Na prawach rękopisu

INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ I MECHANIKI PŁYNÓW
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport Nr I-20/3 - serii PRE Nr 002/79

ZASTOSOWANIE METODY PROSTYCH DO NUMERYCZNEGO WYZNACZANIA ROZKŁADÓW PRĘDKOŚCI PULSUJĄCEGO PRZEPŁYWU W PRZEWODZIE O ELASTYCZNYCH ŚCIANKACH

Praca doktorska

Henryk KUDELA

P r o m o t o r

Doc.dr hab. Andrzej KRZYWICKI

Słowa kluczowe: metody numeryczne
mechanika płynów
elastyczne ścianki

WROCŁAW, 1979

P r o m o t o r o w i,

Panu Docentowi Andrzejowi KRZYWICKIEMU składam wyrazy podziękowania i wdzięczności za okazaną opiekę i udzielenie wielu bezcennych wskazówek przy realizacji pracy.

Wyrażam podziękowanie Dyrekcji Instytutu I-20, za poparcie finansowe przeprowadzonych badań.

Miłym obowiązkiem moim jest również podziękować Kolegom z Zespołu Dydaktycznego Mechaniki Płynów za życzliwą pomoc przy realizacji pracy.

Mgr inż. Henryk KUDELA
Instytut Techniki Cieplnej
i Mechaniki Płynów
Politechniki Wrocławskiej
Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27

W pracy podano nowy sposób numerycznego wyznaczania rozkładów prędkości dla pulsującego przepływu w przewodzie o odkształcalnych ściankach przy zadanych lokalnych wartościach ciśnienia, gradientu ciśnienia oraz zadanej zależności pomiędzy ciśnieniem a promieniem przewodu. Równaniami, z których otrzymano rozkłady prędkości były nieliniowe równania Naviera - Stokesa. Do numerycznego rozwiązania tych równań użyto metody prostych typu: dyskretny czas - ciągła przestrzeń, nie stosowanej dotychczas do obliczeń przy pomocy maszyny cyfrowej. Otrzymano dobrą zgodność wyników z dostępnymi w literaturze danymi eksperymentalnymi.

Rękopis
wpłynął do Działu Wydawnictw I-20
styczeń 1979 r.

S P I S T R E Ś C I

Str.

1. WPROWADZENIE 3
2. CEL I ZAKRES PRACY 9
3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU 11
   3.1. Fakty doświadczalne 11
   3.2. Równanie ruchu ścianki 15
   3.3. Równania ruchu cieczy 16
   3.4. Warunki brzegowe 17
   3.5. Uproszczenia równań ruchu 18
4. METODA PROSTYCH TYPU DYSKRETNY CZAS - CIĄGŁA PRZESTRZEŃ 23
   4.1. Schematy różnicowe 23
   4.2. Zmienny krok czasowy 27
   4.3. Rząd aproksymacji 28
   4.4. Stabilność schematu różnicowego 31
   4.5. Zbieżność 35
5. APROKSYMACJA RÓWNAŃ RUCHU CIECZY 43
   5.1. Równania różnicowe 43
   5.2. Modyfikacja współczynników równań w otoczeniu punktu s = 0 46
   5.3. Linearyzacja równań. Proces iteracyjny. 52
   5.4. Równanie propagacji błędu 54
   5.5. Metoda dekompozycji 59
   5.6. Badanie stabilności obliczeniowej ... 62
6. OBLICZENIA MASZYNOWE 67
   6.1. Dane wejściowe i obliczenia pomocnicze. 67

Str.

6.2. Całkowanie numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych 73
6.3. Dodatkowe uwagi o całkowaniu numerycznym 77
6.4. Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego. 78
6.5. Wyniki numeryczne. 82
6.6. Eksperymenty numeryczne. 89
6.7. Dodatkowe uwagi o metodzie prostych ... 95
7. PODSUMOWANIE 97
8. LITERATURA 100

1. WPROWADZENIE

Niestacjonarny przepływ cieczy w przewodach o odkształcalnych ściankach przyciąga uwagę uczonych już od dwustu lat. Analityczne prace zostały zapoczątkowane przez Eulera, a następnie były kontynuowane przez Thomasa Younga, Moesa, Kortewega, Lamba i innych [14] . Zagadnienie jest szczególnie interesujące w odniesieniu do badań nad pulsującym przepływem krwi w arteriach.
Wzrost zainteresowania problemami biomedycznymi, rozwój urządzeń sztucznego serca, badania nad arterioskleroza, na którą jak stwierdzono, istotnie wpływają naprężenia ścinające wywołane ruchem krwi, są czynnikami nakłaniającymi do badań nad pulsującym przepływem krwi w arteriach.
Literatura wprowadzająca w problematykę pulsującego przepływu krwi w arteriach jest bardzo obszerna,wliczając w to książki [3] , [23] , [31] , [32] , jak również obszerne artykuły przeglądowe [1] , [9] , [11] , [14] .
Dlatego omówimy krótko tylko trzy spośród wielu charakterystycznych podejść do zagadnień pulsującego przepływu w przewodach o odkształcalnych ściankach.
Niestacjonarny, okresowy ruch cieczy w elastycznych rurkach można opisać nieliniowym układem równań ruchu cieczy i ścianek przewodu. Ze względu na duże trudności związane z badaniem i analizowaniem nieliniowych równań różniczkowych najbardziej typowym i rozpowszechnionym podejściem jest linearyzacja równań. Pod tym względem najbardziej znaczący wkład do badań nad pulsującym przepływem krwi

wniosły prace Womersleya [51], [52], [53], które, chociaż wielokrotnie uzupełniane i poprawiane [1], [2], [31], [50], zachowały swoje fundamentalne znaczenie.

Teoria Womersleya opiera się na modelu liniowym. Linearyzacji podlegają zarówno równania ruchu cieczy, którymi są równania Naviera - Stokesa jak i związki wyrażające sprężyste własności ścianek. O cieczy zakłada się, że jest nieściśliwa, newtonowska, a o jej ruchu, że jest laminarny i osiowo symetryczny. O przewodzie natomiast, że ma kształt prostej, nieskończenie długiej, cylindrycznej rurki. Przyjmuje się, że ciśnienie jak również składowe prędkości cieczy wyrażają się funkcjami opisującymi sinusoidalne rozchodzenie się fali, które w postaci zespolonej mają postać $A \cdot \exp(in(t-x/c))$, gdzie t - czas, x - współrzędna osiowa, c - prędkość rochodzenia się fali, A - amplituda zespolona, $i = \sqrt{-1}$.

Przy takich założeniach, zlinearyzowane równania ruchu cieczy dają się efektywnie scałkować. Prędkość fali c oraz stałe całkowania wyznacza się wykorzystując rozwiązania równań ruchu ścianek oraz warunki brzegowe wyrażające fakt przylegania cieczy do ścianek z rurki.

W późniejszych pracach bazujących na modelu liniowym, modyfikacjom podlegały tylko równania opisujące ruch ścianek. Do rozważań włączono różne specjalne własności materiału ścianki jak np. anizotropowość, ortotropowość, itp., a także wpływ otaczającego ściankę ośrodka.

Doskonałą pracą, w której dokonano porównania wyników otrzymywanych z różnych modeli liniowych, jest praca Coxa [9] .

Okazuje się, że opis pulsującego przepływu dany modelem liniowym jest niezadawalający , co wykazano w pracach [12] , [25] . Dotyczy to zwłaszcza przewodów o większych średnicach np. aort , gdzie w wyniku stosunkowo dużych zmian promienia rurki w czasie przepływu, człony konwekcyjne w równaniach Naviera - Stokesa odgrywają istotną rolę i nie mogą być zaniedbane.

Streeter, Keizter, Bohr [42] , [43] , podjęli próbę uwzględnienia nieliniowych efektów bezwładnościowych dla przepływu jednowymiarowego. Celem prac było określenie związków, które na podstawie znanych parametrów fizycznych pozwoliłyby wyznaczyć wartości ciśnienia i natężenia przepływu w dowolnej chwili i w dowolnym punkcie arterii. Do rozważań wprowadzono prędkość średnią. Ułożono równanie bilansu pędu i równanie ciągłości dla małego elementu rurki, uwzględniając przy tym zwężenie rurki. Zależność pomiędzy promieniem rurki i ciśnieniem wyprowadzono z prostego warunku równowagi pomiędzy ciśnieniem cieczy a napięciem w ściankach. W wyniku otrzymano nieliniowy układ równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego dla ciśnienia i prędkości średniej, który rozwiązano numerycznie metodą charakterystyk. Jako dane początkowe przyjmowano natężenie przepływu lub ciśnienie zmierzone w pewnym punkcie. Znaczne różnice pomiędzy wynikami doświadczalnymi i numerycznymi tłumaczono nieprecyzyjnym, doświadczalnym doborem współczynników tarcia, które były potrzebne przy układaniu bilansu pędu.

Ling i Atabek w pracy [26] zaproponowali numeryczną metodę wyznaczania profili prędkości w ustalonym przekroju poprzecznym arterii przyjmując jako znane : lokalnie zmierzone wartości ciśnienia, gradientu ciśnienia(zakładając, że są one okresowymi funkcjami zmiennej t) oraz zależności promienia rurki od ciśnienia. Metoda uwzględnia nieliniowe człony konwekcyjne równania Naviera - Stokesa, zwężenie przewodu, a także nieliniowe własności sprężyste ścianek przewodu. Równaniami, z których otrzymano rozkłady prędkości były: równanie Naviera - Stokesa dla składowej osiowej i równanie ciągłości.
Dzięki wyeliminowaniu z równań /korzystając z pewnych założeń upraszczających/ funkcji będących pochodnymi względem współrzędnej osiowej x , można było rozpatrywać równania w ustalonym przekroju x = const.
Zgodność otrzymanych wyników numerycznych z danymi doświadczalnymi była dość dobra. Pewne różnice pomiędzy wynikami numerycznymi i eksperymentalnymi mogą wynikać z dyskusyjnych założeń, jakie uczyniono przy wyprowadzaniu wzoru na składową radialną. Dlatego też w obecnej pracy podjęliśmy próbę wyznaczenia rozkładów prędkości omijając te założenia.
Praca Linga i Atabeka poprzedzona była starannymi badaniami eksperymentalnymi [24] , [25] , [26]. Rezultaty tych doświadczalnych prac pozwoliły na sformułowanie

pewnych założeń upraszczających, które przyjęliśmy także w obecnej pracy.

W nieniejszej pracy do numerycznego rozwiązania równań Naviera - Stokesa wykorzystano niestandardową metodę różnicową - metodę prostych. W metodzie tej, w odróżnieniu od klasycznych metod różnic skończonych, dyskretyzacji podlega tylko jedna ze zmiennych niezależnych. Tym samym równanie różniczkowe cząstkowe o dwóch zmiennych zostaje zastąpione układem równań różniczkowych zwyczajnych.

Jeżeli w równaniu jedną ze zmiennych niezależnych jest czas, a drugą współrzędna przestrzenna, to w zależności od tego, którą ze zmiennych dyskretyzujemy, można wyróżnić dwie wersje metody prostych:

1/ dyskretny czas - ciągła przestrzeń

2/ ciągły czas - dyskretna przestrzeń.

Idea zastąpienia równania różniczkowego cząstkowego przez układ równań różniczkowych zwyczajnych, jest znana od dawna /rok 1830: J. Fourier, patrz [49]/. W r. 1928 Rothe zastosował metodę prostych do dowodu istnienia rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego typu parabolicznego, stąd też metoda ta nazywana jest niekiedy metodą Rothego, [10] . Sam termin "metoda prostych" pojawił się stosunkowo niedawno i został wprowadzony przez matematyków radzieckich [5] , [6] , [13] . Metoda prostych, w obu wymienionych wersjach, była wykorzystana do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych przy pomocy maszyn analogowych i hybrydowych [47].

Hicks i Wei [17] przeprowadzili badania nad metodą prostych typu ciągły czas-dyskretna przestrzeń przy wykorzystaniu jej do rozwiązywania parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych przy pomocy maszyny cyfrowej. W pracy obecnej podjęto próbę wykorzystania do obliczeń cyfrowych metody prostych typu dyskretny czas - ciągła przestrzeń.

2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem pracy jest numeryczne wyznaczenie składowych prędkości niestacjonarnego ruchu cieczy w ustalonym przekroju poprzecznym rurki o odkształcalnych ściankach. Założono znajomość lokalnych wartości ciśnienia, gradientu ciśnienia oraz zależności pomiędzy ciśnieniem a promieniem rurki.

Pomysł sprowadzenia równań ruchu cieczy, którymi są równania Naviera - Stokesa, do postaci umożliwiającej wyznaczenie składowych prędkości w ustalonym przekroju poprzecznym rurki pochodzi od Linga i Atabeka [26] .

Z tej pracy zapożyczono również sposób wyznaczania promienia rurki przy pomocy ciśnienia i charakterystyki deformacji rurki. W odróżnieniu jednak od pracy Linga i Atabeka, w obecnej pracy punktem wyjścia do otrzymania rozkładów składowych prędkości jest pełny układ Naviera - Stokesa /w pracy [26] jest nim jedno równanie Naviera - Stokesa na składową osiową prędkości oraz równanie ciągłości/.

W nieco odmienny sposób niż w pracy [26] eliminuje się z równań funkcje, będące pochodnymi względem współrzędnej osiowej x . Pozwoliło to na przyjęcie mniej drastycznych założeń upraszczających niż w pracy [26] . W niniejszej pracy zastosowano całkowicie odmienną procedurę numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Ling i Atabek posłużyli się jawnym schematem różnicowym, natomiast w obecnej pracy zastosowano niestandardową metodę różnicową - metodę prostych.

Dla lepszego uwzględnienia nieliniowości równań Naviera - Stokesa zastosowano proces iteracyjny.

W rozwiązywanym przez nas niestacjonarnym zagadnieniu brzegowym nieznany jest warunek początkowy, dlatego /podobnie jak to uczynili Ling i Atabek /wykorzystano okresowość funkcji ciśnienia i gradientu ciśnienia, przyjmując dowolny warunek początkowy i powtarzano obliczenia przez kilka kolejnych okresów, aż do otrzymania okresowego przepływu.

Zastosowanie metody prostych, w której dyskretyzacji podlega tylko jedna zmienna - czas, a druga zostaje zachowana w postaci ciągłej, miało na celu ilustrację tezy o przydatności i efektywności metody prostych do rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych przy pomocy maszyny cyfrowej. Zbadano dwa schematy różnicowe przy zastosowaniu metody prostych. Sprawdzono ich rząd aproksymacji oraz wykazano, że spełniają konieczne warunki stabilności. Wzorując się na pracy Rothego [40] udowodniono twierdzenie o zbieżności rozwiązania przybliżonego do dokładnego.

Otrzymane w wyniku dyskretyzacji równania różniczkowe zwyczajne rozwiązano metodą dekopozycji, która pozwoliła uniknąć niekorzystnych efektów wynikających z niestabilnych własności operatorów różniczkowych. Do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych wykorzystano klasyczną procedurę Rungego - Kutty, znajdującą się w bibliotece podprogramów języka FORTRAN.

Bogaty materiał doświadczalny zawarty w pracy Linga i Atabeka umożliwił weryfikację otrzymanych wyników.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

3.1. Fakty doświadczalne

Zjawiską zachodzące przy przepływie cieczy przez elastyczną rurkę są wynikiem wzajemnego oddziaływania ścianek rurki i przepływającej cieczy.
Ze względu na dużą rolę jaką w zagadnieniach przepływu przez przewody o elastycznych ściankach odgrywają sprężyste własności ścianek, omówimy krótko budowę ścianki i zależność pomiędzy promieniem arterii a ciśnieniem.
O mechanicznych właściwościach ścianek naczynia krwionośnego decydują materiały i sposób w jaki zbudowaną jest z nich ścianka. Można wyróżnić trzy podstawowe składniki. Są to: kolagen, elastin i mięśnie gładkie.
Mięśnie gładkie odgrywają ważną rolę w sterowaniu lokalnych zmian średnicy naczynia w dłuższych okresach czasu, lecz ich wkład w mechaniczne własności naczyń krwionośnych, zwłaszcza naczyń o większych średnicach, jest niewielki [23], [29]. O własnościach mechanicznych ścianek decyduje więc elastin i kolagen.
Elastin jest materiałem bardzo rozciągliwym, o własnościach zbliżonych do gumy. Posiada moduł sprężystości rzędu $6 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$. Kolegen jest materiałem włóknistym, stosunkowo słabo sprężystym. Jego moduł sprężystości jest ok. 20 - 100 razy mniejszy niż elastinu. Swoje własności sprężyste objawia po wstępnej deformacji rurki.

Charakterystyka statyczna ścianki aorty jest superpozycją charakterystyki elastinu i kolagenu [29]. Rysunek 1 przedstawia typową charakterystykę aorty. Na osi pionowej zostało odłożone ciśnienie tętnicze p, unormowane względem średniego ciśnienia $\bar{p}$. Natomiast na osi poziomej odłożono względne wydłużenie promieniowe $\lambda_2 = R/R_0$, gdzie R_0 - jest wewnętrznym promieniem aorty w stanie nienaprężonym.

W żywym organizmie ścianki aorty zwykle znajdują się pod wpływem stałego naprężenia wzdłużnego, które charakteryzuje się współczynnikiem wydłużenia względnego $\lambda_1 = l/l_0 = 1.35 - 1.45$, gdzie l_0 - długość odcinka aorty w stanie nienaprężonym, l - długość tego odcinka w naturalnych warunkach pracy.

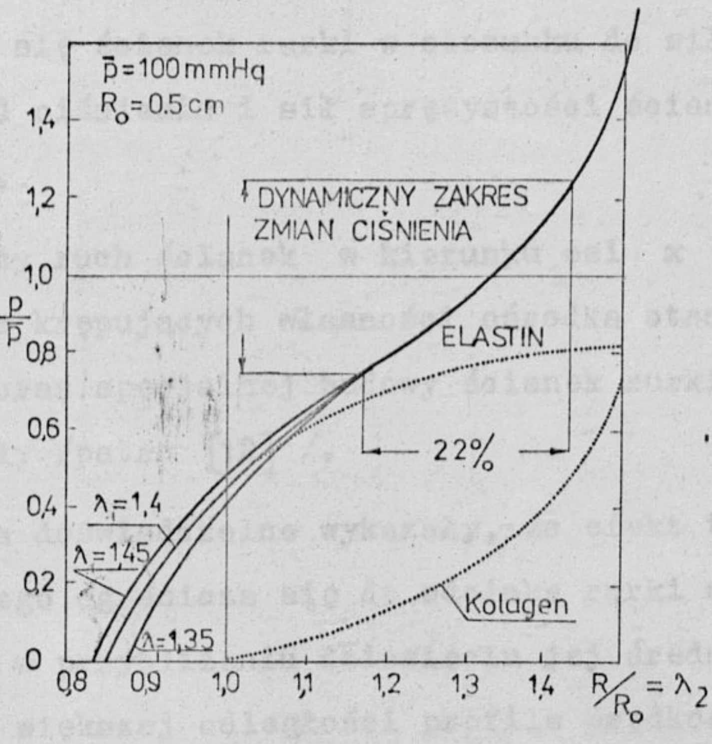
W normalnych, fizjologicznych warunkach ciśnienie p, wymuszone okresową pracą serca, zmienia się w granicach $0.75 \cdot \bar{p} - 1.25 \cdot \bar{p}$, $\bar{p}$ - średnia wartość ciśnienia.

W zakresie ciśnienia od 0 do $0.6\ \bar{p}$ o własnościach sprężystych ścianki decyduje elastin. Włókna stosunkowo mało sprężystego kolagenu zostają naprężone i wnoszą wkład w sprężyste własności ścianek dopiero przy $p = 0.6\ \bar{p}$, a przy wyższych ciśnieniach przenoszą prawie całe obciążenie wywołane ciśnieniem. Objawia się to szybkim wzrostem nachylenia krzywej na rys. 1 przy $\lambda_2 > 1.4$.

Zmiana ciśnienia w granicach $0.75\ \bar{p} - 1.25\ \bar{p}$ wywołuje zmianę λ_2 o około 22 %, co z kolei odpowiada zmianie pola przekroju poprzecznego aorty o ok. 49 %.

Jest oczywiste, że tak duża zmiana pola przekroju poprzecznego aorty będzie miała wpływ na parametry przepływu.

Sposób otrzymywania charakterystyki danej na rys. 1 przedstawiono w pracy [27] . Szczegółowy opis budowy ścianki, a także próbę zbudowania fizycznego modelu aorty przedstawiono w pracach [24] , [25] , [29].



Rys. 1. Typowa charakterystyka aorty [29] .

Aby określić profile prędkości w przekroju poprzecznym rurki należy rozwiązać układ równań opisujący ruch cieczy i ruch ścianek rurki. Oba te układy równań związane są wspólnymi warunkami brzegowymi.
Rozwiązanie takiego pełnego zagadnienia brzegowego jest zadaniem bardzo trudnym i skomplikowanym.

Przyjęcie jednak pewnych założeń pozwala znacznie uprościć zagadnienie.

U podstaw naszych dalszych założeń upraszczających leżą następujące fakty doświadczalne:

1/ stwierdzono [26] , że wpływ sił bezwładności poruszających się ścianek rurki w stosunku do sił pochodzących od ciśnienia i sił sprężystości ścianek jest niewielki.

2/ podłużny ruch ścianek w kierunku osi x /rys. 2/, wskutek krępujących własności ośrodka otaczającego rurkę oraz specjalnej budowy ścianek rurki, jest bardzo mały /patrz [12] /.

3/ badania doświadczalne wykazały, że efekt tzw. odcinka wstępnego ogranicza się do odcinka rurki o długości równej w przybliżeniu dziesięciu jej średnicom [25] , i że w większej odległości profile prędkości zależą głównie od lokalnych warunków przepływu. Dlatego też, w pewnej odległości od rozgałęzień profile prędkości mogą być uważane za w pełni rozwinięte. /p. [26], [27] /

Uwagi 1/ 2/ pozwolą na łatwe wyznaczenie ruchu ścianki na podstawie zmierzonego lokalnie ciśnienia i zależności promienia rurki od ciśnienia, natomiast 3/ umożliwi uproszczenie równań ruchu.

3.2. Równanie ruchu ścianki

Powyższe fakty doświadczalne pozwalają na proste określenie związku pomiędzy lokalnie panującym ciśnieniem a promieniem rurki.

Niech $R(x, t)$ oznacza wewnętrzny promień rurki w ustalonym punkcie x, w chwili t. Przyjmujemy, że wielkość promienia rurki R w zależności od lokalnego ciśnienia p określona jest doświadczalnie /patrz rys. 1/ i dana zależnością $p = P(R)$. Funkcję P nazywać będziemy charakterystyką statyczną rurki. Ponieważ, zgodnie z obserwacją, siła bezwładności $\frac{m}{2 \cdot \pi R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}$ jest pomijalna /m - efektywna masa ścianki przypadająca na jednostkę długości rurki w stanie nieodkształconym/, otrzymujemy stąd prosty warunek równowagi

$$0 = p(x, t) - P(R) \qquad /1/$$

Charakterystyka $P(R)$ jest funkcją ściśle rosnącą. Gwarantuje to istnienie funkcji odwrotnej $R(P)$. Możemy więc równanie /1/ przepisać w postaci

$$R = \hat{R}(x, p(x, t)) \qquad /2/$$

Zależność /2/ pozwala na wyznaczenie aktualnego promienia rurki w punkcie x, gdy znamy lokalnie zmierzone ciśnienie p w tym punkcie.

3.3. Równania ruchu cieczy

Będziemy zakładać, że ciecz jest cieczą newtonowską, nieściśliwą, a przepływ laminarny, osiowo - symetryczny. Odcinek rurki, w którym badamy przepływ jest prostoosiowy /rys. 2/, a punkt w którym badamy przepływ leży dostatecznie daleko od początku i końca przewodu /niektórzy autorzy przyjmują odległość równą dziesięciu jego średnicom 25 /. /por. 3/ str. 14 /.

Przyjmujemy, że ruch cieczy opisywać będą równania Naviera - Stokesa i równanie ciągłości, które we współrzędnych cylindrycznych, przy pominięciu sił masowych mają postać [19] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{u}{r^2}\right) \quad /3/$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad /4/$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0 \quad /5/$$

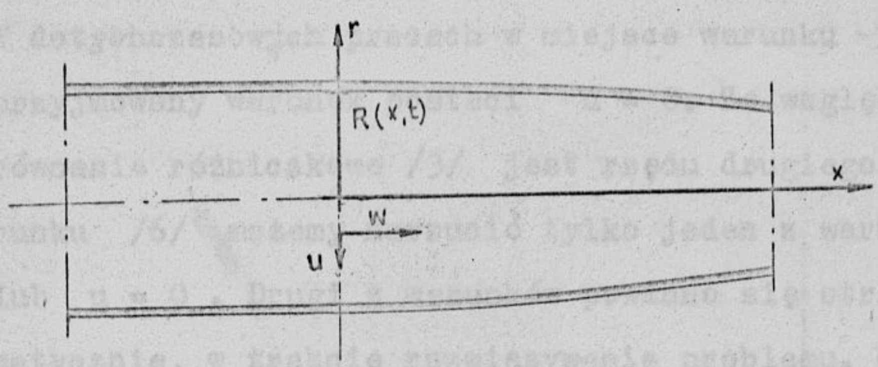
gdzie: u - składowa radialna prędkości

w - składowa osiowa prędkości

p - ciśnienie

ρ - gęstość cieczy

ν - lepkość kinematyczna cieczy



Rys. 2 Fragment przewodu

3.4. Warunki brzegowe

Z założenia lepkości cieczy i braku ruchu ścianek w kierunku osi rurki wynikają następujące warunki brzegowe dla r = R:

$$u\Big|_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial t} \qquad /6/$$

$$w\Big|_{r=R} = 0 \qquad /7/$$

Warunki brzegowe dla r = 0 wynikają z założonej symetrii przepływu:

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \qquad /8/$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \qquad /9/$$

W dotychczasowych pracach w miejsce warunku /8/ był przyjmowany warunek postaci $u = 0$. Ze względu na fakt, że równanie różniczkowe /3/ jest rzędu drugiego, prócz warunku /6/ możemy narzucić tylko jeden z warunków: $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ lub $u = 0$. Drugi z warunków powinno się otrzymać automatycznie, w trakcie rozwiązywania problemu. Oba warunki są tak samo ważne, jeśli zażądamy, aby równanie /3/ miało sens dla $r = 0$. W równaniu tym występują człony $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$ i $\frac{u}{r^2}$. Istnienie granic tych wyrażeń przy $r \to 0$ wymaga, aby $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ i $\lim\limits_{r \to 0} u = 0$. Ze względów obliczeniowych dogodniejszym dla nas będzie warunek /8/.

Pominięto warunki brzegowe na końcach rurki /dla zmiennej x/. Uzasadnione jest to uwagą wyrażoną w pkt. 3 podrozdziału 3.1.

3.5. Uproszczenia równań ruchu

W równaniu /3/ przyjmujemy, że $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0$. Spodziewamy się bowiem, iż duża elastyczność ścianki będzie zapobiegać powstawaniu znacznych różnic ciśnienia w kierunku radialnym. Z założenia tego wynika, że ciśnienie p będzie zależeć tylko od zmiennej x.

Ponadto w równaniach /3/ i /4/ pomijamy człony $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Odpowiada to ogólnie przyjmowanej aproksymacji warstwy przyściennej [44].

Promień rurki wyznaczający obszar, w którym szukamy rozwiązań, zależy od czasu /por. wzór /2//. W ten sposób warunki brzegowe /6/ i /7/ zadane są na ruchomej krzywej $r = R(x, t)$.

Aby uwolnić się od tej niedogodności, w równaniach /3/, /4/ i /5/ dokonamy zamiany zmiennej przyjmując zamiast r zmienną s określoną wzorem

$$s = r/R(x,\ t) \tag{10}$$

i pozostawiając zmienne x, t bez zmiany. Zakładamy przy tym, że $R(x, t)$ jest funkcją ściśle dodatnią, tzn. $R(x, t) \geqslant c > 0$, gdzie c jest pewną dodatnią stałą. W nowych zmiennych (s, x, t) warunki brzegowe /6/, /7/, /8/, /9/ przyjmują postać:

$$u(s, x, t)\Big|_{s=1} = \frac{\partial R}{\partial t} \tag{11}$$

$$w(s, x, t)\Big|_{s=1} = 0. \tag{12}$$

$$\frac{\partial u(s, x, t)}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial w(s, x, t)}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0 \tag{14}$$

a równania /3/, /4/, /5/ postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left(\frac{\nu}{s \cdot R^2} + \frac{w}{R}s\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{u}{R} + \frac{1}{R}s\frac{\partial R}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial s} +$$

$$- w\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nu}{R^2 s^2}u \tag{15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} +$$

$$+\left(\frac{\nu}{s\cdot R^2} - \frac{u}{R} + \frac{1}{R}\, s\,\frac{\partial R}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial s} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial s}\cdot s\cdot\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot w \qquad /16/$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{s}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{s\cdot R} = 0 \qquad /17/$$

Naszym zadaniem jest wyznaczenie przy pomocy równań /15/, /16/, /17/ rozkładów prędkości w przekroju poprzecznym rurki, przy ustalonym x. Chcąc uniknąć warunków brzegowych na częściach brzegu $x = \text{const}$, musimy z równań /15/, /16/ wyeliminować /podobnie jak Ling i Atabek [26]/ pochodne względem tej zmiennej.

Z równania /17/ mamy:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{s}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{s\cdot R} \qquad /18/$$

$\frac{\partial R}{\partial x}$ wyliczamy korzystając z równania /2/

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \hat{R}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{R}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad /19/$$

We wzorze /19/ $\frac{\partial \hat{R}}{\partial x}$ reprezentuje zmianę promienia rurki przy ustalonym ciśnieniu. W przypadku aorty zmiana ta pochodzi od jej stożkowato zbieżnego kształtu. Jeżeli oznaczymy przez ψ kąt zbieżności rurki przy ustalonym ciśnieniu, to w danym punkcie x

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial x} = - \operatorname{tg}(\Psi) \qquad /20/$$

Wartość kąta Ψ zmuszeni jesteśmy określić doświadczalnie. W ustalonym punkcie x, Ψ ulega zmianie wraz ze zmianą ciśnienia p. Ze względu na to, że zmiany te są bardzo małe przyjmujemy, że Ψ jest stałe [26]. $\frac{\partial \hat{R}}{\partial p}$ we wzorze /18/ wyliczamy ze wzoru /2/. Gradient ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial x}$ przyjęliśmy za znaną funkcję czasu. Tak więc prawa strona wzoru /19/ jest znaną funkcją. Pochodną $\frac{\partial u}{\partial x}$ przedstawimy w pewnej specjalnej postaci; w tym celu po zróżniczkowaniu równania ciągłości względem x, uwzględnieniu, że $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ i przyjęciu dodatkowego założenia w postaci $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{s}\,\frac{\partial u}{\partial x} = s\cdot\frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

Zakładamy przy tym, że u, w są co najmniej dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły, więc możemy zmieniać kolejność różniczkowania. Po zróżniczkowaniu równania ciągłości /17/ względem s i prostych przekształceniach otrzymujemy wyrażenie na $\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial w}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial x} = \frac{1}{s\cdot R}\left(s^2\,\frac{\partial R}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2s\,\frac{\partial R}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial s} - 2\,\frac{\partial u}{\partial s} - s\,\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - R\,\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Rugując z obu ostatnich równań wyrażenie $\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial x}$ i stawiając za $\frac{\partial w}{\partial x}$ prawą stronę równania /18/ otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\left(s^2\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-s\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{2}{s}\cdot u\right)$$

Przy ustalonym x powyższe równanie jest liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym względem $\frac{\partial u}{\partial x}$, którego rozwiązanie ma postać:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{s}\int_0^s s\,\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\left(s^2\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-s\,\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+2\,\frac{u}{s}\right)ds$$

Całkując przez części wyrażenie po prawej stronie powyższej równości i dokonując redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\left[\frac{\partial R}{\partial x}\left(s^2\frac{\partial w}{\partial s}-3\,.\,s\,.\,w+\frac{6}{s}\int_0^s s\,.\,w\,ds\right)-s\,\frac{\partial u}{\partial s}+2u\right] \qquad /21/$$

Dla przejrzystości wymienimy jeszcze raz wszystkie przyjęte założenia upraszczające:

1/ $w\big|_{s=1}=0$

2/ $\frac{\partial p}{\partial r}=0$

3/ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$

4/ $\frac{m}{2\cdot\pi\cdot R}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}=0$

5/ $\psi=\text{const.}$

6/ $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=0$

4. METODA PROSTYCH TYPU DYSKRETNY CZAS - CIĄGŁA PRZESTRZEŃ

4.1. Schematy różnicowe

Niech w obszarze $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$ będzie zadane, dla funkcji $v(x, t)$, zagadnienie brzegowe:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Y\left(x, t, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \qquad /22/$$

$$v(x, 0) = v^0 \qquad /22a/$$

$$v(0, t) = \varphi_1(t)$$

$$\qquad /22b/$$

$$v(1, t) = \varphi_2(t)$$

Y jest funkcją zależną od zmiennych x, t oraz funkcji v i jej pochodnych względem x, np. Y może być postaci:

$$Y = a(x,t)\frac{\partial^2 v}{x^2} + b(x,t)\frac{\partial v}{\partial x} + c(x,t)\cdot v + f(x,t)$$

gdzie a, b, c, f są zadanymi funkcjami.

Szukamy rozwiązań przybliżonych zagadnienia /22/ w obszarze $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$ dyskretyzując czas i przyjmując dla niego skończony układ wartości:

$t = j \cdot \Delta t$, $j = 0, 1, \dots n$, $T = \Delta t \cdot n$.

Z twierdzenia o wartości średniej mamy:

$$v(x, t^j + \Delta t) - v(x, t^j) = \Delta t \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=t^j+\mu\cdot\Delta t} = \Delta t \cdot Y(t^j + \mu\cdot\Delta t) \qquad /23/$$

gdzie $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, a $Y(t^j + \mu\cdot\Delta t)$ oznacza wartość funkcji, w której argumentach położono $t = t^j + \mu\cdot\Delta t$. Ponieważ dokładna wartość parametru μ jest nieznana, $Y(t^j + \mu\cdot\Delta t)$ zastępujemy wartością średnią w przedziale $[t^j, t^j + \Delta t]$, a mianowicie wyrażeniem

$$\Theta Y(t^{j+1}) + (1 - \Theta)\cdot Y(t^j) \qquad /24/$$

gdzie $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$ jest stałym parametrem.

Równanie /22/ zastępujemy równaniem różnicowym postaci:

$$\frac{V^{j+1} - V^j}{\Delta t} = \Theta \cdot Y^{j+1} + (1 - \Theta)\cdot Y^j \qquad /25/$$

gdzie $V^j = v(t^j)$, $Y^j = Y(t^j)$

Równanie /25/ porządkujemy przenosząc wyrazy z indeksem j+1 na jedną stronę. Otrzymujemy równanie

$$Y^{j+1} - \frac{V^{j+1}}{\Delta t\cdot\Theta} = -\frac{S^j}{\Delta t\cdot\Theta} \qquad /26/$$

gdzie $S^j = V^j + (1 - \Theta)\cdot\Delta t\cdot Y^j$ /27/

S^j spełnia równanie rekurencyjne

$$S^{j+1} = V^{j+1} + \frac{(1-\Theta)}{\Theta}(V^{j+1} - S^{j}), \qquad /28/$$

które łatwo otrzymujemy ze wzoru /27/ kładąc j+1 zamiast j i rugując z tego równania Y^{j+1} przy pomocy /26/. Warunki brzegowe /22b/ spełnione zostaną przez odpowiedni dobór algorytmu obliczeniowego. Warunek początkowy wykorzystamy w pierwszym kroku obliczeniowym przyjmując np. $S^{0} = v^{0}$. Zauważmy, że S^{j} jest przybliżoną wartością funkcji $v(x, t)$ w chwili $t = t^{j} + (1-\Theta)\cdot\Delta t$ /patrz wzory /22/ i /27//. Przyjmując $S^{0} = v^{0}$ zakładamy, że warunek początkowy został zadany w chwili $t = (1-\Theta)\Delta t$, a nie w chwili $t = 0$.

/W pracy [46] podano inną, dokładniejszą procedurę zapoczątkowującą obliczenia/.

Proces numerycznego rozwiązywania równania /22/ przy użyciu schematu różnicowego /25/ składać się będzie:

1/ z rozwiązania względem V^{j+1} równania /26/.

2/ wyliczenia ze wzoru /28/ S^{j+1}, które zapamiętane posłuży do otrzymania rozwiązania V^{1+2}.

Inny schemat różnicowy można skonstruować następująco: mnożąc równanie /23/ przez $(1+\alpha)$, a przez $(-\alpha)$ równanie postaci

$$v(x, t^{j}) - v(x, t^{j} - \Delta t) = \Delta t\, Y(t^{j} - \mu' \cdot \Delta t) \qquad /30/$$

gdzie $0 \leq \mu' \leq 1$, a następnie dodając stronami otrzymujemy:

$$(1+\alpha)\left[v(x, t^j+\Delta t) - v(x,t^j)\right] - \alpha\left[v(x,t^j) - v(x,t^j-\Delta t)\right] =$$

$$= \Delta t\cdot\left[Y(t^j+\mu\cdot\Delta t) + \alpha\left(Y(t^j+\mu\cdot\Delta t) - Y(t^j-\mu'\cdot\Delta t)\right)\right] =$$

$$= \Delta t \,.\, Y(t^j+\mu\Delta t) + O(\Delta t^2)$$

gdzie $\alpha \geqslant 0$

Zastępując $Y(x, t^j+\mu\cdot\Delta t)$ przez wartość średnią /24/ i pomijając wyrazy $O(\Delta t^2)$ otrzymujemy:

$$(1+\alpha)\cdot(V^{j+1} - V^j) - \alpha\cdot(V^j - V^{j-1}) =$$

$$= \Theta\cdot Y^{j+1} + (1-\Theta)\cdot Y^j \qquad /31/$$

Ze wzoru /31/ otrzymujemy:

$$Y^{j+1} - \frac{(1+\alpha)}{\Delta t\cdot\Theta}\,V^{j+1} = -\,\frac{S^j + P^j}{\Delta t\cdot\Theta} \qquad /32/$$

gdzie S^j - określone jest jak poprzednio wzorem /27/

$$P^j = \alpha\left(2\,.\,V^j - V^{j-1}\right) \qquad /33/$$

Przy użyciu schematu różnicowego /31/ proces przybliżonego całkowania równania różniczkowego /22/ składać się będzie:

1/ z rozwiązania względem V^{j+1} równania /32/

2/ obliczenia i zapamiętania S^{j+1} ze wzoru /28/ i P^{j+1} ze wzoru /33/, które posłużą do otrzymania rozwiązania V^{j+2}.

Ze wzoru /33/ widać, że przy użyciu schematu różnicowego /31/ konieczne jest zapamiętanie rozwiązania na dwóch warstwach czasowych: $t = t^j$ i $t = t^{j-1}$. Dla zapoczątkowania obliczeń, tj. znalezienia V^1, należy przyjąć schemat /25/. Zauważmy, że dla $\alpha = 0$ schemat /32/ redukuje się do /25/.

4.2. Zmienny krok czasowy

Jedną z ważniejszych zalet omawianej wersji metody prostych jest możliwość stosowania zmiennego kroku czasowego Δt. W zależności od tego, czy interesujące nas zjawisko w rozpatrywanym przedziale czasu przebiega szybko czy też bardzo wolno, można stosować mniejszy lub większy krok czasowy. Zdarza się, że badany proces z upływem czasu "stabilizuje się" i interesujące nas zmiany przebiegają coraz wolniej. Można wtedy zastosować systematyczne zwiększanie kroku czasowego /np. w sposób wykładniczy/. Niech $\Delta t^{j+1} = t^{j+1} - t^j$ i niech

$$\beta_j = \frac{\Delta t^{j+1}}{\Delta t^j} \qquad /34/$$

Równanie odpowiadające równaniu rekurencyjnemu /28/, w tej nowej sytuacji, przyjmuje postać:

$$S^{j+1} = V^{j+1} + \frac{(1-\Theta)}{\Theta}\beta_j\left(V^{j+1} - S^j\right) \qquad /35/$$

a równanie /31/ postać

$$(1+\alpha)\,(V^{j+1} - V^{j}) - \alpha\,(V^{j} - V^{j-1}) =$$

$$= \left[\Theta\, Y^{j+1} + (1-\Theta)\, Y^{j}\right] \Delta t^{j+1} + \alpha\, Y^{j}\, \frac{\beta_j - 1}{\beta_j} \qquad /36/$$

Wartość Y^j możemy wyznaczyć ze wzoru /27/

$$Y^{j} = \frac{(S^{j} - V^{j})}{(1-\Theta)\,\Delta t^{j+1}} \qquad /37/$$

Równaniu /32/ odpowiada równanie:

$$Y^{j+1} - \frac{(1+\alpha)}{\Theta\cdot\Delta t^{j+1}}\, V^{j+1} = - \frac{S^{j} + P^{j}}{\Theta\,\Delta t^{j+1}} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\Theta\cdot\Delta t^{j+1}} \cdot \frac{\beta - 1}{\beta} \cdot \frac{S^{j} - V^{j}}{1-\Theta} \qquad /38/$$

4.3. Rząd aproksymacji

Pierwszą własnością, jakiej należy żądać od równania różnicowego, jest własność aproksymacji równania różniczkowego. Żądamy mianowicie, aby w granicy przy $\Delta t \longrightarrow 0$, równanie różnicowe przechodziło na równanie różniczkowe. Przenieśmy wszystkie wyrazy w równaniu /22/ na jedną stronę i zapiszmy je w postaci:

$$L\,v = 0$$

gdzie

$$L\,v = \frac{\partial v}{\partial t} - Y\left(x,\ t,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \qquad /39/$$

Oznaczmy przez L_h aproksymację wyrażenia L:

Niech $\psi_h(v)$ oznacza

$$\psi_h(v) = L_h\,v$$

<u>Definicja</u>: Mówimy, że równanie L_h aproksymuje na rozwiązywaniu v równanie L z rzędem k /k > 0/, jeżeli

$$|\psi_h(v)| \leq M \cdot (\Delta t)^k$$

gdzie M - jest pewną stałą niezależną od Δt.

Zbadamy rząd aproksymacji równań różnicowych określonych równaniami /25/ i /31/.

Dla równania /25/ mamy:

$$\psi_h(v) = \frac{V^{j+1} - V^j}{\Delta t} - \Theta\, Y^{j+1} - (1-\Theta) Y^j \qquad /40/$$

Niech v - będzie klasą dostatecznie regularnych funkcji /np. C^3/.

Zastępujemy V^j przez $v(x,\ t^j)$, a V^{j+1} odpowiednio przez $v(x,\ t^j + \Delta t)$ i rozwijamy $v(x,\ t^j + \Delta t)$ we wzór Taylora

$$v(x,t^j+\Delta t) = v(x,\, t^j) + \Delta t\,\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \qquad /41/$$

Z równania /22/ otrzymujemy

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t^{j+1}} = \left. Y\right|_{t^{j+1}} = \frac{\partial v(x,t^j)}{\partial t} + \Delta t\,\frac{\partial^2 v\, x,t^j}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \qquad /42/$$

Podstawiając /41/ i /42/ do równania /40/ otrzymujemy

$$\psi_h(v) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Theta\,\frac{\partial v}{\partial t} - \Theta\,\Delta t\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (1-\Theta)\frac{\partial v}{\partial t} +$$

$$+ O(\Delta t^2) = \Delta t\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \qquad /43/$$

Ze wzoru /43/ widać, że dla $\Theta = 0.5$ rząd aproksymacji jest równy dwa $(k = 2)$.
W przypadku ogólnym $\psi_h(\Delta t) = O(\Delta t)$, więc rząd aproksymacji jest równy jeden $k = 1$.
Dla równania /31/, po podobnych przekształceniach jak wyżej, otrzymujemy:

$$\psi_h(v) = \left(\frac{1}{2} + \alpha - \Theta\right)\cdot \Delta t\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \qquad /44/$$

Jeżeli przy ustalonym Θ, α wybierzemy tak, że

$$\alpha = \Theta - \frac{1}{2} \qquad /45/$$

to rząd aproksymacji będzie równy dwa. Dla innych wartości Θ i α rząd aproksymacji będzie równy jeden.

4.4. Stabilność schematu różnicowego

Aby schemat różnicowy mógł być przydatny do obliczeń, oprócz spełnienia warunku aproksymacji powinien być stabilny. Istotą stabilności schematu różnicowego jest fakt, że małe błędy /np. błędy zaokrągleń/ wprowadzone w proces obliczeniowy poprzez dane początkowe, przenoszą się na dalsze etapy obliczeń z niewzrastającą amplitudą. Badanie stabilności schematów różnicowych, w ogólnym przypadku, jest zadaniem bardzo trudnym. Najczęściej zadowalamy się podaniem koniecznych warunków stabilności, wyprowadzonych często dla uproszczonych zagadnień [7].

Posługując się spektralną metodą J.von Neumana [15], [39], podamy konieczny warunek stabilności stosując schemat różnicowy /25/ do równania różniczkowego o stałych współczynnikach. Sprawdzimy również, czy jest spełniony konieczny warunek stabilności schematu /31/, gdy α spełnia warunek /45/, tzn. gdy rząd aproksymacji jest równy dwa.

Niech dane będzie następujące równanie różniczkowe cząstkowe o stałych współczynnikach:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A \frac{\partial v}{\partial x} v + B \cdot v, \quad t \geqslant 0 \ , \ A,B = \text{const.} \qquad /46/$$

gdzie $v = v(x, t)$,$-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$.

Na funkcję v nakładamy warunek początkowy

$$v(x, 0) = \phi(x)$$

Stosując do równania /46/ schemat różnicowy /25/ otrzymujemy:

$$\frac{v^{j+1} - v^j}{\Delta t} = \Theta\left(\frac{d^2 v^{j+1}}{dx^2} + A\,\frac{dv^{j+1}}{dx} + B\,v^{j+1}\right) + $$
$$+ \quad (1-\Theta)\left(\frac{d^2 v^j}{dx^2} + A\,\frac{dv^j}{dx} + B\,v^j\right) \qquad /47/$$

Określenie stabilności oparte jest na następującym rozumowaniu [15] : jeżeli schemat różnicowy jest stabilny dla dowolnego warunku początkowego $v(x, 0) = \phi(x)$, to w szczególności jest on również stabilny dla

$$V(x, 0) = e^{i \cdot q \cdot x} \qquad /48/$$

gdzie q jest parametrem rzeczywistym. Rozwiązanie równania różnicowego /47/ dla j-tej warstwy czasowej, przy warunku początkowym /48/ będzie miało postać:

$$v^j = \lambda^j\, e^{i\,q\,x} \qquad j = 0,1,2,\ldots n, \; T = \Delta t \cdot n \qquad /49/$$

gdzie liczbę zespoloną λ wyznaczymy z równania, otrzymanego przez podstawienie /49/ do równania /47/. Warunkiem koniecznym na to, aby rozwiązanie /49/ było ograniczone dla $j = 0,1,2, \ldots n$, $T = n \cdot \Delta t$ jest, aby dla wszystkich dostatecznie małych Δt zachodziło:

$$|\lambda| \leqslant 1 + c \cdot \Delta t$$

gdzie c - jest pewną stałą niezależną od Δt.

Po podstawieniu /49/ do /47/ otrzymujemy:

$$\frac{\lambda^{j+1} - \lambda^{j}}{\Delta t} = \Theta\left(-q^2 \lambda^{j+1} + i\,A\,q\,\lambda^{j+1} + B\,\lambda^{j+1}\right) +$$

$$+ (1-\Theta)\left(-q^2 \lambda^{j} + i\,A\,q\,\lambda^{j} + B\,\lambda^{j}\right)$$

stąd

$$\lambda = \frac{1 - \Delta t(1-\Theta)(q^2 - B) + i\,A\,q(1-\Theta)^2 \cdot \Delta t}{1 + \Delta t\,\Theta\,(q^2 - B) - i\,A\,\Theta\,\Delta t} \qquad /50/$$

oraz

$$|\lambda|^2 = \frac{\left[1 - t(1-\Theta)(q^2 - B)\right]^2 + A^2 q^2 (1-\Theta)^2 \cdot \Delta t^2}{\left[1 + \Delta t\,\Theta(q^2 - B)\right]^2 + A^2 q^2 \Theta^2 \cdot \Delta t^2} \qquad /51/$$

Jeżeli $q^2 \geqslant B$, to otrzymujemy oszacowanie:

$$|\lambda|^2 \leqslant \frac{\left[1 + \Delta t(1-\Theta)(q^2 - B)\right]^2 + A^2 q^2 (1-\Theta)^2 \cdot \Delta t^2}{\left[1 + \Delta t\,\Theta(q^2 - B)\right]^2 + A^2 q^2 \Theta^2 \cdot \Delta t^2} \qquad /52/$$

Ze wzoru /52/ widać, że warunkiem wystarczającym na to, aby $|\lambda|<1$, jest aby $(1-\Theta)\leqslant\Theta$ czyli

$$\frac{1}{2}\leqslant\Theta\leqslant 1 \qquad /53/$$

Dla $q^2\leqslant B$ ze wzoru /51/ mamy

$$|\lambda| = 1 + c\cdot\Delta t + O(\Delta t^2) \quad \text{gdy } \Delta t \longrightarrow 0 .$$

Stąd koniecznym warunkiem stabilności schematu różnicowego /25/ jest warunek /53/. W dalszym ciągu zakładamy jego spełnienie. Stosując teraz do równania /46/ schemat różnicowy /31/ i podstawiając w miejsce V^j zależność /49/, otrzymujemy równanie kwadratowe względem λ, którego pierwiastkami są:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+2\alpha-(1-\Theta)\Delta t\left[(q^2-B)-iqA\right]}{2\left[1+\alpha+\Theta\cdot\Delta t\left[(q^2-B)-iqA\right]\right]} \pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{\left\{1+2\alpha-(1-\Theta)\Delta t\left[(q^2-B)-iqA\right]\right\}^2-4\alpha\left(1+\alpha+\Theta\Delta t\left[(q^2-B)-iqA\right]\right)}}{2\left[1+\alpha+\Theta\cdot\Delta t\left[(q^2-B)-iqA\right]\right]} \qquad /54/$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$M\cdot e^{i\varphi} = (q^2-B) - i\,q\cdot A$$

i przyjmujemy, że $\alpha = \Theta - \frac{1}{2}$ /patrz wzór /45//. Wzór /54/ przekształcamy do postaci

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\Theta-(1-\Theta)\,\Delta t M e^{i\varphi} \pm\sqrt{(1-\Theta)^2\,\Delta t^2 M^2 e^{i2\varphi} - 2\Theta\,\Delta t M e^{i\varphi} + 1}}{2\Theta + 1 + 2\Theta\cdot\Delta t M e^{i\varphi}} \qquad /55/$$

Wyrażenie $\pm\sqrt{\ldots}$ w powyższym wzorze, na mocy /53/, jest co do modułu nie większe niż $1 + M \cdot \Theta \cdot \Delta t$. Mamy więc

$$|\lambda| < \frac{1 + 2\Theta + 2\Theta\cdot\Delta t M}{|1 + 2\Theta + 2\cdot\Delta t\,\Theta M e^{i\varphi}|} = 1 + c\cdot\Delta t + O(\Delta t^2) \qquad /56/$$

gdy $\Delta t \to 0$, czyli spełniony jest konieczny warunek stabilności.

4.5. Zbieżność

Pokażemy, wzorując się na pracy Rothego [40], że metoda prostych / $\Theta = 1$, $\alpha = 0$/ zastosowana do parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego, które będzie dobrym modelem naszych równań ruchu /15/, /16/, daje rozwiązanie zbieżne. Przez zbieżność rozumiemy tutaj relację $\|u - z\| \to 0$, przy $\Delta t \to 0$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza pewną przyjętą normę, u jest rozwiązaniem dokładnym równania, z – rozwiązaniem przybliżonym. Niech dane będzie paraboliczne równanie różniczkowe cząstkowe postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + G(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + H_1(x,t,u)$$

$$u = u(x,t) \quad , 0 \leqslant t \leqslant T \quad , 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad /57/$$

przy czym F_1, G, H_1 oznaczają dowolne dane funkcje różniczkowalne w sposób ciągły, przy czym funkcja F_1 jest ściśle dodatnia $F_1 \geqslant C > 0$.

Na rozwiązanie narzucamy następujące warunki:

$$u(x,0) = u^0(x) \quad u(0,t) = 0 \ , \quad u(1,t) = 0 \qquad /58/$$

Zagadnienie /57/, /58/ można sprowadzić za pomocą przekształcenia

$$u = v\, e^{1/2 \int_0^x G dx}$$

do postaci

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F\frac{\partial v}{\partial t} + H(x,t,v) \qquad /59/$$

$$v(x,0) = v^0 \qquad v(0,t) = v(1,t) = 0 \qquad /60/$$

gdzie nowe funkcje F, H spełniają te same założenia, co F_1 i H_1.

Równanie /59/ zastępujemy układem równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2 z^{j+1}}{dx^2} = F(x,t^{j+1})\frac{z^{j+1} - z^j}{\Delta t} + H(x,t,z^j) \qquad /61/$$

$$z^0 = z_0(x) \qquad z^j(0) = z^j(1) = 0 \qquad /62/$$

gdzie $t^j = j \cdot \Delta t$, $z^j = z(x, t^j)$, $j = 0,1,\ldots n$,
$T = n \cdot \Delta t$

Zakładamy, że istnieją ciągłe rozwiązania równań /59/ i /60/, które są ograniczone:

$$|v| \leqslant M \quad , \quad |z| \leqslant M$$

<u>Twierdzenie 1</u>: Jeśli F, H, v, z spełniają powyższe założenia to prawdziwa jest następująca teza: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba dodatnia δ_0, że dla $\Delta t = T/n < \delta_0$ zachodzą nierówności:

$$|v(x,t^j) - z^j(x)| < \varepsilon, \; t^j = j \cdot \Delta t, \; j = 0,1,2 \ldots n$$

Do dowodu twierdzenia wykorzystamy następujący lemat [40] , [41] .

Lemat 1. Dane jest następujące zagadnienie brzegowe

$$w = w(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$w'' - \lambda \cdot \varrho w = - \varrho \cdot \varphi(x,\lambda) \qquad /63/$$

$$w(0) = w(1) = 0 \qquad /64/$$

gdzie λ jest liczbą dodatnią, a ϱ i φ są funkcjami ciągłymi na odcinku $[0,1]$ i ponadto $\varrho > 0$.

Prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\max_{0\leq x\leq 1} | w(x) | \leq \frac{1}{\lambda} \max | \varphi(x,\lambda) | \qquad /65/$$

Przechodzimy do dowodu twierdzenia.

Połóżmy

$$\gamma^{j+1} = v(x,t^{j+1}) - z^{j+1}(x) \qquad /66/$$

$$\eta^{j+1} = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=t^j} - \frac{v(x,t^{j+1}) - v(x,t^j)}{\Delta t}$$

Z równania /59/ mamy

$$\frac{d^2 v(x,t^{j+1})}{dx^2} = F(x,t^{j+1}) \frac{v(x,t^{j+1}) - v(x,t^j)}{\Delta t} +$$

$$+ H(x,t^{j+1}, v(x,t^{j+1})) + \eta^{j+1} R(x,t^{j+1}) \qquad /67/$$

Odejmując stronami /61/ od /67/ otrzymujemy

$$\frac{d^2\gamma^{j+1}}{dx^2} = F(x,t^{j+1}) \frac{\gamma^{j+1} - \gamma^j}{\Delta t} + H(x,t^{j+1},v^{j+1}) - H(x,t^{j+1},z^j) +$$

$$+ \eta^{j+1} \cdot F(x,t^{j+1}) = F(x,t^{j+1}) \frac{\gamma^{j+1} - \gamma^j}{\Delta t} +$$

$$+ \frac{\overline{\partial H}}{\partial v} (v^{j+1} - v^j + \gamma^j) + \eta^{j+1} F(x,t^{j+1}) \qquad /68/$$

gdzie kreska nad pochodną $\frac{\overline{\partial H}}{\partial v}$ oznacza, że trzeci argument tej funkcji przybiera wartości pośrednie pomiędzy v^{j+1} i z^{j}.

Po uporządkowaniu równania /68/ widzimy, że γ^{j+1} spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 \gamma^{j+1}}{dx^2} - \lambda \rho \cdot \gamma^{j+1} = \rho \varphi(x, \lambda) \qquad /69/$$

gdzie $\lambda = \frac{1}{\Delta t}$ $\rho = F(x, t^{j+1})$

$$\varphi(x, \lambda) = -\lambda \cdot \gamma^{j} + \frac{\overline{\partial H}}{\partial v} \frac{(v^{j+1} - v^{j} + \gamma^{j})}{F(x, t^{j+1})} + \eta^{j+1} =$$

$$= -\lambda \cdot \gamma^{j}\left(1 - \frac{1}{\lambda F(x, t^{j+1})} \frac{\overline{\partial H}}{\partial v}\right) + \frac{\overline{\partial H}}{\partial v} \frac{(v^{j+1} - v^{j})}{F(x, t^{j+1})} + \eta^{j+1} \qquad /70/$$

z warunkami

$$\gamma^{j+1}(0) = \gamma^{j+1}(1) = 0 \qquad /71/$$

Wszystkie funkcje po prawej stronie nierówności /70/ są funkcjami ciągłymi w obszarze domkniętym, a więc są ograniczone. Ponadto $\eta^{j+1} \to 0$, gdy $\Delta t \to 0$ oraz $|v^{j+1} - v^{j}| \leqslant C \cdot \Delta t$. Możemy dobrać taką stałą A, niezależną od x, i λ, aby zachodziła nierówność

$$|\varphi(x, \lambda)| \leqslant \lambda |\gamma^{j}| \left(1 + \frac{A}{\lambda}\right) + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \tau_1\right) \qquad /72$$

gdzie τ_1 jednostajnie dąży do zera, gdy $\Delta t \to 0$.

Oznaczając przez τ większą z liczb $\left(\frac{1}{\lambda}, \tau_1\right)$, oraz pamiętając, że $\lambda = \frac{1}{\Delta t}$ mamy

$$|\varphi(x,\lambda)| \leqslant \left(\frac{1}{\Delta t}\right)|\gamma^j|\,(1 + \Delta t\, A) + A\tau$$

Zagadnienie /69/, /71/ spełnia założenia lematu 1, zachodzi więc

$$|\gamma^{j+1}| \leqslant |\gamma^j|\,(1+ \Delta t\, A) + A\cdot\tau\cdot\Delta t \qquad /73/$$

Zauważmy, że jeśli

$$x_{n+1} \leqslant \alpha x_n + \beta \;, \quad x_0 = 0 \;, \quad \alpha > 1 \;, \quad \beta > 0$$

wówczas iterując powyższą nierówność otrzymujemy

$$x_{n+1} \leqslant \alpha(\alpha x_{n-1} + \beta) + \beta \leqslant \ldots \leqslant \alpha^{n+1} x_0 + \beta(1 + \alpha + \ldots \alpha^n) \leqslant$$

$$\leqslant \beta \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha - 1}$$

Podstawiając: $\alpha = 1 + A\,.\,\Delta t$, $\beta = A\,.\,\tau\,.\,\Delta t$

otrzymujemy dla $|\gamma^{j+1}|$ następujące oszacowanie

$$|\gamma^{j+1}| \leqslant \tau\cdot(1 + A\,.\,\Delta t)^{j+1}$$

Ponieważ $(j+1) \leqslant n$, $\Delta t = \frac{T}{n}$ więc

$$|\gamma^{j+1}| \leqslant \tau\left(1 + A\,.\,\frac{T}{n}\right)^n \leqslant \tau\,.\,e^{A\,.\,T}$$

a więc $|\gamma^{j+1}| \longrightarrow 0$, gdy $\Delta t \longrightarrow 0$, ponieważ przy tym warunku τ też dąży do zera (c. n. d)

Uwaga: założenie $|z| \leqslant M$ można odrzucić, przeprowadzając dowód jak w pracy Rothego [40]. W naszym przypadku otrzymaliśmy jednak lepsze oszacowanie $|\gamma^{j+1}|$.

Gdy w miejsce warunku $v(0, t) = 0$ /patrz /60// przyjmiemy warunek $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0$, to teza twierdzenia 1 będzie nadal słuszna, ponieważ nie ulegnie zmianie również teza lematu 1, gdy warunek $w(0) = 0$ w /64/ zastąpimy przez $w'(0) = 0$.

Istotnie, przedłużmy w sposób parzysty rozwiązanie równania /63/ na przedział $[-1,1]$

$$\bar{w} = \begin{cases} w(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ w(-x), & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

oraz podobnie, przedłużmy w sposób parzysty funkcje ϱ i φ. Istnienie /z założenia/ $w'(0) = 0$ implikuje istnienie $w(0)$, a tym samym, z postaci równania wynika istnienie i ciągłość $w''(0)$. Rozszerzone na przedział $[-1,1]$ równanie /63/ ma więc sens. Nowe równanie spełnia założenia lematu 1, a więc prawdziwe jest dla rozwiązania w oszacowanie /65/. Jednoznaczność zagadnienia brzegowego z obu wspomnianymi wyżej warunkami brzegowymi można dowieść następująco: Niech w_1 i w_2 będą rozwiązaniami równania /63/ z warunkami /64/ lub $w'(0) = 0$, $w(1) = 0$ i niech $u = w_1 - w_2$. u spełnia następujące równanie różniczkowe

$$u'' - \lambda \cdot \varrho u = 0$$

Mnożąc powyższe równanie przez u oraz całkując w granicach od 0 do 1 i korzystając z następującej równości

$$\int_0^1 u'' \cdot u dx = u'u\Big|_0^1 - \int_0^1 u'^2 dx = -\int_0^1 u'^2 dx$$

otrzymujemy

$$-\int_0^1 (u'^2 + u^2)\, dx = 0 ,$$

Ponieważ wyrażenie pod całką jest nieujemne, a więc $u = 0$, czyli $w_1 = w_2$.

W praktyce metod numerycznych rzadko udaje się dowieść zbieżności schematu różnicowego w sposób bezpośredni. Najczęściej robi się to w sposób pośredni, sprawdzając spełnienie warunku aproksymacji i stabilności. Twierdzenie Laxa mówi, że jeżeli oba wymienione warunki są spełnione, to schemat różnicowy daje rozwiązanie zbieżne do rozwiązania wyjściowego zagadnienia [39], [15].

5. APROKSYMACJA RÓWNAŃ RUCHU CIECZY

5.1. Równania różnicowe

Wyjściowe równania, po uwzględnieniu wyrażenia na $\frac{\partial R}{\partial x}$ /wzór /19/,/20//, mają postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left[\frac{\nu}{s\,R^2} - \frac{w}{R}\,s\cdot\left(tg\psi + \frac{\partial \hat{R}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{u}{R} + \frac{1}{R}\,s\cdot\frac{\partial R}{\partial t}\right]\frac{\partial u}{\partial s} +$$

$$- w\,.\,s\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nu}{s^2\,.\,R^2}.\,u \qquad /76/$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(\frac{\nu}{s\,R^2} - \frac{u}{R} + \frac{1}{R}\,s\frac{\partial R}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial s} +$$

$$+\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{s\cdot R}\right).\,w \qquad /77/$$

Równania /76/, /77/ aproksymujemy równaniamy różnicowymi wykorzystując schemat różnicowy /31/. Otrzymujemy /patrz wzór /32//

$$Y_1^{j+1} - \frac{(1+\alpha)\,u^{j+1}}{\Delta t\,.\,\Theta} = -\frac{S_1^j + P_1^j}{t\,.\,\Theta} \qquad /78/$$

$$Y_2^{j+1} - \frac{(1+\alpha)}{t\,.\,\Theta}\,w^{j+1} = -\frac{S_2^j + P_2^j}{t\,.\,\Theta} \qquad /79/$$

gdzie S_i^j określone są wzorem /27/, P_i^j określone są wzorem /33/,

$$Y_1^j = \frac{\nu}{(R^j)^2} \frac{d^2u^j}{dx^2} +$$

$$+ \left[\frac{\nu}{s\cdot(R^j)^2} - \frac{w^j}{R^j} \cdot s \cdot \left(tg\psi + \frac{\partial \hat{R}^j}{\partial p} \frac{\partial p^j}{\partial x} \right) - \frac{u^j}{R^j} s \frac{\partial R^j}{\partial t} \right] \frac{du^j}{ds} +$$

$$- w^j \cdot \frac{\partial u^j}{\partial x} - \frac{\nu}{s^2 (R^j)^2} \cdot u^j \qquad /80/$$

$$Y_2^j = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p^j}{\partial x} + \frac{\nu}{(R^j)^2} \cdot \frac{d^2 w^j}{dx^2} +$$

$$+ \left[\frac{\nu}{s\cdot(R^j)^2} - \frac{u^j}{R^j} + \frac{1}{R^j} s \frac{\partial R^j}{\partial t} \right] \frac{dw^j}{ds} +$$

$$+ \left(\frac{1}{R^j} \frac{du^j}{ds} + \frac{u^j}{s\cdot R^j} \right) w^j \qquad /81/$$

Wstawiając do równań /78/, /79/ Y_i^j określone równaniami /80/, /81/

otrzymujemy

$$\frac{d^2u^{j+1}}{ds^2} + A^{j+1} \cdot \frac{du^{j+1}}{ds} + B^{j+1} \cdot u^{j+1} = F_1^j \qquad /82/$$

$$\frac{d^2w^{j+1}}{ds^2} + C^{j+1} \cdot \frac{dw^{j+1}}{ds} + D^{j+1} \cdot w^{j+1} = F_2^j \qquad /83/$$

gdzie $(\cdot)^{j+1}$ - oznacza wartość funkcji $(\cdot)$ w chwili $t = (j+1)\cdot \Delta t$

$$A^{j+1} = \frac{1}{s} + \frac{sR}{\nu}\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{R}{\nu}\cdot u - \frac{sR}{\nu}\cdot w\left(tg\psi + \frac{\partial \hat{R}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad /84/$$

$$B^{j+1} = -\frac{(1+\alpha)R^2}{\nu\cdot\Delta t\ \Theta} - \frac{1}{s^2} \quad /85/$$

$$C^{j+1} = \frac{1}{s} + s\ \frac{R}{\nu}\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{u}{\nu}\cdot R \quad /86/$$

$$D^{j+1} = \frac{u}{s}\ \frac{R}{\nu} + \frac{R}{\nu}\frac{du}{ds} - \frac{(1+\alpha)R^2}{\nu\cdot\Delta t\cdot\Theta} \quad /87/$$

$$F_1^j = -\frac{(S_1^j + P_1^j)R^2}{\nu\cdot\Delta t\cdot\Theta} + w\cdot\frac{R^2}{\nu}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \quad /88/$$

$$F_2^j = -\frac{(S_2^j + P_2^j)R^2}{\nu\cdot\Delta t\cdot\Theta} - \frac{R^2}{\nu}\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad /89/$$

Wszystkie funkcje we wzorach /84/ - /89/ nie zaopatrzone indeksem należy wziąć na warstwie $j+1$. W tym miejscu jak i dalej indeks $j+1$ opuściliśmy dla zachowania przejrzystości zapisu.

Warunki brzegowe /11/ - /14/ przyjmują postać:

$$u^{j+1}\Big|_{s=1} = \frac{\partial R^{j+1}}{\partial t} \quad /90/$$

$$w^{j+1}\Big|_{s=1} = 0 \quad /91/$$

$$\left.\frac{du^{j+1}}{ds}\right|_{s=0} = 0 \qquad /92/$$

$$\left.\frac{dw^{j+1}}{ds}\right|_{s=0} = 0 \qquad /93/$$

5.2. Modyfikacja współczynników równań w otoczeniu punktu $s = 0$.

Przed przystąpieniem do obliczeń numerycznych musimy usunąć ze współczynników A, B, C i D osobliwości występujące dla $s = 0$.

Zauważmy, że prawdziwe są następujące równości:

$$\lim_{s\to 0} \frac{u}{s} = \frac{\partial u}{\partial s} \qquad /94a/$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{u}{s^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \qquad /94b/$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \qquad /94c/$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \qquad /94d/$$

Wynikają one z warunków brzegowych i z założenia dwukrotnej różniczkowalności w sposób ciągły funkcji u i w.

w domknięciu obszaru określoności, tj. na odcinku $[0,1]$

Przedział $[0,1]$ rozbijamy na dwa podprzedziały $[0,s_0]$ i $[s_0,1]$

W podprzedziale $[s_0,1]$ współczynniki i prawe strony równań /82/, /83/ będą określone równaniami /84/, /89/.

W podprzedziale $[0,s_0]$ przyjmujemy następującą liniową aproksymację:

$$\frac{u}{s} \cong \frac{1}{s_0}\left[\frac{u(s_0)}{s_0} \cdot s + (s_0 - s)\frac{\partial u}{\partial s}\right] \qquad /95a/$$

$$\frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} \cong \frac{1}{s_0}\left[\left(\frac{1}{s_0}\frac{\partial u}{\partial s}\right) s + (s_0 - s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right] \qquad /95b/$$

$$\frac{u}{s^2} \cong \frac{1}{s_0}\left[\left(\frac{u}{s_0^2}\right) s + \frac{(s_0 - s)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right] \qquad /95c/$$

$$\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s} \cong \frac{1}{s_0}\left[\left(\frac{1}{s_0}\frac{\partial w}{\partial s}\right) s + (s_0 - s)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right] \qquad /95d/$$

Po wstawieniu wyrażeń /95/ do równań /76/ /77/ i przeprowadzeniu dyskretyzacji jak w równaniach /78/ - /83/ otrzymujemy następujące wyrażenia na współczynniki A, B, C, D, F_1^j, F_2^j

$$A^{j+1} = \frac{2 \cdot s_0}{3 \cdot s_0 - s}\left[\frac{s}{s_0^2} - \frac{R}{\gamma} w\, s\left(tg\psi + \frac{\partial \hat{R}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{R}{\gamma}u + \frac{R\, s}{\gamma}\frac{\partial R}{\partial t}\right]\right. \qquad /96/$$

$$B^{j+1} = \frac{2\cdot s_0}{3\cdot s_0 - s}\left(-\frac{R^2(1+\alpha)}{\nu\cdot\Delta t\cdot\theta} - \frac{s}{s_0^3}\right) \qquad /97/$$

$$C^{j+1} = \frac{s_0}{2\cdot s_0 - s}\left(\frac{s}{s_0^2} - \frac{R}{\nu}u + s\frac{R}{\nu}\cdot\frac{\partial R}{\partial t}\right) \qquad /98/$$

$$D^{j+1} = \frac{s_0}{2\,s_0 - s}\left[\frac{u(s_0)}{s_0}s\frac{R}{\nu} + \frac{(2s_0-s)}{s_0}\cdot\frac{du}{ds}\frac{R}{\nu} - \frac{R^2(1+\alpha)}{\nu\cdot\Delta t\,\theta}\right] \qquad /99/$$

$$F_1^j = \frac{2s_0}{3\cdot s_0 - s}\left(-\frac{S_1^j + P_1^j}{\nu\cdot\Delta t\cdot\theta}\cdot R^2 + w\cdot\frac{R^2}{\nu}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad /100/$$

$$F_2^j = \frac{s_0}{2s_0 - s}\left(-\frac{(S_2^j + P_2^j)\cdot R^2}{\nu\cdot\Delta t\cdot\theta} - \frac{R^2}{\nu}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad /101/$$

gdzie $\quad s \in [0, s_0]$.

Wszystkie funkcje po prawej stronie wzorów /96/ - /101/ powinny być zaopatrzone indeksem j+1. Dla zachowania przejrzystości zapisu indeks ten opuściliśmy.

Oszacujemy błąd Δ wynikły z przyjętej aproksymacji /95/. Obliczenia, przykładowo, przeprowadzimy tylko dla /95a/ i /95d/.

Dla /95a/ błąd Δ_a wyraża się wzorem:

$$\Delta_a = \frac{u}{s} - \frac{1}{s_0}\left[\frac{u(s_0)}{s_0} \cdot s + (s_0 - s)\frac{\partial u}{\partial s}\right]$$

$$= \frac{1}{s_0}\left[\left(\frac{u}{s} - \frac{u(s_0)}{s_0}\right) s + (s_0 - s)\left(\frac{u}{s} - \frac{\partial u}{\partial s}\right)\right] \qquad /102/$$

Rozwińmy $u(s_0)$, $u(s)$, $\frac{\partial u(s)}{\partial s}$ we wzór Taylora wokół punktu $s = 0$.

$$u(s_0) = u(0) + s_0 \frac{\partial u(0)}{\partial s} + \frac{s_0^{\,2}}{2!}\frac{\partial^2 u(0)}{\partial s^2} + \frac{s_0^3}{3!}\frac{\partial^3 u(\xi_1)}{\partial s^3} \qquad /103/$$

$$u(s) = u(0) + s\frac{\partial u(0)}{\partial s} + \frac{s^2}{2!}\frac{\partial^2 u(0)}{\partial s^2} \quad \frac{s^3}{3!}\frac{\partial^3 u(\xi_2)}{\partial s^3} \qquad /104/$$

$$\frac{\partial u(s)}{\partial s} = \frac{\partial u(0)}{\partial s} + s\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{s^2}{2!}\frac{\partial^3 u(\xi_3)}{\partial s^3} \qquad /105/$$

gdzie $\xi_1 \in [0, s_0]$, $\xi_2, \xi_3 \in [0, s]$

Prawe strony wszystkich trzech powyższych wzorów redukują się do ostatnich składników, ponieważ $u(0) = 0$, $\frac{\partial u(0)}{\partial s} = 0$, a z równania /82/ wynika, że również $\frac{\partial^2 u(0)}{\partial s^2} = 0$

Wstawiając wyrażenia /103/ - /105/ do /102/ otrzymujemy

$$\Delta_a = \frac{1}{s_o}\left[\frac{s^2}{3!}\frac{\partial^3 u(\xi_2)}{\partial s^3} - \frac{s_o^2}{3!}\frac{\partial^3 u(\xi_1)}{\partial s^3}\right]s +$$

$$+\frac{(s_o - s)}{s_o}\left[\frac{s^2}{3!}\frac{\partial^3 u(\xi_2)}{\partial s^3} - \frac{s^2}{3!}\frac{\partial^3 u(\xi_3)}{\partial s^3}\right] \qquad /102a/$$

Ze wzoru /102a/ widać, że dla $s = 0$ i dla $s = s_o$ błąd aproksymacji Δ_a jest równy zero.

Wprowadźmy oznaczenie

$$M = \max_{\xi\in[0,s_o]}\left|\frac{\partial^3 u(\xi)}{\partial s^3}\right| \qquad /106/$$

Wykorzystując /106/ otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\Delta_a < \frac{1}{s_o}\cdot\frac{M}{6}(s^2 - s_o^2)\,s + \frac{(s_o - s)}{6\,s_o}\,s^2\cdot 2M =$$

$$= \frac{M}{6}\frac{(s_o - s)}{s_o}(3s^2 + s_o s)$$

$$\Delta_a \leqslant \frac{2}{3}\,s_o\,.\,M\,.\,s = L\,.\,s \qquad /107/$$

gdzie $L = \frac{2}{3}\cdot s_o\,.\,M$; a więc $\Delta_a \longrightarrow 0$ gdy $s \longrightarrow 0$.

Dla wyrażenia /95d/ mamy

$$\Delta_d = \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{s_o}\left[\frac{1}{s_o}\frac{\partial w}{\partial s}\cdot s + (s_o - s)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{s_o}\left[\left(\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{s_o}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\cdot s + (s_o - s)\left(\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)\right] \qquad /108/$$

Wstawiając za $\frac{\partial w}{\partial s}$ i $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$ ich rozwinięcia taylorowskie o środku $s = 0$ otrzymujemy

$$\Delta_d = \frac{s_o - s}{s_o^2}\cdot s\,\frac{\partial^2 w(\eta_1)}{\partial s^2} + \frac{s_o - s}{s_o}\cdot\frac{s}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^3 w(\eta_2)}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 w(\eta_3)}{\partial s^3}\right) \qquad /109/$$

gdzie $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in [0, s]$

Wprowadzamy oznaczenie

$$N = \max_{\eta \in [0, s_o]}\left(\left|\frac{\partial^2 w(\eta)}{\partial s^2}\right|, \left|\frac{\partial^3 w(\eta)}{\partial s^3}\right|\right) \qquad /110/$$

Ze wzoru /109/ i z /110/ otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\Delta_d < C_2 \cdot s \qquad /111/$$

gdzie $C_2 = N\cdot\frac{(s_o+1)}{s_o}$

Oszacowanie /111/ jest nieco gorsze od /107/. Wynika to stąd, że chcąc zachować ciągłość współczynnika C w równaniu /83/, pochodną $\frac{\partial w}{\partial s}$ we wzorze /95d/ wzięto w punkcie s, a nie w punkcie $s = s_0$, jak w przypadku funkcji u we wzorze /95a//.

5.3. Linearyzacja równań. Proces iteracyjny

Równania /82/, /83/ są równaniami nieliniowymi. Współczynniki tych równań zależą od niewiadomych u^{j+1}, w^{j+1}. Dla uwzględnienia nieliniowości równań stosować będziemy następujący proces iteracyjny: znajdujemy na każdej warstwie czasowej ciąg u_k^{j+1}, w_k^{j+1} $k = 1,2 \ldots$ rozwiązując równanie /82/, a następnie /83/. Dla otrzymania u_k^{j+1} kładziemy we współczynnikach równania /82/, tj. w A^{j+1} B^{j+1} i F_1^{j+1} $u^{j+1} = u_{k-1}^{j+1}$, $w^{j+1} = w_{k-1}^{j+1}$, a dla otrzymania w_k^{j+1} we współczynnikach równania /83/ kładziemy $u^{j+1} = u_k^{j+1}$ /$w_0^{j+1} = w^j$, $u_0^{j+1} = u^j$/.

Obliczenia na danej warstwie kończymy i przechodzimy do następnej, gdy $u_k^{j+1} \cong u_{k-1}^{j+1}$, $w_k^{j+1} \cong w_{k-1}^{j+1}$.

/Schemat blokowy powyższej procedury podany jest w podrozdziale 6.4 na str. 81/.

Powstaje pytanie, czy rozpatrywane liniowe zagadnienia brzegowe mają jednoznaczne rozwiązania.

Przypuśćmy, że dane jest następujące zagadnienie brzegowe:

$$v = v(s) \qquad 0 \leq s \leq 1$$

$$v'' + g.v' + h.v = f \qquad /112/$$

$$v(0) = \gamma_1 \qquad v(1) = \gamma_2 \qquad /113/$$

W równaniu /112/ g, h, f są danymi funkcjami ciągłymi zmiennej $s \in [0,1]$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie [37]:

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja h jest w $[0,1]$ niedodatnia, $h \leqslant 0$, to zagadnienie /112/, /113/ ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Równania /82/, /83/ linearyzujemy na każdym kroku czasowym, dlatego współczynniki tych równań zależą tylko od zmiennej s i możemy je utożsamiać z odpowiednimi współczynnikami równania /112/. Istotną różnicą pomiędzy zagadnieniem brzegowym /112/, /113/ i /82/, /90/, /93/ /oraz odpowiednio /83/, /91/, /93// jest inna postać pierwszego warunku /113/. Jeżeli udałoby nam się przedłużyć rozwiązanie v równania /112/ w sposób parzysty na przedział $[-1,1]$ z zachowaniem założeń twierdzenia 2, to rozszerzone rozwiązanie spełniałoby warunki brzegowe $v(-1) = \gamma_2$ $v(1) = \gamma_2$, a zawężone do przedziału $[0,1]$: $v'(0) = 0$ $v(1) = \gamma_2$, które są identycznej postaci co warunki /90/, /92/ lub odpowiednio /91/, /93/. Przedłużenie rozwiązania v w sposób parzysty na przedział $[-1,1]$ uzyskamy rozpatrując rozszerzone równanie /112/ na ten przedział przez parzyste przedłużenie funkcji h i f, tzn. tak, aby $h(s) = h(-s)$ i $f(s) = f(-s)$, $s \in [-1,1]$, oraz nieparzyste przedłużenie funkcji g, tzn. tak, aby $g(s) = -g(-s)$.

Współczynniki B, D równań /82/, /83/ odpowiadają funkcji h z równania /113/. Współczynnik B jest zawsze ujemny /patrz wzór /85//, a jeżeli dobierzemy krok Δt tak aby $\frac{(1+\alpha)R}{\Delta t \cdot \Theta} > u + s \cdot \frac{du}{ds}$, to współczynnik D też będzie zawsze ujemny /p./87//. Parzyste przedłużenie tych współczynników jak i funkcji F_1^j i F_2^j, które odpowiadają funkcji f w równaniu /112/, jest łatwo realizowalne. Funkcji g występującej w równaniu /112/ odpowiadają w równaniach /82/, /83/ współczynniki A i C.

Jak wynika ze wzoru /96/ i /98/ znikają one w zerze. Umożliwia to nieparzyste przedłużenie tych współczynników na przedział $[-1,1]$, a więc możliwa jest do przeprowadzenia powyższa konstrukcja rozszerzenia równania /112/ na przedział $[-1,1]$. Stąd wniosek, że zlinearyzowane zagadnienia brzegowe /82/, /90/, /92/ i /83/, /91/, /93/ mają jednoznaczne rozwiązania.

5.4. Równanie propagacji błędu

Rozwiązanie równań /82/ i /83/ przy pomocy klasycznych procedur całkowania równań różniczkowych napotyka na pewne trudności. Procedury te przystosowane są do rozwiązywania zagadnień początkowych, a nasze zagadnienia są zagadnieniami brzegowymi. Ponadto równania propagacji błędu, które wyprowadzimy w następnym podrozdziale, odpowiadające równaniom /82/, /83/ są niestabilne.

Przypuśćmy, że będziemy rozwiązywać przy pomocy maszyny cyfrowej układ równań

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad /\text{dla} \quad t = 0 \quad x = x(0)/ \qquad /115/$$

gdzie x - jest n-wymiarowym wektorem stanu,

u - jest m-wymiarowym wektorem funkcji wymuszającej

f - jest wektorem n-wymiarowym.

Teoretyczny rozkład czynności w maszynie cyfrowej prowadzący do rozwiązania układu /115/ będzie następujący [45]:

1/ wytworzenie funkcji f

2/ scałkowanie względem czasu funkcji f

Ze względu na niedokładność obliczeń maszynowych zarówno wytworzenie funkcji f jak i proces całkowania obarczone są błędami. Zgrupujmy wszystkie błędy towarzyszące wytworzeniu funkcji f w jeden <u>wektor błędów elementarnych</u> $\varepsilon(t)$. Oznaczmy wektor rozwiązań przybliżonych otrzymanych z maszyny przez $y(t)$. Rozwiązanie $y(t)$ spełnia następujące równanie różniczkowe

$$y'(t) = f(y, u) + \varepsilon(t) \qquad y(0) = x(0) \qquad /116/$$

Różnicę pomiędzy rozwiązaniem dokładnym a maszynowym nazywać będziemy błędem obliczeniowym i oznaczać przez

$$e(t) = y(t) - x(t) \qquad /117/$$

Jeżeli założymy, że błąd obliczeniowy jest niewielki, a $f(x, u)$ jest różniczkowalną funkcją względem x, możemy $f(y, u)$ w równaniu /116/ zastąpić przez

$$f(y,u) = f(x,u) + \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\left(y(t) - x(t)\right) \qquad /118/$$

Wstawiając /118/ do /116/ i posługując się oznaczeniem /117/ otrzymamy

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \cdot e + \varepsilon(t) \qquad /119/$$

lub w zapisie operatorowym

$$L \cdot e = \varepsilon(t) \qquad /119a/$$

gdzie $L = \frac{d}{dt} - \frac{\partial f}{\partial x}$

Równanie /119/ nosi nazwę równania propagacji błędu. Liniowa aproksymacja /118/ jest usprawiedliwiona faktem, że bardziej interesuje nas asymptotyczne zachowanie się błędów niż ich dokładna, numeryczna wartość. Zauważmy, że w równaniu /119/ ε spełnia rolę funkcji wymuszającej. Wielkość funkcji ε zależy od dokładności obliczeń maszynowych i użytego algorytmu. Natomiast asymptotyczne zachowanie się $e(t)$ zależy głównie od własności macierzy $\frac{\partial f}{\partial x}$, a stąd też od samej funkcji f.

Zwykle o błędach elementarnych wiemy tylko tyle, że są ograniczone. Dlatego przyjmujemy następującą definicję: [45] .

<u>Definicja 1.</u> Mówimy, że propagacja błędu jest stabilna, jeżeli dla dowolnej funkcji $\mathcal{E}(t)$, ciągłej i ograniczonej na półprostej $t \in [0,\infty]$ odpowiadające jej rozwiązanie $e(t)$ równania /119/ spełnia dla $t \in [0,\infty]$ warunek

$$|e(t)|^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2(t) \leqslant M$$

gdzie M - pewna stała niezależna od t.

Warunkiem koniecznym na to, aby błąd obliczeniowy $e(t)$ pozostawał ograniczony dla dużych wartości t jest jednostajna stabilność równania jednorodnego

$$L \circ e = 0 \qquad /120/$$

określona następującą definicją: [35]

<u>Definicja 2.</u> Rozwiązanie równania /119/ nazywa się jednostajnie stabilnym, jeżeli dla każdego $\mathcal{E}_o > 0$, istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli w chwili początkowej $e^2(0) \leqslant \mathcal{E}_o$, to dla dowolnego $t > 0$ będzie spełniona nierówność $e^2(t) \leqslant \delta$.

Stabilne własności obliczeniowe operatora różniczkowego L mogą zależeć od kierunku całkowania tj. od tego czy całkowanie odbywa się w przód, tzn. od $t_{min} \longrightarrow t_{max}$, czy wstecz, tzn. od $t_{max} \longrightarrow t_{min}$ [46].

Definicja 3. O liniowym operatorze różniczkowym L mówimy, że jest obliczeniowo stabilny w przód, jeżeli równanie jednorodne $L \cdot e = 0$ jest jednostajnie stabilne.

Definicja 4. O liniowym operatorze różniczkowym L mówimy, że jest obliczeniowo stabilny wstecz, jeżeli równanie jednorodne $\overline{L} \cdot e = 0$ powstałe z $L \cdot e = 0$ przez zastąpienie t na $(-t)$ jest jednostajnie stabilne.

Definicja 5. Liniowy operator różniczkowy L jest obliczeniowo niestabilny, jeżeli nie jest stabilny ani w przód ani wstecz.

Oczywiście dla operatorów liniowych o stałych współczynnikach, obliczeniową stabilność lub niestabilność określają znaki pierwiastków równania charakterystycznego. Operatory różniczkowe równań /82/, /83/

$$L_1 = \frac{d^2}{ds^2} + A \frac{d}{ds} + B \qquad /121/$$

$$L_2 = \frac{d^2}{ds^2} + C \frac{d}{ds} + D \qquad /122/$$

dla stałych współczynników A, B, C, D są obliczeniowo niestabilne.

Równanie charakterystyczne np. dla operatora L_1

$$r^2 + A \cdot r + B = 0$$

posiada pierwiastki charakterystyczne

$$r_{1,2} = \frac{-A \mp \sqrt{A^2 - 4 \cdot B}}{2},$$

przeciwnych znaków. Powoduje to, że operator L_1 /jak i L_2 / jest obliczeniowo niestabilny niezależnie od kierunku całkowania.

Dla ominięcia efektów wynikających z niestabilności operatorów różniczkowych, a także spełnienia narzuconych warunków brzegowych /90/ - /93/ posłużymy się metodą dekompozycji.

5.5. Metoda dekompozycji [46]

Metoda dekompozycji polega na zastąpieniu niestabilnego operatora L /w sensie def. 5 podrozdz. 5.4/ operatorami różniczkowymi pierwszego rzędu, stabilnymi obliczeniowo dla wybranego kierunku całkowania

$$L = L_F \cdot L_B$$

gdzie L_B - operator różniczkowy pierwszego rzędu stabilny obliczeniowo przy całkowaniu wstecz,

L_F - operator różniczkowy pierwszego rzędu, stabilny obliczeniowo przy całkowaniu w przód.

Ponieważ postacie operatorów /121/ i /122/ są identyczne, więc proces dekompozycji przeprowadzimy tylko dla operatora /121/.

Dekompozycję operatora L otrzymujemy przyjmując, że L_B i L_F są postaci

$$L_B = \frac{d}{ds} - \lambda_{B_1}$$

$$L_F = \frac{d}{ds} - \lambda_{F_1}$$

Z porównania iloczynu $L_F\ L_B$ z postacią operatora L

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + A\frac{d}{ds} + B = \left(\frac{d}{ds} - \lambda_{F_1}\right)\left(\frac{d}{ds} - \lambda_{B_1}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{ds^2} - (\lambda_{B_1} + \lambda_{F_1})\frac{d}{ds} - \frac{d\lambda_{B_1}}{ds} + \lambda_{B_1}\lambda_{F_1}$$

otrzymujemy

$$\lambda_{B_1} + \lambda_{F_1} = -A$$

$$\frac{d\lambda_{B_1}}{ds} - \lambda_{B_1}\cdot\lambda_{F_1} = -B$$

czyli

$$\lambda_{F_1} = -\left(A + \lambda_{B_1}\right) \qquad /123/$$

$$\frac{d\,\lambda_{B_1}}{ds} = -B - A\,\lambda_{B_1} - \lambda_{B_1}^2 \qquad /124/$$

Rozwiązywanie równania /82/ przebiegać będzie teraz następująco:

1/ rozwiązujemy równania /123/, całkując w przód, z warunkiem początkowym

$$\lambda_{B_1}(0) = 0 \qquad /125/$$

Otrzymujemy λ_{B_1}, a z równania /124/ λ_{F_1}

2/ rozwiązujemy równanie

$$L_F\, y^{j+1} = F_1^j \qquad /126/$$

całkując w przód z warunkiem

$$y^{j+1}(0) = 0 \qquad /127/$$

3/ rozwiązujemy równanie

$$L_B\, u^{j+1} = y^{j+1} \qquad /128/$$

całkując wstecz z warunkiem początkowym

$$u^{j+1}(1) = \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^{j+1} \qquad /129/$$

Rozwiązanie równania /128/ u^{j+1} jest poszukiwanym rozwiązaniem równania /82/ z warunkami /90/ i /92/. Istotnie

$$L\, u^{j+1} = L_F\, L_B\, u^{j+1} = L_F\, y^{j+1} = F_1^j$$

Dobór warunków początkowych /125/ i /127/ zapewnia spełnienie warunku brzegowego $\frac{du^{j+1}}{ds} = 0$ automatycznie. Wynika to z równania /128/

$$\frac{du^{j+1}}{ds} = \left(\lambda_{B_1} u^{j+1} + y^{j+1}\right)\Big|_{s=0} = 0$$

Dokonując dekompozycji operatora /122/, prawą stronę równania /126/ zastępujemy przez F_2^j, a warunek początkowy /129/ przez $w^{j+1}(1) = 0$.

Stabilność obliczeniową operatorów L_B, L_F oraz równania /123/ dla odpowiednich kierunków całkowania wykażemy w następnym podrozdziale.

5.6. Badanie stabilności obliczeniowej

Jedną z najbardziej efektywnych metod badania stabilności /w sensie definicji 2 podrozdział 5.5/ jest metoda funkcji Liapunowa.

O funkcji rzeczywistej $V : R^n \longrightarrow R$, ciągłej i jednoznacznej mówimy, że jest dodatnio określona jeżeli $V(x) \geq 0$ dla każdego $x \in R^n$ oraz $V(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

Na mocy twierdzenia Liapunowa wiemy, że jeżeli potrafimy znaleźć dla równania $\frac{dx}{dt} = f(x)$ funkcję V dodatnio określoną i taką, że

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot f \leqq 0 \qquad /130/$$

to równanie to będzie jednostajnie stabilne /patrz definicja 2 podrozdział 5.5/.

<u>Twierdzenie 3.</u> [45] Warunkiem dostatecznym na to, aby układ równań /115/ / $\frac{dx}{dt} = f(x,u)$/ posiadał stabilne własności propagacji błędu jest posiadanie przez macierz symetryczną

$$\frac{\partial f^T}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} , \qquad /131/$$

gdzie $\frac{\partial f^T}{\partial x}$ jest macierzą transponowaną macierzy $\frac{\partial f}{\partial x}$, tylko ujemnych wartości własnych.

Dowód: Jako funkcję Liapunowa weźmiemy funkcję postaci

$$V(e) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \qquad /132/$$

Sprawdzamy, czy spełniony jest warunek /130/

$$\frac{d}{dt} V(e) = 2 \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \frac{de_i}{dt} = 2\, e^T \frac{\partial f}{\partial x} e \qquad /133/$$

gdzie $e^T = [e_1, e_2 \dots e_n]$

Warunkiem dostatecznym na to, aby forma kwadratowa /132/ była ujemna jest ujemność wszystkich wartości własnych macierzy /131/.

Możemy napisać nierówność

$$e^T \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot e \leqslant \gamma \, e^T \cdot e \qquad /134/$$

gdzie γ - jest największą wartością własną macierzy /131/.

Aby po prawej stronie nierówności można było napisać zero, liczba γ musi być ujemna, a tego należało dowieść.

<u>Twierdzenie 4.</u> Równanie

$$\frac{d\lambda_B}{ds} = B - A \cdot \lambda_B - \lambda_B^2 , \quad B < 0 , \quad A > 0 \qquad /135/$$

jest obliczeniowo stabilne przy całkowaniu w przód, gdy $\lambda_B \geqslant 0$.

Dowód: Równanie propagacji błędu dla równania /135/ jest postaci

$$\frac{de}{ds} = (- A - 2 \cdot \lambda_B) \cdot e$$

Pierwiastek równania charakterystycznego jest równy

$$r = -A - 2 \cdot \lambda_B$$

i jest ujemny dla $\lambda_B \geqslant 0$, co na mocy twierdzenia 3 kończy dowód.

Twierdzenie 5. Operatory

$$L_F = \frac{d}{ds} - \lambda_F \qquad /136/$$

$$L_B = \frac{d}{ds} - \lambda_B \qquad /137/$$

mają stabilne własności obliczeniowe dla $\lambda_F \leqslant 0$ i $\lambda_B \geqslant 0$, L_F przy całkowaniu w przód, a L_B wstecz.

Dowód: Równania propagacji błędu dla operatorów /136/ i /137/ mają postać

$$L_F e = \frac{de}{ds} - \lambda_F e = 0$$

$$L_B e = \frac{de}{(-ds)} - \lambda_B e = 0$$

Funkcja $V(e) = e^2$ jest funkcją Liapunowa i spełnia warunek /133/.

Istotnie: dla operatora L_F mamy

$$\frac{d}{ds} V(e) = \frac{d}{ds} \cdot e^2 = 2 \cdot e \cdot \frac{de}{ds} = 2 \lambda_F V(e)$$

i dla $\lambda_F \leqslant 0$ pochodna $\frac{dV}{ds}$ jest mniejsza, równa zeru.

Dla operatora L_B mamy

$$\frac{dV}{ds} = -2\,\lambda_B \cdot V(e)$$

i dla $\lambda_B \geqslant 0$ $\frac{dV}{ds} \leqslant 0$

6. OBLICZENIA MASZYNOWE

6.1. Dane wejściowe i obliczenia pomocnicze

Wartości ciśnienia, gradientu ciśnienia oraz charakterystykę deformacji rurki, które zapożyczono z pracy S.C.Linga i H.B. Atabeka [26] przedstawiono na rysunkach 3a, 3b i 4. Sposób i technikę pomiarów zarówno ciśnienia, gradientu ciśnienia oraz rozkładów prędkości przedstawiono [26], [27], [28], [30].

Okres T = 0.8 s /okres pracy serca/ unormowano do jedności wprowadzając bezwymiarowy czas $\tau = t/T$. Unormowany okres podzielono na 200 równych części, a wartości ciśnienia oraz gradientu ciśnienia odpowiadające punktom $\tau = j \cdot \Delta\tau_p$ /$j = 0,1,2, \ldots 200$, $\Delta\tau_p = 0.005$/ zostały wprowadzone do maszyny cyfrowej. Charakterystykę deformacji rurki, w postaci $\lambda_2 = \hat{R}(p/\bar{p})$ aproksymowano wielomianem 10-go stopnia, używając metody najmniejszych kwadratów. Przy doborze optymalnego stopnia wielomianu korzystano z kryterium opisanego w pracy [38], które także opisał autor niniejszej pracy w [21]. Wielomian ten wykorzystaliśmy do obliczenia aktualnego promienia R /patrz wzór /2// oraz pochodnej $\frac{\partial \hat{R}}{\partial p}$ używając, podobnie jak przy obliczeniu $\frac{\partial R^j}{\partial t}$ ilorazu centralnego

$$\frac{\partial \hat{R}^j}{\partial p} = \frac{\hat{R}(p^j + \delta) - R(p^j - \delta)}{2\delta}, \qquad /138/$$

/przyjęto $\delta = 0.05$/ oraz

$$\frac{\partial R^j}{\partial t} = \frac{R^{j+1} - R^{j-1}}{2 \cdot \Delta\tau_p \cdot T} \quad , \Delta\tau_p = 0.005 \qquad /139/$$

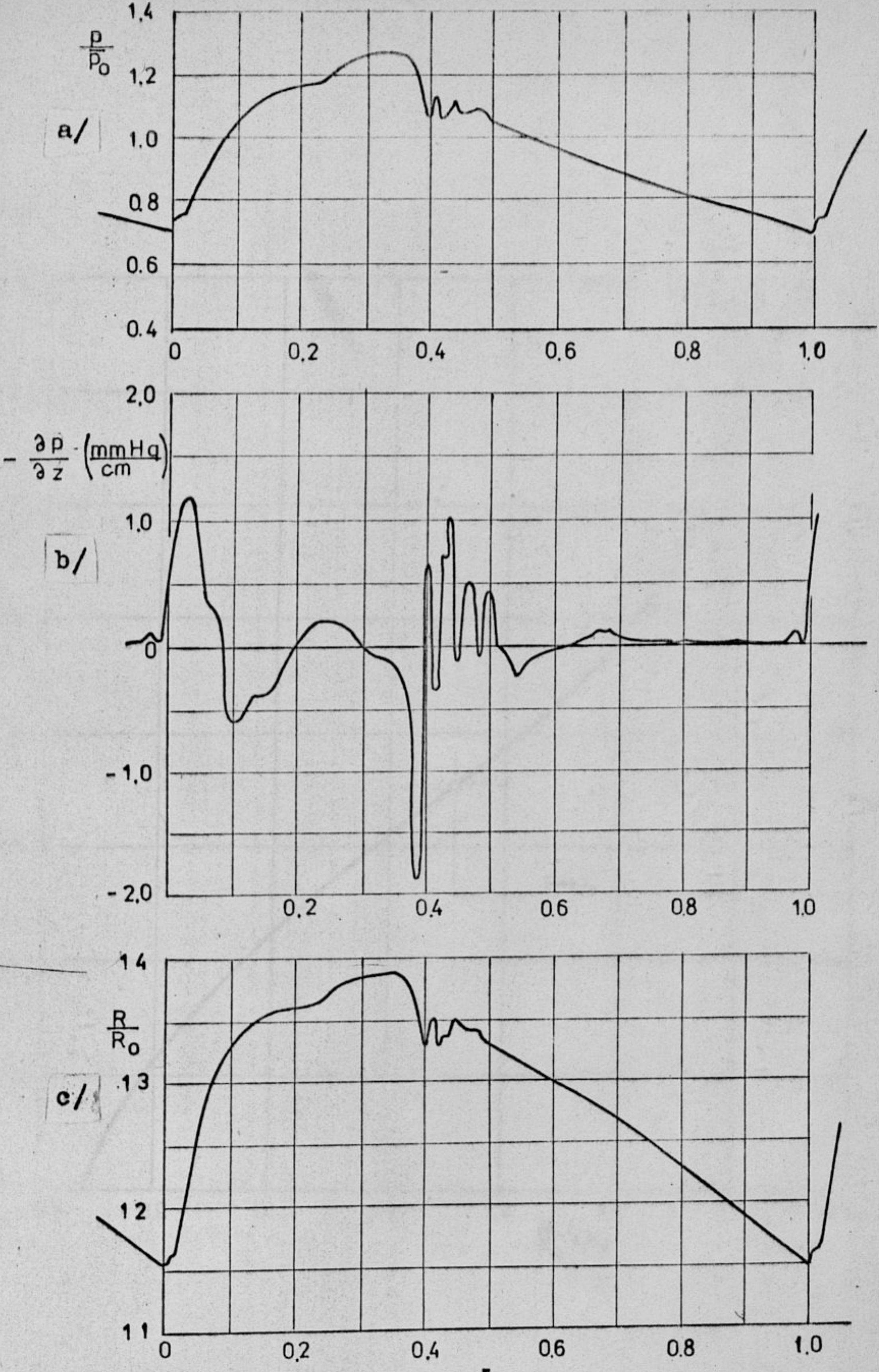
Zmiany promienia R odniesionego do promienia w stanie nienaprężonym R_0 przedstawiono na rys. 3c, a wyliczoną prędkość ścianki $\frac{\partial R}{\partial t}$ przedstawiono na rys. 5.
Dobór kroku $\Delta t = \Delta\tau \cdot T$ /T - okres funkcji p ciśnienia i $\frac{\partial p}{\partial x}$ gradientu ciśnienia/ występującego we wzorach /78/ /79/ podyktowany był kompromisem pomiędzy czasem trwania obliczeń a dokładnością obliczeń numerycznych, która wiąże się także z dokładnością odtworzęrzenia w maszynie cyfrowej szybko zmieniającego się gradientu ciśnienia stanowiącego dla nas funkcję wymuszającą.
Jak to zostanie wyjaśnione dalej, mniejszy krok Δt nie tylko powoduje zwiększenie ilości równań, które należy rozwiązać w odcinku czasu $T = n \cdot \Delta t$, ale także zmusza do zmniejszenia kroku całkowania Δs w procedurze rozwiązującej równania różniczkowe zwyczajne.
Do obliczeń przyjęto $\Delta\tau = 0.01$.
Lepkość kinematyczną przyjęto zgodnie z [26] $\nu = 0.036 \frac{cm^2}{s}$, a gęstość cieczy, której wartości nie podano w pracy [26] przyjęto $\rho = 1.06 \frac{g}{cm^3}$. W pracy [26] ciśnienie podane było w mm Hg. Do przeliczeń przyjęto gęstość rtęci $\rho_{Hg} = 13.6 \frac{g}{cm^3}$.

Parametr Θ występujący we wzorach /78/ /79/ przyjęto $\Theta = 0.75$.

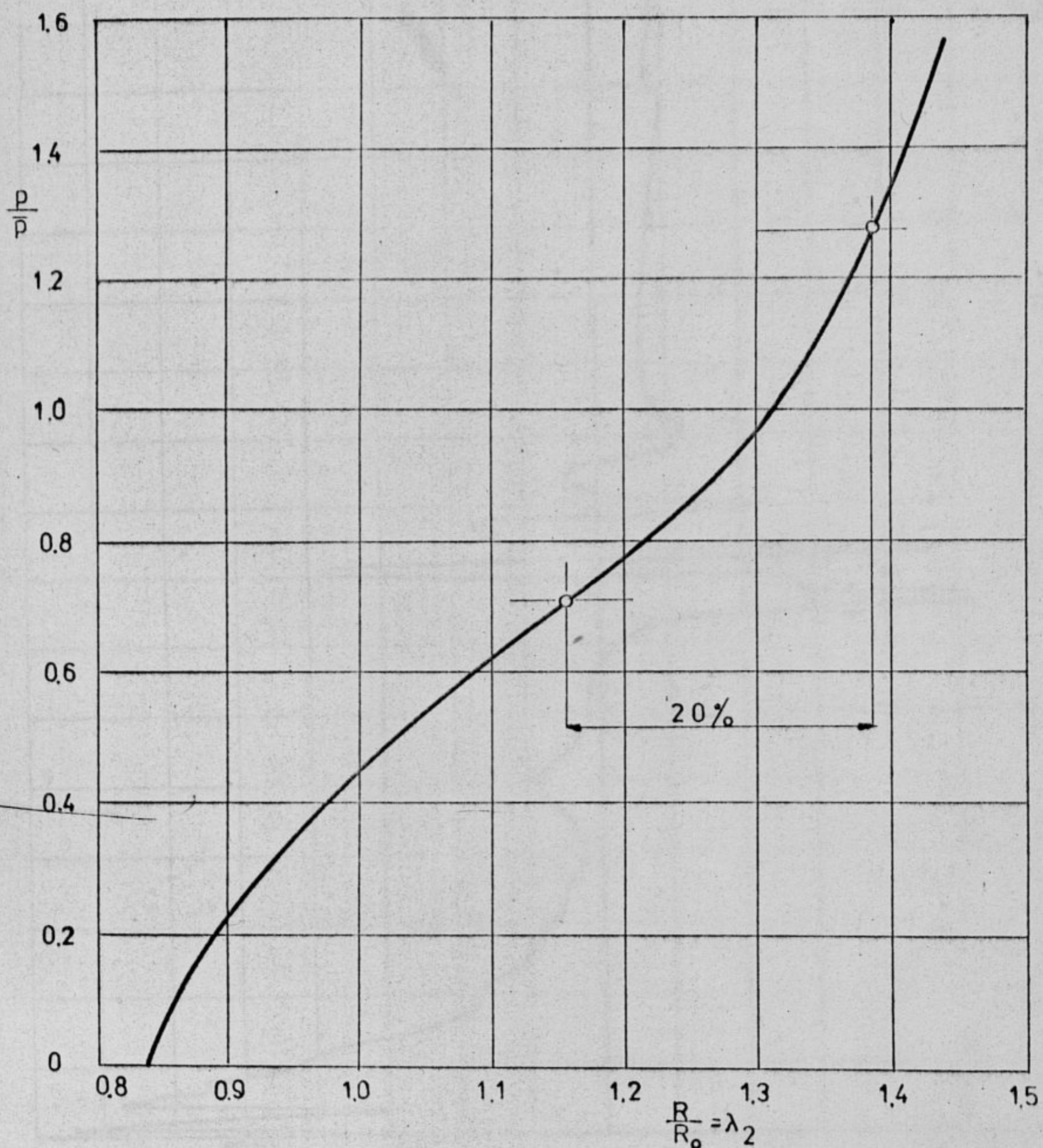
Wartość parametru α przyjęliśmy następująco:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \tau \in [0,\, 0.15] \quad \text{i} \quad [0.3,\, 0.6] \\ \Theta - \frac{1}{2} & \text{dla pozostałych} \quad \tau \end{cases}$$

Określenie w wyżej podany sposób parametru α wiąże się z tym, że $\Delta\tau = 0.01$ jest, w stosunku do szybkich zmian gradientu ciśnienia w wyróżnionych wyżej przedziałach τ, przyrostem czasu zbyt dużym. W schemacie różnicowym /32/, przy $\alpha \neq 0$, dla otrzymania rozwiązania w chwili t^{j+1} korzysta się z rozwiązań w chwili t^j i t^{j-1} i stąd też pojawia się pewna bezwładność, co daje rozwiązanie nie nadążające za zmianami gradientu ciśnienia. Dla $\alpha = 0$ otrzymujemy schemat różnicowy /26/, w którym wykorzystuje się tylko rozwiązanie w chwili wcześniejszej t^j.

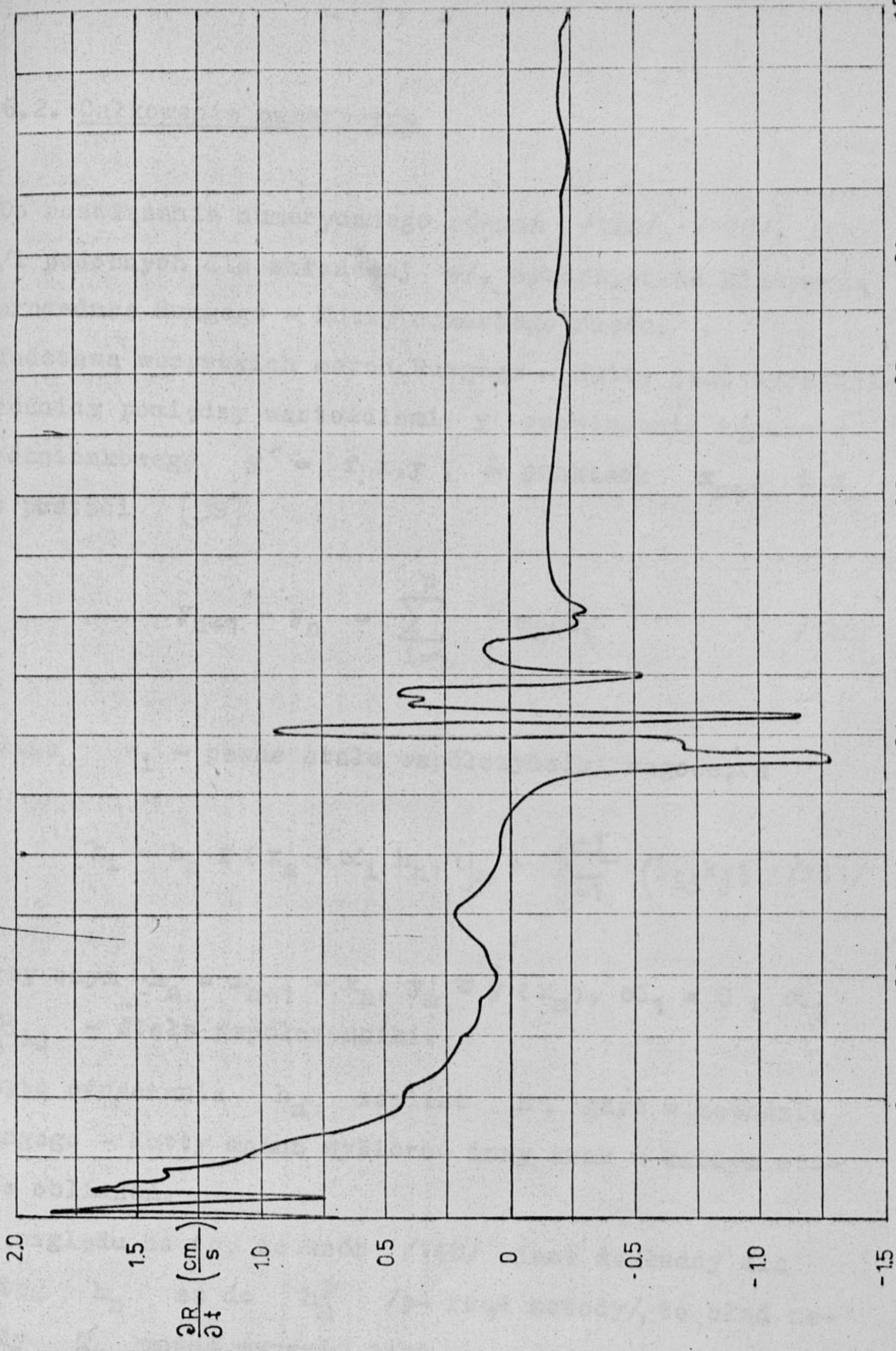


Rys. 3. Wykresy: a/ ciśnienia, b/ gradientu ciśnienia, c/ promienia rurki jako funkcji bezwymiarowego czasu τ, $\bar{p}$ = 100 mm Hg, R_0 = 0.47 cm T = 0.8 sek.



Rys. 4. Charakterystyka statyczna deformacji rurki

$\bar{p}$ = 100 mm Hg, R_o = 0.47, ψ = 0,5°



Rys. 5. Prędkość ścianki jako funkcji czasu bezwymiarowego τ, T = 0.8 sek.

6.2. Całkowanie numeryczne

Do rozwiązania numerycznego równań /124/, /126/, /128/ /i podobnych dla składowej w/, wykorzystano klasyczną procedurę Rungego - Kutty czwartego rzędu.
Podstawą wszystkich metod Rungego - Kutty jest wyrażenie różnicy pomiędzy wartościami y rozwiązania równania różniczkowego $y' = f\ x,y$, w punktach x_{n+1} i x_n w postaci [38]

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^{p} w_i \cdot k_i \qquad /140/$$

gdzie w_i - pewne stałe współczynniki wagowe, a

$$k_i = h_n f\left(x_n + \alpha_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right) \qquad /141/$$

przy czym $h_n = x_{n+1} - x_n$, $y_n \cong y(x_n)$, $\alpha_1 = 0$, α_i β_{ij} - stałe współczynniki.
Użyto oznaczenia h_n zamiast h, gdyż w metodzie Rungego - Kutty można wybierać inny krok w każdym etapie obliczeń.
Ze względu na to, że wzór /140/ jest dokładny dla potęg h_n aż do h_n^p /p- rząd metody/, to błąd metody T_p można wyrazić jako

$$T_p = \phi h_n^{p+1} + 0\left(h_n^{p+2} \right) \qquad /142/$$

gdzie zarówno ϕ jak i T_p zależą od $f(x,y)$ [38]

Ze wzorów /140/ i /141/ widać, że dla otrzymania y_{n+1} przy wykorzystaniu tylko znajomości y_n konieczne jest obliczenie wartości $f(x,y)$ w kilku pośrednich punktach pomiędzy x_n i x_{n+1}.
W naszym zagadnieniu prawe strony równań różniczkowych, $f(x,y)$, dane są w postaci tablic wartości, odpowiadających wybranym wartościom zmiennej s.
Dla obliczenia wartości $f(x,y)$ w punktach pośrednich pomiędzy x_n, x_{n+1} wykorzystano wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia drugiego oparty na trzech węzłach interpolacji x_n, x_{n+1} i x_{n+2}.
Dobór kroku całkowania h_n podyktowany jest z jednej strony dokładnością, a z drugiej czasem obliczeń. Poważną wadą metod Rungego - Kutty jest brak możliwości łatwego i szybkiego oszacowania błędu metody T_p [18].
Jedną z najbardziej popularnych metod szacowania T_p jest metoda ekstrapolacyjna [18], [16], w której obliczenia prowadzi się dwukrotnie: raz z krokiem h, od x_{n-1} do x_{n+1}, a drugi raz z krokiem $h' = 2 \cdot h$.
Otrzymane rozwiązania $y^{(h)}$ i $y^{(2h)}$, przy pewnych założeniach, pozwalają na następujące oszacowanie:

$$T_p(x,h) = \phi\, h^{p+1} = \frac{y_{n+1}^{(h)} - y_{n+1}^{(2h)}}{2^{p+1} - 2} \qquad /143/$$

Wadą metody jest konieczność powtarzania obliczeń dla dodatkowego kroku $h' = 2 \cdot h$. Dlatego też, metoda ekstrapolacyjna bywa używana sporadycznie, do śledzenia poprawności prowadzonych obliczeń.

Ważnym pojęciem, które pozwala na orientacyjny, szybki dobór kroku h jest pojęcie absolutnej stabilności [16].

<u>Definicja</u>: Metoda /140/, /141/ jest dla danego kroku h i danego równania różniczkowego absolutnie stabilna, jeżeli błąd $\varepsilon = y_n - y(x_n)$ pozostaje ograniczony dla $n \to \infty$.

Definicja ta, niestety, zależy od rozwiązywania zagadnienia. Dlatego do rozważań wprowadza się "równanie testowe" i na jego podstawie określa się absolutną stabilność metody. Jako równania testowego zwykle używa się równania postaci $y' = \lambda y$, gdzie λ jest stałą zespoloną o $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Gdy do równania $y' = \lambda y$ zastosujemy metodę Rungego - Kutty, to otrzymamy

$$y_{n+1} = E \cdot y_n \qquad /144/$$

gdzie

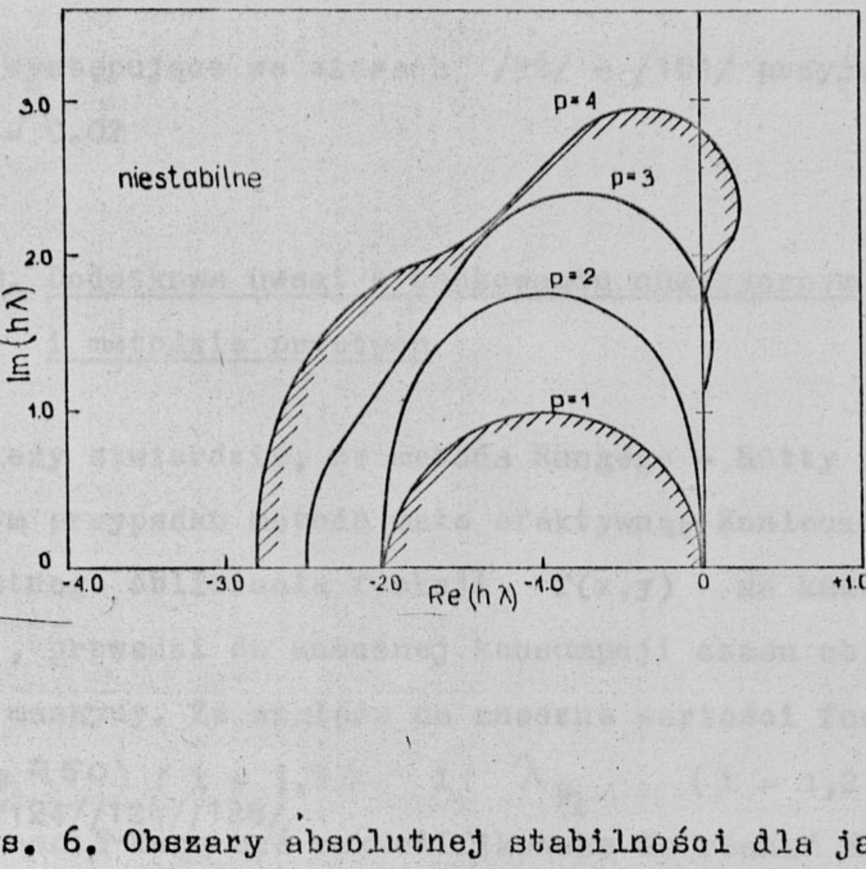
$$E = \sum_{i=0}^{p} \frac{(h \cdot \lambda)^i}{i!}, \quad p \leqslant 4 \qquad /145/$$

/Dla $p \geqslant 5$ liczba członów jest większa niż rząd metody [18] /.

Warunkiem absolutnej stabilności jest, aby $|E| \leqslant 1$.

Ze wzoru /145/ widać, że obszar absolutnej stabilności, tj. zbiór wartości $h \cdot \lambda$, dla których $|E| \leqslant 1$, jest ograniczony. Dobierając jednak dostatecznie małe h zawsze jesteśmy w stanie spełnić warunek absolutnej stabilności.

Rysunek 6 przedstawia obszary absolutnej stabilności dla metod Rungego - Kutty rzędu od 1 do 4.



Rys. 6. Obszary absolutnej stabilności dla jawnych metod Rungego - Kutty rzędu 1 - 4 [18].

Przy rozwiązywaniu równań postaci $y' = f(x,y)$, kładziemy $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}$ przyjmując, że w pierwszym przybliżeniu rozwiązanie y określone jest przez rozwiązanie zlinearyzowanego równania $y' = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y$.

Po uwzględnieniu warunków absolutnej stabilności i oszacowaniu T_p według wzoru /143/ /T_p = 0.01/ zastosowano zmienny krok $h_n = s_n - s_{n-1}$ przyjmując dla zmiennej s następujące wartości:

s = /0.0, 0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03, 0.04, ...co 0.01 .. 0.1, 0.12, 0.14, ... co 0.02 .., 1.0/

s_o występujące we wzorach /96/ - /101/ przyjęto

s_o = 0.02

6.3. Dodatkowe uwagi o całkowaniu numerycznym i metodzie prostych

Należy stwierdzić, że metoda Rungego - Kutty jest w naszym przypadku metodą mało efektywną. Konieczność wielokrotnego obliczania funkcji $f(x,y)$ na każdym kroku h_n, prowadzi do znacznej konsumpcji czasu obliczeniowego maszyny. Ze względu na znaczne wartości funkcji λ_{B_i} ($\lambda_{B_i} \cong 50$) (i = 1,2) i λ_{F_i} (i = 1,2) (p. /123//124/) /124//126//128/ równania mogą być zakwalifikowane do równań źle uwarunkowanych obliczeniowo, tzw. równań "sztywnych" [33] /spełnienie warunku absolutnej stabilności wymaga stosowania małego kroku całkowania h_n/. Znaczne wartości λ_{B_i}, λ_{F_i} wynikły z konieczności stosowania małego kroku czasowego Δt. Zmniejszenie wartości Δt powoduje zwiększenie wartości λ_{B_i} λ_{F_i}, a stąd, dla spełnienia warunku absolutnej stabilności, konieczność stosowania mniejszego kroku h_n.

Do całkowania równań "sztywnych" wypracowano specjalne metody, dla których obszary absolutnej stabilności są nieograniczone /np. metoda trapezów w połączeniu z metodą ekstrapolacji [18] /.

Decydując się na klasyczną metodę Rungego - Kutty kierowano się wygodą i możliwością skorzystania z gotowej procedury bibliotecznej.

6.4. Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego

Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego przedstawiono na rys. 9. Jako kryterium zbieżności iteracji, na danej warstwie czasowej, przyjęto warunek

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} h_n \left[\left.(w^j_{k+1} - w^j_k)^2\right|_{s=s_i} + \left.(u^j_{k+1} - u^j_k)^2\right|_{s=s_i} \right]} \leqslant 0{,}002$$

Zadowalająca zbieżność osiągana była zazwyczaj po dwóch iteracjach. Zagadnienia /11/ - /16/ są zagadnieniami brzegowymi i dla jednoznacznego wyznaczenia rozwiązań brakuje warunków początkowych, tzn. wartości prędkości w chwili $t = 0$. W naszym przypadku warunki początkowe są nieznane. Wykorzystaliśmy więc fakt okresowości ciśnienia i gradientu ciśnienia i powtarzaliśmy obliczenia przez kilka okresów, aż do otrzymania ustalonego przepływu. Dla zapoczątkowania obliczeń przyjęliśmy $u = 0$, $w = 0$.

Przepływ ustala się już po dwóch okresach.

Dla otrzymania rozwiązania w chwili t^{j+1}, w $k+1$ -ej iteracji funkcję $\frac{\partial u}{\partial x}$ /patrz wzór [21/ / obliczano następująco:

$$\left(\frac{u(s_i)}{x}\right)^j_{k+1} = \frac{1}{R^j}\frac{\partial R^j}{\partial x}\left[\frac{\partial R^j}{\partial x}\left(s_i^2\cdot\frac{dw^j(s_i)}{ds} - 3\cdot w^j(s_i)\cdot s_i + \right.\right.$$

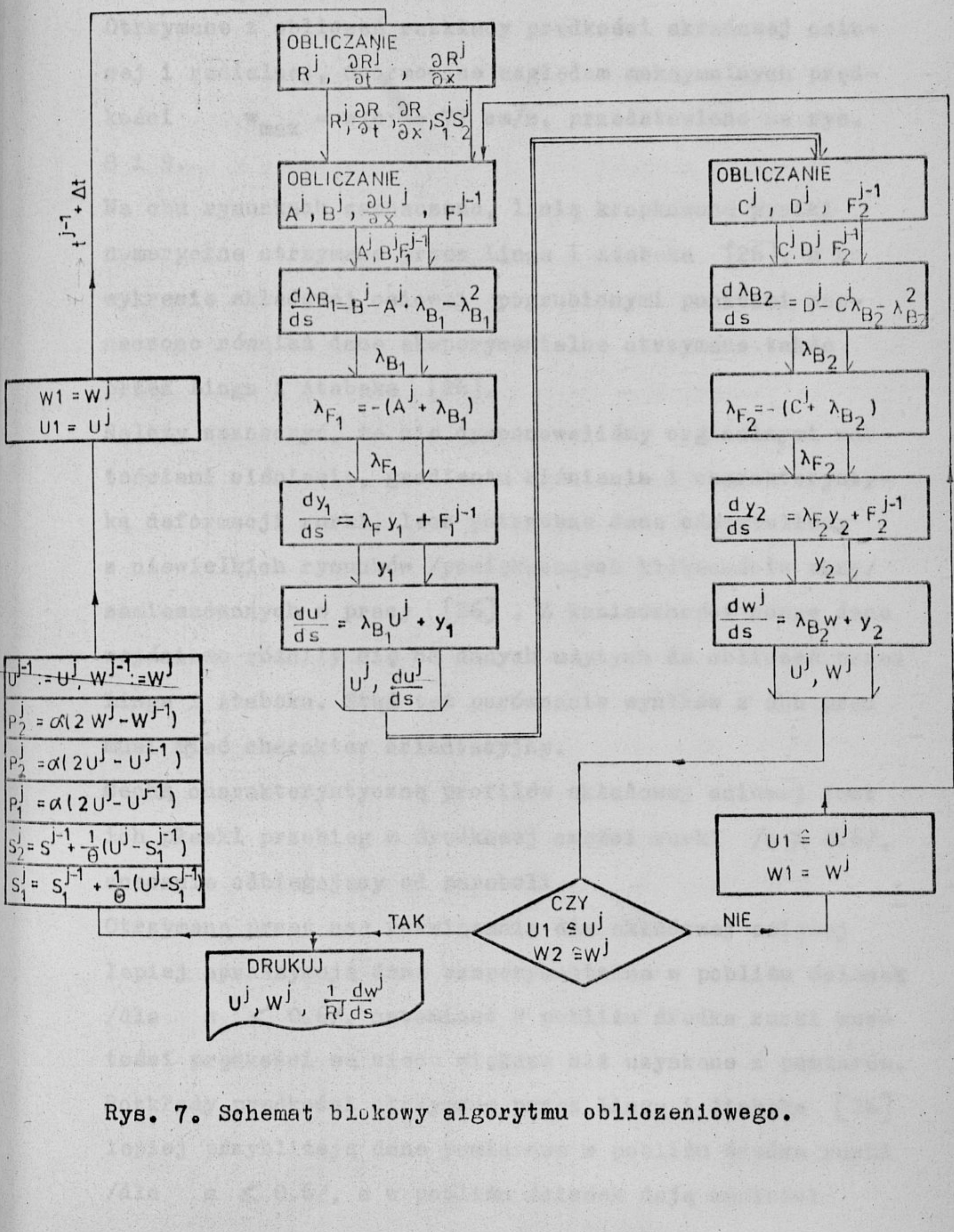
$$\left.\left. + \frac{6\,W^j}{s_i}\right) + 2\,u^j(s_i) - s_i\cdot\frac{du^j(s_i)}{ds}\right]$$

gdzie $W^j = \int_0^{s_i} s\,.\,w^j ds = \int_0^{s_{i-1}} sw^j\,ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} sw^j ds$

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} s\,w^j ds = \frac{(s_i - s_{i-1})\,1}{2}\left(s_i\cdot w^j(s_i) + s_{i-1}.w^j(s_{i-1})\right)$$

/przy funkcjach u, w i jej pochodnych pominięto dolny wskaźnik k, wskazujący na numer iteracji, aby zachować przejrzystość zapisu/.

Wartości pochodnych $\frac{dw}{ds}$ i $\frac{du}{ds}$ były obliczane przez procedurę rozwiązującą równania różniczkowe zwyczajne - F4RUNK i stanowiły parametry wyjściowe tej procedury.



Rys. 7. Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego.

6.5. Wyniki numeryczne

Otrzymane z obliczeń rozkłady prędkości składowej osiowej i radialnej, unormowane względem maksymalnych prędkości $w_{max} = w(o) = 77$ cm/s, przedstawiono na rys. 8 i 9.

Na obu rysunkach zaznaczono, linią kropkowaną wyniki numeryczne otrzymane przez Linga i Atabeka [26], a na wykresie składowej osiowej pogrubionymi punktami zaznaczono również dane eksperymentalne otrzymane także przez Linga i Atabeka [26].

Należy zaznaczyć, że nie dysponowaliśmy orginalnymi wartościami ciśnienia, gradientu ciśnienia i charakterystyką deformacji rurki, lecz potrzebne dane odczytaliśmy z niewielkich rysunków /powiększonych kilkanaście razy/ zamieszczonych w pracy [26]. Z konieczności nasze dane wejściowe różniły się od danych użytych do obliczeń przez Linga i Atabeka. Stąd też porównanie wyników z obu prac musi mieć charakter orientacyjny.

Cechą charakterystyczną profilów składowej osiowej jest ich płaski przebieg w środkowej części rurki /s > 0.6/, znacznie odbiegający od paraboli.

Otrzymane przez nas rozwiązania dla składowej osiowej lepiej aproksymują dane eksperymentalne w pobliżu ścianek /dla s < 0.6/, natomiast w pobliżu środka rurki wartości prędkości są nieco większe niż uzyskane z pomiarów.

Rozkłady prędkości otrzymane przez Linga i Atabeka [26] lepiej przybliżają dane pomiarowe w pobliżu środka rurki /dla s ≤ 0.6/, a w pobliżu ścianek dają wartości mniejsze niż otrzymane z pomiarów.

Na rys. 10 przedstawiono wykres składowej osiowej prędkości dla $s = 0$ jako funkcji bezwymiarowego czasu τ. Z rysunku widać, że dla $\tau < 0.6$ zgodność z wynikami doświadczalnymi jest dość dobra. Dla $\tau > 0.6$ wyniki otrzymane z obliczeń mają wartość większą od danych doświadczalnych.

Otrzymane rozkłady składowej radialnej znacznie odbiegają od rozkładów otrzymanych przez Linga i Atabeka.

Od wartości wyznaczonych prędkością ścianki, niekiedy poprzez lokalne maksimum, składowa radialna szybko maleje do wartości bliskich zeru /dla $s = 0.6$ $|u| \leq 0.04$ cm/s/ Dla $s = 0$ wartość składowej radialnej $u = 0.0001$ cm/s.

Ostre załamania profilu prędkości radialnej w pobliżu ścianki świadczy o nienadążaniu prędkości u za ruchem ścianki.

Zwróćmy uwagę, że dla rozkładów prędkości radialnej u otrzymanych przez Linga i Atabeka $\frac{du(0)}{ds} \neq 0$. Jest to niezgodne z warunkami symetrii przepływu /porównaj podrozdział 3.4/.

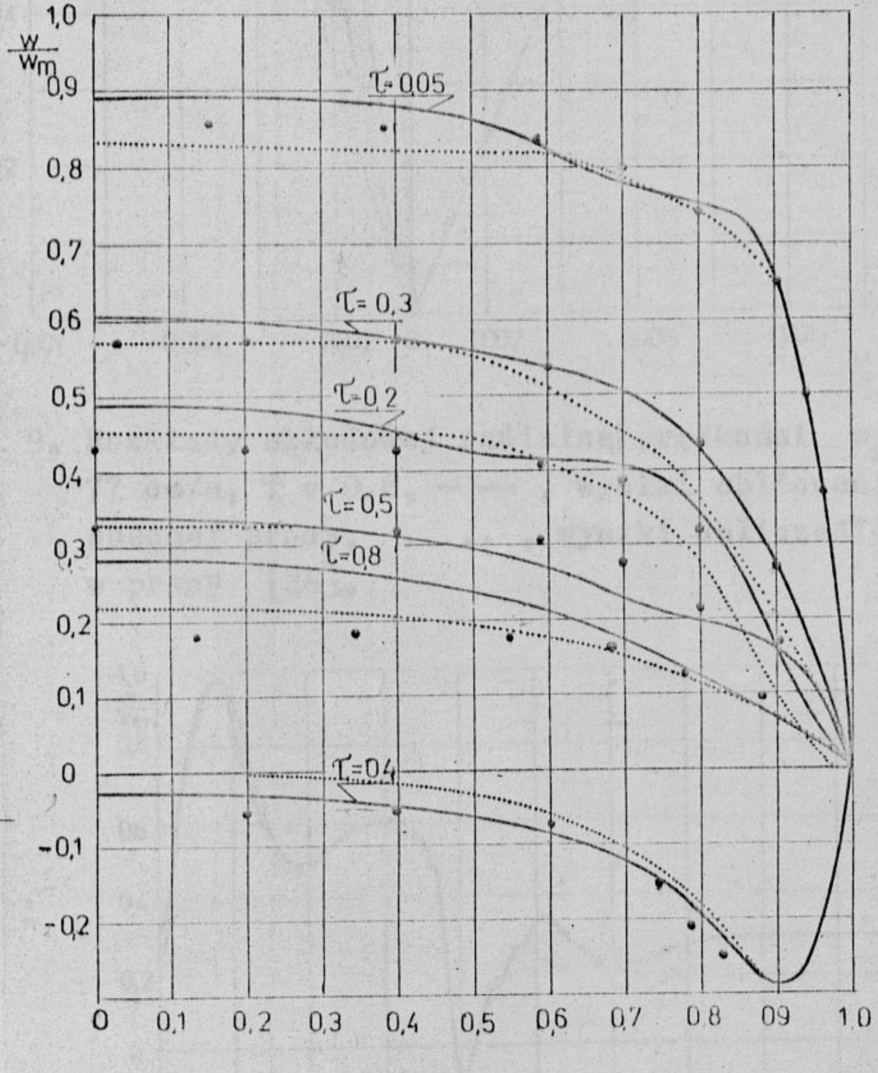
Pomimo, że składowa radialna prędkości jest ok. 100 razy mniejsza od składowej osiowej, ma ona, poprzez człony konwekcyjne, istotny wpływ na płaski przebieg profilu prędkości składowej osiowej w środkowej części rurki.

Natężenie przepływu otrzymane poprzez scałkowanie rozkładu prędkości osiowej $/Q = 2\pi \int_0^R wrdr = 2\pi \int_0^1 R^2 w s\, ds$ - procedurę numeryczną obliczania natężenia przepływu, gdy składowa prędkości w dana jest tablicą wartości, opisał autor niniejszej pracy w [22]/ przedstawiono na rys. 11. Linią kropkowaną oznaczono wyniki eksperymentalne. Zgodność z wynikami eksperymentalnymi jest dobra. Dla $\tau > 0.65$ obliczone natężenie przepływu jest nieco większe od pomierzonego.

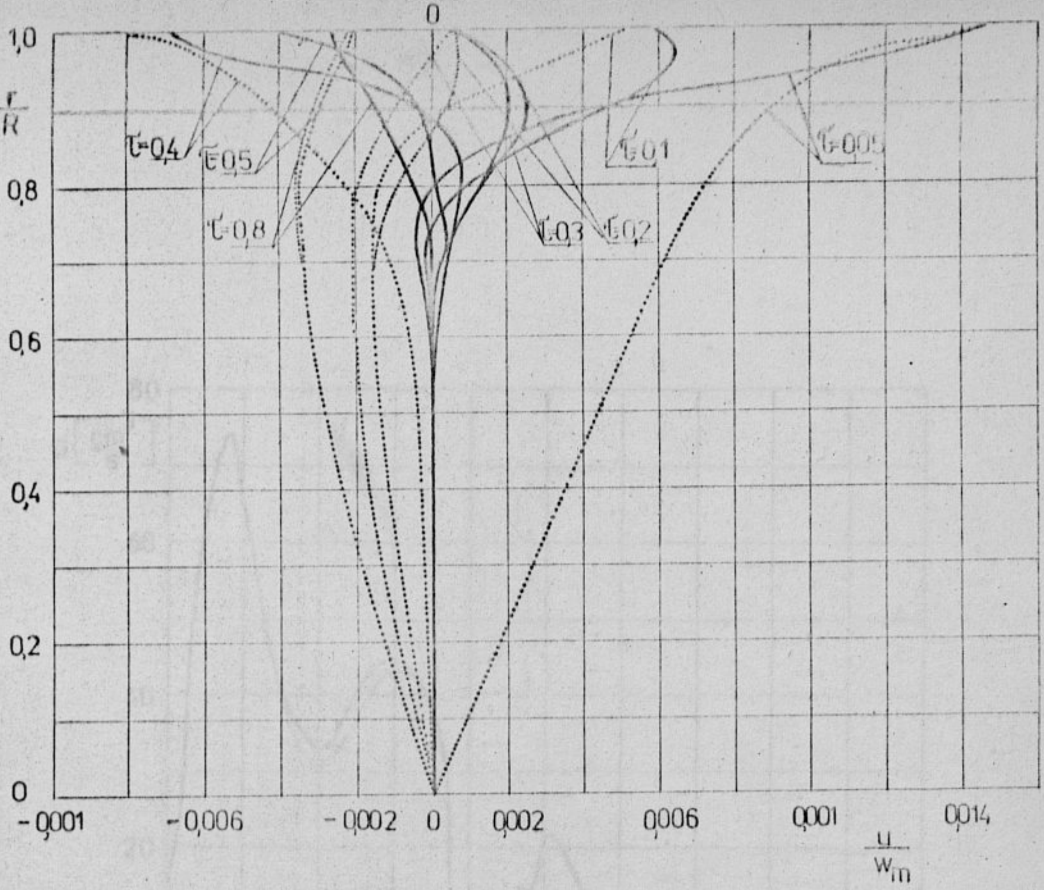
Na rysunku 12 przedstawiono wykres wartości gradientu prędkości na ściance /s = 1/ jako funkcji bezwymiarowego czasu τ /linią kropkowaną oznaczono wyniki eksperymentalne /Dla τ zmieniającego się od 0 do 0.4 zmierzony gradient prędkości jest większy od obliczonego. Podobny efekt otrzymali również Ling i Atabek /przedział czasowy $\tau = [0, 0.4]$ odpowiada skurczowi serca - tzn. narastaniu ciśnienia/.

Ekstremalne wartości gradientu prędkości przypadają w chwilach $\tau = 0.04$ i 0.39, odpowiadających ekstremalnym wartościom gradientu ciśnienia.

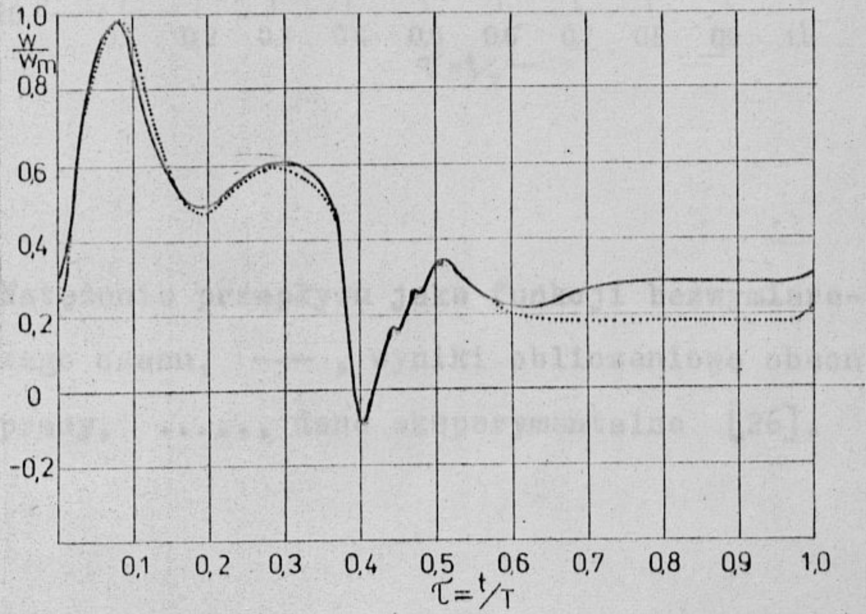
Wartość maksymalną prędkości osiowej uzyskano dla $\tau = 0.08$.



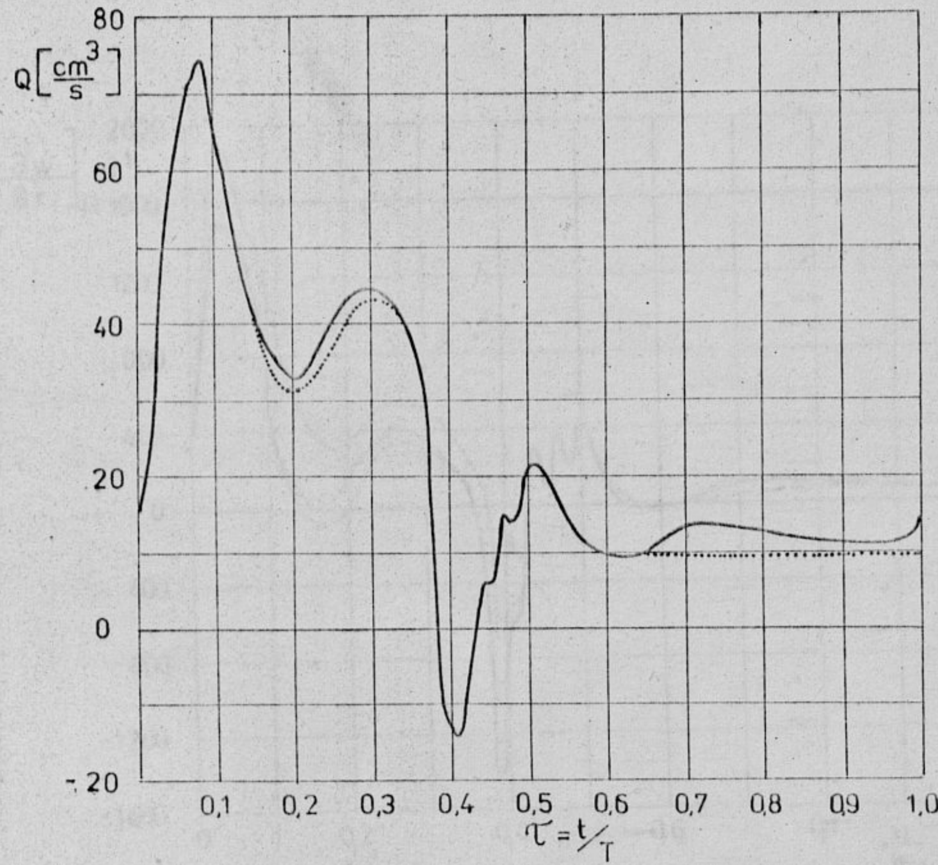
Rys. 8. Rozkłady składowej osiowej prędkości, ——, wyniki obliczeniowe obecnej pracy, ... , wyniki obliczeniowe z pracy [26] , • • • , wyniki eksperymentalne. w_m = 77 cm/s, T = 0.8.



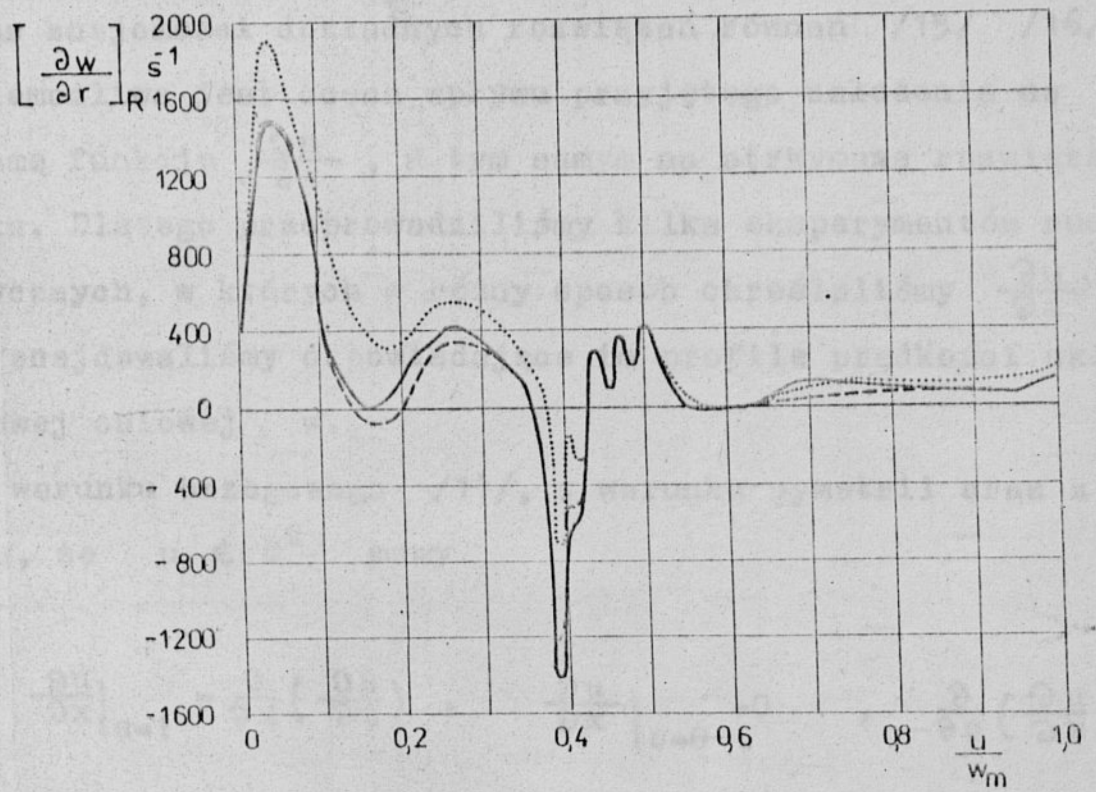
Rys. 9. Rozkłady składowej radialnej prędkości w_m = 77 cm/s, T = 0.8, ——— , wyniki obliczeniowe obecnej pracy, ... , wyniki obliczeniowe w pracy [26].



Rys. 10. Wykres składowej osiowej prędkości dla s = 0 jako funkcji bezwymiarowego czasu τ , w_m = 77 cm/s, T = 0.8, ——— , wyniki obliczeniowe obecnej pracy, ..., dane eksperymentalne [26].



Rys. 11. Natężenie przepływu jako funkcji bezwymiarowego czasu, ——— , wyniki obliczeniowe obecnej pracy, ..., dane eksperymentalne [26].



Rys. 12. Gradient prędkości na ściance jako funkcji bezwymiarowego czasu, T = 0.8, ——— , wyniki obliczeniowe obecnej pracy, ---- , wyniki obliczeniowe z pracy [26]. .... , dane eksperymentalne [26].

6.6. Eksperymenty numeryczne

Przy wyprowadzaniu równania wyrażenia na $\frac{\partial u}{\partial x}$ /21/ przyjęliśmy, że $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0$.

Bez znajomości dokładnych rozwiązań równań /15/ /16/ niemożliwa jest ocena wpływu przyjętego założenia na samą funkcję $\frac{\partial u}{\partial x}$, a tym samym na otrzymane rozwiązania. Dlatego przeprowadziliśmy kilka eksperymentów numerycznych, w których w różny sposób określaliśmy $\frac{\partial u}{\partial x}$ i znajdowaliśmy odpowiadające im profile prędkości składowej osiowej w.

Z warunku brzegowego /11/, z warunku symetrii oraz z faktu, że $u \in C^2$ mamy

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{s=1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{s=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

Pochodną $\frac{\partial u}{\partial x}$ na odcinku $[0,1]$ aproksymujemy następująco:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(s) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 \qquad /146/$$

gdzie $\varphi(s)$ - jest pewną znaną funkcją spełniającą warunki

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi(1) = 1 \qquad /147/$$
$$\frac{d\varphi(0)}{ds} = 0$$

Z założenia ciągłości i różniczkowalności do rzędu drugiego funkcji $R(x, t)$ mamy $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$.
Mając obliczoną funkcję $\frac{\partial R}{\partial x}$ /wzór /19// $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$ możemy obliczyć w sposób przybliżony:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^{j} = \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^{j+1} - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^{j-1}}{2 \cdot \Delta\tau \cdot T}, \quad \Delta\tau = 0{,}005$$

Załóżmy dodatkowo, że $\frac{d\,\varphi(1)}{ds} = 0$.
Funkcją $\varphi(s)$, która spełnia wszystkie powyższe warunki jest na przykład wielomian stopnia trzeciego postaci

$$\varphi(s) = s^2 \cdot (3 - 2 \cdot s) \qquad /148/$$

Dla tak określonej funkcji $\frac{\partial u}{\partial x}$ otrzymane rozkłady prędkości osiowej unormowane względem maksymalnej prędkości osiowej $w_m = 70$ cm/s, przedstawiono na rys. 13. Ogólnie, bezwzględne wartości prędkości składowej osiowej, w stosunku do rozkładów przedstawionych w podrozdziale 6.5 są mniejsze, a profile bardziej pofalowane. Z rysunku 13 widać, że otrzymane rozkłady lepiej aproksymują dane eksperymentalne /zaznaczone pogrubionymi punktami/ dla środka rurki. Gradient prędkości na ściance $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{s=1}$ nie uległ większej zmianie.

W innej próbie w miejsce $\varphi(s)$ określonej wzorem /148/ przyjęliśmy

$$\varphi(s) = s^3 \qquad /149/$$

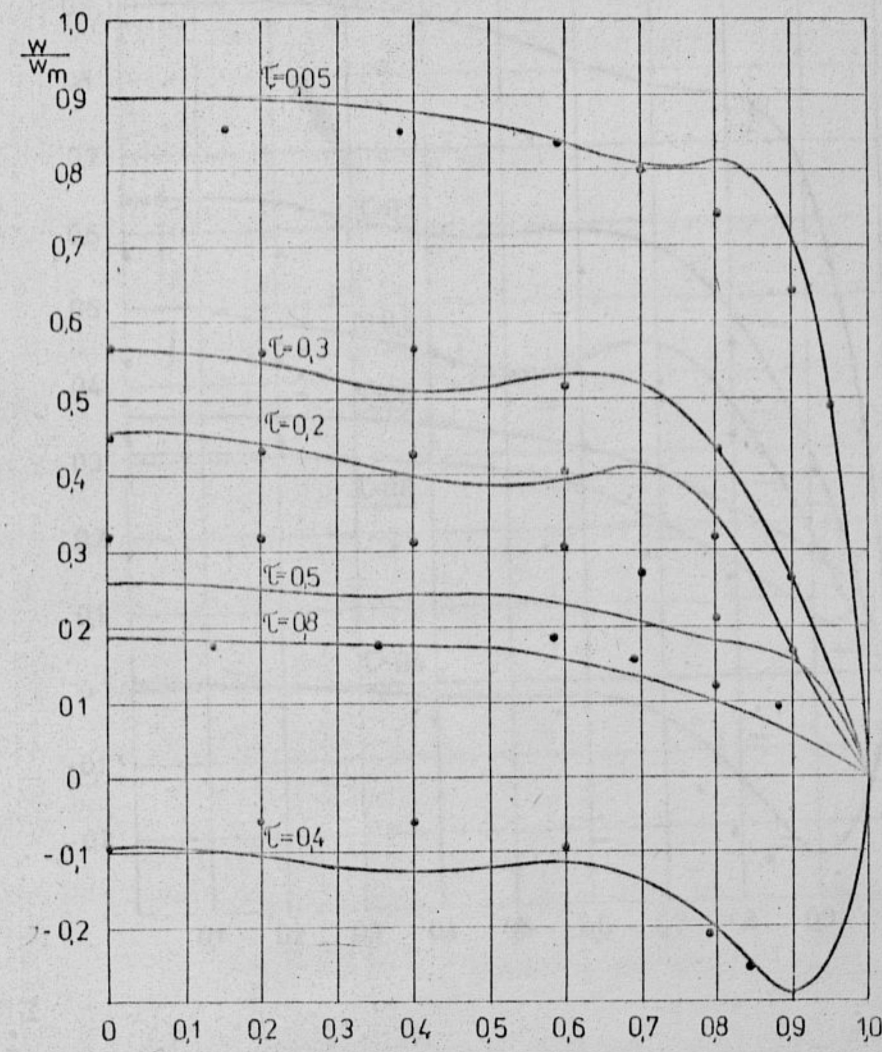
Zrezygnowaliśmy z warunku $\frac{d\varphi(1)}{ds} = 0$, a ponieważ z równania /82/ wynika, że $\frac{\partial^2 u(0)}{\partial s^2} = 0$, to przyjmując, że $\left[u \in C^3\right]$ mamy $\frac{\partial^3 u(0)}{\partial x \, \partial s^2} = 0$. Funkcją, która spełnia warunki /147/ oraz $\frac{d^2\varphi(0)}{ds^2} = 0$ jest na przykład funkcja /149/.

Rozkłady prędkości, dla $\frac{\partial u}{\partial x}$ określonej wzorami /146/ i /149/ przedstawiono na rysunku 14 /w_m = 80 cm/s/. Wartości prędkości jak i kształt profili są zbliżone do rozkładów otrzymanych w podrozdziale 6.5. Bezwzględne wartości prędkości w osi przewodu są nieco większe, a linia profili bardziej pofalowana. Gradient prędkości $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{s=1}$ zmienił się bardzo niewiele.

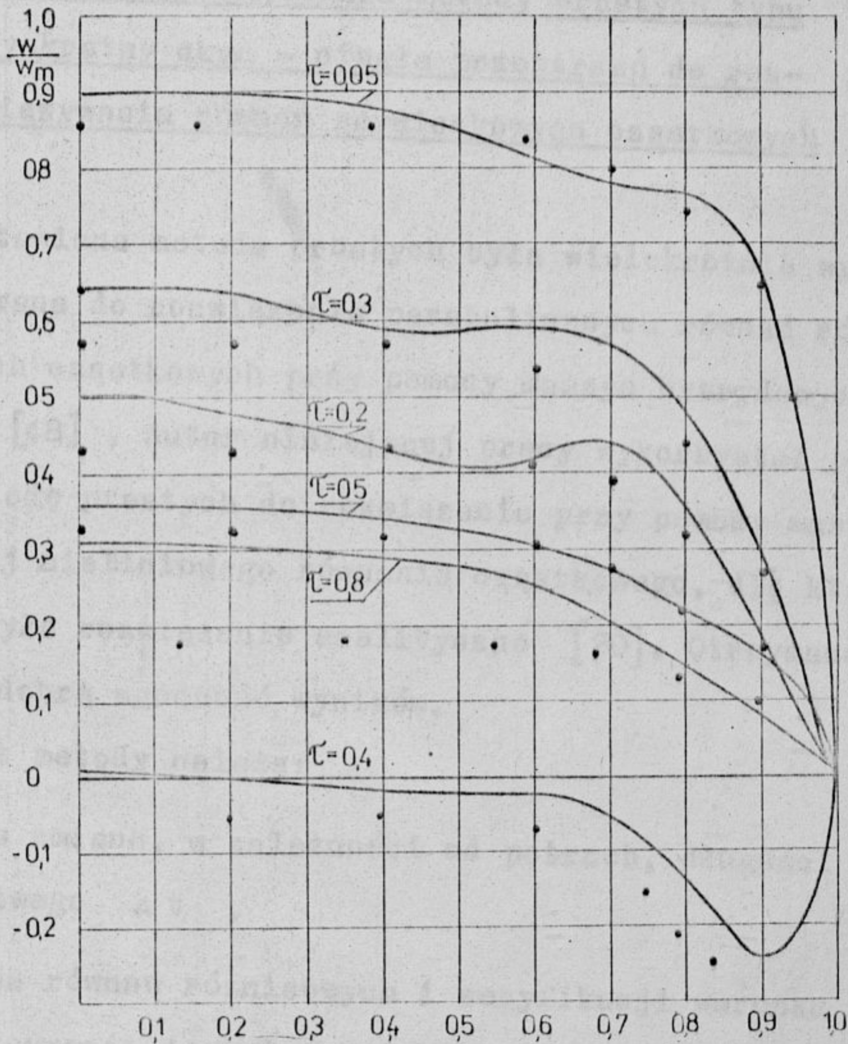
Z przedstawionych wyników można wyciągnąć wniosek, który już wypowiedzieliśmy w poprzednim podrozdziale, że składowa radialna ma istotny wpływ na przebieg profilu składowej osiowej.

Do rozwiązania równań różniczkowych /76/, /77/ stosowano zarówno schemat różnicowy /26/ /tzn. $\Theta = 0.75$, $\alpha = 0$/ jak i schemat /32/. Wyjąwszy przedziały, w których gradient ciśnienia zmienia się bardzo szybko /a więc dla τ $[0, 0.1]$ i $[0.35, 0.6]$/, w obu przypadkach otrzymano podobne wyniki.

Z warunku /53/ wiemy, że wartość parametru Θ powinna być dobierana z przedziału $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Dla $\Theta = \frac{1}{2}$ rząd aproksymacji jest równy dwa. Jednak dla tej wartości parametru Θ proces obliczeniowy był niestabilny. Należy pamiętać, że warunek /53/ jest koniecznym /ale nie dostatecznym/ warunkiem stabilności. Wartość parametru Θ należy dobierać z przedziału nieco mniejszego np. $[0.6, 1]$.



Rys. 13. Eksperyment numeryczny. Rozkłady prędkości osiowej, w_m = 70 cm/s. $\frac{\partial u}{\partial x}$ określone jest wyrażeniem /146/ i /148/. ——, wyniki obliczeniowe obecnej pracy, ••• , dane eksperymentalne [26].



Rys. 14. Eksperyment numeryczny. Rozkłady prędkości osiowej, w_m = 80 cm/s. $\frac{\partial u}{\partial x}$ określone jest wyrażeniem /146/ i /148/. ——— , wyniki obliczeniowe z obecnej pracy, ... , dane eksperymentalne [26] .

6.7. Uwagi o wykorzystaniu metody prostych typu dyskretny czas - ciągła przestrzeń do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych

Przedstawiona metoda prostych była wielokrotnie wykorzystywana do rozwiązania parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych przy pomocy maszyn hybrydowych [47] , [48] . Autor niniejszej pracy wykorzystał powyższą metodę prostych do rozwiązania przy pomocy maszyny cyfrowej nieliniowego równania cząstkowego, dla którego znane było rozwiązanie analityczne [20]. Otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników.

Do zalet metody należą:

1/ łatwa zmiana, w zależności od potrzeb, długości kroku czasowego Δt ,

2/ budowa równań różnicowych i weryfikacji warunku aproksymacji jest łatwą i naturalną czynnością,

3/ przydatność do rozwiązywania równań nieliniowych. Przy iteracyjnym rozwiązywaniu równań nieliniowych uzyskujemy bardzo szybką zbieżność /najczęściej wystarczają dwie, trzy iteracje/,

4/ przez odpowiedni dobór procedury rozwiązującej równania różniczkowego zwyczajnego możliwa jest kontrola dokładności prowadzonych obliczeń i odpowiedni dobór kroku całkowania h_n,

5/ schemat różnicowy /26/ lub /31/ może być użyty do rozwiązywania równań różniczkowych pierwszego rzędu [48].

Przedstawiona w 1968 r. metoda dekompozycji [46], była udaną próbą ominięcia niekorzystnych efektów wynikających z niestabilnych własności operatora różniczkowego. Proces dekompozycji udaje się przeprowadzić dla wszystkich liniowych operatorów różniczkowych spotykanych w praktyce [20]. Charakteryzuje się pewnym schematyzmem i przy większej liczbie zadań można go powierzyć maszynie cyfrowej. Sposób realizacji innych warunków brzegowych niż np. warunki /90/ i /92/ przedstawiono przy pomocy metody dekompozycji w pracach [46], [48].

7. PODSUMOWANIE

Z porównania wyników obliczeniowych z eksperymentalnymi wynika, że wyznaczenie lokalnych rozkładów prędkości na podstawie lokalnego pomiaru ciśnienia i gradientu ciśnienia praktycznie daje zadawalającą dokładność. Pewne rozbieżności pomiędzy wynikami obliczeniowymi a danymi eksperymentalnymi wynikają:

1/ z przyjętych założeń upraszczających

2/ z błędów metody numerycznej użytej do rozwiązywania równań.

Przyjęte założenia upraszczające są dwojakiego rodzaju:

a/ założenia odnoszące się do fizycznego modelu pulsującego przepływu w rurkach o elastycznych ściankach, wymienione w punktach 1 - 3 w podrozdziale 3.1,

b/ uproszczenia równań określających składową radialną, przyjmowane po to, aby trudności obliczeniowe nie były zbyt wielkie.

Uwzględnienie historii przepływu, rozgałęzień rurki, zmian jej geometrii prowadziłoby do bardzo skomplikowanego procesu obliczeniowego. Stąd też nasze uproszczenia dla wyznaczania rozkładów prędkości na podstawie lokalnej informacji o przepływie.

Założenia upraszczające, związane z równaniem określającym składową radialną, miały w naszym przypadku postać $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0$. Natomiast Ling i Atabek [26] oprócz warunku $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, zakładają stały znak

pochodnej $\frac{\partial w}{\partial x}$ w przekroju poprzecznym rurki, przyjmują istnienie związku postaci $w(s,x + \Delta x,t) = k \cdot w(s,x,t)$ z pewną funkcją k /wyklucza to przypadek $w(s,x,t) = 0$, który jednak pojawia się przy zmianie znaku funkcji w, tzn. gdy zaczyna występować przepływ wsteczny/, a ponadto zaniedbują warunek symetrii /w postaci $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ dla $s = 0$/.
Stwierdziliśmy, że składowa radialna, pomimo niewielkiej wartości w stosunku do składowej osiowej, decyduje o płaskim przebiegu jej profilu w środkowej części rurki.
Z przedstawionych na rysunku 8 wyników można przypuszczać, że istnieje pewna możliwość udoskonalenia procedury obliczeniowej dla otrzymania lepszej zgodności wyników obliczeniowych z danymi eksperymentalnymi.
W naszym przypadku otrzymaliśmy dobrą zgodność z wynikami pomiarowymi w pobliżu ścianki, natomiast Ling i Atabek [26], otrzymali, przy mocniejszych założeniach, lepszą zgodność w środku rurki.
Błędy wynikające z obliczeń numerycznych zależą od rodzaju użytej procedury rozwiązującej i od wielkości kroków, w naszym przypadku, Δt i h_n. Oczywistym jest, że dobór wielkości Δt i h_n jest wynikiem kompromisu pomiędzy czasem trwania obliczeń a dokładnością uzyskiwanych wyników. Dobór kroku Δt, był wymuszony szybkimi zmianami gradientu ciśnienia, krok h_n natomiast, warunkiem absolutnej stabilności i dokładnością rozwiązywania równania różniczkowego zwyczajnego. Mały krok czasowy Δt spowodował, że otrzymane w wyniku dyskrety-

zacji czasu równania różniczkowe zwyczajne były źle uwarunkowane obliczeniowo /równania "sztywne"/ co, w wyniku zastosowania procedury opartej na klasycznej metodzie Rungego - Kutty, znacznie wydłużyło czas obliczeń maszynowych /obliczanie 100 rozkładów prędkości składowej radialnej i osiowej trwało około 45 minut/. Dlatego przy posługiwaniu się opisaną wersją metody prostych ważny jest dobór procedury rozwiązującej "sztywne" równania różniczkowe zwyczajne, winna ona prowadzić kontrolę dokładności obliczeń i dobierać optymalny krok całkowania h_n. Przy takim doborze procedury, zaprezentowana metoda prostych jest wygodną, równoprawną, w stosunku do klasycznych metod różnic skończonych metodą rozwiązywania parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych.

8. L I T E R A T U R A

1. Atabek H.B.: Wave propagation trough a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed orthotropic elastic tube. Biophysical Journal, vol. 8, 1968, s. 626 - 649.

2. Atabek H.B., Lew H.S.: Wave propagation throuh a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube. Biophysical Journal, vol. 6, 1966, s. 481 - 503.

3. Attinger E.".: Pulsatile Blood Flow. McGrow-Hill, New York, 1964.

4. Bergel D.H., Schu ltz D.L.: Arterial elasticity and fluid dynamics. Progress in Biophysics and Molecular Biology, vol. 22, 1971, s. 1 - 36.

5. Berezin I.S., Żidkow N.: Metody wyčisllenji. t. II, Moskwa 1959.

6. Budak B.M.: Ob odnorodnych diffierencjialno - roznostnych schemach wtorogo poriadka tocnosti dla parabolicеskich i hiperbolicеskich urawnienienii z rozrywnymi koefficientami. Westnik Moskowskogo Uniwersiteta, Nr. 2, 1962, s. 7 - 13.

7. Carling L.N.: A study of the solution of initial-value problem with a hybrid computer. The Computer Journal 1962, s. 40 - 46.

8. Collatz L.: Rozwiązanie równań różniczkowych. PWN Warszawa 1960.

9. Cox R.H.: Camparision of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis J. Biomechanics, vol. 2, 1968, s. 251 - - 265.

10. Czżou Ju-Lin: Krajewyje zadači dla nieliniejnych parabolič̌eskich urawnienji. Matematiceskji Sbornik, t. 47, nr 4, s. 431 - 484.

11. Fry D.L., Greefield Jr.: The mathematical aprroach to hemodynamics with particular reference to Womersley's theory. W Pulsatile Blood Flow - Attinger E.O., s. 85 - 99.

12. Fry D.L., Griggs D.M., Greefield J.C.: In vivo studies of pulsatile blood flow: the relationship of the pressure gradient to the blood velocity. W Pulsatile Blood Flow ed. Attinger E.O., s. 101 - 111.

13. Faddijejewa W.N.: Metod priamych w primienienji k niekotorym krajewym zadačam. Trudy Matiematiceskogo Instituta im. W.A. Stekłowa. t. XXVIII, 1949, s. 73 - 103.

14. Fung B.: Biomechanics, its scope, history and some problems of continuum mechanics in Phisiology. Appllied Mechanics Reviews, vol. 21, no 1., 1968, s. 1 - 20.

15. Godunow S.K., Riabienkji W.S.: Raznostnyje schemy. Moskwa 1977.

16. Hall G., Watt J.M.: Modern Numerical Methods For Ordinary Differential Equations. Clarendon Press, Oxford, 1976.

17. Hicks J.S., Wei J.: Numerical solution of parabolic partial differential equations with two-point boundary conditions by use of the method of lines. Journal of the Association for Computing Machinery. vol. 14, No. 3, 1967, s. 549 - 562.

18. Lapidus L., Seinfeld J.H.: Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Academic Press, New York and London 1971.

19. Kocin N.E., Kibel I.A., Roze N.W.: Teoreticeskaja gidromechanika. t. II, Moskwa 1948.

20. Kudela H.: Metoda dekompozycji w modelowaniu zagadnień fizycznych opisywanych parabolicznymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Materiały Sympozjonu "Modelowanie w mechanice", Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Beskid Śląski, marzec 1977.

21. Kudela H.:, Szewczyk H.: Pomiary natężenia przepływu metodą wyznaczania rozkładu prędkości z wykorzystaniem maszyny cyfrowej. Pomiary Automatyka Kontrola, 10, 1977, s. 380 - 382.

22. Kudela H., Szewczyk H.: Wykorzystanie maszyny cyfrowej do obliczania natężenia przepływu przez całkowanie krzywych rozkładu prędkości. Prace Naukowe Instytutu Techniki Cieplnej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej, Studia i Materiały. Nr 11, 1978, s. 15 - 24.

23. Lightfoot E.N.: Jawlenija pierenosa w żiwych systemach. /tłum. z ang./ Mir, Moskwa 1977.

24. Ling S.C.: Modeling the nonlinear behavior of arteries. AIAA Paper No 70 - 789, 1970, s. 1 - 6.

25. Ling S.C., Atabek H.B., Carmody J.J.: Pulsatile flows in arteries. Proc. of The twelfth international Congress of Applied Mechanics. Stanford University, August 1968. ed. M. Hetenyi, W.G. Vincenti.

26. Ling S.C., Atabek H.B.: A nonlinear analysis of pulsatile flow in arteries. J. Fluid Mech. vol. 55, part 3, 1972, s. 493 - 511.

27. Ling S.C., Atabek H.B., Letzing W.G., Patel D.J.: Nonlinear analysis of aortic flow in living dogs. Circulation Research, vol. 33, 1973, s. 198 - 212.

28. Ling S.C., Atabek H.B., Patel D.J.: Analisis of coronary flow fields in thoracotomized dogs. Circulation Research, vol. 37, 1975, s. 752 - 761.

29. Ling. S.C., Chow C.H.: The mechanics of corrugated collagen fibrils in arteris .J. Biomechanics, vol. 10, 1977, s. 71 - 77.

30. Ling S.C., Atabek H.B., Fry D.L., Patel D.J., Janicki J.S.: Appication of heated - film velocity and shear probes to hemodynamic studies. Circulation Research, vol. 23, 1968.

31. McDonald D.: Blood Flow in Arteries. Arnold London 1960.

32. Middelman S.: Transport Phenomena in the Cardiovascular System. John Wiley and Sons Inc. 1972.

33. Miranker W.L.: The Computational Theory of Stiff Differential Equations Universite Paris XI, Publication Mathematique d Orsay, N^{o} 219-7667, 1976.

34. Mirsky I.: Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tubes. Biophysical Journal, vol. 7, 1967, s. 165 - - 186.

35. Numytokji w.w., Stiepanow W.W.: Kačestwiennaja teoria differencjalnych urawnienji. Moskwa 1949, s. 168.

36. Patel D.J., Greenfield J.C., Fry D.L.: In vivo pressure-length-radius relationship of certin blood vessels in men and dog.
W Pulsatile Blood Flow ed. Attinger E.O.

37. Protter M.H., Weinberger H.F.: Maximum Principles in Differencial Equations. Prentice - Hall, Inc. 1967.

38. Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. Warszawa, PWN 1975.

39. Richtmyer R.D.: Difference methods for initial-value problems. Interscience publishers, Inc., New York, 1957.

40. Rothe E.: Zweidimensionale parabolsche Randwertanfgaben als Grenzfall eindimensionales Randwertanfgaben. Math. Ann. 102, 1929, s. 650 - 670.

41. Smirnow W.I.: Matematyka wyższa. t. IV, PWN, Warszawa 1962, s. 446.

42. Streeter V.L., Keitzer W.F., Bohr M.D.: Pulsatile pressure and flow through distensible vessels. Circulation Research, vol. 13, 1963, s. 3 - 20.

43. Streeter V.L., Keizter W.F., Bohr D.F.: Energy dissipation in pulsatile flow throuh distesible tapered vessels. W "Pulsatile Blood Flow" ed Attinger E.O., s. 149 - 176.

44. Schlichting H.: Teoria pograničnego sloja. /tłum. z niem./ Nauka, Moskwa 1974.

45. Viohnevetsky R.: Error analysis in the computer simulation of dynamic systems: variational aspects of the problem. IEEE Transation on Elcotronic Computers. vol. EC-16 No 4, 1967, s. 403 - 411.

46. Viohnevetsky R.: A new stable computing method for the serial hybrid computer integration of partial differential equations. Proc. S.J.C.C., Atlantic City N.J. May 1968 AFIPS vol. 32, s. 143 - 150

47. Viohnevetsky R.: State of art in hybrid methods for partial differential equations. Proc. AICA/IFIP Internacional Conference on Hybrid Computiation, Munich 1970, s. 33 - 43.

48. Viohnevetsky R.: Application of hybrid computers to the integration of partial differential equations of the first and second order. Proceedings of IFIP Congress 68, Edinburgh Scotland 1968 s.

49. Wiohnevetsky R.: Physical cryteria in computer methods for partial differential equations. Annales de l Association Internationale pour le Calcul analogique, No 1, 1973 s. 3 - 16.

50. Whirlow D.K., Rouleau W.T.: Periodic flow of a viscous liquid in a thick-walled elastic tube. Bulletin of Mathematical Biophysics, vol. 27, 1965, s.

51. Womersley J.R.: Oscillatory flow in arteries I. The constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission. Phys. Med. Biol. 2, 1957, s. 178 - 187.

52. Womersley J.R.: Oscillatory flow in arteries II. The Reflection of the pulse wave at juctions and rigid inserts in arterial systems. Phys. Med. Biol. 2, 1958 b . s. 313 - - 323.

53. Womersley J.R.: Oscillatory motion of viscous liquid in thin walled elastic tube I. The linear aproximation for long waves. Phil. Mag., 46, 1955, s. 199 - 221.

1 2 3 4 5 6 7 8	9
N N N P R T T A N	Ø 6 Ø 2 1 1 1 3

Rozpocz. pr.	Zakończ. pr.	Opubl. pr.	Instytut	Nr tematu
Ø 4 7 6	Ø 2 7 9		I 2 Ø	

Nr zlecenia	Nr archiwalny
	I 2 Ø / P - Ø Ø 2 / 7 9 *

Symbol UKD.		
519.67:532.51.6	Maszynowe metody matematyki obliczeniowej w zastosowaniu do przepływu pulsującego	79: Inst.Tech. Ciepl. PWr MNSzWiT pol.

Opis bibliograficzny.

Kudela Henryk

Zastosowanie metody prostych do numerycznego wyznaczania rozkładów prędkości pulsującego przepływu w przewodzie o elastycznych ściankach

Raporty Inst. Techn. Cieplnej i Mechaniki Płynów, 1979, ser. PRE nr 2

108 s. 14 rys. bibliogr. 53 poz. /maszyn. powiel./

Rozprawa doktorska
Politechnika Wrocławska, Instytut Techniki Cieplnej i Mechaniki Płynów, Wrocław

Promotor: doc. dr hab. Andrzej Krzywicki

Charakter pracy: podstawowa   Rozpowszechnienie: na praw. ręk.
Materiały odpłatne: A

Analiza dokumentacyjna

<D W pracy podano nowy sposób numerycznego wyznaczania rozkładów prędkości dla pulsującego przepływu w przewodzie o odkształcalnych ściankach przy zadanych lokalnie wartościach ciśnienia, gradientu ciśnienia oraz zadanej zależności pomiędzy ciśnieniem a promieniem przewodu. Równania, z których otrzymano rozkłady prędkości były nieliniowe równania Naviera - Stokesa. Do numerycznego rozwiązania tych równań użyto metody prostych typu: dyskretny czas - ciągła przestrzeń, nie stosowanej dotychczas do obliczeń przy pomocy maszyny cyfrowej. Otrzymano dobrą zgodność wyników z dostępnymi w literaturze danymi eksperymentalnymi.

Imię i Nazwisko autora analizy

Henryk Kudela

Słowa kluczowe

<S metody numeryczne, mechanika płynów, elastyczne ścianki

**Ø40Ø * ØØ* ________

<A________ *B________ *C________ *D________

*E________ *F________ *G________ *H________

Tylko PRL	CINTE	APW	Podpis red.	Podpis asyst. d/s badań	Potwierdzenie przyjęcia poprawki	Potwierdzenie przyjęcia karty w Oddziale Dokumentacji
NIE	TAK	TAK	[signature]			
Wpisać TAK lub NIE						