcjonalna do stałej razy $(1 - p(n))/p(n) \sim p(n)^{-1} \rightarrow \infty$. Wielkością, która odgrywa ważną rolę, jest więc iloraz $\sigma^2(n)/p(n)^2$ i naturalny wydaje się postulat, aby $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)^2}{p(n)^2} < \infty$. Mówi się wtedy o mocno efektywnej metodzie

MC symulacji prawdopodobieństwa $p(n)$. Zauważmy, że wynika z tego, iż $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma^2(n)}{2 \log p(n)} \geq 1$. Jest to warunek słabszy i jeśli tylko jest on spełniony, to mówi się o logarytmicznej efektywności. Logarytmiczna efektywność jest równoważna słabej efektywności, tj. gdy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)^2}{p(n)^{2-a}} < \infty$, dla $0 < a < 2$. Dużą rolę przy dowodzie którejś z efektywności, odgrywają metody asymptotyczne, pozwalające na znalezienie asymptotyki $p(n)$ lub $\sigma^2(n)$ dla $n \rightarrow \infty$.

2. Efektywna symulacja $P(S_n^\xi > (n+a)E\xi)$; przypadek cramerowski

Rozpatrzone będzie bardzo szczególny przypadek, który poddany zostanie analizie teoretycznej. Niech ξ_1, \dots, ξ_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie ze skończoną średnią $E\xi$ i niech $S_n^\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Dla $a > 0$ ciąg zdarzeń $A(n) = \{S_n^\xi > n(E\xi + a)\}$ jest rzadki. Dla niego szuka się prawdopodobieństwa $p(n) = P(S_n^\xi > n(E\xi + a))$. Niech $\hat{F}(t) = E[\exp(t\xi)]$ będzie funkcją tworzącą momenty oraz $\kappa(t) = \log \hat{F}(t)$. Rozważymy przypadek cramerowski, tj. zakłada się, że dla pewnego $h > 0$ pochodna

$$\kappa'(h) = E\xi + a. \quad (2)$$

Następnie definiujemy zmienną

$$\eta = e^{-hS_n + n\kappa(h)} 1(A(n)).$$

Niech η_1, \dots, η_N będą niezależnymi kopiami η . Można pokazać, że estymator

$$\hat{\eta}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i$$

jest nieobciążony oraz logarytmicznie efektywny (zob. np. [2; 13]). Można wtedy mówić o metodzie MCIS (*Monte Carlo importance sampling*).

3. Efektywna symulacja funkcji; przypadek RV

Zacniemy od symulacji $P(S_n^\xi > u)$, gdy n jest ustalone, ale u jest duże w przypadku, gdy ξ_1, \dots, ξ_n mają rozkłady α -Pareto podobne lub mają ogony rozkładu regularnie zmieniające się (*regularly varying* – $RV(-\alpha)$), tj. $P(\xi > u) = u^{-\alpha} L(u)$ dla pewnego $\alpha > 0$ oraz $L(u)$ funkcji wolno zmieniającej się. Przykładami funkcji

wolno zmieniających się są funkcje mające w nieskończoności granice skończone lub $L(t) = (\log(1+t))^\beta$. Szczegóły i przykłady można znaleźć w monografii [14]. Teraz rodziną zdarzeń rzadkich jest $A(u) = \{S_n^\xi > u\}$, gdzie $u > 0$, dla ustalonego n . W pracy Asmussena i Kroese'a [4] zaproponowano następującą metodę obliczania $p(u) = \mathbf{P}(A(u))$. Niech $M_n = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$ oraz $\bar{F}(t) = \mathbf{P}(\xi > t)$ jest ogonem rozkładu ξ . Kładziemy $\eta = n\bar{F}(M_{n-1} \wedge (u - S_{n-1}^\xi))$. Można pokazać, że jeśli η_1, \dots, η_N są niezależnymi kopiami η , to estymator

$$\hat{\eta}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i$$

jest nieobciążony i mocno efektywny. Asmussen i Kroese użyli tego rezultatu do podania mocno efektywnego estymatora w odniesieniu do funkcji ruiny w następującym klasycznym modelu, w którym rozpatruje się proces nadwyżki żądań $S_t = \sum_{i=1}^N U_i - t$ z niezależnymi o jednakowym rozkładzie żądaniami w wysokości U_1, U_2, \dots o wspólnym rozkładzie F i niezależnym procesem napływu żądań N_t Poissona z intensywnością λ (szczegóły można znaleźć w [10] lub monografii [14]). Zakłada się $\rho = \lambda EU < 1$, tzn. że nie ma ruiny z prawdopodobieństwem 1. Wówczas ciekawe jest znalezienie prawdopodobieństwa

$$\psi(u) = \mathbf{P}(S_t > u \text{ dla pewnego } t > 0).$$

Zwracamy uwagę, że ta definicja, wygodna z matematycznego punktu widzenia, jest równoważna definicji funkcji ruiny przez proces rezerwy ryzyka $R_t = u - S_t$, jak to się robi w teorii ryzyka. Po skorzystaniu z reprezentacji $\psi(u)$ za pomocą wysokości drabinowych (zob. np. [14]) otrzymuje się

$$\psi(u) = \mathbf{P}\left(\sum_{j=0}^N Y_j > u\right), \quad (3)$$

gdzie N ma rozkład geometryczny ($\mathbf{P}(N = j) = (1 - \rho)\rho^j$, $j = 0, 1, \dots$), Y_1, Y_2, \dots są niezależnymi wysokościami drabinowymi (pod warunkiem, że istnieją skończone) o jednakowym rozkładzie $F_j(t)$ z ogonem $\bar{F}_j(t) = \int_t^\infty \bar{F}(s) ds / EU$, $t \geq 0$. Jeśli więc U_i ma rozkład $RV(-\alpha)$, to Y_i ma rozkład $RV(-\alpha + 1)$ (wynika to z klasycznego twierdzenia Karamaty). Okazuje się, że wynik Asmussena i Kroese'a [4] podany wyżej można wykorzystać do symulacji $\psi(u)$ zadanej w (3). Oznaczamy przez $S_n^Y = \sum_{j=1}^n Y_j$.

Algorytm

1. Generuj n jako zmienną geometryczną – (ρ) oraz Y_1, \dots, Y_{n-1} według F_I .

Niech $W = (u - S_{n-1}^Y) \vee M_{n-1}$.

2. Generuj Y_n jako warunkową Y przy $Y > w$, gdzie $w = W$.

3. Oblicz $\eta = n \overline{F}_I(W)$.

Teraz można pokazać, że $\psi(u) = \mathbf{E}\eta$. W związku z tym estymator $\hat{\eta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j$,

gdzie η_1, η_2, \dots są niezależnymi kopiami η zmiennej, jest estymatorem nieobciążonym. Asmussen i Kroese pokazali, że prezentowany algorytm jest mocno efektywny.

Dużo bardziej skomplikowana jest symulacja prawdopodobieństwa ruiny w skończonym horyzoncie t . Aby formalnie zdefiniować to pojęcie, należy wprowadzić oznaczenie momentu ruiny $\tau = \inf\{t > 0 : S_t > u\}$ i zdefiniować funkcje ruiny $\psi(u, t) = \mathbf{P}(\tau < t)$, jednakże bardziej pożyteczna jest reprezentacja przez momenty i wysokości drabinowe T, Y .

W pracy Asmussena i Rolskiego [5] podano mocno efektywne algorytmy oparte na następującej reprezentacji

$$\psi(u, t) = \mathbf{P}(S_N^Y > u, S_N^T < t),$$

gdzie T_1, T_2, \dots są kolejnymi momentami drabinowymi (należy zwrócić uwagę, że są one niezależne o jednakowym rozkładzie i skończone przy założeniu $\rho = \lambda \mathbf{E}U < 1$) oraz $S_n^T = \sum_{j=1}^n T_j$. W pracy [5] podane są algorytmy (tutaj ważny jest jedynie algorytm B i C) na symulację $\psi(u, t)$ w przypadku, gdy U jest RV $(-\alpha)$, gdzie $1 < \alpha < 2$. W odniesieniu do algorytmu B udowodniono, że jest mocno efektywny, jeśli $t/u \rightarrow c$ dla $c > 0$, algorytm C jest natomiast bardziej skomplikowany, ale za to jest mocno efektywny, jeśli $t/u \rightarrow c$ dla $c \geq 0$.

4. Przykład: prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela

Rozważamy model portfela ubezpieczeń n polis na całe życie wystawionych dla x -latków. Zakładamy, że do grupy w kolejnych latach nie dołączają nowi uczestnicy, a wypadnięcie uczestnika z grupy następuje tylko w wyniku jego śmierci. Ubezpieczeni płacą na początku każdego roku życia składkę roczną w wysokości c . Załóżmy, że odszkodowanie w przypadku śmierci wynosi 1 oraz techniczna stopa procentowa wynosi i . Należy znaleźć prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela w skończonym horyzoncie czasowym k . Taki model był przedstawiony w książce [6] w rozdziałach IV.4 i V.3.3 oraz w pracy [7]. Oznaczmy przez $\Pi(k, n, x)$ prawdopodobieństwo, że portfel, składający się z n polis na całe

życie x -latków, w ciągu k lat stanie się niewypłacalny. Niech q_x oznacza prawdopodobieństwo śmierci x -latka w trakcie pierwszego roku, a $p_x = 1 - q_x$ – prawdopodobieństwo jego przeżycia do końca roku. Wprowadźmy następujące oznaczenie ${}_k P_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k}$. Niech zmienna ξ_{jl} równa się jeden, jeśli j -ty ubezpieczony umrze w l -tym roku od chwili zawarcia ubezpieczenia, oraz zero w przeciwnym razie ($l = 1, \dots, k$). Na przykład $(0, 0, 1, 0)$ oznacza, że w horyzoncie czasowym $k = 4$ ubezpieczony zmarł w trzecim roku, natomiast $(0, 0, 0, 0)$ oznacza przeżycie 4 lat od momentu zawarcia ubezpieczenia. Wówczas rozkłady brzegowe zero-jedynkowych zmiennych $\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots, \xi_{jk}$ będą następujące:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_{j1} = 1) &= q_x, & \mathbf{P}(\xi_{j1} = 0) &= p_x, \\ \mathbf{P}(\xi_{j2} = 1) &= p_x q_{x+1}, & \mathbf{P}(\xi_{j2} = 0) &= q_x + {}_2 p_x, \\ & & \vdots & \\ \mathbf{P}(\xi_{jk} = 1) &= {}_{k-1} p_x q_{x+k-1}, \\ \mathbf{P}(\xi_{jk} = 0) &= q_x + p_x q_{x+1} + \dots + {}_{k-2} p_x q_{x+k-2} + {}_k p_x. \end{aligned}$$

W związku z tym szukane prawdopodobieństwo można zapisać jako prawdopodobieństwo sumy zdarzeń oznaczających niewypłacalność portfela w kolejnych latach. Po uproszczeniu wyrażeń i wstawieniu w miejsce $(1+i)$ litery r , otrzymuje się

$$\begin{aligned} \Pi(k, n, x) &= \mathbf{P} \left(\left\{ ncr \leq \sum_{j=1}^n \xi_{1j} \right\} \cup \left\{ nc \frac{r(1-r^2)}{1-r} \leq \right. \right. \\ &\leq (r+cr) \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + \sum_{j=1}^n \xi_{2j} \left. \right\} \cup \dots \cup \left\{ nc \frac{r(1-r^k)}{1-r} \leq \right. \\ &\left. \leq \left(r^{k-1} + c \frac{r(1-r^{k-1})}{1-r} \right) \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + \dots + (r+cr) \sum_{j=1}^n \xi_{(k-1)j} + \sum_{i=1}^n \xi_{kj} \right\} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Szczególnie dla $k = 1$ oraz $i = 0$

$$\Pi(1, n, x) = \mathbf{P} \left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j \right), \quad (5)$$

gdzie ξ_1, \dots, ξ_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, takim jak ξ_{j1} . Dalej zakłada się, że $q_x < c < 1$. Widzimy, że prawdopodobieństwo

w równaniu (5) jest prawdopodobieństwem zdarzenia rzadkiego rozpatrywanego w punkcie 2. W tym szczególnym przypadku rozwiązanie równania (2) wynosi

$$h = \ln \frac{p_x c}{q_x (1 - c)}. \quad (6)$$

Tabela 1. Zestawienie szukanego prawdopodobieństwa dokładnego oraz jego symulacji za pomocą metod Monte Carlo

n	Dokładne	CMC	ϵ	MCIS	ϵ
50	0,201013	0,1979	0,007809	0,204042	0,004352
100	0,074457	0,0753	0,005172	0,075333	0,00197
150	0,030448	0,0336	0,003532	0,029988	0,000893
200	0,013014	0,0129	0,002212	0,013249	0,000419
250	0,005705	0,0047	0,001341	0,005669	0,000193
300	0,002543	0,003	0,001072	0,002487	9,02E-05
350	0,001147	0,0008	0,000554	0,001125	4,26E-05
400	0,000522	0,0006	0,00048	0,000519	2,03E-05
450	0,000239	0,0003	0,000339	0,000238	9,63E-06
500	0,00011	0,0002	0,000277	0,000112	4,6E-06
550	5,09E-05	0	0	4,99E-05	2,16E-06
600	2,36E-05	0	0	2,34E-05	1,03E-06
650	0,000011	0	0	1,13E-05	5E-07
700	5,14E-06	0	0	5,11E-06	2,3E-07
750	2,4E-06	0	0	2,41E-06	1,1E-07
800	5,19E-06	0	0	5,24E-06	2,4E-07
850	2,44E-06	0	0	2,38E-06	1,1E-07
900	1,15E-06	0	0	1,12E-06	5E-08
950	5,4E-07	0	0	5,4E-07	3E-08
1000	2,5E-07	0	0	2,6E-07	1E-08

Źródło: opracowanie własne.

Za pracą [12] przytoczymy teraz wyniki następującego eksperymentu obliczeniowego: rozpatrzmy portfel n polis dla 40-latków. Zgodnie z polskimi tablicami trwania życia z roku 1997 przyjmujemy prawdopodobieństwo śmierci $q_{40} = 0,00447815$ i roczną składkę w wysokości $c = 0,01867836$. Przeprowadzono dwa eksperymenty: jeden metodą MCIS oraz drugi metodą CMC, aby zobaczyć, jak nieodpowiednia jest metoda CMC – gdy jest stosowana do zdarzeń rzadkich. Wyniki eksperymentów podane są w tab. 1, gdzie również podano ich błędy bezwzględne, zgodnie ze wzorem (1). Liczba symulacji dla każdego n wynosiła $N = 10\,000$.

5. Przykład: symulacja funkcji ruiny $\psi(u, t)$ w przypadku RV

Podamy teraz przykładowe symulacje przedstawione w pracy [5]. Będziemy symulować funkcję ruiny $\psi(u, t)$, gdy rozkład szkody jest Pareto z parametrem $\alpha = 1,5$, tj. $P(U > t) = (1+t)^{-1,5}$ dla $t \geq 0$. Ważną obserwacją jest to, że wtedy F_t ma rozkład Pareto z parametrem $\alpha - 1 = 0,5$. Średnia U wynosi $1/(\alpha - 1)$. Zauważmy, że jeśli $1 < \alpha < 2$, to żądania mają średnią skończoną, ale wariancję nieskończoną. Zmienną o rozkładzie Pareto z parametrem α łatwo się symuluje np. za pomocą metody:

Algorytm

1. Generuj $Y = \text{rand}^{1/(\alpha-1)} - 1$.

Również warunkowy rozkład Pareto $Y | Y > a$ można łatwo otrzymać z:

Algorytm

1. Generuj ($Y = y | Y > a$) przez $y = (1+a) \text{rand}^{-1/(\alpha-1)} - 1$.

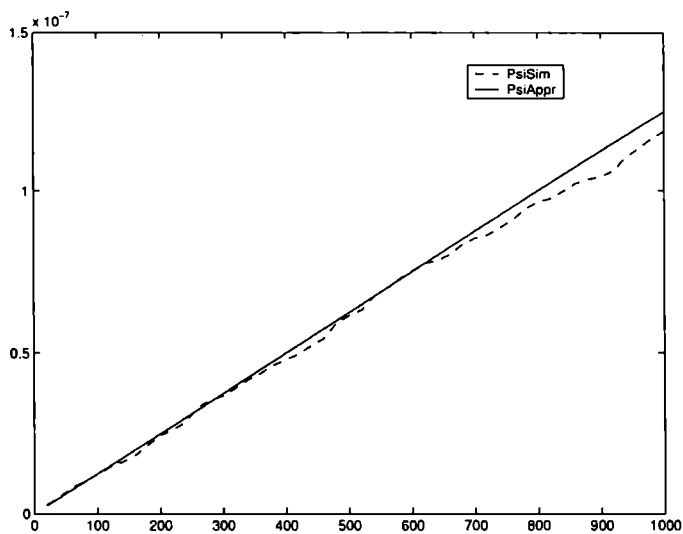
Proces Poissona jest z intensywnością λ , która spełnia równanie $\rho = \lambda(\alpha - 1)$. Poniżej opisane będą poszczególne eksperymenty i otrzymane wyniki. Przez $\text{PsiSim}(u, t)$ oznaczono wynik symulacji, $\text{RelEr}(u, t)$ oznacza zaś błąd względny, tj. iloraz błędu bezwzględnego przez $\text{PsiSim}(u, t)$, natomiast $\text{PsiAppr}(u, t)$ – wynik uzyskany za pomocą aproksymacji z pracy Asmussena i Klüppelberga [3]: dla $F \in R(-\alpha)$ i $c > 0$ otrzymuje się

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u, cu)}{\psi(u)} = 1 - (1 + (1 - \rho)c)^{-\alpha+1} > 0. \quad (7)$$

Litera B lub C przy numerze eksperymentu oznacza to, jaki algorytm został użyty.

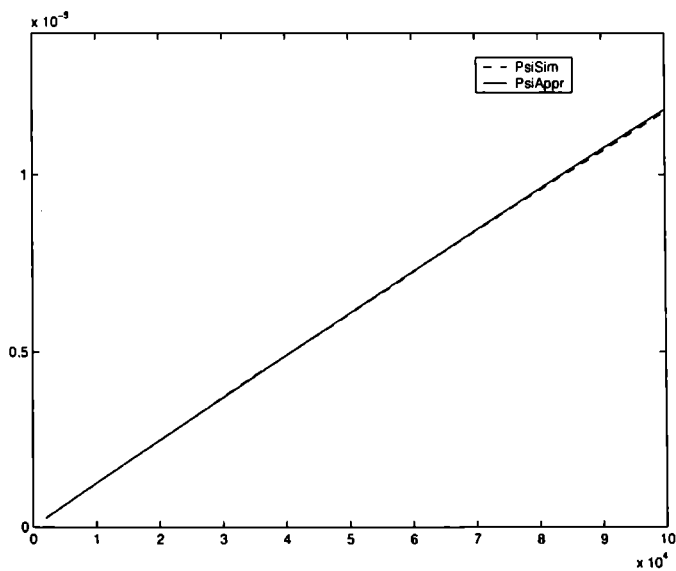
Eksperyment 1B. Przeprowadzono symulację funkcji $\psi(u, s)$, gdzie $0 \leq s \leq t$ dla $u = 10^6$, $\rho = 0,25$ i $t = 10^3$ lub odpowiednio $t = 10^5$. Wyniki zaprezentowane na rys. 1 i 2 otrzymano dzięki użyciu algorytmu B z $N = 10^6$ replikacjami. Dla $t = 10^3$ otrzymano: $\text{PsiSim}(10^6, 10^3) = 1,1875e-07$, $\text{PsiAppr}(10^6, 10^3) = 1,2493e-07$, $\text{RelEr}(10^6, 10^3) = 0,1178$. Dla $t = 10^5$ otrzymano $\text{PsiSim}(10^6, 10^5) = 1,1774e-05$, $\text{PsiAppr}(10^6, 10^5) = 1,1838e-05$, $\text{RelEr}(10^6, 10^5) = 0,0115$.

Eksperyment 2B. W wyniku przeprowadzonego eksperymentu pokazujemy błąd względny otrzymany dla różnych wartości $u = 10^k$, gdzie $k = 1, \dots, 6$ oraz $t = 10^3$. Zauważmy, że błąd względny rośnie, co znajduje wytłumaczenie w tym, że algorytm B jest mocno efektywny tylko wówczas, gdy $t/u \rightarrow c > 0$, co tutaj nie jest spełnione (zob. tab. 2).



Rys. 1. $u = 10^6$, $0 \leq s \leq 10^3$, $\rho = 0,25$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. $u = 10^6$, $0 \leq s \leq 10^5$, $\rho = 0,25$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. $u = 10^k$ $k = 1, \dots, 6$, $t = 10^3$, $N = 10^5$

k	1	2	3	4	5	6
PsiSim	0,082225	0,021473	0,002555	0,000115	3,91E-06	1,4E-07
PsiAppr	0,093318	0,0219	0,002573	0,000118	3,93E-06	1,24E-07
RelEr	0,004266	0,006155	0,012607	0,035869	0,111194	0,328619

Źródło: opracowanie własne.

Eksperyment 3B. Przeprowadzono podobny eksperyment do 2B, z tym, że $t = 0,5u$. Zauważmy, że błąd względny pozostaje prawie stały. Wyniki są przedstawione w tab. 3.

Tabela 3. $u = 10^k$ $k = 1, \dots, 6$, $t = 0,5u$, $r = 10^5$

k	1	2	3	4	5	6
PsiSim	0,011413	0,004484	0,001517	0,000482	0,000155	0,000048
PsiAppr	0,015516	0,004907	0,001552	0,000491	0,000155	0,000049
RelEr	0,017252	0,017187	0,016929	0,017166	0,016966	0,017012

Źródło: opracowanie własne.

Eksperyment 4B i C. W eksperymencie porównuje się estymatory B i C przy różnych poziomach $\rho = 0,25; 0,5; 0,75$, kiedy $u = 10^k$, dla $k = 1, \dots, 7$ oraz $t = 10^3$ ($N = 10^5$) (por. tab. 4).

Tabela 4. Błędy względne

k	B $\rho = 0,25$	B $\rho = 0,5$	B $\rho = 0,75$	C $\rho = 0,25$	C $\rho = 0,5$	C $\rho = 0,75$
1	0,004246	0,002166	0,0032	0,012356	0,007974	0,01072
2	0,00615	0,003229	0,003209	0,016316	0,006585	0,005713
3	0,01273	0,009683	0,009614	0,022711	0,015105	0,015493
4	0,035978	0,029201	0,029323	0,026306	0,018309	0,017731
5	0,115293	0,092491	0,09101	0,027331	0,019204	0,019292
6	0,373122	0,298471	0,27716	0,027512	0,019791	0,019884
7	1,385915	0,774733	0,766787	0,027231	0,019502	0,019125

Źródło: opracowanie własne.

Literatura

- [1] Asmussen S., *Applied Probability and Queues*, Springer, Berlin 2003.
- [2] Asmussen S., *Stochastic Simulation with a View Towards Stochastic Processes*, MaPhySto, University of Aarhus, Denmark 1999.

-
- [3] Asmussen S., Klüppelberg C., *Large Deviations for Subexponential Tails, with Applications to Insurance Risks*, Stoch. Proc. Appl., 1997, 103-125.
- [4] Asmussen S., Kroese D.P., *Improved Algorithms for Rare Event Simulation with Heavy Tails*, www.maphysto.dk.
- [5] Asmussen S., Rolski T., *Simulation of Finite Horizon Ruin Probabilities with Heavy Tails*, maszynopis 2005.
- [6] Błaszczyszyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004.
- [7] Frostig E., Haberman S., Levikson B., *Generalized Life Insurance: Ruin Probabilities*, Scand. Actuarial J. 2003, 136-152.
- [8] Glasserman P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, Berlin 2003.
- [9] Madras N., *Lectures on Monte Carlo Methods*, AMS, Providence 2002.
- [10] Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe*, cz. 1, WNT, Warszawa 2002.
- [11] Polskie tablice trwania życia, <http://www.stat.gov.pl/serwis/nierregularne/trwanie/index.htm>.
- [12] Pusz R., Rolski T., *Aproksymacje prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela*, maszynopis, 2004.
- [13] Rolski T., *Twisting in Applied Probability*, skrypt dostępny na stronie <http://math.uni.wroc.pl/rolski/publications.html>.
- [14] Rolski T., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, Chichester 1999.
- [15] Ross S.M., *A Course in Simulation*, Macmillan, New York 1991.
- [16] Zieliński R., *Metody Monte Carlo*, WNT, Warszawa 1970.

MC METHODS OF RARE EVENTS AND THEIR APPLICATION IN INSURANCE

Summary

The theory of rare events allows for computing probabilities of events which are very small. One considers a family $\{A(u), u > 0\}$ such that $\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A(u)) = 0$, and looks for $\eta(u)$ such that $\mathbf{P}(A(u)) = \mathbf{E}\eta(u)$, fulfilling the following optimality property $\limsup_{u \rightarrow \infty} \text{Var}(\eta(u))/(\mathbf{E}\eta(u))^2 < \infty$. Such an estimator can be devised by the method of importance sampling (IS) or conditioning. To illustrate we show two examples requiring two approaches: (a) simulations of solvency probability for a portfolio of life insurances and (b) simulation of ruin probabilities.