PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Zbigniew Palmowski

Uniwersytet Wrocławski

APROKSYMACJE PRAWDOPODOBIEŃSTWA RUINY FIRMY UBEZPIECZENIOWEJ W DYFUZYJNYM MODELU COXA*

1. Wstęp

Schmock (por. [28]) analizował statystycznie akcje WINCAT towarzystwa ubezpieczeniowego Winterthur związane z ubezpieczeniami roszczeń samochodowych w Szwajcarii, wynikającymi z wystąpienia burz i innych zdarzeń pogodowych, na skutek których ponad 6000 samochodów jednocześnie podlega szkodzie. Do analizy tych akcji zaproponował początkowo klasyczny Poissonowski sposób modelowania rezerw firmy ubezpieczeniowej. To znaczy zakładał on, że straty (roszczenia) są niezależne z jednakowym rozkładem i są rejestrowane przez towarzystwo ubezpieczeniowe ze stałą częstością (intensywnością) λ. Precyzyjniej ujmując, Schmock zakładał, że odstępy między kolejnymi roszczeniami tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym ze średnią $1/\lambda$. Wtedy liczba szkód w roku (jakimkolwiek stałym okresie) powinna mieć rozkład Poissona. Badania statystyczne wykazały, że estymator MC średniej liczby szkód wynosi $\hat{\lambda}=1,7$, estymator wariancji liczby szkód w roku jest zaś równy $\hat{\sigma}^2=2,9$. Ponieważ średnia i wariancja w rozkładzie Poissona są równe, wyniki statystyczne sugerują większą zmienność pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami szkód. Tę dodatkową zmienność można tłumaczyć wieloma czynnikami, np. tym, że:

- pogoda podlega nie tylko zmianom sezonowym, ale także zmianom w dłuższym horyzoncie czasowym z powodu wzrostu zawartości dwutlenku węgla czy też 11-letniej aktywności słońca;
- towarzystwo ubezpieczeniowe może zwiększyć swój portfel ubezpieczeń poprzez rozwój swojej działalności na inne regiony czy też łączenie się z innymi

* Finansowany przez grant 1P03A03128.

towarzystwami ubezpieczeniowymi (np. Winterthur w 1997 r. rozszerzył swoją działalność na francuskojęzyczną część Szwajcarii, łącząc się z Schweizerische Allgemaine Versichertungsgesellchaft); ta modulacja wielkości portfela może być szczególnie dobrze aproksymowana przez proces dyfuzyjny, który pojawi się w dalszej części pracy;

- gęstość liczby samochodów może ulec zmianie;
- mogą też ulec zmianie przyzwyczajenia ubezpieczonych (np. więcej osób może zacząć korzystać z garażu);
- ze względu na rozwój technologii można przypuszczać, że z czasem liczba uszkodzonych samochodów z powodu np. burzy będzie maleć.

Schmock do modelowania zwiększonej zmienności pojawiania się roszczeń użył modelu Coxa. W modelu tym intensywność pojawiania się szkód zmienia się w czasie lub – ogólniej – jest kierowana przez niezależny proces stochastyczny realizujący losową trajektorię w czasie. Innymi słowy, intensywność jest rzeczywistą dodatnią funkcją pewnego procesu stochastycznego. Model ten był analizowany przez wielu autorów – zob.: Ammeter (por. [1]), Asmussen (por. [2]), Asmussen i Rolski (por. [4]), Asmussen, Schmidli i Schmidt (por. [7]), Björk i Grandell (por. [9; 10]), Embrechts, Grandell i Schmidli (por. [16]).

W tej pracy skoncentrujemy się na modelu Coxa, w którym funkcja intensywności jest rządzona przez proces dyfuzyjny. Pozwala on na modelowanie infinitezymalnych zmian w intensywności wraz z upływem czasu. Parametry dryfu oraz wariancji procesu dyfuzyjnego idealnie nadają się do modelowania dryfu i wariancji procesu intensywności rejestrowania roszczeń (zob. [19; 20]). W wielu pracach (zob. np. [28]) dobrze udokumentowany został zwłaszcza dryf pojawiający się w funkcji intensywności.

Celem artykułu jest analiza prawdopodobieństwa ruiny firmy ubezpieczeniowej we wcześniej wspomnianym modelu Coxa, tzn. kiedy intensywność pojawiania się strat jest rządzona przez niezależny proces stochastyczny. Oczywiście bankructwo ubezpieczyciela następuje, kiedy znikną rezerwy firmy ubezpieczeniowej (spadną poniżej zera). Prawdopodobieństwo ruiny stanowi podstawę do wyliczenia ryzyka ponoszonego przez ubezpieczyciela, jest więc jedną z podstawowych wielkości matematycznych w teorii ubezpieczeń. Zgodnie z hipotezą Rossa, zwiększając zmienność przypływu roszczeń, zwiększamy prawdopodobieństwo ruiny. Celem tej pracy jest zatem oszacowanie ryzyka w modelu, w którym występuje większa zmienność w przypływie roszczeń, a więc można się też spodziewać zwiększonej szansy na bankructwo firmy ubezpieczeniowej.

Okazuje się, że zachowanie się rezerw, czyli i prawdopodobieństwa ruiny, jest istotnie różne w zależności od tego, czy roszczenia są lekkoogonowe czy ciężkoogonowe. Zwykle rozważa się tzw. roszczenia **lekkoogonowe**, tzn. takie, których rozkład ma ogon dystrybuanty dający się ograniczyć przez pewną funkcję wykładniczą. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny jest funkcją wykładniczą od rezerw początkowych. To założenie nie jest jednak spełnione w przypadku, kiedy straty są bardzo duże. Na przykład Schmock (por. [28]) statystycznie pokazał, że roszczenia płynące z uszkodzeń przez burze co najmniej 6000 samochodów jednego dnia mają rozkład Pareto z parametrem $\hat{\alpha} = 1{,}37$. To znaczy prawdopodobieństwo tego, że szkoda będzie większa niż ustalone x jest wielomianowe $x^{-1{,}37}$. Oczywiście bardzo duże straty mogą pojawić się w wyniku wielu tragicznych wydarzeń, takich jak: trzęsienie ziemi, tajfun, powódź, atak terrorystyczny itd. Roszczenia, które są wielkie, najczęściej mają rozkład **ciężkoogonowy**, czyli rozkład, którego ogon nie daje się ograniczyć przez funkcję wykładniczą $e^{-\gamma x}$. Obecnie straty tego typu są szczególnie istotne dla firm ubezpieczeniowych w latach, w których zwiększa się liczba bardzo dużych roszczeń (zob. np. [4; 5; 7]). Tabela 1 opisuje w milionach dolarów największe ubezpieczeniowe straty.

Tabela 1. Największe ubezpieczeniowe straty

Zdarzenie	Data	Strata (w mln dolarów)
Atak terrorystyczny	11.09.01	21 062
Huragan Andrew	23.08.92	20 900
Trzęsienie ziemi Northridge	17.01.94	17 312
Tajfun Mirelle	27.09.91	7 598
Sztorm Daria	25.01.90	6 441
Sztorm Lothar	26.12.99	6 382
Huragan Hugo	15.09.89	6 203
Sztorm i powódź w Europie	15.10.87	4 839
Sztorm Vivian	25.02.90	4 476
Tajfun Bart	22.09.99	4 445

Źródło: [27].

Łatwo zauważyć, że wszystkie straty wymienione w tab. 1 pojawiły się pod koniec lat osiemdziesiątych i w latach dziewięćdziesiątych, czyli w ostatnich 20 latach. Używając estymatora Hilla, można pokazać, że straty te mają rozkład Pareto z parametrem $\hat{\alpha} = 1{,}24138$, czyli wariancja tych roszczeń jest nieskończona. Można się również spytać, ile statystycznie może wynosić kolejna strata. Zakładając rozkład Pareto strat U:

$$P(U \le x) = \left(1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right) I_{\{x > \beta\}},$$

możemy wyestymować następną stratę:

$$E[U \mid U > 21062] = \frac{21062\alpha}{\alpha - 1} = 108320.$$

Szacuje się, że cały rynek ubezpieczeniowy ma 200 bln dolarów, z czego 20 bln pochodzi z rynku reasekuracyjnego. Oznacza to, że kolejna starta tej wielkości mogłaby zniszczyć cały rynek reasekuracyjny. Na przykład huragan Andrew spowodował bankructwo co najmniej 11 firm ubezpieczeniowych. W pracy pokażemy, że w przypadku rozkładu Pareto roszczeń prawdopodobieństwo ruiny jest funkcją wielomianową $u^{-\alpha}$ od początkowego kapitału u.

Co ciekawsze, sposób, w jaki dochodzi do bankructwa firmy ubezpieczeniowej w obu przypadkach rozkładu roszczeń: cieżkoogonowych i lekkoogonowych, jest skrajnie różny. Można powiedzieć, że w przypadku lekkoogonowych strat bankructwo firmy ubezpieczeniowej jest spowodowane dużą liczbą strat, czyli intensywność pojawiania się strat jest znacznie większa niż zakładana. W przypadku strat ciężkoogonowych jedna ogromna starta powoduje ruinę zarówno ubezpieczyciela, jak i łańcucha firm reasekuracyjnych.

W pracy precyzyjnie opiszemy te różnice w języku matematycznym. W szczególności udowodnimy tzw. nierówność Lundberga dla prawdopodobieństwa ruiny oraz asymptotykę tego prawdopodobieństwa, kiedy kapitał początkowy rośnie do nieskończoności. Innymi słowy, jesteśmy zainteresowani rzędem wzrostu prawdopodobieństwa ruiny wraz ze wzrostem kapitału początkowego firmy ubezpieczeniowej. Jako przykład będziemy analizować intensywność będącą funkcją kwadratową procesu Ornsteina-Uhlenbecka. Taki proces intensywności może już nie być procesem Markowa (znając wartość tego procesu intensywności, możemy nie być w stanie jednoznacznie zidentyfikować stan procesu Ornsteina-Uhlenbecka). Rezultaty opisane w tej pracy istotnie więc uogólniają dotychczas rozważane procesy intensywności w modelu Coxa, które były procesami Markowa.

W następnym punkcie opiszemy proces rezerw w modelu Coxa oraz prawdopodobieństwo ruiny. W kolejnych dwóch częściach zanalizujemy odpowiednio prawdopodobieństwo ruiny w modelu z lekkoogonowymi i ciężkoogonowymi stratami.

2. Model Coxa

Do modelowania rezerw firmy ubezpieczeniowej rozważmy następujący proces stochastyczny:

$$R(t) = u + pt - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,$$

gdzie $\{N(t), t \geq 0\}$ jest procesem Coxa z procesem rządzącym intensywnością przychodzenia szkód $\{X(t), t \geq 0\}$. To znaczy, gdy realizacją procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ jest funkcja $x(t) \in C[0, +\infty)$, wtedy dla nieujemnej funkcji rzeczywistej $\lambda : \mathrm{IR} \to$ $\to \mathrm{IR}_+ \cup \{0\}$ proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ma taki sam rozkład jak niejednorodny proces Poissona $\{N^{(x)}(t), t \geq 0\}$ z intensywnością zależną od czasu $\overline{\lambda}(t) = \lambda(x(t))$. Proces $\{\lambda(X(t)), t \geq 0\}$ będziemy nazywali procesem intensywności. Stochastyczna modulacja powoduje zatem nie tylko zmienną intensywność w czasie, ale również zmiany w tej intensywności pochodzące z losowego środowiska $X(t)$, w którym rozwija się intensywność zgłaszania szkód. Więcej na temat procesu Coxa można znaleźć w monografiach [18; 27]. W tej pracy jesteśmy zainteresowani tylko środowiskiem losowym, w którym zachodzą zmiany infinitezymalne, czyli wykluczamy gwałtowne zmiany. Idealny do modelowania tego typu zachowań wydaje się proces dyfuzyjny, w którym parametr dryfu może modelować długofalowe zachowanie się z czasem

Zakładamy, że straty $U_1, U_2, \ldots$ tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, które są niezależne od samego procesu $\{N(t), t \geq 0\}$ opisującego moment zgłaszania owych szkód. W większości przypadków te założenia są bliskie realiom. Oznaczmy przez $F_U(x)$ dystrybuantę rozkładu roszczeń. Niech u będzie początkową rezerwą firmy ubezpieczeniowej. Wybierając odpowiedni narzut na intensywność wpłat, firma ubezpieczeniowa stara się zwiększać zasób swoich rezerw. Oznacza to matematycznie, że $R(t) \to +\infty$ prawie wszędzie jak $t \to +\infty$.

Wielkość p oznacza intensywność składek i na nasze potrzeby, bez straty ogólności (poprzez skalowanie strat i początkowego kapitału), można założyć, że

$$p = 1,$$

czyli

$$R(t) = u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i.$$

Podstawą do naliczenia wcześniej wspomnianego narzutu jest prawdopodobieństwo ruiny:

$$\psi(u) = \mathrm{IP}\left(\sup_{t \geq 0} S(t) > u\right). \tag{1}$$

Opisuje ono szansę, z jaką proces nadwyżki finansowej firmy ubezpieczeniowej stanie się ujemny, czyli firma albo zbankrutuje, albo będzie zmuszona do krótkoterminowego kredytowania swoich zobowiązań. W szczególności stanowi podstawę wyliczenia ryzyka, jakie ponosi ubezpieczyciel. Oczywiście interesuje nas tylko sytuacja, kiedy początkowy kapitał u firmy ubezpieczeniowej jest bardzo duży, czyli szukamy zachowania się prawdopodobieństwa ruiny $\psi(u)$ dla dużych u. Będziemy zainteresowani szczególnie zachowaniem się asymptotycznym funkcji $\psi(u)$ dla $u \to +\infty$.

Dotychczas przy ustalonym kapitale mówiliśmy o szacowaniu ryzyka bankructwa. Można zadać jednak odwrotne pytanie: jak wielkiego potrzebujemy kapitału początkowego, przy danej intensywności wpłat (w naszym przypadku równej jeden) i rozkładzie roszczeń, aby szansa ruiny firmy była ograniczona z góry przez ustalony limit, powiedzmy $\varepsilon = 0{,}000001$. Wielkość ε podaje miarę ryzyka, które chcemy mieć pod kontrolą. W pracy dla naszego modelu znajdziemy tzw. nierówność Lundberga:

$$\psi(u) < C_1 e^{-\gamma u}$$

dla ustalonych C oraz γ. W związku z tym łatwo oszacować minimalny kapitał początkowy, który zapewni nam założone ryzyko, równy $1/\gamma(\log C_1 - \log\varepsilon)$. Tego typu rezultat otrzymamy w odniesieniu do strat małych (czyli roszczeń mających lekkoogonowy rozkład).

Do modelowania wielkich roszczeń będziemy zakładali regularnie zmieniający się rozkład roszczeń, tzn.

$$\mathrm{IP}(U > x) \approx l_U(x) x^{-\alpha_U}, \tag{2}$$

gdzie powyższa notacja oznacza, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{IP}(U > x)}{l_U(x) x^{-\alpha_U}} = 1.$$

Zakładamy, że $\alpha_U > 1$ oraz $l_U(x)$ jest funkcją wolno zmieniającą się, czyli dla ustalonego y mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l_U(xy)}{l_U(x)} = 1.$$

Jest to szczególnie wygodny w aplikacjach ciężkoogonowy rozkład roszczeń ze względu na łatwość estymacji parametru α_U (np. poprzez estymator Hilla). W ostatnim rozdziale, zakładając proste warunki, udowodnimy, że

$$\psi(u) \approx C_2 u^{-\alpha_U + 1} \quad \text{dla} \quad u \to +\infty,$$

gdzie stała C_2 jest dana *explicite*. Z tych samych powodów jak w przypadku lekkoogonowych strat rezultat ten jest również nieoceniony w szacowaniu ryzyka bankructwa firmy ubezpieczeniowej. W kolejnych punktach szczegółowo zanalizujemy oba przypadki roszczeń.

3. Lekkoogonowe roszczenia

Oznaczmy przez L przestrzeń funkcji mierzalnych na przestrzeni Banacha E. Przez rozszerzony generator A procesu $\{Z(t), t \geq 0\}$ (termin pochodzący od Stroocka i Varadhana (por. [31])) rozumiemy

$$A=\left\{(g,f)\in L\times L: M^{g}(t)\in M_{\mathrm{loc}}\right\},$$

gdzie M_{loc} jest rodziną lokalnych martyngałów, zaś

$$M^{g}(t)=g(Z(t))-\int_0^t f(Z(s))\,ds. \tag{3}$$

Identyfikujemy wszystkie wersje funkcji f z dokładnością do zbioru o mierze potencjałowej zero i oznaczamy te wszystkie wersje poprzez Ag, jeśli $(g,f)\in A$. Funkcje mierzalne $g\in L$, takie że $M^{g}\in M_{\mathrm{loc}}$ tworzą tzw. dziedzinę $D(A)$ rozszerzonego generatora. Jeśli proces ma infintezymalny generator, to na mocy twierdzenia Dynkina pokrywa się on z rozszerzonym generatorem, dziedzina rozszerzonego generatora jest zaś większa niż dziedzina infintezymalnego generatora. Zdefiniujmy operator $(A^{R}g)(r)$ w następujący sposób: jeśli realizacja procesu $\{X(t),t\geq 0\}$ jest $x(t)$, to

$$(A^{R}g)(r)=(A^{(x)}g)(r). \tag{4}$$

Jest to rozszerzony generator procesu ryzyka przy ustalonej realizacji procesu rządzącego. Dla ustalonej realizacji *x(t)* proces ryzyka *R(t)* jest kawałkami deterministyczny według nazewnictwa Davisa (por. [13]). Udowodnił on następujące twierdzenie.

Lemat 1. Operator A^{R} jest równy:

$$(A^{R}g)(t,r)=\frac{\partial}{\partial t}g(t,r)+\frac{\partial}{\partial r}g(t,r)+\lambda\big(X(t)\big)\int_0^{+\infty}\big(g(t,r-y)-g(t,r)\big)f_U\big(X(t),y\big)dy$$

z dziedziną $D(A^{Y})$ składającą się z funkcji $g(t,r):\mathrm{IR}_+\times\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ spełniających następujące dwa warunki:

a) funkcja $t\to g(t,pt)$ jest absolutnie ciągła;

b) $$\mathrm{IE}^{(x)}\left[\sum_{i=1}^{n}|\,g(\sigma_i,R(\sigma_i))-g(\sigma_i-,R(\sigma_i-))\,|\right]<+\infty \tag{5}$$

dla $n\geq 1$ i każdej realizacji x procesu $\{X(t),t\geq 0\}$, gdzie $\{\sigma_i\}$ są momentami zgłaszania kolejnych szkód.

Oczywiście proces dyfuzyjny ma infinitezymalny (rozszerzony) generator, który jest równy:

$$(A^{X}f)(z)=\frac{1}{2}a(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z)+b(z)\frac{\partial}{\partial z}f(z).$$

Załóżmy, że funkcje a i b są ciągłe oraz $\inf_z a(z)>0$ i istnieje stała V, taka że:

$$a(z)\leq V(1+z^2),\quad |b(z)|\leq V(1+|z|).$$

Wtedy funkcje dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły są w dziedzinie $D(A^X)$ rozszerzonego generatora procesu dyfuzyjnego. Należy w tym miejscu wykazać ostrożność. Funkcja $f(z)=\exp\{Kz^2\}$ ($K>0$) rozważana w dalszej części pracy jest w dziedzinie rozszerzonego generatora (zob. tw. 4.2 w [21]). Jednocześnie z twierdzenia Stroocka-Varadhana nieograniczona funkcja $f(z)$ nie jest w dziedzinie inifinitezymalnego generatora (zob. tw. 24.1 w [26], tw. 5.11 w [15] czy też tw. 1.1 w [29]). Tym samym rezultaty zaprezentowane poniżej wychodzą poza przypadki dotychczas rozpatrywane.

Zauważmy, że dwuwymiarowy proces $\{(R(t),X(t)),t\geq 0\}$ jest procesem Markowa. Palmowski (zob. [23]) znalazł rozszerzony generator dla tego procesu równy:

$$A=A^Y\oplus A^X \tag{6}$$

oraz $D\left(A^X\right)\otimes D\left(A^X\right)\subset D(A)$, gdzie domknięcie jest rozumiane w topologii jednostajnej zbieżności oraz $\oplus$ i $\otimes$ oznaczają odpowiednio sumę i produkt kroneckerowski. Równanie (6) oznacza, że

$$A(f(z)g(r))=g(r)A^X f(z)+f(z)A^{R,z}g(r),$$

gdzie $A^{R,z}$ to operator A^R, w którym podstawiamy z zamiast $X(t)$.

Niech $h(t,r,x)=f(x)e^{-\gamma r}$, gdzie f jest dodatnią, dwukrotnie różniczkowalną w sposób ciągły funkcją, czyli $f\in D(A^X)$. Korzystając z tych samych argumentów, jakie zaprezentowano w [27, s. 459], można pokazać, że jeśli

$$Ee^{\gamma U}<+\infty, \tag{7}$$

to warunek (5) jest spełniony. Jest to założenie na rozkład szkód, które mówi, że ogon tego rozkładu powinien znikać do zera szybciej niż pewna funkcja wykładnicza. Heurystycznie mówiąc, szansa pojawienia się dużej starty maleje wykładniczo wraz z wielkością tej starty. Przy powyższych założeniach $h\in D(A^Y)\otimes$ $\otimes D(A^X)\subset D(A)$, stąd z Lematu 1 w [25] wynika, że

$$L(t)=\frac{h(t,R(t),X(t))}{h(0,R(0),X(0))}\exp\left\{-\int_0^t\frac{Ah(s,R(s),X(s))}{h(s,R(s),X(s))}ds\right\}$$

jest lokalnym martyngałem. Załóżmy, że wybieramy γ oraz funkcję f tak, aby zachodziło następujące równanie:

$$Ah=0, \tag{8}$$

czyli z (6)

$$A^X f(z)-(\gamma-\lambda(z)(Ee^{\gamma U}-1))f(z)=0. \tag{9}$$

Wtedy proces

$$\{L(t)=\frac{h(t,R(t),X(t))}{h(0,R(0),X(0))}, t\geq 0\} \tag{10}$$

jest dodatnim lokalnym martyngałem o średniej 1. Z [14, s. 88] wynika, że $\{L(t), t\geq 0\}$ jest supermartyngałem. Przez $\mathbb{P}^{(w)}$ oznaczmy prawdopodobieństwo warunkowe pod warunkiem, że $X(0)=w$ oraz przez $\mathbb{E}^{(w)}$ – wartość oczekiwaną względem tego prawdopodobieństwa. Zdefiniujmy:

$$\tau(u)=\inf\{t\geq 0: R(t)<0\}.$$

Wtedy

$$\psi(u)=\mathbb{P}(\tau(u)<+\infty).$$

Rozważmy ograniczony czas zatrzymania $\tau(u)\wedge \bar{u}$ względem naturalnej, prawostronnie ciągłej filtracji procesu ($R(t)$, $X(t)$). Z twierdzenia o czasie zatrzymania mamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(w)}L(0) &\geq \mathbb{E}^{(w)}\left[L(\tau(u)\wedge \bar{u})\right]\\ &\geq \mathbb{E}^{(w)}\left[L(\tau(u));\tau(u)\leq \bar{u}\right]=\mathbb{E}^{(w)}\left[L(\tau(u))\mid \tau(u)\leq \bar{u}\right]\mathbb{P}^{(w)}\left(\tau(u)\leq \bar{u}\right).\end{aligned}$$

Załóżmy, że

$$\mathbb{E}^{(0,u,w)}\left[L(\tau(u))\mid \tau(u)<+\infty\right]>0. \tag{11}$$

Biorąc $\bar{u}\to+\infty$, uzyskujemy:

$$\mathbb{P}^{(w)}\left(\tau(u)<+\infty\right)\leq \frac{\mathbb{E}^{(w)}L(0)}{\mathbb{E}^{(w)}\left[L(\tau(u))\mid \tau(u)<+\infty\right]}. \tag{12}$$

Zauważmy, że $L(0)=e^{-\gamma u}f(X(0))$ oraz $R(\tau(u))<0$ na zdarzeniu $\{\tau(u)<+\infty\}$, stąd uzyskujemy tzw. nierówność Lundberga.

Twierdzenie 1. Załóżmy, że $R(t)\to+\infty$ prawie wszędzie jak $t\to+\infty$. Niech γ oraz funkcja f rozwiązują równanie (9) przy założeniach (7), (11) oraz że $\mathbb{E}L(0)<+\infty$. Wtedy zachodzi następująca nierówność:

$$\psi(u)\leq C_1 e^{-\gamma u},$$

gdzie: $C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(w)}{\mathrm{IE}^{(w)}\left[f\left(X\left(\tau(u)\right)\right) \mid \tau(u) < +\infty\right]} dF^0(w),$

$F^0(x)$ – dystrybuanta zmiennej losowej $X(0)$.

Równanie (9) daje się rozwiązać w odniesieniu do wielu przykładów. Najciekawszy i najłatwiejszy do modelowania dryfu i wariancji procesu intensywności wydaje się proces rządzący Ornsteina-Uhlenbecka. Ten proces dyfuzyjny ma następujący generator:

$$(Af)(z) = \frac{1}{2} a \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) - bz \frac{\partial}{\partial z} f(z)$$

dla $a > 0$ i $b \in \mathrm{IR}$. Czyli $\{X(t), t \geq 0\}$ rozwiązuje następujące równanie stochastyczne:

$$dX(t) = \sqrt{a} dB(t) - bX(t) dt, \tag{13}$$

gdzie $\{B(t), t \geq 0\}$ jest ruchem Browna. Będziemy tutaj rozważać stacjonarny proces Ornsteina-Uhlenbecka. Dla niego zmienna losowa $X(0)$ ma rozkład normalny ze średnią równą zeru oraz wariancją równą $\frac{a}{2b}$. Ponieważ $X(t)$ może również przyjmować wartości ujemne, nałożymy funkcję kwadratową $\lambda(z) = z^2$ na proces $X(t)$, aby uzyskać proces intensywności. Na funkcję f proponujemy funkcję wykładniczą, czyli $f(z) = \exp\{Kz^2\}$, dla pewnego

$$0 < K < \frac{b}{a}. \tag{14}$$

Zauważmy, że wtedy $\mathrm{IE}L(0) < +\infty$. Rzeczywiście,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dF^0(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - K\frac{a}{b}}} < +\infty. \tag{15}$$

Ponadto $f(y) \geq 1$, w związku z czym (11) jest spełniony i

$$C_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - K\frac{a}{b}}}. \tag{16}$$

Równanie (9) sprowadza się do następującego równania:

$$\frac{1}{2} a(4z^2K^2 + 2K) - 2bz^2K - \gamma + z^2(Ee^{\gamma U} - 1) = 0$$

dla każdego z.

Stąd

$$K=\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{Ee^{\gamma U}-1}{2a}}<\frac{b}{a} \tag{17}$$

oraz γ rozwiązuje równanie

$$\gamma=\frac{b-\sqrt{b^2-2a(Ee^{\gamma U}-1)}}{2}. \tag{18}$$

Zauważmy, że

$$\gamma\leq\overline{\gamma}, \tag{19}$$

gdzie $\overline{\gamma}$ rozwiązuje równanie $Ee^{\overline{\gamma}U}=\frac{b^2}{2a}+1$, w związku z czym założenie (7) jest również spełnione. Równanie (16) determinujące γ może być w dalszym ciągu rozwiązywane w odniesieniu do konkretnych przykładów rozkładu roszczeń. Na przykład załóżmy, że roszczenia mają rozkład wykładniczy ze średnią μ. W celu uproszczenia rachunków załóżmy, że $a = 1$. Wtedy

$$\gamma=\frac{b\mu+1}{2\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu(2b-\mu)}{(b\mu+1)^2}}\right) \tag{20}$$

oraz

$$K=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{\mu\gamma}{1-\mu\gamma}}. \tag{21}$$

W następnym punkcie pokażemy, że jeśli $\mu<2b$, to proces rezerw rośnie nieograniczenie z prawdopodobieństwem równym jeden. Podsumowując, uzyskaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Niech $\mu<2b$. Jeśli proces kierujący intensywnością jest stacjonarnym procesem Ornsteina-Uhlenbecka danym poprzez (13) z $a = 1$ oraz roszczenia mają rozkład wykładniczy ze średnią μ, to

$$\psi(u)\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-K\frac{1}{b}}}e^{-\gamma u},$$

gdzie stała K jest podana w (21), zaś γ – w (20).

4. Ciężkoogonowe roszczenia

Załóżmy, że rozkład roszczeń jest regularnie zmieniający się, tzn.

$$\mathbb{P}(U>x)\approx l_U(x)x^{-\alpha_U}, \tag{22}$$

gdzie U jest zmienną losową z rozkładem roszczeń, $\alpha_U > 1$, $\alpha_U \notin N$ oraz $l_U(x)$ jest funkcją wolno zmieniającą się.

Zauważmy, że ogon tego rozkładu nie daje się zdominować z góry przez żadną funkcję wykładniczą. Szczególnie roszczenia mogą mieć nieskończoną wariancję. Jest to przykład rozkładu z tzw. ciężkim ogonem. Rozkład ten jest szczególnie łatwy do estymacji. Powstała już bardzo bogata literatura dotycząca m.in. estymacji parametru α_U (zob. np. estymator Hilla), dlatego w tym punkcie skoncentrujemy się tylko na tym rozkładzie szkód.

Załóżmy dodatkowo, że $\{X(t), t \geq 0\}$ jest dodatnio rekurencyjnym procesem dyfuzyjnym. Proces $X(t)$ jest wtedy procesem regenerującym z okresami regeneracji $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \dots$. Wówczas $\{T_{n+1} - T_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie reprezentowanym przez zmienną losową T. Zdefiniujmy:

$$Z = \int_{T_n}^{T_{n+1}} \lambda(X(t))\, dt = \int_0^T \lambda(X(s))\, ds.$$

Oznaczmy przez $m_{1,Z}$, $m_{1,T}$, $m_{1,U}$ odpowiednio średnie zmiennych losowych Z, T oraz U.

Niech S będzie zmienną losową opisującą wpływ kapitału po odjęciu roszczeń w trakcie jednego okresu regeneracyjnego procesu sterującego intensywnością zgłoszeń szkód. To znaczy

$$S = \sum_{i=1}^{N(T)} U_i - T.$$

Zauważmy, że na to, aby proces rezerw rósł do plus nieskończoności, potrzeba aby $-ES > 0$, czyli aby

$$-ES = m_{1,T} - m_{1,Z} m_{1,U} > 0. \tag{23}$$

Oznaczmy również $S^+ = \sum_{i=1}^{N(T)} U_i$.

Załóżmy, że

$$\mathrm{IP}(S^+ > x) \approx \mathrm{IP}(S > x) \approx x^{-\alpha_S} l_S(x), \tag{24}$$

gdzie $\alpha_S > 1$ oraz $l_S(x)$ jest funkcją wolno zmieniającą się.

Asmussen, Schmidli i Schmidt (por. [7, lem. 5.1]) udowodnili, że jeśli

$$\exists \delta > 0: \qquad \mathrm{IE}e^{\delta Z} < +\infty, \tag{25}$$

to warunek (24) jest spełniony. Od tego momentu zakładamy, że proces dyfuzyjny $X(t)$ spełnia powyższe założenie. Zauważmy, że

$$S(T_n)+\sum_{i=N(T_n)+1}^{N(T_{n+1})} U_i-(T_{n+1}-T_n)\leq \sup_{T_n\leq t<T_{n+1}} S(t)\leq S(T_n)+\sum_{i=N(T_n)+1}^{N(T_{n+1})} U_i.$$

Zatem, korzystając z (24) oraz z [5; 7, tw. 3.3], mamy że

$$\psi(u)\approx \mathbb{P}(\max_{n\geq 1}(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)>u),$$

gdzie Y_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie zmiennej losowej S. Z wniosku 3.1 w [7] uzyskujemy asymptotykę prawdopodobieństwa ruiny w języku zmiennej losowej $-S$:

$$\psi(u)\approx\frac{1}{\alpha_S-1}\frac{1}{-ES}l_S(u)u^{-\alpha_S+1}, \tag{26}$$

z czego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Załóżmy warunek nieograniczonego wzrostu rezerw (23). Niech warunek (25) jest spełniony, roszczenia zaś mają rozkład regularnie zmieniający się (22). Wtedy następująca asymptotyka prawdopodobieństwa ruiny jest prawdziwa:

$$\psi(u)\approx C_2 l_U(u)u^{-\alpha_U+1}, \tag{27}$$

gdzie

$$C_2=\frac{1}{\alpha_U-1}m_{1,Z}\frac{1}{m_{1,T}-m_{1,U}m_{1,Z}}. \tag{28}$$

Dowód. Zauważmy, że na mocy (24) i (26) wystarczy wyrazić asymptotykę ogona dystrybuanty zmiennej losowej S^+ w terminach naszego modelu. Oznaczmy przez $L_W(s)=Ee^{-sW}$ transformatę Laplace'a zmiennej losowej W. Wprost z definicji S^+ wynika, że

$$L_{S^+}(s)=L_Z\left(\log L_U(s)^{-1}\right).$$

Poza tym

$$\log(1/x)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i}(x-1)^i,$$

stąd

$$\log\left(L_U(s)^{-1}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i}(L_U(s)-1)^i.$$

Niech $n = [a_U]$. Twierdzenia Karamaty i twierdzenia Tauberowskie (zob. [8, s. 333]) wiążą asymptotykę ogona dystrybuanty w nieskończoności z zachowaniem transformaty Laplace'a w zerze. W szczególności z (22) oraz (25) otrzymujemy rozwinięcia Kingmana-Taylora transformaty Laplace'a (zob. [12; 30] oraz [7, wnioski 3.1-3.2)]:

$$L_U(s) = 1 - m_{1,U}s + \frac{1}{2}EU^2s^2 - K + \frac{(-1)^n}{n!}EU^n + O\left((-1)^n\Gamma(1-\alpha_U)s^{\alpha_U}l_U(1/s)\right),$$

gdzie $\Gamma(\cdot)$ jest funkcją gamma oraz

$$L_Z(s) = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}EZ^is^i,$$

stąd

$$(-1)^n\left(L_{S^+}(s) - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}E(S^+)^is^i\right) \approx m_{1,Z}O\left((-1)^n\Gamma(1-\alpha_U)s^{\alpha_U}l_U(1/s)\right).$$

Z twierdzeń Karamaty i twierdzeń Tauberowskich uzyskujemy ponownie, że

$$\mathrm{IP}(S^+ > x) \approx m_{1,Z}l_U(x)x^{-\alpha_U}.$$

To kończy dowód twierdzenia na mocy asymptotyki (26) oraz nierówności (23).

Pokażemy teraz, jak w konkretnym przypadku sprawdzić warunki (23) i (25) oraz obliczyć średnie $m_{1,Z}$ i $m_{1,T}$ potrzebne do identyfikacji stałej w (28). Na mocy twierdzenia 3 pozwoli to na uzyskanie asymptotyki prawdopodobieństwa ruiny.

Tak jak w poprzednim rozdziale za proces $X(t)$ weźmiemy proces Ornsteina-Uhlenbecka zdefiniowany w (13). W celu ułatwienia rachunków załóżmy, że $a = 1$, czyli, tak jak poprzednio,

$$dX(t) = dB(t) - bX(t)dt$$

oraz że $X(0) = 0$. Proces Ornsteina-Uhlenbecka jest regenerujący z momentami regeneracji

$$T_{n+1} = \inf\{t \geq S_n : X(t) = 0\}, \tag{29}$$

gdzie

$$S_n = \inf\{t \geq T_n : |X(t)| = 1\} \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{30}$$

Przyjmijmy $\lambda(x) = x^2 + k$, dla $k \geq 0$. Zatem proces intensywności zgłaszania roszczeń jest równy $\{X^2(t) + k, t \geq 0\}$.

Na początku udowodnimy warunek (25), czyli, że

$$\mathrm{IE}_0 e^{\delta Z} = \mathrm{IE}_0 \exp\{\delta \int_0^T (X^2(t) + k)\, dt\} < +\infty \tag{31}$$

dla pewnego $\delta > 0$, gdzie $T = T_1$ oraz IE_x oznacza branie wartości oczekiwanej kiedy $X(0) = x$.

Metoda liczenia funkcjonału (31) polega na wykładniczej zamianie miary, tak aby całka z kwadratowego funkcjonału zniknęła i policzenie (31) sprowadziło się do policzenia funkcji generującej momenty pewnych czasów wyjścia dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka. Innymi słowy, sprowadzimy liczenie zmiennej losowej z drugiego chaosu Wienera do liczenia zmiennej losowej pochodzącej z pierwszego chaosu Wienera. Wprowadźmy następującą zamianę miary

$$\frac{dQ_{|F_t^X}}{d\mathrm{IP}_{|F_t^X}} = M(t), \tag{32}$$

gdzie

$$M(t) = \exp\left\{-\frac{\kappa^2 - b^2}{2} \int_0^t X^2(s)\, ds - (\kappa - b) \int_0^t X(s)\, dX(s)\right\} \tag{33}$$

$$= \exp\left\{-\frac{\kappa^2 - b^2}{2} \int_0^t X^2(s)\, ds - \frac{\kappa - b}{2}(X^2(t) - X^2(0) - t)\right\} \tag{34}$$

jest martyngałem o średniej równej 1 (zob. [31, tw. 4.6; 26, tw. 27.1), $\{F_t^X\}_{t\geq 0}$ jest zaś prawostronnie ciągłą naturalną filtracją procesu $X(t)$. Zauważmy, że miara Q jest zdefiniowana na przestrzeni probabilistycznej $(C[0,+\infty), F, \{F_t^X\}_{t\geq 0})$. Poza tym na nowej przestrzeni probabilistycznej proces $\{X(t), t \geq 0\}$ jest również procesem Ornsteina-Uhlenbecka z parametrem κ (zob. [22; 25; 33]). Oznaczmy przez IE_0^Q wartość oczekiwaną względem nowej miary probabilistycznej. Niech $\kappa = \sqrt{b^2 - 2\delta}$ dla $\delta < b^2/2$. Z twierdzenia o czasie zatrzymania mamy:

$$\begin{aligned} \mathrm{IE}_0 e^{\delta Z} &= \mathrm{IE}_0 e^{\delta \int_0^T X^2(t)\,dt + \delta k T} = \mathrm{IE}_0^Q e^{\delta \int_0^T X^2(t)\,dt + \delta k T} M(T)^{-1} = \\ &= \mathrm{IE}_0^Q \exp\left\{\frac{\kappa - b}{2}(X^2(T) - X^2(0) - T) + \delta k T\right\} = \mathrm{IE}_0^Q e^{\frac{b-\kappa+2\delta k}{2} T}. \end{aligned} \tag{35}$$

Niech $\hat{\delta} = \frac{b - \kappa + 2\delta k}{2}$. Z twierdzenia o monotonicznej zbieżności wynika, że

$$\hat{\delta} \to 0^+, \quad \text{jeśli} \quad \delta \to 0^+. \tag{36}$$

Zatem do udowodnienia (25) wystarczy znaleźć $\hat{\delta} > 0$, taką że

$$\mathrm{IE}_0^Q e^{\hat{\delta}T} \mathrm{IE}_0^Q t^{\hat{\delta}T} < +\infty. \tag{37}$$

Z własności Markowa procesu Ornsteina-Uhlenbecka otrzymujemy:

$$\mathrm{IE}_0^Q e^{\hat{\delta}T} = \mathrm{IE}_0^Q e^{\hat{\delta}S_0} \mathrm{IE}_1^Q e^{\hat{\delta}\hat{T}}, \tag{38}$$

gdzie: S_0 – czas wyjścia z przedziału $[-1,1]$,

$\hat{T} = \inf\{t \geq 0 : X(t) = 0 \text{ i } X(0) = 1\}$.

Zauważmy, że na nowej przestrzeni probabilistycznej parametr dryfu procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ zależy od δ, zatem również od $\hat{\delta}$.

Z lematu 1 w [24] oraz z [33, s. 258] wynika, że istnieje tak małe $\delta_0 > 0$, że dla każdego $0 < \delta \leq \delta_0$ mamy

$$\mathrm{IE}_0^Q e^{\hat{\delta}S_0} < +\infty. \tag{39}$$

Podobnie z lematu 2 w [24] wynika, że jeśli $\mathrm{IE}_1^Q \hat{T}$ jest ograniczone, to również

$$\mathrm{IE}_1^Q e^{\hat{\delta}\hat{T}} < +\infty.$$

Wtedy również zachodzi (37) i stąd także (25).

Do wyliczenia $\mathrm{IE}_1^Q \hat{T}$ użyjemy transformaty Laplace'a. Transformaty czasów przejścia czy też wyjścia z danego przedziału można uzyskać, stosując formułę Feynmana-Kaca i rozwiązując odpowiednie równanie różniczkowe (zob. [11; 34]). Oznaczmy przez $D_{-\mu}(x)$ funkcję paraboliczno-cylindryczną zdefiniowaną poprzez

$$\begin{aligned} D_{-\mu}(x) = e^{-x^2/4} 2^{-\mu/2} \sqrt{\pi} \Bigg\{ &\frac{1}{\Gamma((\mu+1)/2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(\mu+2)\ldots(\mu+2k-2)}{3 \times 5\, L(2k-1)k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k \right) - \\ &- \frac{x\sqrt{2}}{\Gamma(\mu/2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\mu+1)(\mu+3)\ldots(\mu+2k-1)}{3 \times 5\, L(2k+1)k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{40}$$

Niech

$$s_1(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2\ldots(2k-2)}{3 \times 5\, L(2k-1)k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k + \frac{x^2}{2} \tag{41}$$

oraz

$$s_2(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k. \tag{42}$$

Borodin i Salminen (por. [11, s. 429]) udowodnili następujący lemat.

Lemat 2. Oznaczmy przez

$$H_z = \inf\{t \geq 0 : X(t) = z\}$$

pierwszy moment przejścia przez poziom z. Wtedy

$$L_{H_z}(s) = \mathbb{E}_x e^{-sH_z} = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^2 b)/2} D_{-s/b}\left(-\sqrt{2b}\,x\right)}{e^{(z^2 b)/2} D_{-s/b}\left(-\sqrt{2b}\,z\right)} & \text{dla } x \leq z, \\ \\ \dfrac{e^{(x^2 b)/2} D_{-s/b}\left(\sqrt{2b}\,x\right)}{e^{(z^2 b)/2} D_{-s/b}\left(\sqrt{2b}\,z\right)} & \text{dla } z \leq x, \end{cases}$$

oraz

$$\mathbb{E}_x H_z = \begin{cases} \dfrac{1}{b}\left[(s_1(z\sqrt{2b}) - s_1(x\sqrt{2b})) + \sqrt{b\pi}(z-x) + \sqrt{b\pi}(zs_2(z\sqrt{2b}) - xs_2(x\sqrt{2b}))\right] \text{dla } x \leq z, \\ \dfrac{1}{b}\left[\sqrt{b\pi}(xs_2(x\sqrt{2b}) - zs_2(z\sqrt{2b})) - (s_1(x\sqrt{2b}) - s_1(z\sqrt{2b})) + \sqrt{b\pi}(x-z)\right] \text{dla } x \geq z. \end{cases}$$

Z lematu 2 wnioskujemy, że:

$$\mathbb{E}_1^{\varrho}\hat{T} = -\frac{d}{ds} L^{\hat{T}}(s)_{|s=0+} = \frac{1}{\kappa}\left[\sqrt{\kappa\pi}\, s_2(\sqrt{2\kappa}) - s_1(\sqrt{2\kappa}) + \sqrt{\kappa\pi}\right] \leq \frac{2}{\sqrt{b}}(s_2(\sqrt{2b}) + 1) \quad (43)$$

dla $\delta \leq \frac{3b^2}{8}$ (wtedy $\kappa \leq b/2$). Zatem warunek (25) jest spełniony.

Pozostaje nam tylko znaleźć $m_{1,T}$ oraz $m_{1,Z}$ potrzebnych do identyfikacji stałej (28) w głównym twierdzeniu 3. Zauważmy, że

$$m_{1,T} = \mathbb{E}_0 T = \mathbb{E}_0 S_0 + \mathbb{E}_1 \hat{T}. \quad (44)$$

Z lematu 2:

$$\mathbb{E}_1 \hat{T} = \frac{1}{b}\left[\sqrt{b\pi}\, s_2(\sqrt{2b}) - s_1(\sqrt{2b}) + \sqrt{b\pi}\right]. \quad (45)$$

Używając ponownie transformaty Laplace'a, policzymy $\mathbb{E}_0 S_0$. Wprowadźmy nową funkcję specjalną:

$$S(\mu, x, y) = \frac{\Gamma(\mu)}{\pi} e^{(x^2+y^2)/4}\left(D_{-\mu}(-x)D_{-\mu}(y) - D_{-\mu}(x)D_{-\mu}(-y)\right).$$

Z [11, s. 434] wynika kolejny lemat.

Lemat 3. Niech $H_{a,z} = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (a,z)\}$. Wtedy dla $a \leq x \leq z$

$$L_{H_{a,z}}(s) = \mathrm{IE}_x e^{-sH_{a,z}} = \frac{S\left(\frac{s}{b}, z\sqrt{2b}, x\sqrt{2b}\right) + S\left(\frac{s}{b}, x\sqrt{2b}, a\sqrt{2b}\right)}{S\left(\frac{s}{b}, z\sqrt{2b}, a\sqrt{2b}\right)}$$

oraz

$$\mathrm{IE}_x H_{a,z} = \frac{A(x,a,z)}{b\left(z\left(1+s_2\left(z\sqrt{2b}\right)\right) - a\left(1+s_2\left(a\sqrt{2b}\right)\right)\right)},$$

gdzie

$$\begin{aligned} A(x,a,z) = {} & z\left(1+s_2\left(z\sqrt{2b}\right)\right)\left(s_1\left(a\sqrt{2b}\right) - s_1\left(x\sqrt{2b}\right)\right) + \\ & + a\left(1+s_2\left(a\sqrt{2b}\right)\right)\left(s_1\left(x\sqrt{2b}\right) - s_1\left(z\sqrt{2b}\right)\right) + \\ & + x\left(1+s_2\left(x\sqrt{2b}\right)\right)\left(s_1\left(z\sqrt{2b}\right) - s_1\left(a\sqrt{2b}\right)\right). \end{aligned}$$

Z powyższego lematu bezpośrednio uzyskujemy

$$m_{1,S_0} = \mathrm{IE}_0^X S_0 = \frac{1}{b} s_1\left(\sqrt{2b}\right). \tag{46}$$

Stąd z (44-45) mamy:

$$m_{1,T} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}\left[s_2(\sqrt{2b}) + 1\right]. \tag{47}$$

Aby policzyć $m_{1,Z}$ użyjemy zamiany miary (32), używając martyngału

$$M(t) = \exp\left\{-\frac{\tilde{\kappa}^2 - b^2}{2}\int_0^t X^2(s)\,\mathrm{d}s - \frac{\tilde{\kappa} - b}{2}\left(X^2(t) - X^2(0) - t\right)\right\} \tag{48}$$

dla $\tilde{\kappa} = \sqrt{b^2 + 2s}$. Podobnie jak poprzednio, stosując twierdzenie o czasie zatrzymania, otrzymujemy

$$L_Z(s) = \mathrm{IE}_0 e^{-s\int_0^T (X^2(t)+k)\,\mathrm{d}t} = \mathrm{IE}_0^Q e^{-\hat{s}T} = \mathrm{IE}_0^Q e^{-\hat{s}S_0}\,\mathrm{IE}_1^Q e^{-\hat{s}\hat{T}},$$

gdzie $\hat{s} = \frac{\kappa - b + 2sk}{2}$ oraz na nowej przestrzeni probabilistycznej proces $\{X(t), t \geq 0\}$ jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka z parametrem $\tilde{\kappa}$. Z lematów 2 i 3 mamy:

$$\mathrm{IE}_0^Q e^{-\hat{s}S_0} = \frac{S\left(\hat{s}/\tilde{\kappa}, \sqrt{2\tilde{\kappa}}, 0\right) + S\left(\hat{s}/\tilde{\kappa}, 0, -\sqrt{2\tilde{\kappa}}\right)}{S\left(\hat{s}/\tilde{\kappa}, \sqrt{2\tilde{\kappa}}, -\sqrt{2\tilde{\kappa}}\right)},$$

oraz

$$\mathbb{E}_1^Q e^{-\hat{s}\hat{T}} = \frac{e^{\tilde{\kappa}/2} D_{-\frac{\hat{s}}{\tilde{\kappa}}}\left(\sqrt{2\tilde{\kappa}}\right)}{D_{-\frac{\hat{s}}{\tilde{\kappa}}}(0)}.$$

Zatem

$$m_{1,Z} = -\frac{d}{ds} L_Z(s)_{|s=0^+} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}\left(\left(s_2(\sqrt{2b}\right)+1\right)\left(\frac{1}{2b}+k\right). \tag{49}$$

Warunek nieograniczonego wzrostu rezerw firmy ubezpieczeniowej (23) na mocy (47) i (48) ma postać: $m_{1,U} < \frac{2b}{1+2bk}$. Podsumowując, udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Niech $\{X(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Ornsteina-Uhlenbecka z parametrem dryfu b startującym z zera. Załóżmy, że $\{X^2(t)+k, t \geq 0\}$ ($k \geq 0$) jest procesem intensywności zgłaszania szkód. Jeśli roszczenia mają rozkład regularnie się zmieniający (22) oraz $m_{1,U} < \frac{2b}{1+2bk}$, to

$$\psi(u) \approx \frac{1}{\alpha_U - 1} \frac{(1/2b+k)}{1 - m_{1,U}(1/2b+k)} \, l_U(u) u^{-\alpha_U+1}.$$

Więcej szczegółowych przykładów można znaleźć w [24]. W szczególności jest tam zanalizowany przykład niemarkowskiego procesu intensywności $\{(X(t)+d)^2, t \geq 0\}$.

Podziękowania

Pragnąłbym podziękować profesorowi T. Rolskiemu, dzięki któremu rozpocząłem zaprezentowane badania.

Literatura

[1] Ammeter H., *A Generalization of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic Probabilities*, „Scand. Aktuarietidskr" 1948, 31, 171-198.

[2] Asmussen S., *Risk Theory in a Markovian Environment*, „Scand. Actuarial J." 1989, 2, 69-100.

[3] Asmussen, S., Henriksen L.F., Klüppelberg C., *Large Claims Approximations for Risk Process in a Markovian Environment*, „Stoch. Proc. Appl." 1994, 54, 29-43.

[4] Asmussen S., Rolski T., *Risk Theory in a Periodic Environment: the Cramér-Lundberg Approximation and Lundberg Inequality*, „Math. Oper. Res.", 1994, 19 (2), 410-433.

[5] Asmussen S., Klüppelberg C., *Large Deviations Results in the Presence of Heavy Tails, with Applications to Insurance Risk*, „Stoch. Proc. Appl." 1996, 64, 103-125.
[6] Asmussen S., Klüppelberg C., Sigman K., *Sampling at Subexponential Times, with Queueing Applications*, „Stoch. Proc. Appl." 1999, 79 , 265-286.
[7] Asmussen S., Schmidli H., Schmidt V., *Tail Probabilities for Non-Standard Risk and Queueing with Subexponential Jumps*, „Adv. in Appl. Prob." 1999, 31 (2), 422-447.
[8] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L., *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.
[9] Björk T., Grandell J., *Exponential Inequalities for Ruin Probabilities in the Cox Case*, „Scan. Actuarial J." 1988, 1-2,. 77-111.
[10] Björk T., Grandell J., *Lundberg Inequalities in a Diffusion Environment*, 1998 (manuscript).
[11] Borodin A.N., Salminen P., *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*, Birkhauser Verlag 1996.
[12] Cohen J.W., *Some Results on Regular Variation for Distributions in Queueing and Fluctuation Theory*, „J. Appl. Probab." 1973, 10, 343-353.
[13] Davis M.H.A., *Markov Models and Optimization*, Chapman and Hall, London 1993.
[14] Dellacherie C., Meyer P., *Probabilities and Potential B*, North-Holland Publishing Company, New York 1982.
[15] Dynkin E.B., *Markov Processes*, vol. I, Springer Verlag, Berlin 1965.
[16] Embrechts P., Grandell J., Schmidli H., *Finite-Time Lundberg Inequalities in the Cox Case*, „Scand. Actuarial J." 1993, 1, 17-41.
[17] Embrechts P., Veraverbeke N., *Estimates for the Probability of Ruin with a Special Emphasis on the Possibility of Large Claims*, „Insurance. Math. Econom." 1982, 1, 55-72.
[18] Grandell J., *Aspects of Risk Theory*, Springer Verlag, New York 1991.
[19] Grigelionis B., *On Lundberg Inequalities in a Markovian Environment*, „Proc. Winterschool on Stochastic Analysis and Appl.", Akademie Verlag, Berlin 1992.
[20] Grigelionis B., *Two-Sided Lundberg Inequalities in a Markovian Environment*, 1992 (manuscript).
[21] Karatzas I., Shreve S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York 1998.
[22] Leblanc B., Renault O., Scaillet O., *A Correction Note on the First Passage Time of an Ornstein-Uhlenbeck Process to a Boundary*, „Finance Stochast." 2000, 4, 109-111.
[23] Palmowski Z., *Lundberg Inequalities in a Diffusion Environment Insurance: Mathematics and Economics*, 2002, 31(2), 303-313.
[24] Palmowski Z., *Tail Probabilities for a Risk Process with Subexponential Jumps in a Regenerative and Diffusion Environment*, „Probability and Mathematical Statistics" 2002, 22(2), 381-405.
[25] Palmowski Z., Rolski T., *A Technique for Exponential Change of Measure for Markov Processes*, „Bernoulli" 2002, 8(6), 767-785.
[26] Rogers L.C.G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, vol. 2: *Ito Calculus*, John Wiley and Sons Inc., New York 1987.
[27] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugles J.L. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons Inc., New York 1999.
[28] Schmock U., *Esimating the Value of the WinCAT Coupons of the Winterhur Insurance Convertible Bond*, Joint Day Proceedings of tha ASTIN/AFIR, Colloquia, Cairns 1997, 231-259.
[29] Schoutens W., *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*. Lecture in Notes in Statistics, 146, Springer Verlag, New York 2000.
[30] Stam A.J., *Regular Variation of the Tail of a Subordinated Probability Distribution*, „Adv. Appl. Probab." 1973, 5, 308-327.

[31] Stroock D., *Lectures on Stochastic Analysis: Diffusion Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.
[32] Stroock D., Varadhan S.R.S., *Diffusion Processes with Continuous Coefficients. I and II*, „Comm. Pure & Appl. Math." 1969, 22, 345-400 and 479-530.
[33] Wentzell A.D., *Kurs teorii slucajnych processov*, Nauka, Moskwa 1975.
[34] Yor M., *Some Aspects of Brownian Motion*, Birhäuser, Basel 1992.

APPROXIMATIONS OF THE RUIN PROBABILITY OF AN INSURANCE COMPANY IN A DIFFUSION COX MODEL

Summary

Schmock (see [28]) suggested a random intensity of arrivals of claims in the portfolio of the vehicle insurance policies of the Winterhur insurance company in Switzerland. This variability may be explained by a random number of policies in a portfolio, increasing market share, change of habits of the clients, dependence on the season and so on. To catch these changes in the intensity of the arrival process of the claims we analyze diffusion type of variability. In the paper we construct diffusion Cox model describing the risk reserve process of an insurance company. In this model we prove Lundberg inequalities and approximations of the ruin probability. Ruin probability describes the chance that reserves of an insurance company become negative and it is a basis for calculating the risk of the insurer. It is then one of the most basic quantities in the insurance theory. In this paper we will explain the difference of the fluctuations of the reserves of an insurance company in the case of small, classic arriving claims and huge claims coming from storms, earthquakes, terrorist attacks etc. Mathematical methods are based on the martingale techniques and the theory of heavy-tailed random walks introduced in author's papers [23; 24].