

Na prawach rękopisu

INSTYTUT METROLOGII ELEKTRYCZNEJ  
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii PRE nr 6/79

Praca doktorska

ZAGADNIENIE ELIMINACJI HARMONICZNYCH  
W WIDMIE SYGNAŁU SINUSOIDALNEGO  
GENEROWANEGO METODĄ SYNTEZY CYFROWEJ

Bronisław Majchrzak

Promotor:

Prof.dr inż.Andrzej Jellonek

Słowa kluczowe: generator cyfrowy, przebieg schodkowy

WROCŁAW, 1979

Mgr inż. Bronisław Majchrzak

Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej  
50-317 Wrocław, ul. B. Prusa 53/55

Praca niniejsza składa się z trzech zasadniczych części. Część pierwsza /rozdziały 1 i 2/ zawiera przegląd zastosowań przebiegów periodycznych b.m.cz. oraz wprowadzenie w zagadnienie generacji tych przebiegów metodą syntezy cyfrowej. Ponieważ generowane tą metodą przebiegi są schodkowymi aproksymacjami przebiegu żądanego i charakteryzują się niekorzystnym widmem harmonicznym w pracy zajęto się zagadnieniem dokładności odwzorowania przebiegu żądanego przez aproksymujący przebieg schodkowy. Zaprezentowano stanowisko, że stosowane do tej pory metody aproksymacji oparte o amplitudowe kryteria oceny dokładności tego odwzorowania /błąd bezwzględny, błąd średni kwadratowy/ nie zawsze są korzystne oraz, że można osiągnąć lepsze wyniki stosując nowe metody aproksymacji, w których za kryterium będzie przyjęta zawartość harmonicznym w widmie generowanego sygnału. Po zawężeniu klasy rozpatrywanych sygnałów do sinusoid postawiono tezę, że istnieje taki, optymalny w sensie widmowym sposób aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym, który zapewnia uzyskanie przebiegów pozbawionych możliwie największej liczby harmonicznym.

W części drugiej /rozdział 4/ udowodniono tezę poprzez teoretyczne opracowanie warunków optymalnej aproksymacji sinusoidy przebiegiem schodkowym.

W trzeciej części pracy /rozdział 5/ zamieszczone wyniki z eksperymentów doświadczalnych, których celem było sprawdzenie optymalnych rozwiązań teoretycznych w rzeczywistym układzie generatora.

Do Redakcji IME wpłynęło w lutym 1979 roku.



SPIS TREŚCI

	str.
1. WSTĘP .....	5
2. GENERACJA NAPIĘĆ METODĄ SYNTEZY CYFROWEJ .....	13
2.1. Wprowadzenie w zagadnienie generacji napięć metodami cyfrowymi .....	13
2.2. Generacja napięć metodą syntezy cyfrowej .....	17
2.3. Wady i zalety cyfrowych generatorów funkcji ..	21
2.4. Kryteria oceny dokładności odwzorowania przebiegu $f/x/$ przez przebieg aproksymujący $F/x/$	25
2.5. Generacja sygnału sinusoidalnego metodą syntezy cyfrowej .....	30
3. CEL I TEZA PRACY .....	37
4. ANALIZA WIDMOWA SYGNAŁU SINUSOIDALNEGO GENEROWANEGO METODĄ SYNTEZY CYFROWEJ .....	38
4.1. Model fizyczny sygnału sinusoidalnego generowanego metodą syntezy cyfrowej .....	38
4.2. Analiza harmoniczna sygnału schodkowego .....	42
4.2.1. Minimalizacja współczynników $b_{2k-1}$ dla $N=3$	46
4.2.2. Minimalizacja współczynników $b_{2k-1}$ dla $N=4$	49
4.2.3. Minimalizacja współczynników $b_{2k-1}$ dla $N=5$	52
4.2.4. Wyznaczanie amplitud harmonicznych o numerach 1 oraz $m \cdot 2N+1$ dla dowolnego $N$	59
4.2.5. Analiza amplitud harmonicznych o numerach różnych od 1 oraz różnych od $m \cdot 2N+1$ .....	61
4.3. Wnioski .....	66

5. WERYFIKACJA WYNIKÓW ANALIZY TEORETYCZNEJ W RZECZY- WISTYM MODELU GENERATORA CYFROWEGO .....	69
5.1. Opis układu generatora .....	69
5.2. Parametry generowanego sygnału .....	76
5.3. Pomiar sygnałów schodkowych aproksymujących sygnał sinusoidalny .....	79
5.3.1. Sprawdzenie rozwiązań teoretycznych otrzymanych w rozdziale 4 .....	80
5.3.2. Porównanie metody opracowanej w rozdzia- le 4 z innymi znanymi metodami .....	84
5.3.3. Wpływ parametrów sygnału schodkowego na skuteczność eliminacji harmonicznych ..	91
5.3.4. Tabele z wynikami pomiarów do pkt. 5.3 ...	97
6. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE .....	110
7. BIBLIOGRAFIA .....	116

## 1. WSTĘP

Prowadzone obecnie w wielu dziedzinach nauki i techniki eksperymenty badawcze wymagają coraz częściej stosowania periodycznych sygnałów elektrycznych o różnym kształcie fali i częstotliwościach znacznie mniejszych od częstotliwości pasma akustycznego.

W wielu pozycjach literaturowych pojawiły się jednocześnie określenia typu: sygnał b.m.cz., przebieg b.m.cz. itp. Stosowany przez poszczególnych autorów skrót b.m.cz. /od słów: bardzo mała częstotliwość/ jest różnie interpretowany i trudno przypisać mu konkretne wartości liczbowe opisujące tak określone pasmo częstotliwości. Według autorów prac [66], [68] do b.m.cz. zalicza się częstotliwości niższe od 10Hz; wg autora pracy [12] niższe od 1Hz, a wg autorów pracy [55] niższe od 0,1Hz. Z zakresem b.m.cz. utożsamia się często pojęcie częstotliwości infraniskich a także częstotliwości subakustycznych, choć te ostatnie można chyba zdefiniować ściślej jako niższe od 16Hz, którą to wartość przyjęto za dolną granicę pasma akustycznego. Ogólnie można przyjąć, że w chwili obecnej mianem b.m.cz. określa się zakres częstotliwości leżący poniżej pasma akustycznego przy czym nie określa się wyraźnie dolnej granicy pasma b.m.cz. W spotykanych publikacjach mianem b.m.cz. określa się także częstotliwości rzędu  $10^{-6}$  Hz a więc najniższe częstotliwości jakie wytwarza się obecnie na świecie.

Potrzeby wytwarzania sygnałów b.m.cz. w zdecydowanej większości przypadków dotyczą przebiegów periodycznych takich jak: sinusoida, fala trójkątna, fala prostokątna czy też fala

trapezoidalna. Wymienione kształty przebiegów można obecnie już zaliczyć do kształtów konwencjonalnych, powszechnie stosowanych w eksperymentach badawczych. Jednak coraz częściej wymaga się także generacji przebiegów b.m.cz. o bardziej złożonych kształtach. Potrzeby takie występują między innymi w inżynierii biomedycznej.

Sygnały b.m.cz. zarówno sinusoidalne jak i te o niekonwencjonalnych, złożonych kształtach znajdują tutaj najczęściej zastosowanie do symulacji przebiegów opisujących procesy biologiczne i fizjologiczne /w szczególności dotyczy to typowych przebiegów falowych spotykanych w takich urządzeniach jak elektrokardiograf - EKG, elektroencefalograf - EEG oraz elektromiograf - EMG/ oraz do generacji złożonych przebiegów stymulujących bardzo przydatnych do badań i studiów neurofizjologicznych. Obecnie w medycynie powszechnie używa się już przebiegów b.m.cz. o różnych złożonych kształtach do następujących celów [6] ;

- 1/ symulacja przebiegów falowych, typowych dla pewnych grup medycznej aparatury pomiarowej: EKG, EEG, EMG i in.
  - a/ do testowania pracy tych urządzeń
  - b/ w celach szkoleniowych dla wizualnej demonstracji studentom medycyny oraz pomocniczemu personelowi
  - c/ w celu ciągłego porównywania wytworzonego sztucznie przebiegu referencyjnego z przebiegiem rzeczywistym występującym u pacjenta badanego co w razie wykrycia dużych różnicowości pozwala na automatyczne wszczęcie alarmu
- 2/ elektrostymulacja peryferyjnych mechano-receptorów przy prowadzeniu badań dotyczących analizy zachowania się komórek nerwowych. Stosowanie do tych celów przebiegów stymulujących o złożonych kształtach daje dużo lepsze wyniki niż

### stosowanie przebiegów konwencjonalnych

- 3/ przy zabiegach mających na celu przywrócenie zdolności ruchowych tych części ciała ludzkiego, które tą zdolność utraciły /szczególnie dotyczy to kończyn/.

Analizując zastosowanie przebiegów o niekonwencjonalnych kształtach w medycynie należy stwierdzić, że w większości przypadków spotyka się bądź to przebiegi periodyczne o częstotliwościach małych i bardzo małych bądź też przebiegi aperiodyczne wolnozmiennie o długim czasie trwania. Na przykład w eksperymentach związanych ze stymulacją pracy serca przedstawionych w pracy [8] używa się przebiegów periodycznych o częstotliwościach z zakresu  $1/4 - 40$ /Hz lub wolnozmiennych przebiegów aperiodycznych o czasie trwania do 20s. W pracy [5] mówi się o potrzebie generowania i rejestrowania w medycynie sygnałów wolnozmiennych o okresie do 8h. W nowoczesnych, efektywnych technikach eksperymentalnych w zakresie badań systemów nerwowych w klinikach neurofizjologicznych używa się przebiegów o różnych złożonych kształtach i czasie trwania od 2ms do 50s [61]. Górny zakres częstotliwości typowych przebiegów elektroencefalograficznych w urządzeniach EEG osiąga wartości od 6 do 10Hz. Są to przebiegi o złożonych skomplikowanych kształtach a odstępy czasu między kolejnymi szczytami tych przebiegów są rzędu  $\frac{1}{12}$  s lub mniej [3]. Typowy przebieg wyjściowy elektrokardiografu jest przebiegiem periodycznym o okresie zawartym w granicach od 0,6s do 1s [6]. W pracy [50] przedstawiono zastosowanie sygnału sinusoidalnego o częstotliwościach  $10^{-2} - 10^{-6}$ /Hz do eksperymentów biologicznych prowadzonych na ssakach. O po-

trzebnie stosowania sygnałów b.m.cz. w eksperymentach biologicznych mówi także autor pracy [18].

Potrzeby generowania przebiegów b.m.cz. zarówno sinusoidalnych jak i tych o złożonych kształtach występują nie tylko w inżynierii biomedycznej ale także w wielu innych dziedzinach nauki i techniki. Do najczęściej spotykanych zastosowań można zaliczyć:

1/ zastosowania symulacyjne np:

- symulacja przebiegów wolnozmiennych opisujących różnego rodzaju zjawiska fizyczne [34], [44],
- symulacja przebiegów modulowanych [28],
- symulacja odpowiedzi układu II rzędu na skok jednostkowy [28],
- symulacja fali wolnozmiennej obrazującej działanie wiatru /dla potrzeb lotnictwa/ [30],

2/ zastosowania do testowania różnego rodzaju urządzeń i aparatury m.in.:

- funkcjonalne testowanie urządzeń rejestrujących, kontrolerów, kanałów transmisyjnych itp. [36],
- testowanie komputerowego software'u za pomocą np. wolnozmiennych przebiegów eksponencjalnych [34],

3/ zastosowanie w układach sterowania i regulacji w automatyce [28],

4/ zastosowanie do badań układów i systemów automatyki [30], [44] [66] oraz identyfikacji różnych obiektów o dużej inercji m.in. takich obiektów cieplnych jak bloki energetyczne, kotły parowe, przegrzewacze ciepła itp. W badaniach obiektów cieplnych o dużej inercji prowadzonych w Instytucie Technil

Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej stosuje się w celach identyfikacji przebiegi leżące w zakresie częstotliwości od 0,0005Hz do 0,02Hz

5/ zastosowanie do sterowania układów pomiarowych bardzo małej częstotliwości a w szczególności do:

- wyznaczania charakterystyk amplitudowo-fazowych elementów i układów [44],
- wyznaczania właściwości i różnego rodzaju parametrów charakterystycznych materiałów, podzespołów i układów [30],

6/ zastosowania inne - np:

- przy rozwiązywaniu pewnych problemów na maszynach analogowych [66],
- przy badaniach nad wibracjami [44],
- przy rozwiązywaniu problemów geofizycznych [44],
- do optymalizacji warunków pracy elementów układów elektronicznych [30].

Poważną grupę zastosowań sygnałów periodycznych b.m.cz. stanowią badania prowadzone w dziedzinie inżynierii materiałowej nad materiałami dielektrycznymi. W kraju pomiary i badania dielektryków w zakresie b.m.cz. prowadził m.in. prof.L.Badian i dotyczyły one procesu elektrodyfuzyjnego starzenia dielektryków w kondensatorach rutowych [4]. Metody badań zjawisk starzeniowych oparte na pomiarach w zakresie b.m.cz. i przesłanki do ich stosowania zostały przedstawione w pracy [5]. W skrócie idea metody b.m.cz. jest oparta na klasycznym modelu dielektryka wg modelu Maxwella-Wagnera. Najbardziej obiecujące są pomiary zespolonej przenikalności dielektrycznej  $|\epsilon|$  a szczególnie współczynnika stratności  $|\operatorname{tg}\delta|$  zdefiniowanego



w tym modelu jako:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega RC}$$

Aby wykonywany pomiar pozwolił wejść w obszar odpowiednio dużych zmian  $\operatorname{tg} \delta$  musi być on przeprowadzony przy stosunkowo małych częstotliwościach. Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że częstotliwości te leżą w zakresie częstotliwości niższych od 1Hz. Na potrzebę prowadzenia prac badawczych nad materiałami dielektrycznymi w zakresie b.m.cz. wskazuje także wielu innych autorów prac naukowych [1], [14], [24], [37], [45]. Z przeglądu literatury dotyczącej potrzeb stosowania przebiegów b.m.cz. do badań materiałów dielektrycznych wynika, że dla niektórych autorów /prace [21], [22], [45], [57]/ zakres bardzo niskich częstotliwości wydaje się być interesujący ze względu na przypuszczalne, lecz wyraźnie nie określone korelacje występujące między zjawiskami starzeniowymi z zespoloną przenikalnością dielektryczną w tym paśmie częstotliwości. Inni autorzy przytaczają w swoich pracach wyniki badań, z których wynika jednoznacznie, że w zakresie częstotliwości poniżej 1Hz badane dielektryki wykazują bardzo ciekawe właściwości. Dla przykładu w pracy [40] przedstawiono wyniki badań próbek żywic epoksydowych, z których wynika, że w zakresie częstotliwości wyższych od 0,1Hz pojemność tych próbek była stała i niezależna od częstotliwości. Przy częstotliwości 0,1Hz i niższych pojemność próbek wzrastała nawet o 25% a w miarę zmniejszania częstotliwości ulegały one przebieciu.

W pracy [4] przedstawiono wyniki badań starzeniowych dielektryków z których wynika, że: "Dzięki pomiarom  $C$  i  $\operatorname{tg} \delta$  przy



częstotliwości 0,2Hz można było wykryć zmiany starzeniowe już po kilkudziesięciu godzinach podczas gdy przy  $f=1\text{kHz}$  były one wykrywalne dopiero po ok. 300 godz."

Przytoczone wyżej zastosowania przebiegów b.m.cz. są na pewno fragmentaryczne i choć dotyczą tylko pewnych przypadkowo wybranych dziedzin wskazują, że istnieje realna potrzeba stosowania a więc i generacji przebiegów o bardzo małych częstotliwościach. Ponieważ w zakresie b.m.cz. wyjątkowo silnie występuje zapotrzebowanie na wytwarzanie przebiegów zarówno sinusoidalnych jak i tych o innych bardziej złożonych kształtach cełowym wydaje się ukierunkowanie prac nad generacją przebiegów b.m.cz. tak aby przyszłościowe metody i układy generacyjne obejmowały obydwie wyżej wymienione kategorie przebiegów. Innym nie mniej ważnym czynnikiem wymagającym uwzględnienia jest fakt że czas trwania jednego tylko okresu przebiegu b.m.cz. może być bardzo długi, np.: dla sygnału o częstotliwości  $10^{-5}\text{Hz}$  czas ten wynosi  $10^5\text{s} \approx 28\text{h}$ . W praktyce oznacza to konieczność automatyzacji metod i układów pomiarowych b.m.cz. a zatem generatory przebiegów b.m.cz. powinny być programowalne, tzn. powinny posiadać zdolność do zdalnego "nstawiania" częstotliwości, kształtu i amplitudy przebiegu wyjściowego za pomocą odpowiednich, elektrycznych, zewnętrznych sygnałów programujących.

Jakkolwiek istniejące w zakresie b.m.cz. potrzeby dotyczą sygnałów o różnych kształtach to jednak największe znaczenie praktyczne mają jeszcze ciągle sygnały sinusoidalne. Tymczasem z generacją sygnałów sinusoidalnych w zakresie b.m.cz. są największe problemy. Czysty sygnał sinusoidalny /tzn. pozbawiony harmonicznym/ można wygenerować w zasadzie tylko w samowzbud-

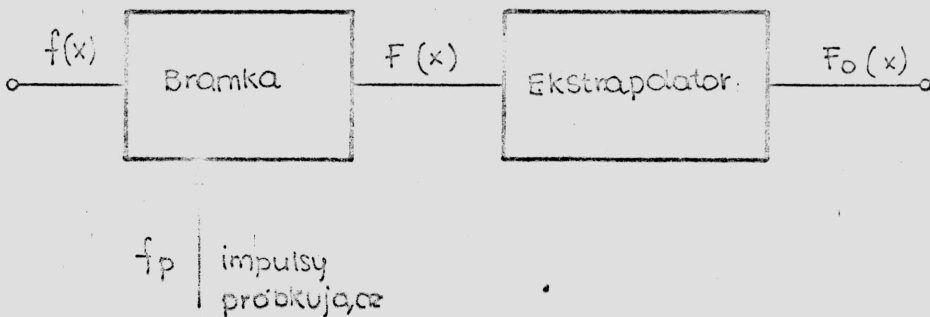
nych układach RC lub LC. Jednak przy takich metodach realizacji generatora trzeba się liczyć z trudnościami stabilizacji amplitudy i częstotliwości, które pojawiają się już przy częstotliwościach niższych od 1Hz. Występują tutaj też kłopotliwe zjawiska przejściowe przy zmianie amplitudy oraz częstotliwości sygnału wyjściowego. Inne wady takiego rozwiązania to trudność jednoczesnego generowania dwóch lub więcej identycznych ale przesuniętych w fazie sygnałów czy też konieczność stosowania elementów indukcyjnych i pojemnościowych o bardzo dużych wartościach co eliminuje możliwość wykonania tych układów w postaci scalonej.

Uwzględniając powyższe przesłanki oraz wyniki prac dotyczących analizy metod i układów generacji przebiegów b.m.cz. [43] jedną z najbardziej przyszłościowych metod generacji przebiegów b.m.cz. wydaje się być metoda syntezy cyfrowej. Idea tej metody oraz jej wady i zalety zostaną omówione w dalszej części pracy. Należy tutaj podkreślić fakt, że generacja sygnału sinusoidalnego b.m.cz. metodą syntezy cyfrowej eliminuje co prawda wspomniane już wady klasycznych generatorów RC i LC jednak w spotykanych do tej pory rozwiązaniach sinusoidalny sygnał wyjściowy generatora cyfrowego zawiera stosunkowo duże widmo prążków harmonicznych powodujące ograniczenia w stosowaniu tych przebiegów. Z tego też względu celem niniejszej pracy jest rozwiązanie problemu eliminacji harmonicznych z widma sygnałów sinusoidalnych generowanych metodą syntezy cyfrowej.

## 2. GENERACJA NAPIĘĆ METODĄ SYNTEZY CYFROWEJ

### 2.1. Wprowadzenie w zagadnienie generacji napięć metodami cyfrowymi

Generatory cyfrowe nazywane także generatorami numerycznymi należą do najnowszych układów generacji sygnałów o dowolnych kształtach. Zasada działania generatorów cyfrowych ma duży cech wspólny z zasadą pracy generatorów działających w oparciu o technikę próbkowania. Zasadę pracy generatora działającego w oparciu o technikę próbkowania [66] można wyjaśnić w skrócie za pomocą schematu blokowego przedstawionego na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy generatora z zewnętrznym sygnałem próbkującym.

Sygnał wejściowy  $f/x/$  podlegający próbkowaniu jest doprowadzony do wejścia bramki, która otwiera się pod wpływem impulsu próbkującego, dostarczanego przez zewnętrzny generator w stałych odstępach czasu  $T_p$ . Częstotliwość sygnału próbkującego wynosi  $f_p = \frac{1}{T_p}$ .

W momentach próbkowania gdy bramka jest otwarta jej sygnał wyjściowy  $F/x/ = f/x/$  a w czasie przerwy pomiędzy kolejnymi impulsami próbkującymi wartość sygnału  $F/x/$  jest równa zeru  $F/x/ = 0$ . Zastosowanie bramki sterowanej impulsami próbkującymi pozwala na zastąpienie sygnału ciągłego  $f/x/$  /sygnału o wartościach określonych dla każdej chwili czasu z danego przedziału/ przez ciąg wartości funkcji  $f/x/$  opisujących sygnał w określonych chwilach. Zatem zachodzi tutaj proces dyskretyzacji sygnału czyli przekształcenie sygnału ciągłego  $f/x/$  na sygnał dyskretny  $F/x/$ . Sygnał dyskretny  $F/x/$  składający się z  $N$  próbek sygnału wejściowego zostaje przetwarzany, najczęściej za pomocą ekstrapolatora zerowego rzędu na analogowy sygnał wyjściowy  $F_0/x/$ . Zatem w skrócie można stwierdzić, że w układzie generatora próbkującego następuje przetworzenie ciągłego sygnału wejściowego na odpowiadający mu sygnał dyskretny a następnie przetworzenie tego sygnału dyskretnego z powrotem na sygnał analogowy. Jak łatwo zauważyć kształt sygnału wyjściowego jest, z pewnym przybliżeniem, taki sam jak kształt sygnału wejściowego, natomiast jego częstotliwość i amplituda mogą ulec zmianie.

Występująca w generatorach próbkujących operacja układowego przetwarzania sygnału ciągłego  $f/x/$  na odpowiadający mu sygnał dyskretny  $F/x/$  zostaje w generatorach cyfrowych zastąpiona operacją przetwarzania funkcji opisujących te sygnały i odbywa się ona na drodze obliczeniowej. Zatem funkcja ciągła  $f/x/$  opisująca sygnał wejściowy zostaje przetworzona na funkcję dyskretną  $F/x/$  opisującą sygnał dyskretny  $F/x/$  i cała operacja przetwarzania analogowo-cyfrowego zostaje przeniesiona

z obszaru układowego do obszaru abstrakcyjnego.

Dyskretyzacja sygnału w cyfrowych generatorach funkcji jest realizowana przez wykorzystanie jednej z podstawowych postaci przedstawienia funkcji a mianowicie tabeli jej wartości. Wykorzystanie tabeli wartości funkcji oznacza w praktyce automatycznie kwantyzację sygnału dyskretnego tzn. zastąpienie sygnału dyskretnego, który może przybierać dowolne wartości z określonego przedziału, sygnałem dyskretnym, którego wartość zmienia się skokowo i może przyjmować tylko pewne określone /skwantowane/ poziomy. W rezultacie ciąg chwilowych rzeczywistych wartości funkcji  $y=f/x/$  zostaje zastąpiony ciągiem wartości funkcji przybliżonej  $F/x/$ .

Te dyskretne, skwantowane wartości funkcji  $F/x/$  zostają następnie na drodze programowej przedstawione w postaci zakodowanej cyfrowo informacji, będącej reprezentacją numeryczną funkcji  $f/x/$ . Zakodowane cyfrowo informacje o wartości funkcji  $F/x/$  zostają podane w postaci sygnałów programujących na wejście generatora cyfrowego, którego zadaniem jest ich przetworzenie na sygnał ciągły  $F_0/x/$ . W najczęściej spotykanych rozwiązaniach generowany sygnał  $F_0/x/$ , będący aproksymatą sygnału żądanego  $f/x/$ , jest sygnałem dyskretnym, skwantowanym z ekstrapolacją rzędu zerowego /rys.2/. W praktyce stosuje się ekstrapolację rzędu najwyżej pierwszego .

Zastąpienie sygnału ciągłego sygnałem dyskretnym, skwantowanym z ekstrapolacją rzędu zerowego oznacza, że funkcja rzeczywista  $y=f/x/$  zostaje zastąpiona funkcją przybliżoną  $F_0/x/$ , która przyjmuje te same wartości co  $f/x/$  tylko dla pewnych, następujących po sobie, wybranych punktów  $x_n$ , co możn

## 2.2. Generacja napięć metodą syntezy cyfrowej

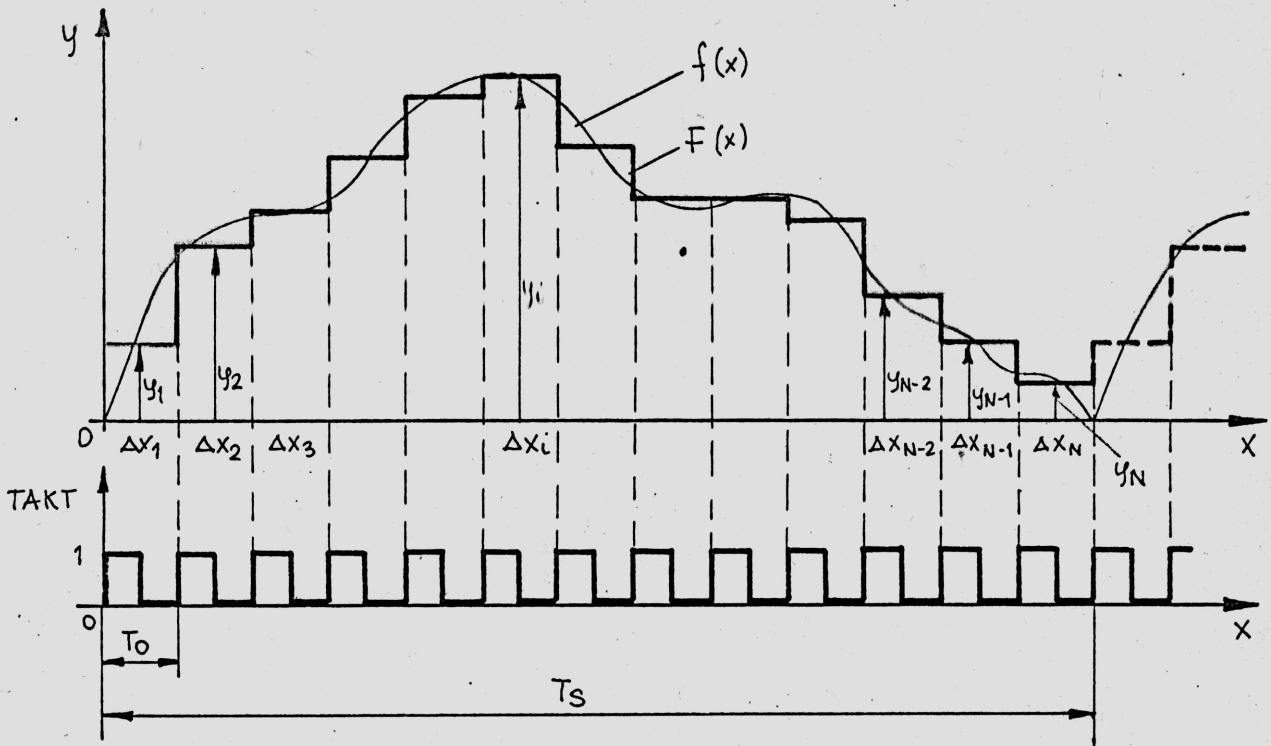
Omawiana metoda oraz układ do jej realizacji zostały po raz pierwszy opublikowane w pracy [56] z 1969r. Idea tej metody jest pokazana na rysunku 3 i polega na tym, że generowany przebieg jest formowany z pewnej liczby  $N$  impulsów prostokątnych o stałej szerokości  $\Delta x$  i różnej amplitudzie. Schemat blokowy typowego układu generującego tą metodą przebiegi periodyczne został przedstawiony na rysunku 4.

Układ zawiera 4 podstawowe bloki funkcjonalne:

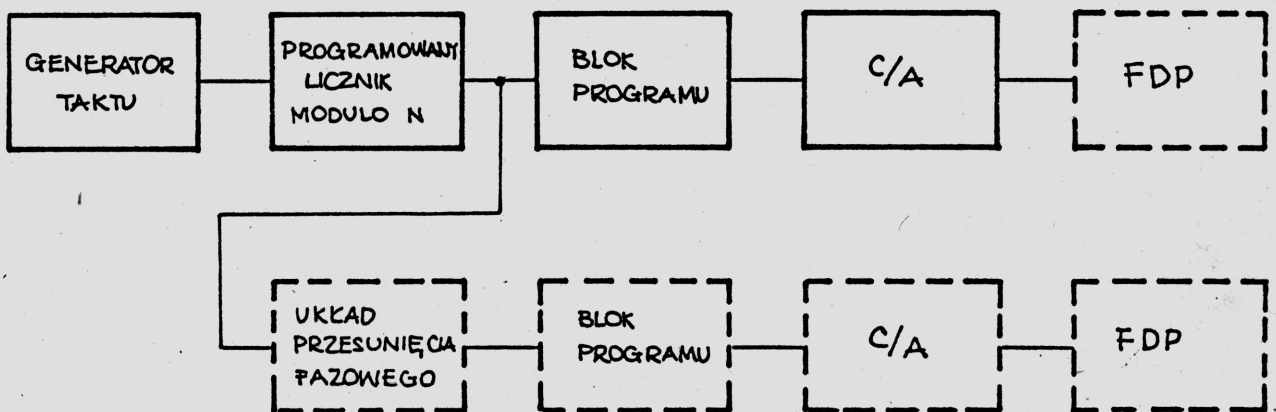
- generator taktu o częstotliwości  $f_0$
- programowany licznik modulo  $N$
- blok programu generacji
- przetwornik C/A.

W rozwiązaniach praktycznych bardzo często spotyka się dodatkowo blok filtru dolnoprzepustowego /oznaczonego na rys.4 linią przerywaną/, który ma za zadanie odfiltrować wyższe harmoniczne zawarte w "schodkowym" sygnale wyjściowym. Przedstawione na rys.4 pozostałe bloki oznaczone linią przerywaną pokazują możliwość wygenerowania dodatkowych przebiegów przesuniętych w fazie w stosunku do przebiegu podstawowego. Zależnie od zastosowanego bloku programowego te dodatkowe przebiegi mogą mieć kształt taki sam jak przebieg podstawowy lub też mogą mieć inny kształt opisany inną funkcją czasową.

Omawiany układ generuje sygnał periodyczny, o okresie  $T_s$ , składający się w każdym okresie z  $N$  elementów składowych, którymi są impulsy prostokątne o stałej szerokości i różnej amplitudzie.



Rys 3. IDEA GENERACJI PRZEBIEGÓW PERIODYCZNYCH W URZĄDZENIU SYNTETY CYFROWEJ.



Rys 4. SCHEMAT BLOKOWY GENERATORA DZIAŁAJĄCEGO W OPARCIU O METODĘ SYNTETY CYFROWEJ.

FDP - FILTR DOLNOPRZEPUSTOWY

C/A - PRZETWORNIK CYFROWO-ANALOGOWY.



Szerokość impulsów prostokątnych z których jest składany sygnał wyjściowy jest równa okresowi sygnału taktującego  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ .  
Pomiędzy okresem sygnału wyjściowego  $T_s$  a czasem trwania jednego impulsu prostokątnego  $T_0$  zachodzi zależność:

$$T_s = N \cdot T_0$$

wynika stąd, że częstotliwość sygnału taktującego  $f_0$  jest powiązana z częstotliwością sygnału wyjściowego zależnością:

$$f_0 = N \cdot f_s$$

Amplituda poszczególnych impulsów prostokątnych, z których jest składany przebieg wyjściowy, jest pamiętana w bloku programowanym, w którym poszczególnym elementom /o numerach od 1 do N/ są pod odpowiednimi adresami przyporządkowane zakodowane cyfrowo informacje o wartości ich amplitud. Mechanizm generacji sygnału jest następujący: sygnał taktujący podany na wejście programowanego licznika modulo  $N$  zmienia z częstotliwością  $f_0$  stan jego wyjść. Kolejne stany wyjściowe licznika są jednocześnie sygnałami adresowymi, które podane na blok programowy powodują, że na jego wyjściu pojawiają się z częstotliwością  $f_0$  w określonej kolejności zakodowane cyfrowe informacje o wartości amplitud kolejnych impulsów prostokątnych. Sygnały cyfrowe niosące te informacje są następnie przetwarzane przez układ przetwornika C/A na sygnał analogowy. Sygnał na wyjściu przetwornika jest ściśle rzecz biorąc sygnałem dyskretnym, skwantowanym z ekstrapolacją zerowego rzędu i jest on odwzorowaniem funkcji zakodowanej cyfrowo w bloku programowym. Przebieg o tej postaci bywa często nazywany popularnie przebiegiem "schodko-



wym". Sygnał ten może być dodatkowo podany na wejście filtra dolnoprzepustowego w celu odfiltrowania wyższych harmonicznym

W najczęściej spotykanych rozwiązaniach praktycznym blok programowy jest pamięcią stałą typu ROM. Zastosowanie pamięci ROM ogranicza możliwości układu do generowania przebiegu o jednym ściśle określonym kształcie, zapisanym w zakodowanej postaci cyfrowej w danej pamięci. Układ może generować wtedy sygnał składany z określonej liczby próbek równej liczbie komórek danej pamięci ROM a za pomocą pozostałych bloków generatora możemy wpływać jedynie na częstotliwość i amplitudę generowanego sygnału. Zmiana kształtu generowanego sygnału wymaga zmiany bloku pamięci ROM. Układy tego typu są powszechnie nazywane cyfrowymi generatorami funkcji z pamięcią stałą. Obecnie produkowane są już do tego celu scalone pamięci stałe ROM z wpisaną w nie konkretną funkcją. Przykładem takiego rozwiązania jest scalona pamięć ROM typu MM 5220 BM [34] produkowana przez National Semiconductor. Pamięć ta posiada 128 komórek, w których zmagazynowane są informacje o wartości funkcji sinus z przedziału od 0 do 90°. Pozwala to na generowanie wprost jednej ćwiartki funkcji sinus składającej się z 128 elementów składowych. Szerokość jednego elementu odpowiada więc kątowi równemu  $\frac{90^\circ}{128} = 0^\circ 42' 12,25''$ . Odpowiedni układ sterujący zapewnia w ciągu jednego okresu czterokrotne "czytanie" zawartości pamięci w sposób umożliwiający wygenerowanie wszystkich czterech ćwiartek sinusoidy. W ten sposób na jeden okres przebiegu sinusoidalnego przypada  $4 \times 128 = 512$  impulsów prostokątnych o równej szerokości.

W generatorach uniwersalnych zdolnych do generacji większej liczby kształtów sygnału wyjściowego pamięć ROM musi zostać zastąpiona pamięcią, której zawartość może być zmieniana w sposób programowy zależnie od żadanego kształtu sygnału wyjściowego.

### 2.3. Wady i zalety cyfrowych generatorów funkcji

Przedstawione wyżej cyfrowe generatory funkcji umożliwiają w zasadzie wygenerowanie przebiegu o dowolnym kształcie. Jedyne ograniczenia kształtu z jakimi można się spotkać wynikają ze skończonej wartości amplitudy możliwej do uzyskania w danej technice realizacyjnej oraz z faktu, że czasy narostu i opadani impulsów w praktycznych układach przetworników nie mają wartości zerowej. Poza tymi faktami inne ograniczenia odnośnie dowolności kształtu nie istnieją.

Do najpoważniejszych wad cyfrowych generatorów funkcji należą:

- 1/ ograniczony od góry zakres częstotliwości sygnału wyjściowego wynikający z faktu, że programowane liczniki zliczające sygnały taktujące mają z przyczyn technologicznych ograniczoną górną częstotliwość zliczania, która dla standardowych układów TTL jest rzędu kilkudziesięciu MHz. Do tego dochodzi jeszcze fakt, że częstotliwość sygnału wyjściowego jest obniżona w stosunku do częstotliwości sygnału taktującego  $N$  razy  $/N$  - liczba elementów, z których jest składany jeden okres sygnału wyjściowego/;

- 2/ stosunkowo duże widmo prążków harmoniczných powodujące ograniczenia w stosowaniu przebiegów, uzyskanych z przetworników C/A.

Ograniczenia podane w punkcie 1 są zupełnie nieistotne w przypadku generacji przebiegów w zakresie małych i bardzo małych częstotliwości. Poza tym układy cyfrowych generatorów funkcji posiadają wiele niezaprzeczalnych zalet do których należą:

- 1/ szerokie możliwości generowania dowolnych kształtów przebiegów bez wprowadzania jakichkolwiek zmian w układzie generatora. Zmianę kształtu generowanego sygnału uzyskuje się na drodze programowej zmieniając zawartość pamięci, w której są zakodowane cyfrowo wartości amplitud poszczególnych próbek składowych;
- 2/ możliwość zmiany w sposób programowy kształtu małego fragmentu sygnału;
- 3/ dokładna znajomość amplitudy przebiegu w danym momencie czasowym /z dokładnością określoną przez parametry przetwornika C/A/;
- 4/ bardzo dobra stabilność częstotliwości przebiegu wyjściowego, która jest zależna tylko i wyłącznie od częstotliwości sygnału taktującego, wytwarzanego najczęściej przez generator kwarcowy;
- 5/ układy programowania kształtu nie posiadają żadnych pętli sprzężenia zwrotnego co zapewnia natychmiastowy "dostęp" do przebiegu w każdym momencie jego trwania;

- 6/ możliwość generowania dwóch lub więcej identycznych sygnałów jednocześnie ale przesuniętych w fazie przy czym przesunięcie fazowe może być określone z dużą dokładnością i może być także w łatwy sposób programowane i to z dużą rozdzielczością rzędu dziesiątych części stopnia;
- 7/ możliwość prostej generacji sygnałów wobulowanych z rozdzielczością od  $10^{-5}$  do  $10^{-3}$  częstotliwości wyjściowej;
- 8/ współczynnik zniekształceń generowanego sygnału praktycznie nie zależy od temperatury podczas gdy w układach formowania analogowego zależność ta jest nie do pominięcia;
- 9/ możliwość generacji przebiegów bardzo wolnych o częstotliwościach rzędu  $10^{-6}$  Hz;
- 10/ możliwość regulacji zawartości harmonicznycch przez dobór ilości elementów impulsów składowych;
- 11/ układy cyfrowych generatorów funkcji nie wymagają indywidualnego doboru elementów półprzewodnikowych co jest konieczne w układach analogowych;
- 12/ technika realizacji cyfrowych generatorów funkcji nie wymaga stosowania indukcyjności i pojemności co w przypadku bardzo niskich częstotliwości ma duże znaczenie, dzięki temu technika ta jest kompatybilna z techniką układów scalonych, /jak wiadomo elementy L i C zwłaszcza o dużych wartościach są bardzo trudne lub wręcz niemożliwe do scalenia/.

Z grupy podanych wyżej zalet wynikają jeszcze pewne istotne korzyści dodatkowe. Z braku elementów LC wynika nieobecność takich wad konwencjonalnych generatorów RC lub LC jak długie

stany przejściowe występujące przy przestrajaniu amplitudy lub częstotliwości. Amplituda generowanego sygnału nie zależy od elementów nieliniowych i dlatego może być "ustawiona" i kontrolowana z dużą dokładnością. Zmiana częstotliwości odbywa się w sposób bezpośredni przez zmianę impulsów zegarowych. Wykorzystując możliwość ustawiania licznika lub rejestru w stanie początkowym można wyzwalać i zatrzymywać generowany przebieg w dowolnym, żądanym punkcie. Praca generatora wyzwalamana impulsami taktującymi umożliwia łatwą synchronizację przebiegu wyjściowego ze źródłami innych sygnałów. Dzięki tym zaletom przedstawiona metoda generacji znajduje coraz szersze zastosowanie. Trzeba tutaj też podkreślić taniość i dużą prostotę układów generacyjnych, które są konstruowane w oparciu o tanie i łatwo dostępne scalone układy cyfrowe.

Jak już wspomniano układy generatorów cyfrowych posiadają dwie podstawowe wady. Pierwsza z nich dotycząca ograniczenia zakresu górnych częstotliwości wynika z aktualnych możliwości układowych i można ją uznać za nieistotną w zakresie b.m.cz. Znacznie ważniejsza jest druga wada dotycząca dużej liczby prądów harmonicznych w widmie generowanego sygnału. Sytuacja ta jest wynikiem faktu, że zamiast żądanego sygnału  $f(x)$  jest generowany sygnał "schodkowy"  $F(x)$  będący jego aproksymatą /rys.3/. Zastąpienie przebiegu  $f(x)$  przebiegiem aproksymującym  $F(x)$  jest źródłem powstania błędu aproksymacji. Powstaje zatem problem oceny dokładności z jaką przebieg aproksymujący  $F(x)$  odwzorowuje przebieg żądany  $f(x)$ .

## 2.4. Kryteria oceny dokładności odwzorowania przebiegu $f/x/$ przez przebieg aproksymujący $F/x/$

Zagadnieniem określania błędu aproksymacji zajmują się w zasadzie dwa działy matematyki: teoria aproksymacji oraz metody numeryczne. W obydwu przypadkach błąd aproksymacji jest związany z miarą odległości pomiędzy funkcjami  $f/x/$  i  $F/x/$  /termin zaczerpnięto z matematyki [70] /. Teoria aproksymacji wprowadza dwa podstawowe rodzaje miary odległości [70] :

$$1/ \quad \rho_1 /f, F/ = \max_{x \in [a, b]} \left| f/x/ - F/x/ \right|$$

Funkcję  $F/x/$ , dla której liczba  $\rho_1 /f, F/$  jest najmniejsza, nazywamy funkcją aproksymującą optymalną w sensie aproksymacji jednostajnej.

$$2/ \quad \rho_2 /f, F/ = \sqrt{\int_a^b [f/x/ - F/x/]^2 dx}$$

Funkcję  $F/x/$ , dla której liczba  $\rho_2 /f, F/$  jest najmniejsza nazywamy funkcją aproksymującą optymalną w sensie aproksymacji średnio kwadratowej.

$\rho_2$  - średnie odchylenie kwadratowe /~~poradnik matematyki~~  
~~s. 590/~~

Podane wyżej dwa rodzaje miar odległości /funkcjonały  $\rho_1 /f, F/$  i  $\rho_2 /f, F/$  / stanowią dwa podstawowe kryteria stosowane w matematyce do oceny dokładności aproksymacji funkcji  $f/x/$  przez funkcję  $F/x/$ . Zagadnienie optymalnej aproksymacji polega na takim doborze parametrów funkcji aproksymującej  $F/x/$ , aby błąd aproksymacji /przybliżenia/ określony przez wartość liczbową wybranego funkcjonału /  $\rho_1 /f, F/$  lub  $\rho_2 /f, F/$  /

osiągał swoją wartość minimalną.

Matematyczne kryteria zostały przeniesione na grunt sygnałów elektrycznych przy czym pojęcia funkcji aproksymowanej  $f/x/$  i aproksymującej  $F/x/$  są w tym przypadku zastąpione funkcjami opisującymi w dziedzinie czasu przebiegi: aproksymowany i aproksymujący.

W ten sposób przy opisie sygnałów elektrycznych w dziedzinie czasu powstały odpowiednio dwa kryteria oceny dokładności odwzorowania żadanego przebiegu  $f/x/$  przez przebieg aproksymujący  $F/x/$ . Mamy zatem odpowiednio dwa błędy aproksymacji /przybliżenia/ zdefiniowane następująco:

1. maksymalny błąd bezwzględny

$$\delta_1 = \max_{x \in [a,b]} |f/x/ - F/x/|$$

2. błąd średni kwadratowy

$$\delta_2 = \sqrt{\int_a^b [f/x/ - F/x/]^2 dx}$$

gdzie:  $a, b$  - oznaczają przedział wartości zmiennej  $x$ .

Aby zinterpretować prawidłowo znaczenie tak zdefiniowanych błędów aproksymacji należy wrócić do interpretacji wyznaczonych poprzednio funkcyjonałów  $\rho_1/f, F/$  i  $\rho_2/f, F/$ . Jak wynika z matematycznej teorii aproksymacji funkcyjonały  $\rho_1/f, F/$  i  $\rho_2/f, F/$  są zdefiniowane jako miara odległości dwóch funkcji w przestrzeni. Jeśli przyjąć, że  $f/x/$  i  $F/x/$  są funkcjami opisującymi w dziedzinie czasu sygnały elektryczne: aproksymowany i aproksymujący, to interpretacja geometryczna



błędów aproksymacji  $\delta_1$  i  $\delta_2$  może być tylko jedna a mianowicie taka, że wyrażenie  $[f/x/ - F/x/]$  będące integralną częścią zależności określających błędy  $\delta_1$  i  $\delta_2/$  oznacza tylko i wyłącznie różnicę wartości amplitud sygnału aproksymowanego  $f/x/$  i aproksymującego  $F/x/$ . Wynika stąd, że obydwa znane i stosowane błędy aproksymacji  $\delta_1$  i  $\delta_2$  określają tylko różnice amplitudowe sygnałów  $f/x/$  i  $F/x/$  nie dostarczając żadnych informacji dotyczących pozostałych parametrów tych sygnałów, chociaż dla większości układów i urządzeń było by to bardzo wskazane. Można oczywiście wyobrazić sobie taką klasę układów elektrycznych dla których istotne znaczenie będzie miała tylko i wyłącznie wartość amplitudy sygnału elektrycznego, a wszystkie inne parametry tego sygnału /np: widmo częstotliwościowe/ nie będą miały żadnego znaczenia i dla takiego przypadku wymienione wyżej błędy amplitudowe  $\delta_1$  i  $\delta_2$  będą wystarczające. Jednak dla przypadku ogólnego stosowane dotychczas kryteria aproksymacji, bazujące na geometrycznym sensie odwzorowania nie dają pełnej i jednoznacznej oceny dokładności tego odwzorowania. Niejednoznaczność ta polega na tym, że można aproksymować sygnał żądany  $f/x/$  dowolną liczbę różnych przebiegów aproksymujących  $F_1/x/, F_2/x/ \dots F_n/x/$  i uzyskać dla każdego z nich tą samą wartość liczbową błędu aproksymacji /np: błędu średniego kwadratowego/.

W pracy niniejszej zaprezentowano stanowisko, że niedokładności odwzorowania żądanego przebiegu  $f/x/$  przez przebieg aproksymujący  $F/x/$  są spowodowane różnicami w charakterystykach widmowych obu przebiegów. Stanowisko takie znajduje uzasadnienie w twierdzeniach analizy matematycznej. Jak wiadomo każ



dej okresowej funkcji  $f/x/$ , całkownej i spełniającej warunki Dirichleta [33], [66] można przyporządkować w sposób jednoznaczny trygonometryczny szereg Fouriera postaci:

$$f/x/ = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} /a_k \cos kx + b_k \sin kx/ \quad /1/$$

gdzie:  $a_0$  - składowa stała

$a_k, b_k$  - amplitudy  $k$ -tych harmonicznych.

Jak z tego wynika, dyskretne widmo częstotliwości - zbiór współczynników  $a_k$  i  $b_k$  z zależności /1/ - określa dany przebieg  $f/x/$  w sposób jednoznaczny, tzn. że nie może być dwóch różnych funkcji  $f_1/x/$  i  $f_2/x/$ , którym można by przyporządkować takie same widma częstotliwości harmonicznych. Oznacza to też, że jeśli dwie funkcje  $f_1/x/$  i  $f_2/x/$  mają takie same widma częstotliwościowe to  $f_1/x/ = f_2/x/$  [70].

W praktyce prawie wszystkie spotykane okresowe przebiegi elektryczne można opisać funkcjami, które są całkowne i spełniają warunki Dirichleta. Dotyczy to również przebiegu schodkowego wytwarzanego przez układy generatorów cyfrowych. Można zatem przebiegom: aproksymowanemu  $f/x/$  i aproksymującemu  $F/x/$  przyporządkować w sposób jednoznaczny określone widma częstotliwościowe. Porównanie widm częstotliwościowych obu przebiegów  $f/x/$  i  $F/x/$  może więc mieć duże znaczenie w ocenie dokładności z jaką generowany przebieg  $F/x/$  odwzorowuje żądany przebieg  $f/x/$ .

W związku z powyższym w niniejszej pracy zaproponowano aby poprzez analogię do znanych już, opartych o geometryczne kryteria

odwzorowania, metod aproksymacji i odpowiadających im pojęć:

- funkcji aproksymującej optymalnej w sensie aproksymacji jednostajnej,
- funkcji aproksymującej optymalnej w sensie aproksymacji średnio kwadratowej,

wprowadzić nowe pojęcie:

- funkcji aproksymującej optymalnej w sensie aproksymacji widmowej.

Funkcją aproksymującą optymalną w sensie widmowym będziemy nazywać taką funkcję, której widmo częstotliwości harmonicznych jest w maksymalnie możliwym stopniu zbliżone do widma funkcji aproksymowanej. Tak sformułowane widmowe kryterium aproksymacji nie zawiera jeszcze liczbowej miary dokładności odwzorowania i dlatego może ono być traktowane jedynie jako wstępne kryterium jakościowe. Wymaga ono tym samym opracowania i przyjęcia liczbowej miary dokładności odwzorowania. Można założyć, że miara ta powinna być uzależniona od liczby harmonicznych oraz od wartości ich amplitud.

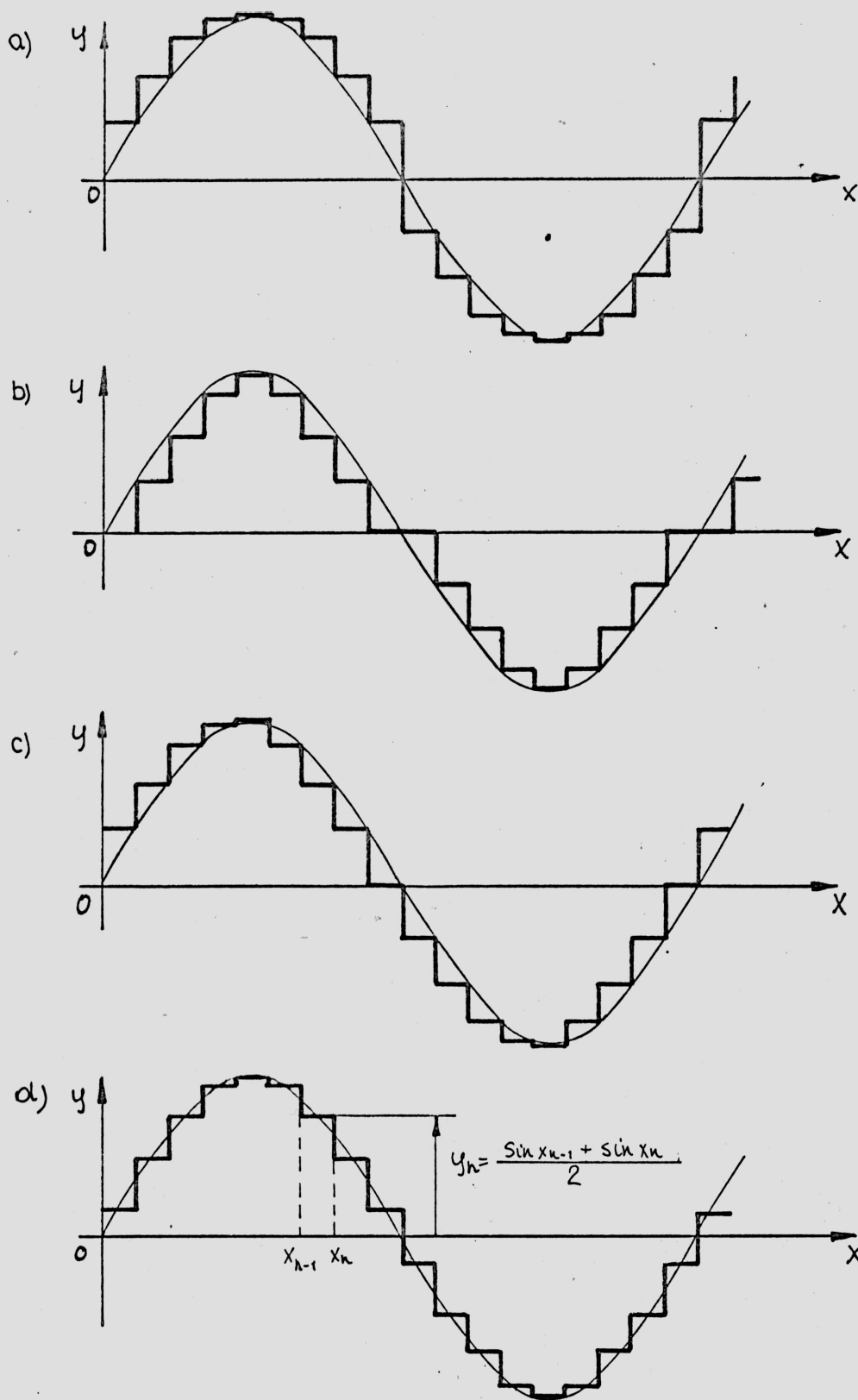
Taka interpretacja zagadnienia, aproksymacji w przypadku generacji sygnału sinusoidalnego prowadzi do oczywistego /także intuicyjnie/ wniosku, że z widma sygnału aproksymującego  $F/x/$  należy wyeliminować wszystkie częstotliwości harmoniczne pozostawiając tylko składową o częstotliwości podstawowej. Jak wiadomo sygnał sinusoidalny w swej idealnej postaci posiada tylko składową o częstotliwości podstawowej a amplitudy pozostałych harmonicznych są równe zeru. Propozycja przyjęcia konkretnej liczbowej miary kryterium widmowego dla przypadku

aproxymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym będzie przedstawiona w dalszej części pracy.

## 2.5. Generacja sygnału sinusoidalnego metodą syntezy cyfrowej

Generacja sygnału sinusoidalnego w generatorach cyfrowych odbywa się według zasad podanych w punktach 2.1 i 2.2. Oznacza to, że układy te nie generują czystego sygnału sinusoidalnego lecz będący jego aproxymatą sygnał schodkowy składający się z pewnej liczby elementów składowych. Dla każdej określonej liczby  $N$  tych elementów można generować nieskończenie wiele schodkowych przebiegów aproxymujących różniących się tylko amplitudą poszczególnych impulsów prostokątnych z których jest składany wyjściowy przebieg schodkowy. Jak widać w generatorach cyfrowych można przy tej samej konstrukcji układu wytwarzać różne przebiegi "sinusoidalne" różniące się zastosowanym sposobem aproxymacji sinusoidy przebiegiem schodkowym.

W znanych rozwiązaniach cyfrowych generatorów sinusoidalnych stosuje się cztery zasadnicze sposoby aproxymacji sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym /rys.5/. Sposób przedstawiony na rys.5a polega na takim przyjęciu amplitud poszczególnych schodków aby przebieg aproxymujący niejako obejmował od góry



Rys 5. APROKSYMACJE SYGNAKU SINUSOIDALNEGO SYGNAKEM SCHODKOWYM

- a) - metoda „above”
- b) - — — — „below”
- c) - — — — „mieszana”
- d) - — — — średniej arytmetycznej w przedziale aproksymowanym.

przebieg aproksymowany z zapewnieniem możliwie największej liczby punktów styczności obu przebiegów. Sposób ten w literaturze angielskiej jest określony nazwą "above". Sposób przedstawiony na rysunku 5b /nazywany w języku ang. "below"/ polega na ułożeniu przebiegu aproksymującego poniżej przebiegu aproksymowanego tak aby zapewnić możliwie największą liczbę punktów styczności. Sposób z rys.5c jest połączeniem dwu wymienionych poprzednio sposobów, przy czym zbocze rosnące jest zawsze aproksymowane sposobem "above" a zbocze malejące sposobem "below". Ma to uzasadnienie w przypadku gdy przebieg schodkowy zostaje podany na układ całkujący o odpowiedniej stałej czasowej. Można wtedy otrzymać zmodyfikowany przebieg aproksymujący /linia przerywana na rys.5c/, który w sensie geometrycznym lepiej odwzorowuje przebieg żądany tzn. sinusoidę. Sposób przedstawiony na rys.5d polega na takim doborze amplitud poszczególnych schodków, aby były one równe średniej arytmetycznej obliczonej z minimalnej i maksymalnej wartości jaką przyjmuje sygnał aproksymowany w przedziale określonym danym schodkiem aproksymującym.

Zasadniczą zaletą sposobów przedstawionych na rys.5a,b i c jest prosty algorytm z obliczania wartości amplitud poszczególnych schodków. Sposób przedstawiony na rys.5d ma bardziej skomplikowany algorytm /wyznaczanie średniej arytmetycznej z dwóch wartości funkcji sinus/, ale przy danej liczbie schodków aproksymujących zapewnia on bezwzględną minimalizację błędu aproksymacji określonego jako:

$$\delta_1 = \max \left| f/x/ - F/x/ \right|$$

Z matematycznego punktu widzenia przypadek ten daje też najlepszą aproksymację w sensie geometrycznym zdefiniowaną twierdzeniem Czebyszewa, które mówi, że różnica  $f/x/ - F/x/$  ma przyjmować w danym przedziale aproksymacji swoje wartości ekstremalne równe  $\pm \delta$  z kolejno zmieniającymi się znakami. Omawiany przypadek aproksymacji /rys.5d/ został w zasadzie opracowany i uzasadniony przez Kotielnikowa w teorii próbkowania metodą aproksymacji schodkowej. Prowadzona tam analiza uchybu od wzorowania funkcji  $f/x/$  przez przebieg schodkowy <sup>69</sup> [~~68~~] doprowadziła do wniosku, że minimum tego uchybu wystąpi wtedy, gdy dany schodek przebiegu aproksymującego przyjmie wartość równą połowie zakresu zmienności funkcji aproksymowanej, rozpatrywanej oczywiście w przedziale określonym przez ten schodek.

Zatem aproksymacja sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym wg powyższych reguł daje, przy stosowanych do tej pory kryteriach, przypadek aproksymacji optymalnej. Trzeba jednak podkreślić fakt, że jest to najlepsza aproksymacja ale rozumiana w sensie geometrycznym tzn. z pkt. widzenia kryteriów amplitudowych /porównaj rozdz.2.4/.

Jeśli do oceny dokładności odwzorowania sinusoidy przez przebieg schodkowy zastosujemy zaproponowane w rozdziale 2.4, kryterium widma częstotliwościowego, to okaże się, że we wszystkich czterech stosowanych sposobach aproksymacji /rys.5/ przebiegi aproksymujące mają bardzo bogate widmo częstotliwości harmonicznych. Jak wynika z rozważań teoretycznych w przypadku idealnym /tzn. takim w którym nie występują ograniczenia pasma częstotliwości ze strony układowej/ widmo częstotliwości harmo

nicznych zajmuje cały przedział częstotliwości - od częstotliwości podstawowej do częstotliwości nieskończenie wielkich - i składają się na nie wszystkie harmoniczne o numerach nieparzystych. Nieobecność harmonicznych o numerach parzystych wynika z teorii związanej z trygonometrycznym szeregiem Fouriera, która mówi, że amplitudy harmonicznych o numerach parzystych przyjmują wartość zerową dla każdej funkcji, spełniającej warunki symetrii trzeciego rodzaju tzn. dla każdej funkcji okresowej dla której jest spełniony warunek:

$$f/x + \frac{1}{2} T/ = - f/x/$$

gdzie: T - okres funkcji f/x/.

Sygnal sinusoidalny a także sygnały aproksymujące go spełniają ten warunek i w związku z tym harmoniczne o numerach parzystych są nieobecne w widmie generowanego sygnału. Nieobecność ta a także obecność harmonicznych o numerach nieparzystych zostały też potwierdzone w prowadzonych pracach eksperymentalnych, których wyniki zostaną przedstawione w dalszej części pracy. Badania te były prowadzone oczywiście tylko w ograniczonym paśmie częstotliwości.

Obecność w widmie generowanego sygnału sinusoidalnego wszystkich harmonicznych o numerach nieparzystych jest oczywiście bardzo niepożądana jednak występują one jak już powiedziano we wszystkich czterech przedstawionych przypadkach. Harmoniczne te występują również w układzie generatora opartego o omawianą w rozdziale 2.2 scaloną pamięć ROM typu MM 5220 BM gdyż zapisane w jej komórkach informacje o wartości amplitudy poszczegól-

nych schodków sygnału aproksymującego umożliwiając wygenerowanie sygnału aproksymującego wg metody przedstawionej na rys.5a.

Konieczność eliminacji niepożądanych harmoniczných jest oczywista i w dotychczasowej praktyce harmoniczne te były eliminowane za pomocą odpowiedniego filtra dolnoprzepustowego, który musiał zapewnić odpowiednio dobre tłumienie najbliższej trzeciej harmoniczných. Z prowadzonych prac własnych a także z niektórych opublikowanych prac innych autorów wynikały pewne możliwości eliminacji niektórych harmoniczných drogą odpowiedniego doboru amplitud poszczególnych impulsów prostokątnych wchodzących w skład generowanego przebiegu schodkowego. I tak autor pracy [46] generując sinusoidalny przebieg schodkowy składający się z 16-tu elementów na okres uzyskał zmniejszenie amplitud niektórych harmoniczných nieparzystych do poziomu ok.40dB niższego od amplitudy składowej podstawowej. Autor pracy [28] uzyskał dla przebiegu składanego z 10-ciu elementów na okres zupełne wyeliminowanie harmoniczných o numerach 5, 7, 13 i 15, a dla przebiegu składanego z 12-tu elementów uzyskał eliminację harmoniczných o numerach 3,7,9 i 15.

Przytoczone wyżej przykłady posłużyły do stwierdzenia, że w przypadku aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym są pewne możliwości kształtowania widma częstotliwościowego przebiegu aproksymującego za pomocą parametrów przebiegu schodkowego, tzn. liczby elementów przypadających na jeden okres oraz ich amplitudy. Stwierdzono jednocześnie na podstawie przeglądu dostępnej literatury, że nie są znane takie optymalne metody aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebie



giem schodkowym, składającym się z dowolnej skończonej liczby elementów, które zapewniłyby bezwzględną minimalizację liczby harmonicznych występujących w widmie przebiegu aproksymującego.

### 3. CEL I TEZA PRACY

Celem postawionym przed pracą było wyznaczenie takich warunków aproksymacji przebiegu sinusoidalnego  $f(x)$  przebiegiem schodkowym  $F(x)$  przy spełnieniu, których aproksymata  $F(x)$  byłaby pozbawiona możliwie maksymalnej liczby harmonicznych i tym samym jej widmo byłoby w maksymalnie możliwym stopniu zbliżone do widma idealnego sygnału sinusoidalnego. Rozwiązanie tego problemu powinno dotyczyć przypadku ogólnego tzn. sygnału schodkowego składającego się z dowolnej, skończonej liczby elementów składowych.

#### Teza

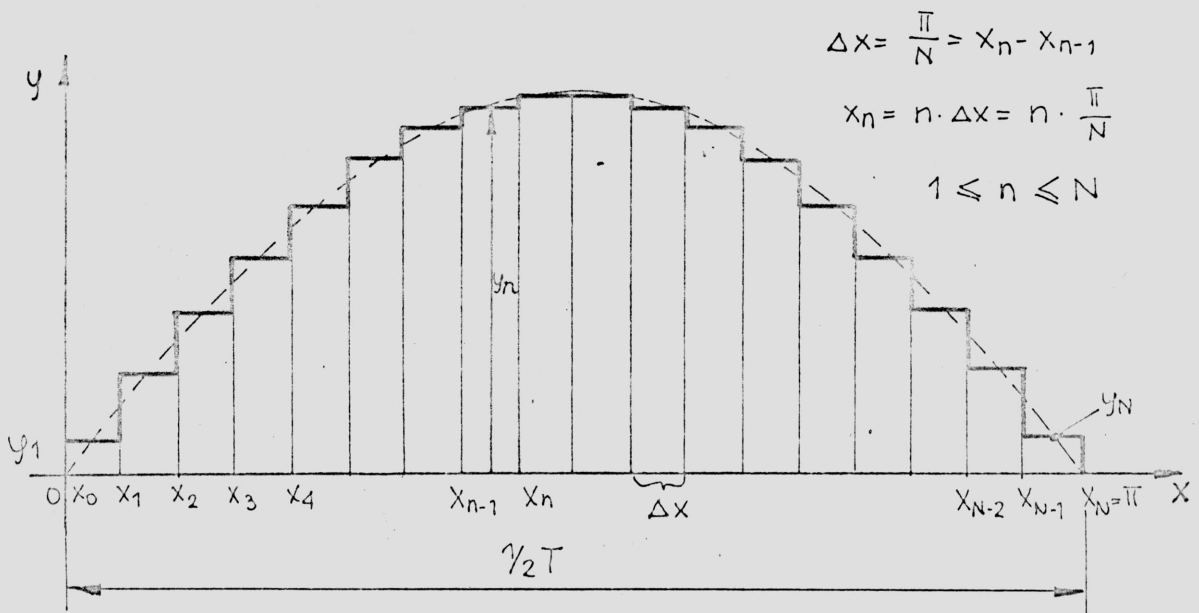
Istnieje taki, optymalny w sensie widmowym, sposób aproksymacji przebiegu sinusoidalnego  $f(x)$  przebiegiem schodkowym  $F(x)$ , składającym się z dowolnej, skończonej liczby elementów, że zastosowanie tego sposobu w generacyjnych układach syntezy cyfrowej zapewnia uzyskanie sygnału wyjściowego pozbawionego możliwie największej liczby harmonicznych.

#### 4. ANALIZA WIDMOWA SYGNAŁU SINUSOIDALNEGO GENEROWANEGO METODĄ SYNTEZY CYFROWEJ

Analizę zawartości harmonicznych w widmie sygnału sinusoidalnego generowanego metodą syntezy cyfrowej przeprowadzono w oparciu o przedstawiony poniżej model fizyczny tego sygnału.

##### 4.1. Model fizyczny sygnału sinusoidalnego generowanego metodą syntezy cyfrowej

Jak już wykazano w rozdziale drugim generatory cyfrowe nie wytwarzają czystego sygnału sinusoidalnego lecz jego aproksymatę  $F/x/$  będącą sygnałem schodkowym - rys.6.



Rys.6. Model fizyczny jednej połówki sygnału sinusoidalnego generowanego metodą syntezy cyfrowej /linią przerywaną zaznaczono żądany sygnał sinusoidalny/.

Model aproksymującego sygnału schodkowego, przedstawiony na rys.6, został skonstruowany przy następujących założeniach:

a/ Funkcja  $F(x)$  opisująca aproksymujący sygnał schodkowy, tak samo jak funkcja sinus, jest funkcją nieparzystą, to znaczy spełnia warunek:

$$- F(x) = F(-x) \quad /2/$$

b/ Funkcja  $F(x)$  opisująca aproksymujący sygnał schodkowy, tak samo jak funkcja sinus, charakteryzuje się symetrią III rodzaju tzn. spełnia warunek:

$$F\left(x + \frac{1}{2}T\right) = -F(x) \quad /3/$$

Oznacza to, że funkcje aproksymujące dodatnią i ujemną połowę sinusoidy są identyczne co do kształtu i różnią się jedynie znakami.

c/ Przyjęcie obydwu w/w założeń oznacza, że przedstawiony na rys.6 fragment funkcji aproksymującej posiada oś symetrii, którą można opisać zależnością:

$$x = \frac{1}{4}T = \frac{1}{2}\pi \quad /4/$$

d/ Funkcja  $F(x)$  aproksymująca jedną połowę sinusoidy o okresie  $2\pi$  składa się z całkowitej, skończonej liczby  $N$  impulsów prostokątnych o równej szerokości  $\Delta x$  wyznaczonej z zależności:

$$\Delta x = \frac{0,5T}{N} = \frac{\pi}{N} = x_n - x_{n-1} \quad /5/$$

gdzie:  $x_{n-1}$ ,  $x_n$  - są punktami końcowymi przedziału  $x_{n-1}, x_n$  zajmowanego na osi  $x$  przez  $n$ -ty element prostokątny.  
Można zapisać, że:

$$x_{n-1} = (n-1) \cdot \Delta x = (n-1) \cdot \frac{\pi}{N} \quad /6a/$$

$$x_n = n \cdot \Delta x = n \cdot \frac{\pi}{N} \quad /6b/$$

gdzie:  $n$  - jest numerem kolejnym poszczególnych elementów przebiegu schodkowego i spełnia warunek:

$$1 \leq n \leq N$$

Przyjęto, że liczba elementów prostokątnych przypadających na jedną połówkę sinusoidy może być dowolną, skończoną liczbą całkowitą nie mniejszą od trzech

$$N \geq 3$$

Założenie takie wynika z faktu, że aproksymacja jednej połówki sinusoidy jednym lub dwoma elementami prostokątnymi, przy spełnieniu warunków /2/ i /3/, prowadzi w konsekwencji do otrzymania przebiegu prostokątnego. Jak wiadomo przebieg prostokątny charakteryzuje się pełnym widmem prążków harmonicznych a więc trudno byłoby go przyjąć jako aproksymatę sygnału sinusoidalnego.

e/ Amplitudy poszczególnych elementów składowych przebiegu schodkowego  $F(x)$  przyjmują w poszczególnych przedziałach  $[x_{n-1}, x_n]$  wartość stałą równą  $y_n$ . Ogólnie można stwierdzić, że wartości poszczególnych amplitud  $y_n$  mogą przyjmować dowolne wartości skończone, jednakże zwykle przyjmuje się, że dla danego przedziału zmienności  $x$   $[x_{n-1}, x_n]$ , wartość  $y_n$  leży w zakresie pomiędzy minimalną i maksymalną wartością funkcji aproksymowanej, rozpatrywanej w prze-

dziale  $[x_{n-1}, x_n]$ . Można zapisać, że dla każdego  $x \in [x_{n-1}, x_n]$ ,  $y_n$  spełnia warunek:

$$\min f/x/ \leq y_n \leq \max f/x/$$

gdzie  $f/x/$  jest funkcją aproksymowaną.

Przyjęcie przedstawionego wyżej modelu przebiegu generowanego w układach syntezy cyfrowej jest w stosunku do układów rzeczywistych pewnym przybliżeniem. Model ten zakłada wytworzenie idealnego przebiegu schodkowego co nie jest możliwe do zrealizowania. Rozbieżności w stosunku do przebiegu idealnego będą dotyczyły przede wszystkim:

- zboczy przebiegu schodkowego
- czasu trwania  $\Delta x$  poszczególnych schodków
- utrzymania stałej w czasie amplitudy poszczególnych schodków.

Zbocza przebiegu schodkowego w przypadku idealnym charakteryzują się zerowym czasem narostu, natomiast w układach rzeczywistych ukształtowanie zboczy jest uzależnione od stanów przejściowych przetwornika C/A /występujących przy zmianie sygnałów cyfrowych podawanych na jego wejście/ a czas narostu zboczy będzie bezpośrednio zależny od szybkości działania zastępowanych przetworników C/A. Znaczenie niezerowego czasu narostu zboczy będzie malało w miarę wydłużenia czasu trwania poszczególnych schodków, co będzie miało miejsce przy zmniejszaniu częstotliwości generowanego sygnału. Tak więc przy danej szybkości przetwornika można znaleźć tak małą częstotliwość sygnału dla której odkształcenie przebiegu schodkowego spowodowane czasem narostu zboczy poszczególnych schodków nie będzie dyskwalifi-

fikowało przyjętego modelu.

Przyjęta w przedstawionym modelu równa szerokość impulsów prostokątnych, z których jest składany przebieg schodkowy, jest możliwa do zrealizowania ze stosunkowo dużą dokładnością. Czas trwania poszczególnych schodków /przedział  $\Delta x$  na rys.6/ jest wyznaczony przez okres sygnału taktującego. Jeżeli więc generator taktu będzie się charakteryzował dobrą stabilnością częstotliwości to można uzyskać odpowiednio dobrą powtarzalność odcinków czasowych  $\Delta x$ .

Przyjęcie stałej amplitudy  $y_n$  dla n-tego schodka jest uwarunkowane stabilnością przetwornika. Produkowane przetworniki charakteryzują się niestabilnością amplitudy rzędu pojedynczych p.p.m. co daje dostatecznie dobre przybliżenie warunku  $y_n = \text{const}$

Jak z tego wynika przedstawiony wyżej model sygnału wyjściowego generatora cyfrowego może być z dostateczną dokładnością realizowany w praktyce /dotyczy to zwłaszcza zakresu b.m.cz./.

#### 4.2. Analiza harmoniczna sygnału schodkowego

Przedstawiony na rysunku 6 i opisany w rozdziale 4.1. model sygnału schodkowego aproksymującego przebieg sinusoidalny można przedstawić jako wykres pewnej funkcji schodkowej  $y = F(x)$ . Funkcja ta jest funkcją okresową, całkowaną i spełnia warunki Dirichleta [33], [66].

Zatem schodkowej funkcji  $F(x)$  można przyporządkować w sposób jednoznaczny trygonometryczny szereg Fouriera /1/:

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] \quad /7/$$



Użycie trygonometrycznej postaci szeregu Fouriera wynika z faktu, że jedynie wyrazom trygonometrycznego szeregu Fouriera można nadać sens fizyczny w postaci generatorów prądów lub napięć sinusoidalnych o określonych częstotliwościach, amplitudach i fazach. Postać zespolona szeregu Fouriera jest co prawda prostsza jednak nie można poszczególnym wyrazom szeregu przypisać wprost sensu fizycznego tak jak to ma miejsce przy rozwinięciu trygonometrycznym.

Ponieważ omawiana funkcja schodkowa  $F(x)$  jest funkcją nieparzystą i posiada symetrię III rodzaju - zależność /2/ i /3/ - to według [33]  $\&$  można zapisać, że:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 & b_{2k} &= 0 \\ a_k &= 0 & b_{2k-1} &\neq 0 \end{aligned}$$

gdzie:  $k$  - liczba naturalna.

Zatem zależność /7/ przyjmie postać:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \cdot \sin /2k-1/ \cdot x \quad /8/$$

Występujący w powyższej zależności współczynnik  $b_{2k-1}$  posiada sens fizyczny w postaci amplitudy sinusoidalnego sygnału harmonicznego o częstotliwości  $/2k-1/$  razy wyższej od częstotliwości podstawowej przebiegu  $F(x)$ . Widmo częstotliwości harmonicznego sygnału  $F(x)$  nie posiada więc składowej stałej i składa się wyłącznie z nieparzystych harmonicznym. Amplitudy poszczególnych harmonicznym można wyznaczyć z zależności podanych w poz. [33] :

$$b_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin /2k-1/ \cdot x \, dx \quad /9/$$

Podane wyżej zależności /8/ i /9/ są zależnościami ogólnymi, słusznymi dla każdej funkcji nieparzystej posiadającej symetrię III rodzaju i stanowią punkt wyjściowy do przeprowadzenia analizy harmonicznej funkcji schodkowej  $F/x/$  przedstawionej w rozdziale 4.1. Analiza ta zostanie przeprowadzona przy założeniu nieograniczonego pasma częstotliwości a więc dla przypadku idealnego.

Przyjmując założenia przedstawione w rozdziale 4.1. w punktach d i e oraz posługując się oznaczeniami przyjętymi na rysunku 6 i zależnościami /5/ i /6/ można zmodyfikować zależność /9/ określającą amplitudy nieparzystych harmonicznych:

$$b_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F/x/ \sin/2k-1/x dx = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{x_0}^{x_1} y_1 \sin/2k-1/x dx + \int_{x_1}^{x_2} y_2 \sin/2k-1/x dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} y_n \sin/2k-1/x dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} y_N \sin/2k-1/x dx \right] = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} y_n \sin/2k-1/x dx \quad /10/$$

Ponieważ  $y_n$  w granicach całkowania  $[x_{n-1}, x_n]$  ma wartość stałą to po rozwiązaniu całek z zależności /10/ otrzymamy:

$$b_{2k-1} = \frac{2}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos/2k-1/x_{n-1} - \cos/2k-1/x_n \right] \quad /11/$$

lub w innej postaci po uwzględnieniu zależności /6/

$$b_{2k-1} = \frac{2}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos/2k-1/n-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos/2k-1/n \cdot \frac{\pi}{N} \right] \quad /12/$$

Na tym można zakończyć rozważania wstępne. Wynika z nich, że widmo częstotliwości harmonicznych idealnego okresowego przebiegu schodkowego, który spełnia warunki funkcji nieparzystej z symetrią III rodzaju można opisać zależnościami /8/ i /11/ lub /8/ i /12/.

W przypadku ogólnym widmo analizowanego sygnału schodkowego składa się więc z sumy szeregu niekończenie dużej liczby harmonicznych o numerach nieparzystych /8/, przy czym każdy wyraz tego szeregu jest także sumą szeregu opisanego zależnością /11/ lub /12/. Zgodnie z przedstawionym w rozdziale 3 cele pracy, należy więc wyznaczyć warunki w których sumy szeregów /11/ lub /12/ uzyskują wartość zerową dla dowolnego  $k$  /z wyjątkiem  $k=1$ / oraz dla dowolnego  $N$ . Wyznaczenie rozwiązania wprost sprowadzałoby się zatem do rozwiązania układu nieskończenie wielkiej liczby równań, w których parametrem jest zmiana  $N$  /liczba schodków przypadająca na jeden półokres generowanego sygnału/. Ponieważ każda wartość liczbowa parametru  $N$  daje oddzielny układ równań a założono, że  $N$  może być liczbą dowolną to w przypadku ogólnym konsekwencją tego jest nieskończenie duża liczba układów równań przy czym każdy z tych układów zawiera nieskończenie dużo równań.

Tak postawiony problem jest raczej niemożliwy do rozwiązania przy użyciu konwencjonalnych metod rozwiązywania równań dlatego też na początku zostaną rozpatrzone najprostsze przypadki szczególne aby na ich podstawie można było wyciągnąć pewne wnioski przydatne do dalszej analizy zagadnienia.

Dalszy tok rozwiązania zostanie przeprowadzony dla przypadku, w którym żądany przebieg sinusoidalny  $f(x) = A \cdot \sin x$  jest

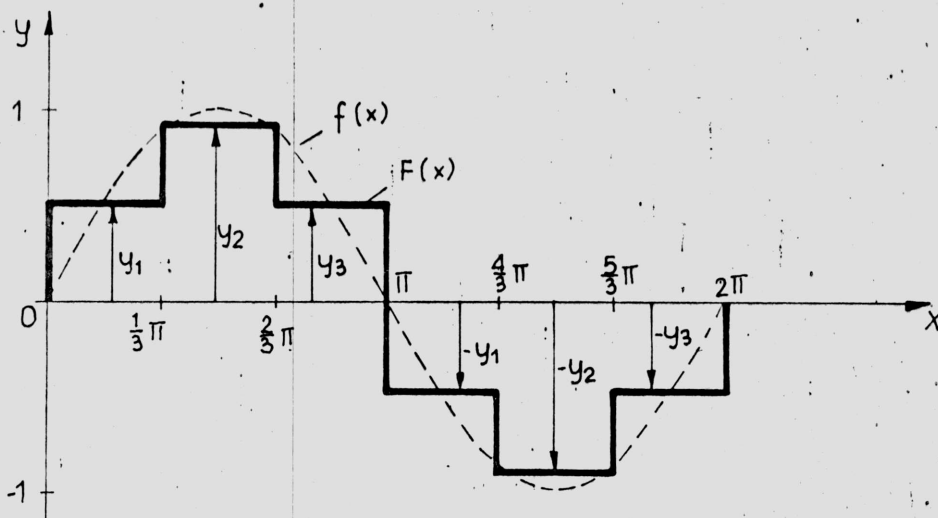
przebiegiem unormowanym co oznacza, że jego amplituda równa się  
jedności  $A=1$  a zatem

$$f(x) = 1 \cdot \sin x$$

/13/

#### 4.2.1. Minimalizacja współczynników $b_{2k-1}$ dla $N=3$

Najprostszym przypadkiem aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym jest przypadek w którym na jeden półokres przebiegu aproksymowanego przypadają trzy elementy przebiegu aproksymującego  $N=3$  /rys.7/.



Rys.7. Aproksymacja sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym - przypadek  $N=3$ .

Wartości amplitud  $y_n$  poszczególnych schodków pokazane na rys.7 są nieznane a ich położenie na rysunku względem aproksymowanego przebiegu  $f(x)$  o amplitudzie 1 jest przypadkowe. Amplitudy  $y_n$  zgodnie z założeniami z rozdziału 4.1. muszą spełniać warunek:

$$y_3 = y_1$$

/14/

Zależność /12/ określająca współczynniki  $b_{2k-1}$  przyjmie postać:

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{2}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^3 y_n \left[ \cos /2k-1/ \cdot /n-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \cdot \left\{ y_1 \left[ \cos /2k-1/ \cdot /1-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} \right] + \right. \\ &+ y_2 \left[ \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot \frac{2\pi}{N} \right] + y_3 \left[ \cos /2k-1/ \cdot \frac{2\pi}{N} - \right. \\ &\left. \left. - \cos /2k-1/ \cdot \frac{3\pi}{N} \right] \right\} = \end{aligned}$$

Podstawiając /14/ do /15/ oraz uwzględniając  $N=3$  otrzymujemy:

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \cdot \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} \right] \quad /16a/$$

lub

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \cdot \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{3} \right] \quad /16b/$$

Analizując zależność /16/ dla 1-szej harmonicznej /2k-1=1/ otrzymamy

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos \frac{\pi}{3} \right] \quad /17/$$

Jak widać amplituda 1-szej harmonicznej ma zawsze wartość dodatnią różną od zera niezależnie od wartości amplitud  $y_1$  i  $y_2$  / $y_1$  i  $y_2$  posiadają oczywiście wartości dodatnie/.

Można także łatwo wykazać, że dla wszystkich harmonicznych o numerach  $m \cdot 2N+1$  zachodzi zależność podobna. Przyjmując, że:

$$2k-1 = m \cdot 2N+1 = m \cdot 6+1$$

gdzie:  $m$  - liczba naturalna.

Podstawiając powyższe do wyrażenia  $\cos / 2k-1 / \cdot \frac{\pi}{N}$  wchodzącego w skład wzoru /16/ otrzymujemy:

$$\cos / 2k-1 / \cdot \frac{\pi}{N} = \cos / m \cdot 2N+1 / \cdot \frac{\pi}{N} = \cos \frac{\pi}{N} = \cos \frac{\pi}{3} \quad /18/$$

A zatem dla  $N=3$  harmoniczne nieparzyste o numerach:

$$a/ 2k-1 = 1$$

$$b/ 2k-1 = m \cdot 2N+1$$

posiadają amplitudy zawsze dodatnie a ich wartość można w prosty sposób wyznaczyć z zależności /16/ po uwzględnieniu /18/

$$b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1) \cdot \pi} \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos \frac{\pi}{3} \right] = \frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \cdot |y_1 + y_2| \quad /19/$$

Pozostały jeszcze do rozpatrzenia nieparzyste harmoniczne o numerach  $m \cdot 2N+3$ . Dla tego przypadku występujące we wzorze /16/ wyrażenie  $\cos / 2k-1 / \cdot \frac{\pi}{3}$  przybiera postać:

$$\cos / 2k-1 / \cdot \frac{\pi}{N} = \cos / m \cdot 2N+3 / \cdot \frac{\pi}{N} = \cos / m \cdot 2\pi + \pi / = -1$$

podstawiając powyższe do /16/ otrzymujemy:

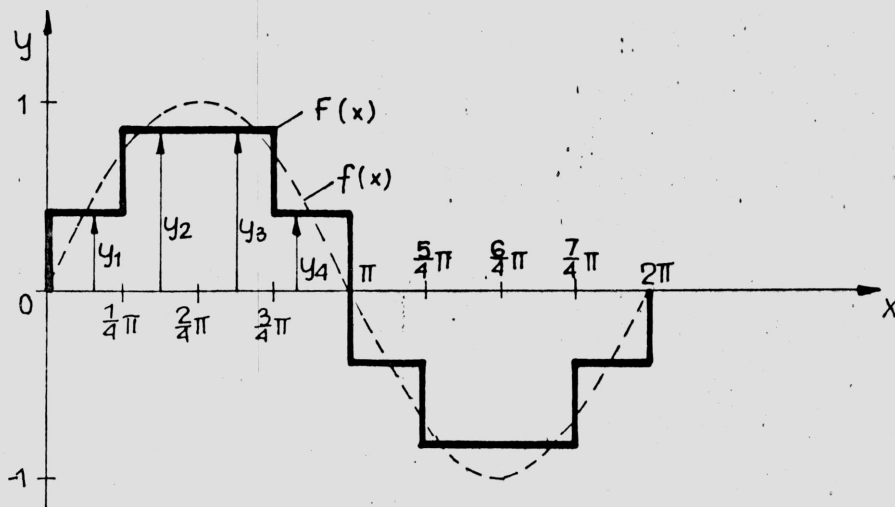
$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \cdot |2y_1 - y_2| \quad /20/$$

Amplitudy tych harmonicznych mogą więc przyjąć wartość zerową jeśli w zależności /20/ zostanie spełniony warunek:

$$2y_1 = y_2 \quad /21/$$

Podsumowując można stwierdzić, że dla omawianego przypadku  $N=3$ , widmo aproksymującego sygnału schodkowego zawiera wyłącznie harmoniczne o numerach nieparzystych przy czym harmoniczne o numerach 1 oraz  $m \cdot 6 + 1$  posiadają zawsze amplitudy dodatnie i nie można ich wyeliminować z widma drogą doboru parametrów sygnału schodkowego, natomiast wszystkie pozostałe harmoniczne można wyeliminować z widma poprzez spełnienie warunku /21/.

#### 4.2.2. Minimalizacja współczynników $b_{2k-1}$ dla $N=4$



Rys.8. Aproksymacja sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowy - przypadek  $N=4$ .



Przypadek ten zgodnie z założeniami z rozdziału 4.1. musi spełniać warunki

$$y_3 = y_2 \quad /22a/$$

$$y_4 = y_1 \quad /22b/$$

Zależność /12/ określająca współczynniki  $b_{2k-1}$  przyjmie postać:

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{2}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \sum_{n=1}^4 y_n \left[ \cos /2k-1/ \cdot /n-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \right] = \quad /23/ \\ &= \frac{2}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \left\{ y_1 \left[ \cos /2k-1/ \cdot /1-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} \right] + \right. \\ &+ y_2 \left[ \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot \frac{2\pi}{N} \right] + y_3 \left[ \cos /2k-1/ \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} - \right. \\ &\left. - \cos /2k-1/ \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{N} \right] + y_4 \left[ \cos /2k-1/ \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{N} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Podstawiając /22/ do /23/ oraz przyjmując  $N=4$  otrzymujemy:

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} \right] \quad /24a/$$

lub

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{4} \right] \quad /24b/$$

Podobnie jak w przypadku poprzednim zostanie zbadana część wyrażenia /24/ uzależniona bezpośrednio od parametru  $k$  tzn. czynnik  $\cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N}$

dla  $2k-1 = 1$

$$\cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} = \cos \frac{\pi}{N} \quad /25/$$

dla  $2k-1 = m \cdot 2N+1$

$$\cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} = \cos \frac{\pi}{N} \quad /26/$$

A zatem dla  $N=4$  podobnie jak dla  $N=3$  harmoniczne nieparzyste o numerach:

a/  $2k-1 = 1$

b/  $2k-1 = m \cdot 2N+1$

posiadają amplitudy zawsze dodatnie a ich wartość można w prosty sposób wyznaczyć z zależności /24/ po uwzględnieniu /25/ i /26/:

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{4}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \left[ y_1 + /y_2 - y_1/ \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right] = \\ &= \frac{2}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \left[ /2 - \sqrt{2}/ \cdot y_1 + \sqrt{2} \cdot y_2 \right] \quad /27/ \end{aligned}$$

Pozostały jeszcze do rozpatrzenia nieparzyste harmoniczne o numerach  $/2m-1/ \cdot N+1$ . Dla tego przypadku występujący we wzorze /24/ czynnik  $\cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N}$  przybierze postać:

$$\cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} = \cos \left[ /2m-1/ \cdot N+1 \right] \cdot \frac{\pi}{N} = - \cos \frac{\pi}{N} = - \cos \frac{\pi}{4} = - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A zatem dla  $/2k-1/ = /2m-1/ \cdot N+1$  wyrażenie /24/ przybierze postać:

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{4}{|2k-1| \cdot \pi} \cdot \left[ y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |y_2 - y_1| \right] = \\ &= \frac{2}{|2k-1| \cdot \pi} \cdot \left[ |2 + \sqrt{2}| \cdot y_1 - \sqrt{2} \cdot y_2 \right] \quad /28/ \end{aligned}$$

Amplitudy tych harmonicznych mogą więc przyjąć wartość zerową jeśli w zależności /28/ zostanie spełniony warunek

$$\frac{y_2}{y_1} = \sqrt{2} + 1 \quad /29/$$

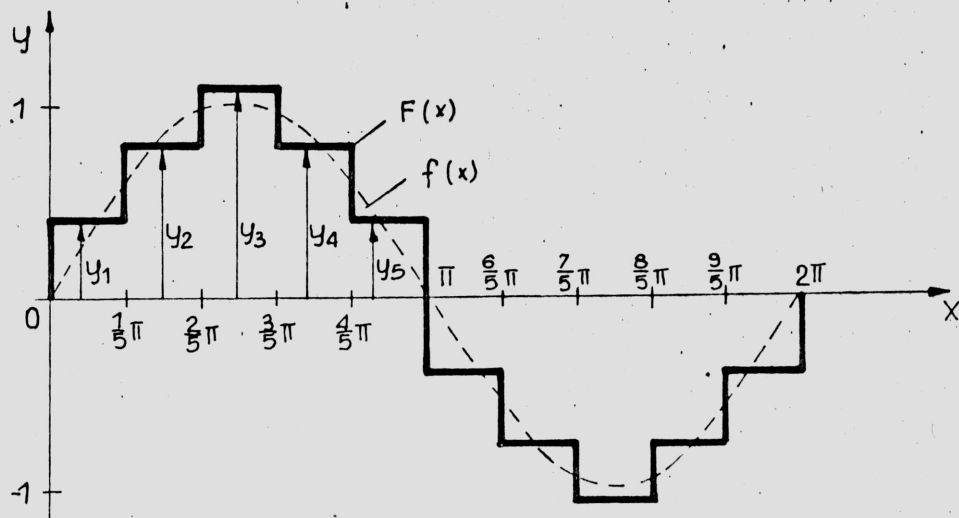
Podsumowując można stwierdzić, że dla omawianego przypadku /N=4/ widmo aproksymującego sygnału schodkowego zawiera wyłącznie harmoniczne o numerach nieparzystych przy czym harmoniczne o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N + 1$  posiadają zawsze amplitudy dodatnie i nie można ich wyeliminować z widma drogą doboru parametrów sygnału schodkowego natomiast wszystkie pozostałe harmoniczne można wyeliminować z widma poprzez spełnienie warunku /29/ /amplitudy tych harmonicznych osiągną wtedy wartość zerową/.

#### 4.2.3. Minimalizacja współczynników $b_{2k-1}$ dla N=5

Przypadek przedstawiony na rysunku 9 zgodnie z założeniami z rozdziału 4.1 musi spełniać warunki

$$y_4 = y_2 \quad /30a/$$

$$y_5 = y_1 \quad /30b/$$



Rys.9. Aproksymacja sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym - przypadek  $N=5$ .

Zależność /12/ określająca współczynniki  $b_{2k-1}$  przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
 b_{2k-1} &= \frac{2}{2k-1 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^5 y_n \left[ \cos \left/ 2k-1 \cdot \left/ n-1 \cdot \frac{\pi}{N} \right. \right. - \cos \left/ 2k-1 \cdot n \frac{\pi}{N} \right. \right] = \\
 &= \frac{2}{2k-1 \cdot \pi} \cdot \left\{ y_1 \left[ \cos \left/ 2k-1 \cdot \left/ 1-1 \cdot \frac{\pi}{N} \right. \right. - \cos \left/ 2k-1 \cdot \frac{\pi}{N} \right. \right] + \right. \\
 &+ y_2 \left[ \cos \left/ 2k-1 \cdot \frac{\pi}{N} \right. - \cos \left/ 2k-1 \cdot 2 \frac{\pi}{N} \right. \right] + y_3 \left[ \cos \left/ 2k-1 \cdot 2 \frac{\pi}{N} \right. - \right. \\
 &- \cos \left/ 2k-1 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{N} \right. \right] + y_4 \left[ \cos \left/ 2k-1 \cdot 3 \frac{\pi}{N} \right. - \cos \left/ 2k-1 \cdot 4 \frac{\pi}{N} \right. \right] + \\
 &+ y_5 \left[ \cos \left/ 2k-1 \cdot 4 \frac{\pi}{N} \right. - \cos \left/ 2k-1 \cdot 5 \frac{\pi}{N} \right. \right] \left. \right\} \quad /31/
 \end{aligned}$$

Podstawiając /30/ do /31/ oraz przyjmując  $N=5$  otrzymujemy:

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos |2k-1| \cdot \frac{\pi}{N} + |y_3 - y_2| \cdot \cos |2k-1| \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} \right] \quad /32a/$$

lub

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot \cos |2k-1| \cdot \frac{\pi}{5} + |y_3 - y_2| \cdot \cos |2k-1| \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{5} \right] \quad /32b/$$

Podobnie jak w przypadkach poprzednich zbadane zostaną teraz w wyrażeniu /32/ człony zależne od parametru k. Członami tymi są:

$$a/ \quad \cos |2k-1| \cdot \frac{\pi}{N} = \cos |2k-1| \cdot \frac{\pi}{5} \quad /33/$$

$$b/ \quad \cos |2k-1| \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} = \cos |2k-1| \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{5} \quad /34/$$

dla  $2k-1 = 1$

zależność /33/ przyjmuje postać:

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5+1}}{4} \quad /35/$$

zależność /34/ przyjmuje postać:

$$\cos 2 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-1}}{4} \quad /36/$$

Dla  $2k-1 = m \cdot 2N+1$ :

zależność /33/ przyjmie postać:

$$\cos |2k-1| \cdot \frac{\pi}{N} = \cos |m \cdot 2N+1| \cdot \frac{\pi}{N} = \cos \frac{\pi}{N} = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5+1}}{4} \quad /37/$$

a zależność /34/:

$$\cos |2k-1| \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} = \cos |m \cdot 2N+1| \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{N} = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-1}}{4} \quad /38/$$

Uwzględniając zależności od /35/ do /38/ we wzorze /32/ otrzymujemy dla harmonicznych nieparzystych o numerach:

a/  $2k-1 = 1$

b/  $2k-1 = m \cdot 2N+1$

wspólną zależność określającą ich amplitudę:

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \left[ \frac{3-\sqrt{5}}{4} \cdot y_1 + 0,5y_2 + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot y_3 \right] \quad /39/$$

Z zależności tej wynika, że omawiane harmoniczne posiadają zawsze amplitudy dodatnie.

Pozostały jeszcze do przeanalizowania harmoniczne o numerach:

a/  $(2m-1) \cdot N$

b/  $(2m-1) \cdot N+2$

Dla  $2k-1 = (2m-1) \cdot N$  zależność /33/ przyjmie postać:

$$\cos |2k-1| \cdot \frac{\pi}{N} = \cos |2m-1| \cdot \pi = -1 \quad /40/$$

a zależność /34/:

$$\cos |2k-1| \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} = \cos |2m-1| \cdot 2\pi = 1 \quad /41/$$

Po podstawieniu powyższych do /32/ otrzymamy:

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \left[ y_1 + |y_2 - y_1| \cdot |-1| + |y_3 - y_2| \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{4}{\sqrt{2k-1} \cdot \pi} \cdot |2y_1 - 2y_2 + y_3| \quad /42/ \end{aligned}$$

Jak widać harmoniczne o numerach  $(2m-1) \cdot N$  mogą posiadać wartość zerową przy spełnieniu warunku:

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \quad /43/$$

Dla  $/2k-1/ = /2m-1/ \cdot N_{+2}$  zależności  $/33/$  i  $/34/$  przyjmą odpowiednio postać:

$$\cos /2k-1/ \frac{\pi}{N} = \cos \left[ /2m-1/ \frac{\pi}{N} + 2 \frac{\pi}{N} \right] = - \cos \frac{2\pi}{N} = - \cos \frac{2\pi}{5} = - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad /44/$$

oraz

$$\cos /2k-1/ \cdot 2 \frac{\pi}{N} = \cos \left[ /2m-1/ \cdot 2 \frac{\pi}{N} + 4 \frac{\pi}{N} \right] = \cos \frac{4\pi}{N} = \cos \frac{4\pi}{5} = - \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad /45/$$

Po podstawieniu  $/44/$  i  $/45/$  do  $/32/$  otrzymujemy:

$$b_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\pi} \left[ /3+\sqrt{5}/ \cdot y_1 + 2y_2 - / \sqrt{5}+1/ \cdot y_3 \right] \quad /46/$$

Jak widać harmoniczne o numerach  $/2m-1/ \cdot N_{+2}$  mogą posiadać wartość zerową przy spełnieniu warunku:

$$/3+\sqrt{5}/ \cdot y_1 + 2y_2 - / \sqrt{5}+1/ \cdot y_3 = 0 \quad /47/$$

W następnym kroku należy sprawdzić czy jest możliwe jednoczesne spełnienie warunków  $/43/$  i  $/47/$  gdyż wtedy efekt eliminacji harmonicznych będzie najlepszy. W tym celu należy wyznaczyć wspólne rozwiązanie dla układu równań utworzonego z warunków  $/43/$  i  $/47/$ :

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$$

$$/3+\sqrt{5}/ \cdot y_1 + 2y_2 - / \sqrt{5}+1/ \cdot y_3 = 0$$

Rozwiązanie takie istnieje w postaci:



$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} : \frac{\sqrt{5}+1}{4} : 1 \quad /48/$$

Spełnienie warunku /48/ pozwala zatem wyeliminować z rozpatrywanego widma harmoniczne o numerach różnych od jedności oraz różnych od  $m \cdot 2N+1$ .

Podsumowując wyniki otrzymane z analizy widma harmonicznych przebiegu schodkowego aproksymującego przebieg sinusoidalny można stwierdzić, że widmo to jak wykazano na początku rozdziału 4.2 zawiera wyłącznie harmoniczne o numerach nieparzystych. Dalsza analiza przeprowadzona dla trzech najprostszych przypadków wykazała istnienie dwóch podstawowych prawidłowości:

- a/ jak wykazano teoretycznie dla omawianych przypadków szczególnych nie ma możliwości wyeliminowania z widma idealnego sygnału schodkowego harmonicznych o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N+1$ , gdzie  $N$  oznacza liczbę schodków przypadających na jeden półokres przebiegu aproksymowanego;
- b/ wszystkie pozostałe harmoniczne są możliwe do wyeliminowania drogą doboru parametrów sygnału schodkowego. Warunki uzyskania zerowych amplitud tych harmonicznych są określone dla poszczególnych przypadków zależnościami /21/, /29/ i /48/. Bliższa analiza tych zależności wykazała, że są one spełnione przez przyjęcie niżej wymienionych amplitud  $y_n$  dla  $N=3$

$$y_1 = \sin 30^\circ = 0,5$$

$$y_2 = \sin 90^\circ = 1$$

dla  $N=4$

$$y_1 = \sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$y_2 = \sin 67^\circ 30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

dla  $N=5$

$$y_1 = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$y_2 = \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$y_3 = \sin 90^\circ = 1$$

Dla wszystkich tych przypadków można znaleźć taką wspólną zależność ogólną na amplitudy  $y_n$ , że zastosowanie jej spełni warunki /21/, /29/ i /48/ i tym samym umożliwi wyeliminowanie omawianych harmonicznych z widma. Zależność ta jest następująca:

$$y_n = \sin \left/ \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right/ \quad /49/$$

lub po podstawieniu /5/ i /6/

$$y_n = \sin \left/ n - \frac{1}{2} \right/ \cdot \Delta x = \sin \left/ n - \frac{1}{2} \right/ \cdot \frac{\pi}{N} \quad /50/$$

Uzyskane wyniki analizy harmonicznych dla opisanych wyżej trzech przypadków szczegółowych posłużyły do sformułowania dwóch tez:

Teza 1 - W widmie przebiegu schodkowego aproksymującego przebieg sinusoidalny będą zawsze występowały harmoniczne o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N + 1$  i nie ma możliwości wyeliminowania ich na drodze doboru parametrów sygnału schodkowego.

Teza 2 - Harmoniczne o numerach różnych od 1 oraz  $m \cdot 2N+1$  mogą zostać wyeliminowane z tego widma /tzn. ich amplitudy przyjmą wartość zerową/ jeśli amplitudy poszczególnych elementów składowych przebiegu schodkowego będą posiadały wartość określoną przez zależność /49/ lub /50/.

Tak sformułowane tezy zostaną sprawdzone w dalszej części pracy dla przedstawionego w pkt.4.1. przypadku ogólnego tzn. dla dowolnych harmonicznych o numerach od 0 do  $\infty$  oraz dla dowolnego parametru  $N$ .

#### 4.2.4. Wyznaczenie amplitud harmonicznych o numerach 1 oraz $m \cdot 2N+1$ dla dowolnego $N$

W celu sprawdzenia sformułowanej wyżej tezy nr 1 przeprowadzono analizę wyprowadzonej wcześniej zależności /12/ określającej amplitudę nieparzystych harmonicznych.

Zależność ta o postaci:

$$b_{2k-1} = \frac{2}{2k-1 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos \left( \frac{2k-1}{n-1} \cdot \frac{\pi}{N} \right) - \cos \left( \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{\pi}{N} \right) \right]$$

dla  $2k-1 = 1$  przyjmuje postać:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos \left( \frac{n-1}{N} \right) - \cos \left( \frac{n}{N} \right) \right] \quad /51/$$

a dla  $2k-1 = m \cdot 2N+1$ :

$$\begin{aligned}
 b_{m \cdot 2N+1} &= \frac{2}{\int_{m \cdot 2N+1} \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos \left/ \frac{m \cdot 2N+1}{n-1} \right/ \frac{\pi}{N} - \right. \\
 &- \left. \cos \left/ \frac{m \cdot 2N+1}{n} \right/ \frac{\pi}{N} \right] = \frac{2}{\int_{m \cdot 2N+1} \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos \left/ \frac{n-1}{N} \right/ \frac{\pi}{N} - \right. \\
 &- \left. \cos \left/ \frac{n}{N} \right/ \frac{\pi}{N} \right]
 \end{aligned}
 \tag{52/}$$

Jeśli porówna się wyrażenie /51/ określające amplitudę pierwszej harmonicznej z wyrażeniem /52/ określającym amplitudy harmonicznych o numerach  $m \cdot 2N+1$  to widać, że szeregi trygonometryczne występujące w obydwu wyrażeniach są identyczne i w związku z tym pomiędzy harmonicznymi zachodzi następująca relacja:

$$b_{m \cdot 2N+1} = \frac{b_1}{m \cdot 2N+1}
 \tag{53/}$$

Analiza wyrażenia opisującego wyrazy szeregu trygonometrycznego, występującego w zależnościach /51/ i /52/ pozwala stwierdzić że każdy dowolny wyraz tego szeregu posiada wartość dodatnią lub też niektóre z tych wyrazów mogą być równe zeru a zatem suma szeregu

$$\sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos \left/ \frac{n-1}{N} \right/ \frac{\pi}{N} - \cos \left/ \frac{n}{N} \right/ \frac{\pi}{N} \right]
 \tag{54/}$$

może posiadać tylko i wyłącznie wartość dodatnią.

W związku z powyższym amplitudy wszystkich harmonicznych o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N+1$  posiadają zawsze, dla dowolnego N, wartość dodatnią różną od zera niezależnie od wartości ampli-

tud  $y_n$ . Zatem harmoniczne te będą zawsze występowały w widmie sygnału schodkowego aproksymującego sygnał sinusoidalny i nie ma możliwości wyeliminowania ich drogą doboru poszczególnych amplitud  $y_n$  sygnału schodkowego. Można więc przyjąć, że postawiona w pkt.4.2.3. teza nr 1 została udowodniona.

Na szczególne podkreślenie zasługuje wyprowadzona zależność /53/, z której wynika że amplitudy wszystkich nie dających się wyeliminować harmonicznych są odwrotnie proporcjonalne do numeru porządkowego tych harmonicznych.

#### 4.2.5. Analiza amplitud harmonicznych o numerach różnych od 1 oraz różnych od $m \cdot 2N+1$

Wyjściową zależność /12/ przekształcamy poprzez rozwinięcie sumy szeregu trygonometrycznego do postaci:

$$\begin{aligned}
 b_{2k-1} &= \frac{2}{T_{2k-1} \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \left[ \cos /2k-1/ \cdot n-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \right] = \\
 &= \frac{2}{T_{2k-1} \cdot \pi} \left\{ y_1 \left[ \cos /2k-1/ \cdot 1-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} \right] + \right. \\
 &+ y_2 \left[ \cos /2k-1/ /2-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} \right] + \dots + \\
 &+ y_{N-1} \left[ \cos /2k-1/ \cdot N-2/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot N-1/ \cdot \frac{\pi}{N} \right] + \\
 &\left. + y_N \left[ \cos /2k-1/ \cdot N-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - \cos /2k-1/ \cdot N \cdot \frac{\pi}{N} \right] \right\} = \\
 &= \frac{2}{T_{2k-1} \cdot \pi} \cdot \left[ y_1 \cos 0 + /y_2-y_1/ \cdot \cos /2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N} + /y_3-y_2/ \cdot \cos /2k-1/ \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} + \right. \\
 &\left. + /y_N-y_{N-1}/ \cdot \cos /2k-1/ \cdot N-1/ \cdot \frac{\pi}{N} - y_N \cdot \cos /2k-1/ \cdot \pi \right] \quad /55/
 \end{aligned}$$

uwzględniając, że:

$$y_N = y_1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos /2k-1/ \cdot \pi = -1$$

otrzymujemy:

$$b_{2k-1} = \frac{2}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \left[ 2 y_1 + \sum_{n=1}^{N-1} /y_{n+1}-y_n/ \cdot \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \right] \quad /56/$$

Korzystając z /50/ otrzymujemy:

$$y_1 = \sin \frac{\pi}{2N} \quad /57a/$$

oraz

$$y_{n+1}-y_n = \sin /n+1- \frac{1}{2}/ \cdot \frac{\pi}{N} - \sin /n - \frac{1}{2}/ \cdot \frac{\pi}{N} = 2 \sin \frac{\pi}{2N} \cos n \frac{\pi}{N} \quad /57b/$$

zatem wprowadzając /57aib/ do /56/ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{2}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \left[ 2y_1 + \sum_{n=1}^{N-1} /y_{n+1}-y_n/ \cdot \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \right] = \\ &= \frac{4}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2N} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \cos n \cdot \frac{\pi}{N} \cdot \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \right] \quad /58a/ \end{aligned}$$

lub w innej postaci

$$b_{2k-1} = \frac{4}{/2k-1/ \cdot \pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2N} \cdot B$$

$$\text{gdzie: } B = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \cos n \cdot \frac{\pi}{N} \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \quad /58b/$$

W celu wyznaczenia zerowych amplitud rozpatrywanych harmonic-

nych wystarczy przeanalizować w zależności /58a/ tylko wyrażen  
zawarte w nawiasie kwadratowym /B we wzorze 58b/, gdyż tylko  
ta część wzoru /58a/ może zdecydować o tym, że  $b_{2k-1}$  przyj-  
mie wartość zerową. W skład wyrażenia B wchodzi szereg o wyra-  
zach  $a_n$  równych:

$$a_n = \cos n \cdot \frac{\pi}{N} \cos /2k-1/ \cdot n \cdot \frac{\pi}{N} \quad /59/$$

Korzystając z wzorów Eulera można zastąpić trygonometryczne  
funkcje cosinusa postacią wykładniczą zmiennej zespolonej:

$$a_n = \frac{e^{in \cdot \frac{\pi}{N}} + e^{-in \cdot \frac{\pi}{N}}}{2} \cdot \frac{e^{in/2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N}} + e^{-in/2k-1/ \cdot \frac{\pi}{N}}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ e^{in 2k \frac{\pi}{N}} + e^{-in 2k \frac{\pi}{N}} + e^{in 2/k-1/ \frac{\pi}{N}} + e^{-in 2/k-1/ \cdot \frac{\pi}{N}} \right] /60/$$

wprowadzając nowe zmienne

$$u = e^{i 2k \cdot \frac{\pi}{N}} \quad /61/$$

$$v = e^{-i2/k-1/ \cdot \frac{\pi}{N}} \quad /62/$$

wyrażenie /60/ przyjmie postać

$$a_n = \frac{1}{4} \left[ u^n + u^{-n} + v^n + v^{-n} \right] \quad /63/$$

Wprowadzając powyższe do /58b/ otrzymujemy

$$B = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{4} \left[ u^n + u^{-n} + v^n + v^{-n} \right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \left[ \sum_{n=1}^{N-1} u^n + \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{1}{u} \right)^n + \sum_{n=1}^{N-1} v^n + \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{1}{v} \right)^n \right] \quad /64/$$



W otrzymanej postaci B występują sumy czterech postępów geometrycznych, z których każdy ma swoją własną sumę określaną znaną powszechnie zależnością:

$$\sum_{n=1}^P a_n = a_1 \cdot \frac{q^P - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^P}{1 - q} \quad /65/$$

gdzie:  $q$  - iloraz postępu geometrycznego.

Wprowadzając do /64/ sumę postępu geometrycznego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B &= 1 + \frac{1}{4} \left[ u \cdot \frac{u^{N-1} - 1}{u - 1} + \frac{1 \cdot 1 - u^{1-N}}{u \cdot 1 - u^{-1}} + v \cdot \frac{v^{N-1} - 1}{v - 1} + \frac{1}{v} \frac{1 - v^{1-N}}{1 - v^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{u^N - 1 / \cdot / u^{N-1} + 1 /}{u^{N-1} \cdot / u - 1 /} + \frac{v^N - 1 / \cdot / v^{N-1} + 1 /}{v^{N-1} \cdot / v - 1 /} \right] \quad /66/ \end{aligned}$$

Wracając do zmiennych wprowadzonych zależnościami /61/ i /62/ otrzymujemy

$$u^N = e^{ik2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot N} = e^{ik2\pi} = 1 \quad /67/$$

oraz

$$v^N = e^{i/k-1/ \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot N} = e^{i/k-1/ \cdot 2\pi} = 1 \quad /68/$$

Wstawiając /67/ i /68/ do /66/ łatwo zauważyć, że liczniki obu składników tworzących B /66/ są równe zeru.

Upoważnia to do stwierdzenia, że

$$B = 0$$

pod warunkiem, że mianowniki obu składników tworzących B są różne od zera. Warunek taki jest konieczny gdyż przyjęcie prz

mianownik B wartości zerowej powoduje wystąpienie w wyrażeniu /66/ nieoznaczoności typu  $\frac{0}{0}$ . Aby nieoznaczoność taka nie wystąpiła muszą zostać spełnione warunki:

a/  $u^{N-1} \neq 0$

b/  $u \neq 1$

c/  $v^{N-1} \neq 0$

d/  $v \neq 1$

Korzystając z /61/ i /62/ wyznaczamy:

a/  $u^{N-1} = e^{ik/N-1/ \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N}} = e^{-ik2 \cdot \frac{\pi}{N}} \neq 0$

b/  $u = e^{\frac{ik \cdot 2\pi}{N}}$

$u = 1$  dla  $k = m \cdot N$  gdzie  $m$  - liczba naturalna, przypadkowi temu odpowiada harmoniczna o numerze  $2k-1 = m \cdot 2N-1$ .

Dla wszystkich  $k \neq mN$  otrzymujemy  $u \neq 1$ .

c/  $v^{N-1} = e^{i/k-1/2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot N-1/} = e^{-i/k-1/2 \cdot \frac{\pi}{N}} \neq 0$

d/  $v = e^{i/k-1/ \cdot \frac{2\pi}{N}}$

$v = 1$  dla  $k = 1$  oraz dla  $k = m \cdot N + 1$  gdzie:  $m$  - dowolna liczba naturalna, przypadkom takim odpowiadają harmoniczne o numerach

$$2k - 1 = 1$$

oraz

$$2k - 1 = m \cdot 2N + 1.$$

Uwzględniając powyższe można stwierdzić, że nieoznaczoność typu  $\frac{0}{0}$  wystąpi jedynie dla harmonicznych o numerach:

$$2k - 1 = \begin{cases} 1 \\ m \cdot 2N_{\underline{+1}} \end{cases} \quad /69/$$

natomiast dla wszystkich innych harmonicznych wyrażenie B /66/ jest określone i przyjmuje wartość zerową. Jeśli tak to amplitudy harmonicznych o numerach różnych od 1 oraz różnych od  $m \cdot 2N_{\underline{+1}}$  zgodnie z zależnością /58/ są równe zeru. Można więc przyjąć, że sformułowana w rozdziale 4.2.3 teza nr 2 została udowodniona.

#### 4.3. Wnioski

Podsumowując przeprowadzone w pracy rozważania teoretyczne można stwierdzić, że aproksymując sygnał sinusoidalny przedstawionym w rozdziale 4.1 sygnałem schodkowym można zastosować taki sposób aproksymacji, który zapewni wyeliminowanie z widma sygnału aproksymującego maksymalnej liczby harmonicznych. Jak wykazano harmoniczne o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N_{\underline{+1}}$  nie są możliwe do wyeliminowania drogą doboru parametrów sygnału schodkowego i w najbardziej korzystnym przypadku aproksymacji będą one jedynymi, harmonicznymi występującymi w widmie tego sygnału /rys. 10/. Przypadek taki jest możliwy do uzyskania przy spełnieniu warunku określonego zależnością /50/ i możemy wtedy mówić o aproksymacji optymalnej w sensie wyeliminowania maksymalnej liczby harmonicznych występujących w widmie sygnału aproksymującego.

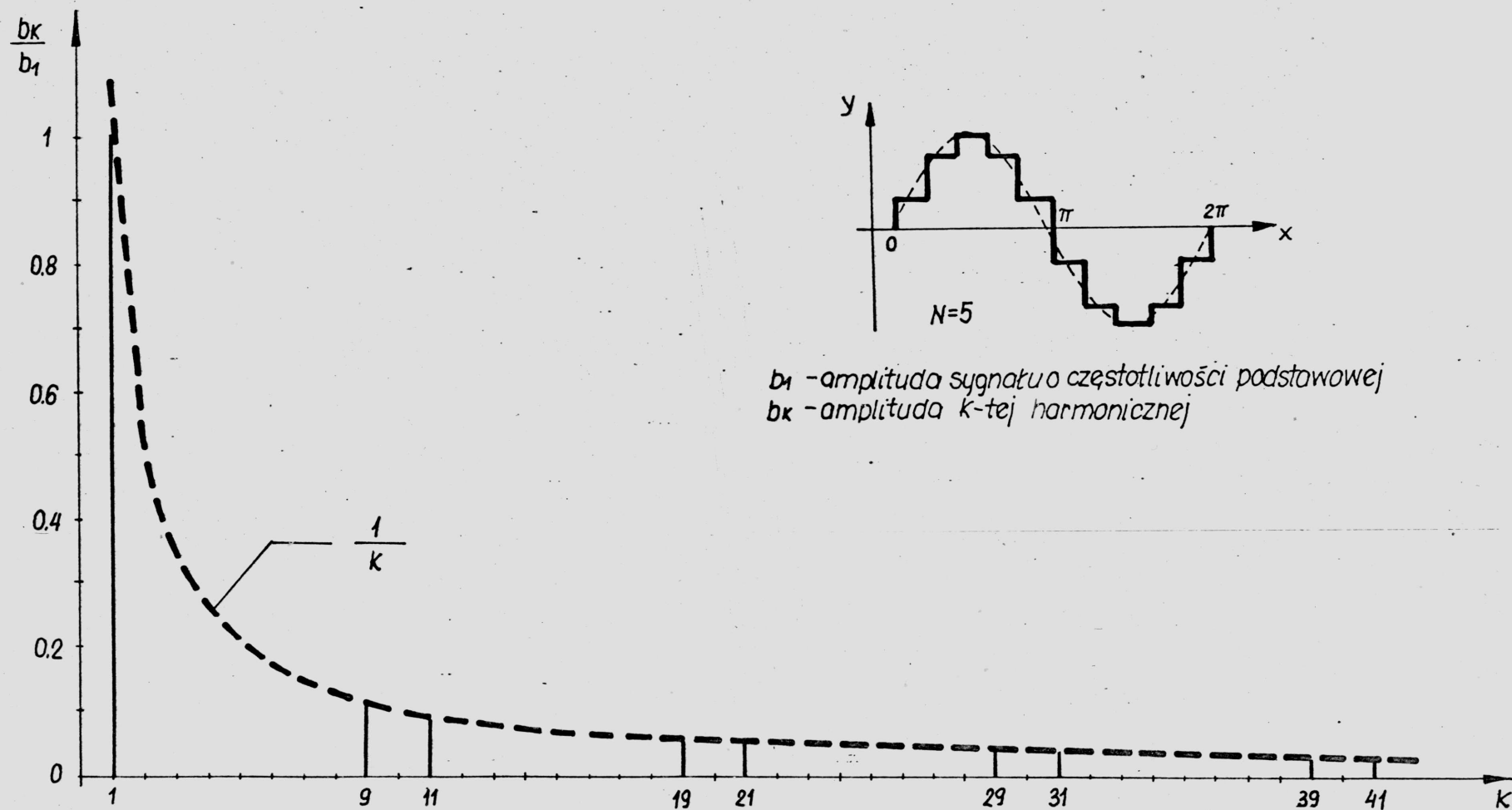
Dla przypadku tak rozumianej aproksymacji optymalnej amplitudę składowej podstawowej możemy wyznaczyć z zależności /58/ przyjmując, że  $2k-1 = 1$ .

Otrzymujemy wtedy

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2N} \left/ 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \cos^2 n \frac{\pi}{N} \right/ = \frac{2N}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2N} \quad /70/$$

Amplitudy pozostałych harmonicznych o numerach  $m \cdot 2N_{\pm 1}$ , które w przypadku aproksymacji optymalnej pozostaną obecne w widmie sygnału aproksymującego można zgodnie z /53/ wyznaczyć z zależności:

$$b_{m \cdot 2N_{\pm 1}} = \frac{b_1}{m \cdot 2N_{\pm 1}} = \frac{1}{m \cdot 2N_{\pm 1}} \cdot \frac{2N}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2N} \quad /71/$$



$b_1$  - amplituda sygnału o częstotliwości podstawowej  
 $b_k$  - amplituda  $k$ -tej harmonicznej

Rys.10. Widmo przebiegu schodkowego aproksymującego sygnał sinusoidalny.  
 Przykład aproksymacji optymalnej z maksymalną eliminacją harmonicznych dla  $N=5$

## 5. WERYFIKACJA WYNIKÓW ANALIZY TEORETYCZNEJ W RZECZYWISTYM MODELU GENERATORA CYFROWEGO

Wyniki prowadzonych w poprzednim rozdziale analiz teoretycznych zostały poddane weryfikacji w rzeczywistym modelu generatora cyfrowego. W tym celu opracowano układ prostego generatora cyfrowego o oryginalnej własnej konstrukcji, której opis zamieszczono poniżej.

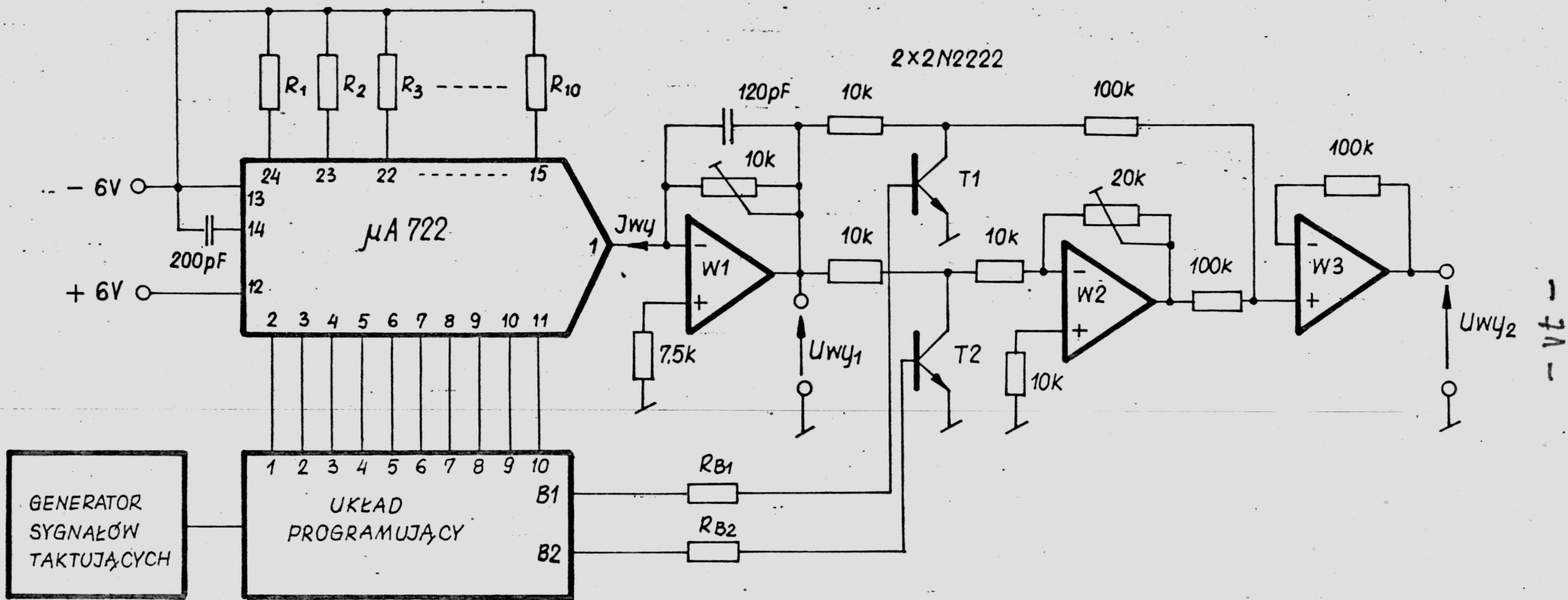
### 5.1. Opis układu generatora

Konstrukcja modelu generatora została opracowana w oparciu o przedstawioną w rozdziale drugim zasadę pracy generatorów cyfrowych. Podstawowym założeniem opracowywanego modelu było uzyskanie odpowiednio elastycznej struktury generatora, która umożliwiłaby jego późniejsze aplikacje do generacji sygnałów periodycznych o różnych kształtach i częstotliwościach oraz o różnych wariantach aproksymacji przebiegu żadanego przebiegiem schodkowym. Wymagania takie oznaczały konieczność opracowania takiej konstrukcji, w której będzie można w prosty sposób zmieniać takie parametry jak: częstotliwość sygnału taktującego, liczbę schodków przebiegu aproksymującego przypadającą na jeden okres przebiegu aproksymowanego oraz amplitudę tych schodków.

Uwzględniając powyższe wymagania oraz współczesne możliwości technologiczne podstawowymi członami takiego generatora /porównaj schemat blokowy z rys. 4/ powinny być: scalona katwo

programowalna pamięć oraz przetwornik C/A o dużej rozdzielczości /np. 10-bitowy/. O kształcie ostatecznej konstrukcji zdecydowały jednak nie tylko współczesne tendencje budowy generatorów cyfrowych lecz także ograniczenia w postaci dostępnych w IME elementów i podzespołów.

Konstrukcję opracowanego generatora /rys.11/ oparto o scalone źródło prądowe typu  $\mu A$  722 firmy Fairchild. Układ monolityczny  $\mu A$  722 jest sterowanym cyfrowo 10-bitowym źródłem prądowym o dużej dokładności i szybkości działania. Wyjściowy prąd tego układu jest sumą prądów dziesięciu niezależnych źródeł prądowych, z których każde jest włączane oddzielnym przełącznikiem analogowym uruchamianym odpowiednim stanem jednego z dziesięciu wejść cyfrowych. Dobierając wartości rezystorów  $R_1 \div R_{10}$  można poszczególnym wejściom cyfrowym przyporządkować określone wagi i tym samym uzyskać odpowiedni prąd wyjściowy uruchamiając odpowiednie wejście logiczne. Źródło prądowe  $\mu A$  722 razem ze wzmacniaczem operacyjnym W1 tworzą 10-bitowy przetwornik C/A z wyjściem napięciowym. Na wyjściu wzmacniacza W1 otrzymujemy analogowy sygnał napięciowy  $/U_{wy1}/$  o postaci schodkowej, przy czym amplitudy poszczególnych schodków są uzależnione od wag i stanów wejść cyfrowych źródła prądowego. Ponieważ sygnał wyjściowy powinien zawierać dodatnie i ujemne połówki przebiegu sinusoidalnego a zastosowane w układzie źródło prądowe pozwala na wytworzenie sygnału o jednej tylko polaryzacji przyjęto, że na wyjściu przetwornika C/A wytwarzane są bezpośrednio po sobie same dodatnie połówki przebiegu "sinusoidalnego".



Rys. 11. Modelowy układ generatora przebiegów schodkowych.

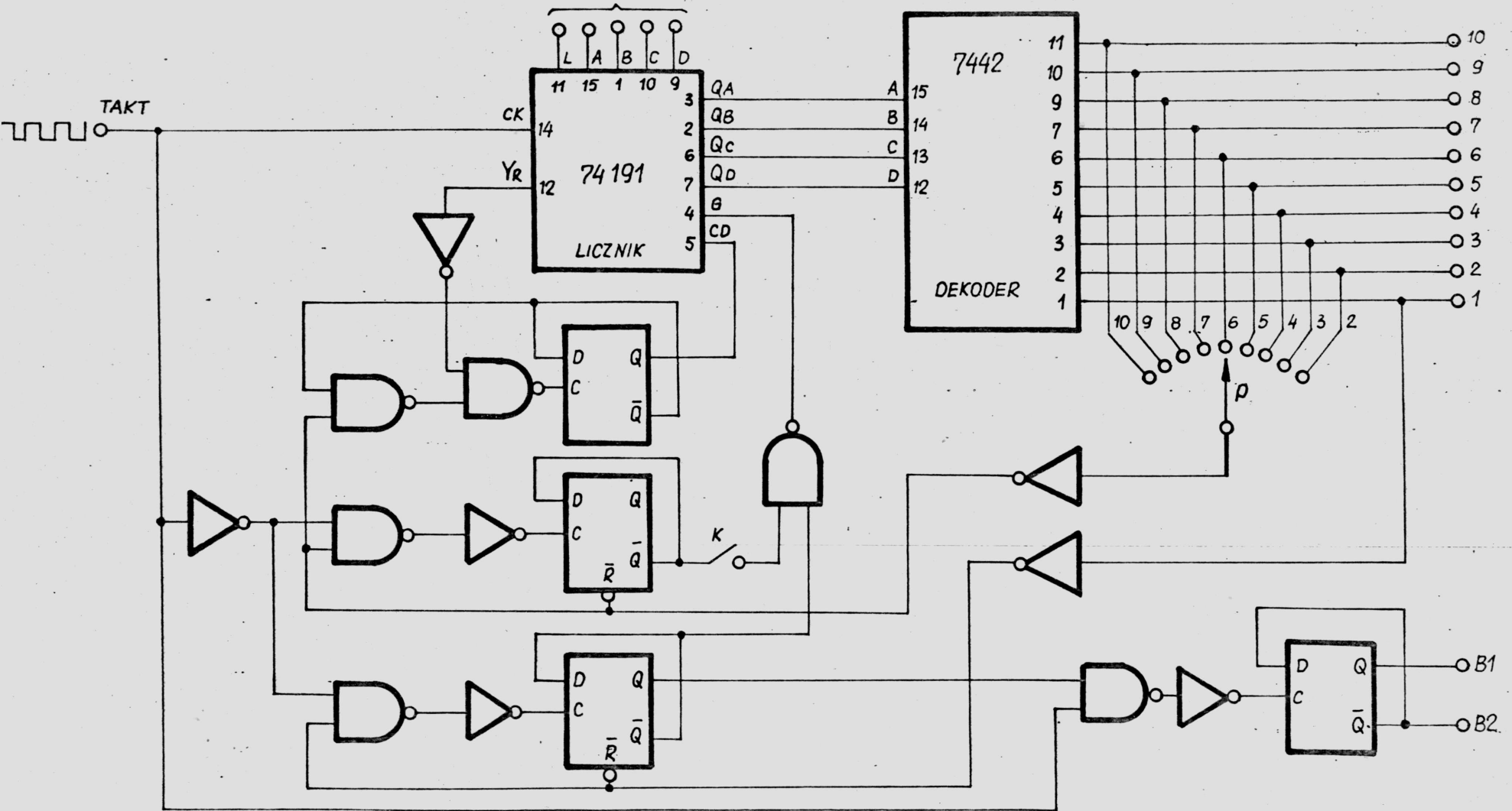


Uzyskany w ten sposób sygnał napięciowy  $/U_{wy1}/$  zostaje podany do układu /klucze T1 i T2, wzmacniacze W2 i W3/, w którym co druga połówka tego przebiegu zostaje odwracana i po zsumowaniu ich z połówkami nieodwróconymi otrzymujemy właściwy sygnał wyjściowy -  $U_{wy2}$ . Stanami wejść cyfrowych źródła prądowego oraz pracą kluczy T1 i T2 w układzie odwracającym steruje układ programujący. Algorytm pracy tego układu został opracowany tak, aby generator mógł wytworzyć aproksymatę sygnału sinusoidalnego zgodną z założeniami podanymi w rozdziale 4.1.

W celu zapewnienia możliwości niezależnej regulacji amplitud poszczególnych schodków przyjęto, że jednorazowo uaktywnia się tylko jedno wejście cyfrowe źródła prądowego. Amplituda danego schodka jest uzależniona w tej sytuacji tylko od wagi danego wejścia cyfrowego a więc od wartości odpowiadającego temu wejściu rezystora /jednego ze zbioru  $R_1 \div R_{10}/$ . Rozwiązanie takie zapewnia dużą elastyczność generatora szczególnie cenną na etapie doświadczalnego sprawdzania teoretycznych zależności a także zapewnia ono znaczną prostotę układu programującego. Za wadę takiego rozwiązania można uznać fakt, że umożliwia ono uzyskanie maksimum dziesięciu schodków o różnych amplitudach co z kolei ogranicza maksymalną liczbę schodków przypadających na jeden okres aproksymowanego przebiegu sinusoidalnego do czterdziestu. Analizując potrzeby jest to wada nieistotna.

Podstawowymi elementami układu programującego /rys. 12/ są: dwukierunkowy scalony licznik binarny typu 74191 oraz

wpisywanie stanu początk.

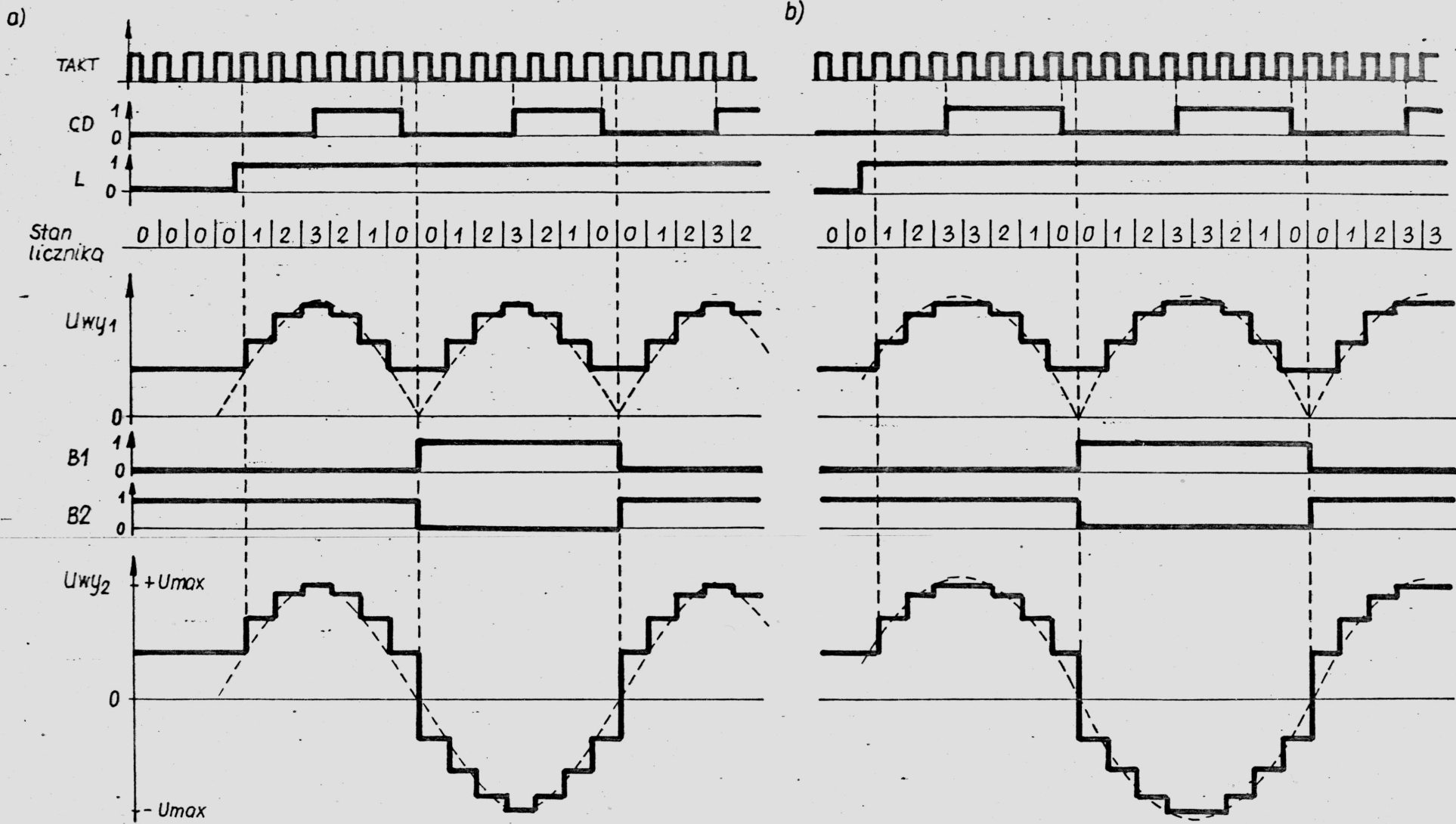


Rys.12. Układ programujący generatora z rys.11.

klucz K - zwarty dla parzystych N  
 przelącznik p - w poz.  $\begin{cases} \frac{N+1}{2} & \text{dla nieparzystych N} \\ \frac{N}{2} & \text{dla parzystych N} \end{cases}$

dekoder dziesiętny BCD typu 7442. Praca układu jest oparta na zliczaniu przez licznik zewnętrznych impulsów taktujących. Poszczególne stany licznika są dekodowane przez układ dekodera dziesiętnego, który jest bezpośrednio połączony z wejściami cyfrowymi źródła prądowego i steruje jego pracą. Zliczanie impulsów taktujących odbywa się dwukierunkowo a kierunek zliczania jest ustalony stanem wejścia CD. Poprzez wykorzystanie wejścia sterującego L licznik może rozpoczynać zliczanie od pewnego stanu początkowego określonego poprzez sygnały na wejściach A, B, C i D. Układ programujący posiada dwa różne algorytmy pracy zależne od tego czy przypadająca na jeden półokres sygnału wyjściowego liczba schodków N jest liczbą parzystą czy też nieparzystą. Zmianę algorytmu pracy układu programującego uzyskuje się za pomocą klucza K /rys.12/

Pracę układu wyjaśniają diagramy czasowe /rys. 13/ przedstawione dla przykładowych N /parzystego i nieparzystego/. Dla N nieparzystego licznik liczy w górę od stanu "0" do  $\frac{N-1}{2}$  po czym za pośrednictwem wejścia CD następuje zmiana kierunku zliczania i licznik liczy w dół do stanu "0". W stanie tym licznik zostaje zatrzymany /za pośrednictwem wejścia bramkującego G/ na czas trwania dwóch kolejnych okresów sygnału taktującego. W międzyczasie sygnał CD zmienia kierunek zliczania na przeciwny i po upływie tych dwóch okresów sygnału taktującego licznik liczy znów w górę do  $\frac{N-1}{2}$  potem licznik liczy znów w dół aż do stanu "0" i tak algorytm pracy powtarza się. Dla N parzystego algorytm pracy licznika ulega zmianie gdyż licznik liczy w górę od stanu "0" do



Rys. 13. Przebiegi czasowe dla układów z rys. 11 i 12  
 a) dla przypadku  $N=7$   
 b) dla przypadku  $N=8$

$\frac{N-2}{2}$  i w tym stanie licznik zostaje zatrzymany na czas trwania dwóch okresów sygnału taktującego. Po tym czasie licznik zaczyna liczyć w dół i układ programujący aż do momentu ponownego osiągnięcia stanu  $\frac{N-2}{2}$  pracuje według tego samego algorytmu co dla  $N$  nieparzystego. Różnica pomiędzy algorytmami dla  $N$  nieparzystego a  $N$  parzystego polega więc na tym, że w pierwszym przypadku najwyższy stan licznika wynosi  $\frac{N-1}{2}$  i licznik pozostaje w tym stanie przez jeden okres sygnału taktującego, natomiast w drugim przypadku najwyższy stan licznika wynosi  $\frac{N-2}{2}$  i licznik pozostaje w tym stanie przez czas trwania dwóch okresów sygnału taktującego. W obydwu przypadkach licznik tak samo zostaje zatrzymany w stanie "0" przez czas trwania dwóch okresów sygnału taktującego. Pośrodku każdego odcinka czasowego, w którym licznik znajduje się w stanie "0" następuje zmiana stanów sygnałów  $B_1$  i  $B_2$  na przeciwne i tym samym za pośrednictwem kluczy  $T_1$  i  $T_2$  oraz wzmacniaczy operacyjnych  $W_2$  i  $W_3$  co druga połówka sygnału  $U_{wy1}$  zmienia polaryzację na przeciwną. W rezultacie na wyjściu wzmacniacza  $W_3$  otrzymujemy składający się z dodatnich i ujemnych amplitud przebieg  $U_{wy2}$  będący aproksymatą przebiegu sinusoidalnego.

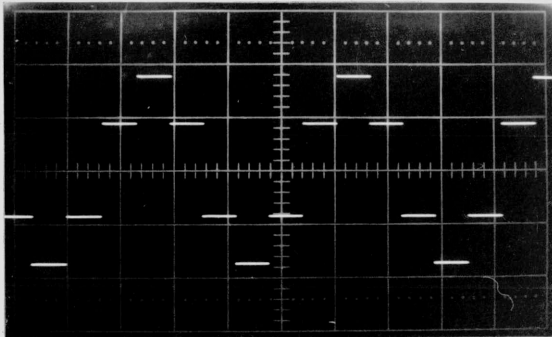
## 5.2. Parametry generowanego sygnału

Opisany wyżej układ generatora cyfrowego pozwala na generowanie przebiegów schodkowych aproksymujących przebieg sinusoidalny przy czym liczba elementów aproksymujących przy-

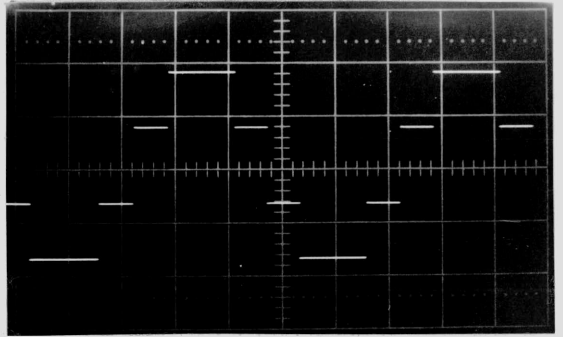
padających na jeden okres przebiegu aproksymowanego może być zmieniana w granicach od 6 do 40. Generowany przebieg  $/U_{wy2}$  - rys.13/ spełnia założenia przedstawione w rozdziale 4.1 w pkt. a, b, c i d. Zakres uzyskiwanych amplitud zarówno dodatnich jak i ujemnych może być regulowany w granicach od 0 do ok. 6 V. Krótko i długoterminowe zmiany amplitud napięcia wyjściowego dla poszczególnych schodków sprawdzano woltomierzem typu V529 o dokładności  $\pm (0,01\% + \text{błąd dyskretyzacji})$  i we wszystkich przypadkach zmiany te były mniejsze od 0,2% /max. 0,16%/. Natomiast stosunki amplitud poszczególnych schodków do amplitud innych schodków były utrzymywane z dokładnością lepszą niż 0,1%. Nachylenie zboczy, zarówno rosnących jak i malejących, łączących dwa kolejne schodki sprawdzano za pomocą oscyloskopu typu DT-525 /prod. Radiotechnika/ w zakresie częstotliwości taktującej od ok. 8 kHz do 1 MHz. W tym zakresie częstotliwości nachylenie to jest stałe i wynosi ok.  $3 \cdot 10^5$  V/s.

Przykłady generowanych przebiegów aproksymujących sinusoidę pokazano na rysunku 14, na którym przedstawiono fotografie obrazów uzyskanych na ekranie oscyloskopu. Przypadki a, b i c przedstawiają aproksymację sinusoidy sygnałem schodkowym składającym się z 6, 8 i 30 schodków na okres a na rysunkach d, e i f pokazano fragmenty przebiegu z rysunku 14c przedstawiające: przejście przez zero, zbocze rosnące i zbocze malejące.

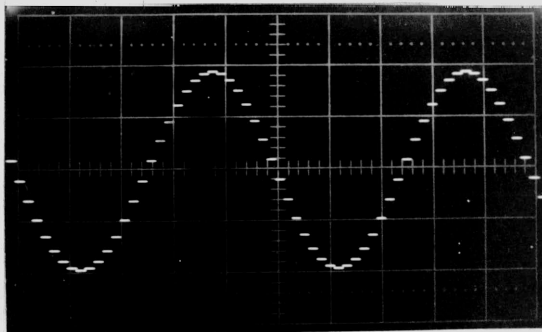
a/



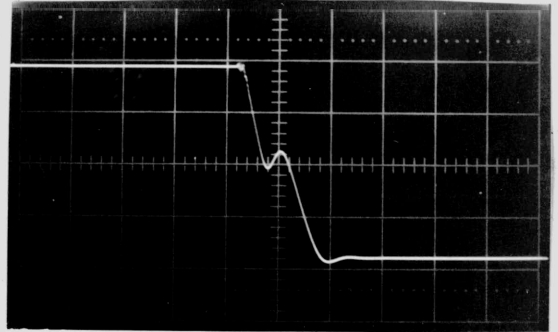
b/



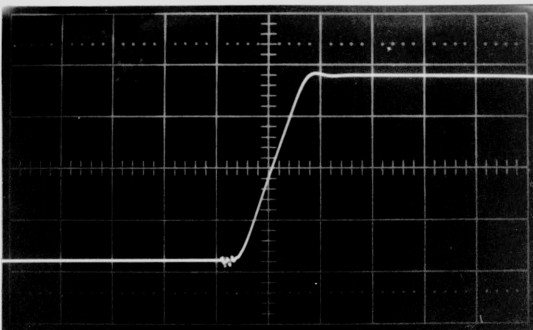
c/



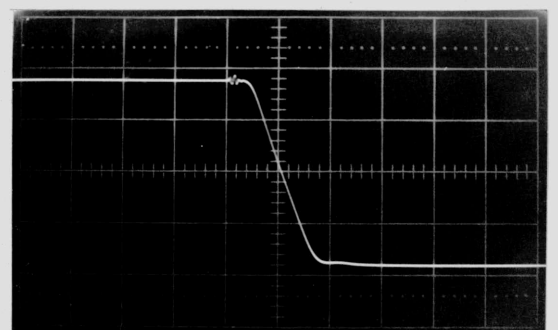
d/



e/



f/



Rys.14. Przykładowe przebiegi schodkowe aproksymujące sinusoidę

- a - przypadek dla  $N=3$
- b - przypadek dla  $N=4$
- c - przypadek dla  $N=15$
- d - fragment przebiegu z rys.14c - przejście przez zero
- e - fragment przebiegu z rys.14c - zbocze rosnące
- f - fragment przebiegu z rys.14c - zbocze opadające

### 5.3. Pomiary sygnałów schodkowych aproksymujących sygnał sinusoidalny

Przed przeprowadzaniem eksperymentem doświadczalnym postawiono następujące cele:

1. sprawdzenie, w rzeczywistym układzie generatora, słuszności otrzymanych w rozdziale 4 rozwiązań teoretycznych a w szczególności:
  - a/ sprawdzenie czy relacje zachodzące pomiędzy harmonicznymi o amplitudach różnych od zera są zgodne z zależnością /53/,
  - b/ sprawdzenie czy aproksymacja sinusoidy przebiegiem schodkowym, według metody określonej zależnością /59/, pozwala uzyskać sygnał wyjściowy, w którym harmoniczne o numerach różnych od 1 oraz różnych od  $m \cdot 2N \pm 1$  mają amplitudy zerowe,
2. sprawdzenie czy opracowana w rozdziale 4 metoda aproksymacji daje lepsze rezultaty w eliminacji harmonicznymi niż metody znane i stosowane do tej pory /rozdział 2.5/,
3. ocenę przydatności opracowanej metody do zastosowań praktycznych poprzez zbadanie wpływu niektórych parametrów sygnału schodkowego na skuteczność eliminacji harmonicznymi z widma sygnału schodkowego aproksymującego sygnał sinusoidalny.

Realizacja przedstawionych wyżej celów wymagała przede wszystkim przeprowadzenia pomiarów amplitud poszczególnych harmonicznymi tworzących widmo generowanego sygnału. Pomiary



te wykonano za pomocą analizatora harmonicznycy produkcji "Radiometra" - Wave analyzer type FRA 3. Podstawowe parametry analizatora:

- szerokość pasma  $\pm 3$  Hz
- dokładność określenia częstotliwości  $\pm 2$  Hz
- dokładność pomiaru napięcia  $\pm 0,5$  %
- zakres mierzonych częstotliwości od 20 Hz do 66 kHz

Analizator wykorzystywano na zakresie 3V co pozwalało na pomiar amplitud poszczególnych harmonicznycy na siedmiu podzakresach napięciowych. Najwyższy z nich wynosił 3V a najniższy 3 mV. Wykorzystanie najniższego podzakresu pozwalało na uzyskanie stałej miernika wynoszącej 0,1 mV/dz. Przy przyjęciu rozróżnialności 0,5 dz. analizator ten pozwalał więc na wykrycie harmonicznycy o amplitudach rzędu 0,05 mV a więc niższych od amplitudy pierwszej harmonicznej ok. 60000 razy /95,6 dB/.

5.3.1. Sprawdzenie rozwiązań teoretycznych otrzymanych w rozdziale 4 - realizacja celu przedstawionego w pkt. 1 na str. 79

W celu sprawdzenia otrzymanych w rozdziale 4 rozwiązań teoretycznych przeprowadzono pomiary widma sygnałów schodkowych aproksymujących przebieg sinusoidalny metodą określoną zależnością /50/. Pomiarom poddano trzy różne przykładowe sygnały schodkowe /rys. 14 a, b i c/ składające się z 6, 8 i 30 ele-

mentów przypadających na jeden okres aproksymowanego sygnału sinusoidalnego. Pomiar przeprowadzono w paśmie częstotliwości odpowiadającym ponad stu pierwszym harmonicznym mierzonego sygnału. Wyniki badań dla wszystkich trzech przypadków przedstawiono w tabelach 1, 2 i 3, gdzie:

- $k$  - oznacza numer kolejny poszczególnych harmonicznym
- $A_1$  - wartość amplitudy składowej o częstotliwości podstawowej
- $A_k$  - wartość amplitudy  $k$ -tej harmonicznej uzyskaną w wyniku pomiaru
- $A_{kt}$  - wartość amplitudy  $k$ -tej harmonicznej wyznaczoną z obliczeń teoretycznych - zależność /53/
- $\delta_k$  - względny błąd określający różnice jakie występują pomiędzy teoretycznymi i rzeczywistymi wartościami amplitud poszczególnych harmonicznym

$$\delta_k = \frac{A_k - A_{kt}}{A_{kt}} \cdot 100 \%$$

Przedstawione w tych tabelach rzeczywiste /kolumna 3/ i teoretyczne /kolumna 4/ wartości amplitud  $k$ -tych harmonicznym odniesione do wartości amplitudy pierwszej harmonicznej pozwalają na porównanie widma rzeczywistego sygnału schodkowego z wynikami rozważań teoretycznych przeprowadzonych w rozdziale 4. Przed analizą otrzymanych wyników postawiono dwa zasadnicze cele /porównaj punkty 1a i b na str. 79/. Pierwszy z nich dotyczy sprawdzenia zależności /53/ dla harmonicznym o numerach równych 1 lub  $m \cdot 2N \pm 1$  a drugi dotyczy eliminacji harmonicznym o numerach różnych od 1 oraz różnych od  $m \cdot 2N \pm 1$ . W związku z tym

cały zbiór uzyskanych wyników pomiarowych podzielono na dwie zasadnicze grupy:

1. harmoniczne o numerach  $k = \begin{cases} 1 \\ m \cdot 2N \pm 1 \end{cases}$

2. harmoniczne o numerach  $k \neq \begin{cases} 1 \\ m \cdot 2N \pm 1 \end{cases}$

Pierwszej grupie harmonicznych, które teoretycznie powinny posiadać amplitudy różne od zera, przypisano w czwartek kolumnie tabel 1, 2 i 3 wartości teoretyczne różne od zera zgodne z zależnością /53/. Porównanie tych wartości z wynikami pomiaru zostało przeprowadzone poprzez wyznaczenie dla tej grupy harmonicznych błędu  $\delta_k$  zamieszczonego w kolumnie 6. Jak wynika z otrzymanych wartości  $\delta_k$  rozbieżności pomiędzy wynikami pomiaru i obliczeniami teoretycznymi nie przekraczają 1,1 %. Uzyskany błąd nieznacznie przekracza błąd zastosowanego miernika, można więc uznać, że wyprowadzona zależność /53/ została potwierdzona praktycznie z dokładnością około 1 %. Potwierdzona została tym samym także teza, że harmoniczne o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$  nie zostają wyeliminowane z widma sygnału schodkowego aproksymującego sygnał sinusoidalny. Jak wynika z prac C.Kokena [32] harmoniczne te są częstotliwościami interferencyjnymi powstającymi z sumy lub różnicy częstotliwości generowanego sygnału  $f_g$  i częstotliwości będących wielokrotnościami częstotliwości taktującej  $f_0$ . Częstotliwości interferencyjne  $f_{int}$  pojawiające się na wyjściu układu generatora, można opisać:

$$f_{int} = m \cdot f_0 \pm f_s = m \cdot 2N \cdot f_s \pm f_s = \sqrt{m \cdot 2N \pm 1} \cdot f_s \quad /72$$

gdzie:  $m$  - liczba naturalna.

Harmoniczne z grupy drugiej, zgodnie z wynikami prac teoretycznych, powinny posiadać amplitudy zerowe, co zostało uwidocznione w czwartej kolumnie tabel 1, 2 i 3. Analizując dla tej grupy harmoniczných wartości ich amplitud uzyskane w wyniku pomiaru /kolumna 3 tab. 1,2i3/ można stwierdzić, że:

- tylko w niektórych przypadkach amplitudy tych harmoniczných zmierzono jako zerowe /przy określonej czułości miernika/,
- w większości przypadków amplitudy harmoniczných należących do tej grupy osiągają wartości różne od zera.

Zatem wyniki pomiarów, ściśle rzecz biorąc, nie potwierdziły wniosków teoretycznych dotyczących eliminacji określonych harmoniczných. Należy jednak tutaj zauważyć, że nigdy nie będzie można na drodze pomiarowej określić amplitud danych harmoniczných jako bezwzględnie zerowe, gdyż zawsze wystąpi próg w postaci czułości zastosowanego przyrządu pomiarowego, który pozwoli jedynie na stwierdzenie, że amplitudy danych harmoniczných nie przekraczają określonego poziomu. Można spojrzeć na zagadnienie eliminacji harmoniczných z praktycznego punktu widzenia tzn. oceniając poziom zakłóceń wprowadzanych przez sygnał harmoniczny. Jako miarę można tutaj przyjąć stosunek wartości amplitudy danej harmonicznej do wartości amplitudy sygnału o częstotliwości podstawowej. W przeprowadzanych pomiarach wartość tego stosunku podana w liczbach niemianowanych /kolumna 3 tab. 1,2i3/ wynosi w najgorszym stwier-

dzonym przypadku  $1,5 \cdot 10^{-4}$  i maleje do  $1,7 \cdot 10^{-5}$  co stanowiło granicę mierzalności w omawianym doświadczeniu. Wartości te odpowiadają w mierze decybelowej tłumieniom  $-76,5$  dB oraz  $-95,6$  dB. Wartości tłumienia k-tej harmonicznej względem pierwszej harmonicznej podano w kolumnie 5 tabel 1, 2 i 3 dla wszystkich tych harmonicznych, które powinny posiadać amplitudy zerowe a wyniki pomiarów wykazały, że tak nie jest. Z przedstawionych w kolumnie 5 wartości wynika, że dla wielu praktycznych przypadków są to tłumienia wystarczające a więc możemy mówić o praktycznym wyeliminowaniu harmonicznych z widma sygnału schodkowego generowanego wg metody przedstawionej zależnością /50/. Resztkowe wartości amplitud są najprawdopodobniej skutkiem tego, że generowany sygnał schodkowy wykazuje pewne odstępstwa od sygnału idealnego przedstawionego w rozdziale 4, a także mogą one być wynikiem nieliniowości układu analogowego współpracującego z przetwornikiem C/A.

#### 5.3.2. Porównanie metody opracowanej w rozdziale 4 z innymi znanymi metodami

W celu porównania opracowanej w rozdziale 4 metody aproksymacji sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym z innymi znanymi i stosowanymi metodami przeprowadzono pomiary widmowe trzech różnych przebiegów schodkowych aproksymujących sygnał sinusoidalny wg trzech różnych metod. Do pomiarów wybrano sygnały schodkowe składające się z 6 elementów przypadających

na jeden okres generowanego sygnału, które reprezentowały trzy n/w metody aproksymacji:

- metodę obwiedniową "above" przedstawioną w rozdziale 2.5 na rys. 5a /str. 31/,
- metodę średniej arytmetycznej przedstawioną w rozdziale 2.5 na rys. 5d,
- metodę opracowaną w rozdziale 4.

W badaniach pominięto metody omówione w rozdz. 2.5 i przedstawione na rys. 5b i 5c. Takie postępowanie było celowe i wynikało z następujących przesłanek:

- z obliczeń teoretycznych wynika, że widmo sygnałów otrzymanych metodą z rys. 5b jest w dużym stopniu zbliżone do widma sygnałów otrzymanych metodą z rys. 5a, tzn. obydwie metody dają widmo, w którym występują wszystkie harmoniczne o numerach nieparzystych a różnice jakie między nimi występują polegają jedynie na nieznacznych różnicach amplitudowych poszczególnych harmonicznych,
- przebieg uzyskiwany metodą z rys. 5c może być opisany jedynie funkcją innego rodzaju niż sinusoida, gdyż nie jest ani funkcją nieparzystą ani też nie posiada symetrii III rodzaju, które to właściwości charakteryzują funkcję sinus /porównaj rozdział 4.1/. Z rozważań teoretycznych uwzględniających wymienione wyżej fakty wynika, że przebiegi uzyskiwane tą metodą posiadają widmo składające się z pełnej liczby harmonicznych, zarówno parzystych jak i nieparzystych, a więc z punktu widzenia kryterium widmowego jest to najgorszy

rodzaj aproksymacji ze wszystkich przedstawionych w rozdziale 2.5.

Pomiary amplitud poszczególnych harmoniczných tworzących widma badanych przebiegów schodkowych zostały przeprowadzone w paśmie częstotliwości odpowiadającym ponad 100 pierwszym harmoniczným a wyniki tych pomiarów zostały przedstawione w tabeli 4 w kolumnach 2, 3 i 4. W tej samej tabeli w kolumnach 5, 6 i 7 przedstawiono też dla porównania wartości amplitud badanych harmoniczných wyznaczone, dla poszczególných metod aproksymacji, na podstawie obliczeń teoretycznych przy przyjęciu, że wartość pierwszej harmonicznej wynosi  $A_1 = 3 \text{ V}$ . W tabeli 4 przyjęto następujące oznaczenia:

$k$  - numer harmonicznej

$A_{ki}$  - wartości amplitud wyznaczone w pomiarze

$A_{kti}$  - wartości amplitud wyznaczone teoretycznie

$i$  - indeks oznaczający metodę aproksymacji

$i=1$  - metoda obwiedniowa /rys. 5a/

$i=2$  - metoda średniej arytmetycznej /rys. 5d/

$i=3$  - metoda opracowana w rozdziale 4 niniejszej pracy

Jak widać z przedstawionych wyników harmoniczne o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N + 1$  mają i teoretycznie, i praktycznie amplitudy niezależne od zastosowanej metody aproksymacji. Wyniki te potwierdzają więc raz jeszcze uzyskane poprzednio wnioski dotyczące niemożliwości wyeliminowania tych harmoniczných z widma sygnału schodkowego aproksymującego sinusoidę. Oznaczają też, że zastosowana metoda aproksymacji nie wpływa na



wartość amplitud tych harmoniczných i w związku z tym przy ocenie metod aproksymacji pod kątem zawartości harmoniczných w widmie generowanego sygnału należy brać pod uwagę przede wszystkim harmoniczne o numerach różných od 1 oraz różných od  $m \cdot 2N \pm 1$ .

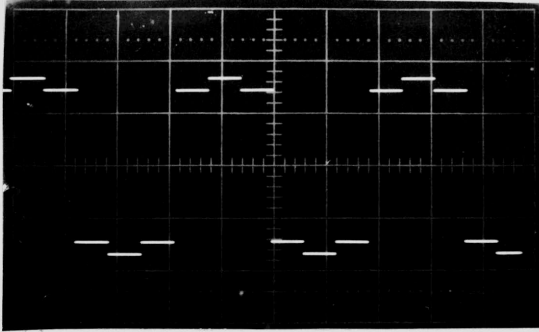
Analizując wartości harmoniczných o numerach różných od 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$  widać, zarówno z wyników empirycznych i teoretycznych, że najlepszą z trzech porównywanych metod jest metoda 3 tzn. metoda opracowana w niniejszej pracy.

Porównanie trzech analizowanych metod zostało też przeprowadzone poprzez zastosowanie filtru dolnoprzepustowego do filtracji omawianých sygnałów schodkowych. Otrzymane w trzech w/w metodach aproksymacji sygnały schodkowe o częstotliwości 70 Hz zostały poddane filtrowaniu w filtrach dolnoprzepustowych o częstotliwościach granicznych 500, 355, 250, 180 i 90 Hz co umożliwiło kolejne eliminowanie harmoniczných wchodzących w skład widma sygnału schodkowego. Do filtracji użyto filtrów fabrycznych produkcji RFT typ KF-102/11021 o nachyleniu charakterystyki ok. -20 dB/oktawę. Efekty ograniczania pasma generowanych przebiegów schodkowych zostały przedstawione na rysunku 15, na którym poszczególne fotografie zostały ułożone wg następujących zasad:

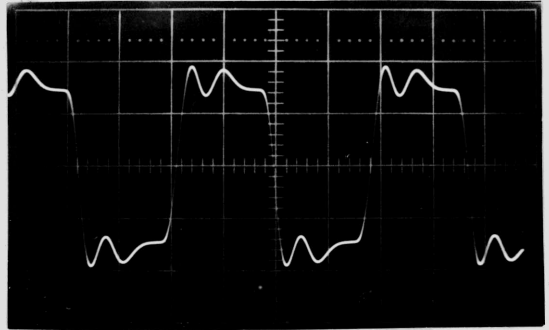
- każdy wiersz odpowiada jednej metodzie aproksymacji /oznaczenia metod indeksami 1, 2 i 3 tak samo jak w tab. 4/.
- każda kolumna zawiera 3 różne przebiegi filtrowane przez ten sam filtr dolnoprzepustowy.



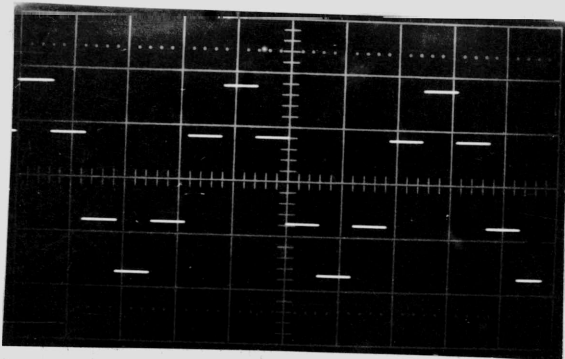
1a/



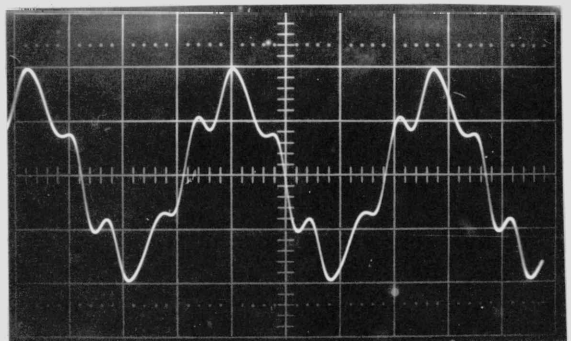
1b/  $h = 24,8\%$



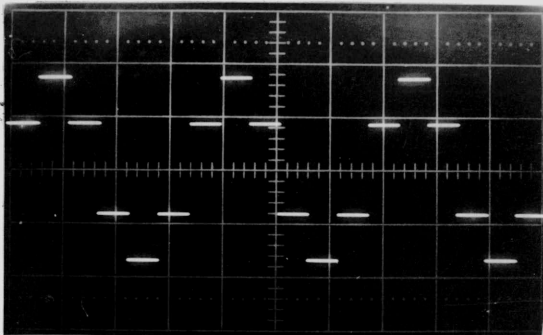
2a/



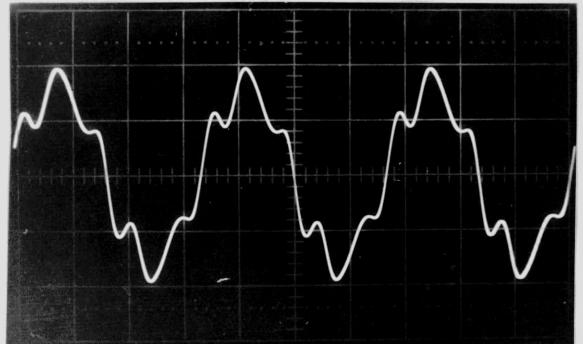
2b/  $h = 14,0\%$



3a/



3b/  $h = 13,8\%$



Rys.15. Przebiegi schodkowe aproksymujące sinusoidę  $N=3$ ,  $f_s=70\text{Hz}$

rys.1a - 1f metoda aproksymacji z rys. 5a

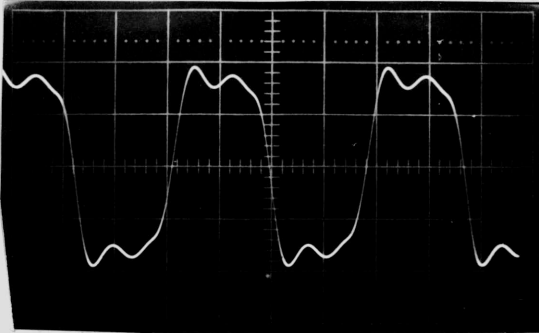
rys.2a - 2f metoda aproksymacji z rys. 5d

rys.3a - 3f metoda aproksymacji z rozdz. 4

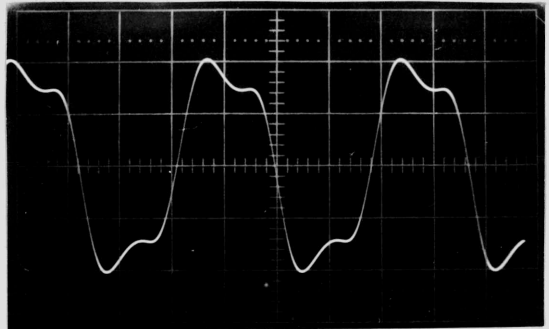
rys.a - przebiegi schodkowe niefiltrowane

rys.b - przebiegi z rys. 15a po przejściu przez filtr dolnoprzepustowy /FDP/ o  $f_{gr} = 500\text{ Hz}$

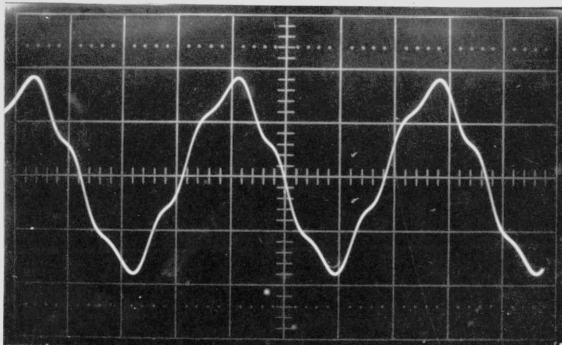
1c/  $h = 22,0\%$



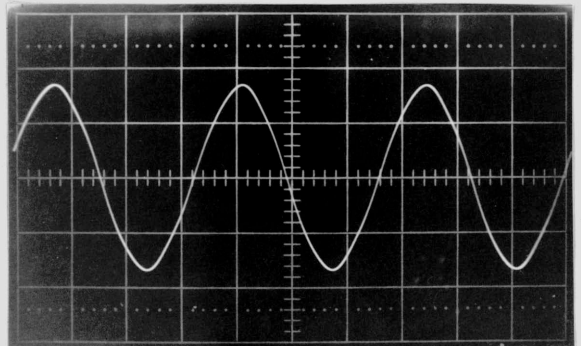
1d/  $h = 19,5\%$



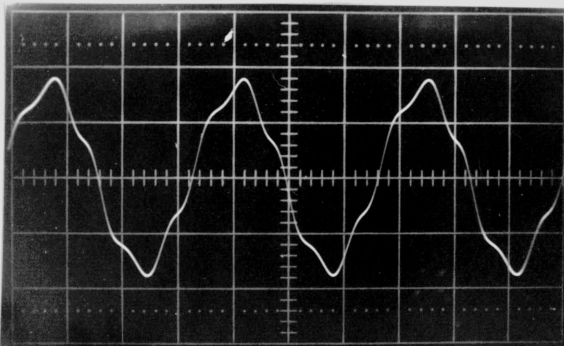
2c/  $h = 7,25\%$



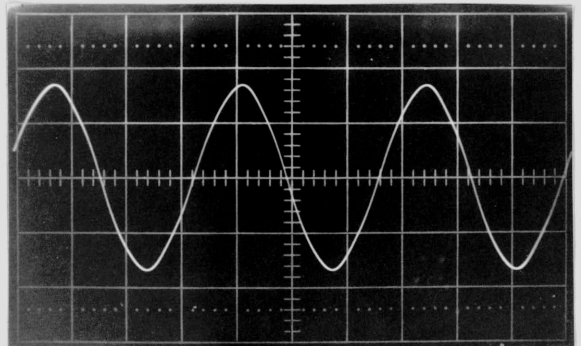
2d/  $h = 2,85\%$



3c/  $h = 6,6\%$



3d/  $h = 1,07\%$

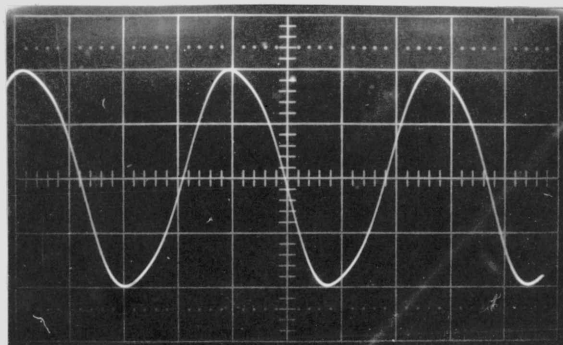


Rys.15 cd.

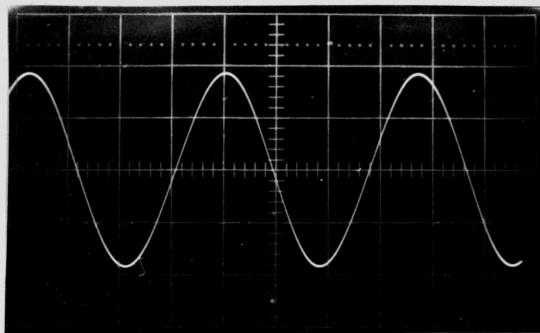
rys.c - przebiegi z rys. 15a po przejściu przez filtr dolnoprzepustowy o  $f_{gr} = 355$  Hz

rys.d - przebiegi z rys. 15a po przejściu przez filtr dolnoprzepustowy o  $f_{gr} = 250$  Hz

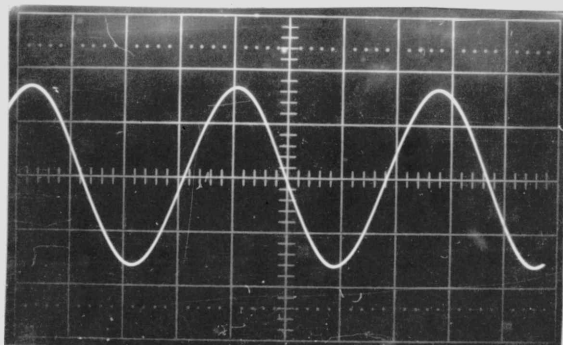
1e/  $h = 4,3\%$



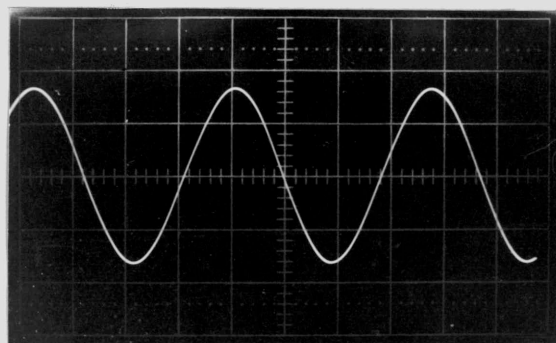
1f/  $h = 0,16\%$



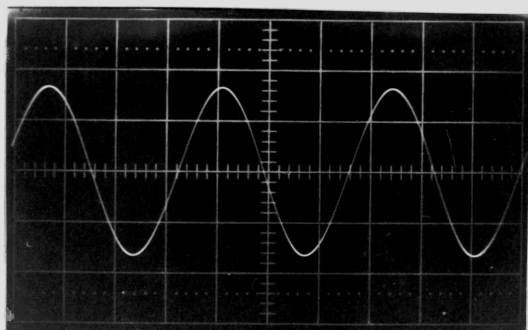
2e/  $h = 0,62\%$



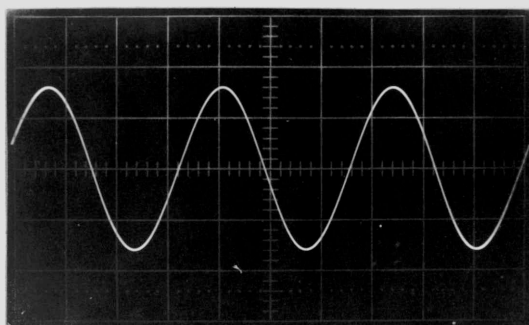
2f/  $h = 0,04\%$



3e/  $h = 0,23\%$



3f/  $h = 0,02\%$



Rys.15 cd.

rys.e - przebiegi z rys.15a po przejściu przez filtr dolnoprzepustowy o  $f_{gr} = 180$  Hz

rys.f - przebiegi z rys.15a po przejściu przez filtr dolnoprzepustowy o  $f_{gr} = 90$  Hz

Przy poszczególnych fotografiach przedstawiono też wyniki pomiaru w odfiltrowanym przebiegu współczynnika zawartości harmonicznych -  $h$  zmierzonego przy pomocy miernika zniekształceń typu ZOPAN - PMZ - 8A. Taki układ rysunku 15 umożliwia łatwe porównanie metod aproksymacji dla poszczególnych przypadków ograniczenia pasma przebiegu schodkowego za pomocą filtra dolnoprzepustowego o określonej częstotliwości granicznej. Jak widać z wyników pomiaru współczynnika  $h$ , w przypadku zastosowania tego samego filtra dla trzech różnych metod, najmniejszymi zniekształceniami w ograniczonym paśmie częstotliwości charakteryzuje się metoda opracowana w niniejszej pracy. Wniosek ten jest zresztą zgodny z wynikami rozważań teoretycznych.

### 5.3.3. Wpływ parametrów sygnału schodkowego na skuteczność eliminacji harmonicznych

Opracowana teoretycznie w rozdziale 4 metoda aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym powinna zapewnić wyeliminowanie z widma sygnału schodkowego częstotliwości harmonicznych o numerach różnych od 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$ . Eksperymenty doświadczalne przeprowadzone z rzeczywistym układem generatora, choć potwierdziły przydatność praktyczną opracowanej metody, wykazały jednak, że niektóre z tych harmonicznych nie zostały całkowicie wyeliminowane lecz pozostały w szczątkowej formie, stłumione do poziomu rzędu  $(76 \div 95)$  dB poniżej amplitudy sygnału o częstotliwości podstawowej.

Ponieważ generowany sygnał schodkowy wykazywał pewne /omówione już wcześniej/ odstępstwa od założonego modelu idealnego należałoby, w celu wyjaśnienia przyczyn pozostawania szczytkowych amplitud niektórych harmonicznycch w widmie generowanego sygnału, zbadać wpływ parametrów sygnału schodkowego na skuteczność eliminacji określonych harmonicznycch. W szczególności należałoby określić wrażliwość prezentowanej metody aproksymacji na:

- a/ zmiany amplitud poszczególnych elementów przebiegu schodkowego,
- b/ wpływ czasów narostu i opadania zboczy,
- c/ wpływ stanów przejściowych,
- d/ wpływ asymetrii przebiegu schodkowego,
- e/ nierównomierność czasu trwania poszczególnych elementów przebiegu,
- f/ wpływ częstotliwości.

Tak szerokie badania były jednak niemożliwe do zrealizowania w IME ze względu na brak możliwości generowania sygnału schodkowego o modelowanych:

- czasach narostu i opadania zboczy,
- stanach przejściowych,
- asymetriach,
- nierównomiernościach czasu trwania poszczególnych schodków.

Z tych względów przeprowadzone badania objęty przede wszystkim pkt. a i f.

Badaniami wpływu zmian amplitud poszczególnych elementów przebiegu schodkowego na skuteczność eliminacji harmonicznycch objęto przebiegi schodkowe o  $N=3$  i  $N=4$ . Obydwa te przebiegi

są składane ze schodków o dwóch różnych amplitudach  $y_1$  i  $y_2$  przy czym stosunki tych amplitud  $y_1/y_2$  zgodnie z zależnością /50/ są równe:

$$\frac{y_1}{y_2} = 0,5 \quad \text{dla } N = 3$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{dla } N = 4$$

W przeprowadzonych badaniach generowano przebiegi dla których wartość  $y_1/y_2$  była celowo zmieniana o  $\pm 1\%$ ,  $\pm 2\%$ ,  $\pm 5\%$ . Dla tak zmodyfikowanych przebiegów o częstotliwości  $f_g = 70$  Hz wykonano pomiary widma w paśmie odpowiadającym stu pierwszym harmonicznym. W sumie dla obydwu przypadków / $N=3$  i  $N=4$ / przeanalizowano ponad tysiąc harmonicznym. Ze względu na dużą objętość uzyskanego materiału w pracy przytoczono tylko niektóre z uzyskanych wyników przy czym przedstawione dalej analiza i wnioski dotyczą oczywiście całego zbioru wyników.

We wszystkich zbadanych przypadkach dla  $N=3$  oraz dla  $N=4$  zmiana wartości stosunku  $y_1/y_2$  nie wpłynęła w zauważalny sposób na wartości amplitud harmonicznym o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$  /te ostatnie są to częstotliwości interferencyjne opisane zależnością /72//. Zmiana stosunku  $y_1/y_2$  wpłynęła natomiast niekorzystnie na amplitudy harmonicznym nieparzystym o numerach różnym od 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$  a więc na te harmoniczne, które były eliminowane poprzez metodę opracowaną w rozdziale 4.

Dla  $n=3$  wpływ ten uwidocznił się przede wszystkim dla harmonicznym o numerach  $k=3, 9, 15, 21, \dots$  tzn. ogólnie

dla  $k = 3 + m \cdot 6$  gdzie:  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Największym zmianom uległa amplituda trzeciej harmonicznej  $A_3$ . Dla poszczególnych odstrojeń 1%, 2% i 5% zmiany te przedstawiają się następująco:

$y_1/y_2$	0,5	$0,5^{+1\%}$	$0,5^{-1\%}$	$0,5^{+2\%}$	$0,5^{-2\%}$	$0,5^{+5\%}$	$0,5^{-5\%}$
$A_3$ [mV]	0,15	13	13	27	27	63	68
$\frac{A_3}{A_1}$	0,00005	0,0043	0,0043	0,009	0,009	0,021	0,023
$\frac{A_3}{A_1}$ [dB]	-86,0	-47,3	-47,3	-40,9	-40,9	-33,6	-32,9

Amplitudy wyższych harmonicznych z tej grupy zmieniały się w sposób podobny przy czym wielkość zaobserwowanych zmian dla poszczególnych harmonicznych była odwrotnie proporcjonalna do ich numeru porządkowego.

Dla  $N=4$  harmonicznymi, które zwiększyły swoje amplitudy były harmoniczne o numerach 3, 5, 11, 13, 19, 21,  $\dots$  tzn. dla  $k = (4 + m \cdot 8) \pm 1$  gdzie:  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Podobnie jak dla  $N=3$  największym zmianom uległa amplituda trzeciej harmonicznej  $A_3$ :

$y_1/y_2$	$\sqrt{2}-1$	$(\sqrt{2}-1)^{+1\%}$	$(\sqrt{2}-1)^{-1\%}$	$(\sqrt{2}-1)^{+2\%}$	$(\sqrt{2}-1)^{-2\%}$	$(\sqrt{2}-1)^{+5\%}$	$(\sqrt{2}-1)^{-5\%}$
$A_3$ [mV]	1,0	8,7	8,8	17	17	38	40
$\frac{A_3}{A_1}$	0,0003	0,0029	0,0029	0,0057	0,0057	0,0127	0,0133
$\frac{A_3}{A_1}$ [dB]	-69,5	-50,7	-50,6	-44,9	-44,9	-37,9	-37,5



Amplitudy wyższych harmoniczných uległy mniejszym zmianom, przy czym można było także zaobserwować, że wartości amplitud tych harmoniczných są odwrotnie proporcjonalne do ich numeru porządkowego.

Badania wpływu zmian częstotliwości generowanego sygnału na skuteczność eliminacji harmoniczných przeprowadzone przykładowo dla sygnału schodkowego o  $N=15$  wykazały, że zwiększenie częstotliwości generowanego przebiegu wpływa na zmiany amplitud wszystkich harmoniczných przy czym dla harmoniczných o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N + 1$  wpływ ten uwidacznia się w najmniejszym stopniu. Przedstawione w tabeli 5 wyniki pomiaru nie wskazują na istnienie wyraźnych i łatwych do określenia zależności amplitudy poszczególných harmoniczných od częstotliwości generowanego sygnału. Można przypuszczać, że przedstawione w tabeli 5 wyniki badań dotyczą w bardzo poważnym stopniu wpływu czasów narostu i opadania zboczy przebiegu schodkowego. Przesłanką do takiego ujęcia zagadnienia jest fakt, że zastosowany w generatorze przetwornik C/A charakteryzował się stałym niezależnym od częstotliwości nachyleniem zboczy generowanych sygnałów schodkowych. Zwiększenie częstotliwości generowanego sygnału pociągało za sobą zwiększanie częstotliwości taktującej a zatem skracanie okresu trwania pojedynczego schodka. Przy stałym nachyleniu zboczy rosnących i opadających sytuacja taka prowadzi do zmiany relacji pomiędzy czasem narostu /opadania/ a czasem, w którym amplituda schodka jest ustalona. Na przykład: przy częstotliwości sygnału  $f_g = 40$  Hz, częstotliwość sygnału taktującego  $f_0 = 1200$  Hz, okres  $T_0 = 833 \mu s$ , przy amplitudzie schodka wynoszącej 1,75 V i nachyleniu zboczy



$3 \cdot 10^5$  V/s czas narostu /opadania/ zbocza wynosił więc około  $5,83 \mu\text{s}$  tj.  $0,7\%$  czasu trwania danego schodka, natomiast dla częstotliwości sygnału  $f_s = 2$  kHz, częstotliwość  $f_o = 60$  kHz  $T_o = 16,67 \mu\text{s}$  i dla tej częstotliwości czas narostu /opadania, zbocza wynosi  $35\%$  czasu trwania schodka. Zatem zwiększanie częstotliwości prowadziło do bardzo znacznego zwiększania zniekształceń sygnału schodkowego. W tej sytuacji widać, że interpretacja zamieszczonych w tabeli 5 wyników pomiaru jest poważnie utrudniona, gdyż nie można jednoznacznie określić co jest przyczyną zmian amplitud harmonicznycch - częstotliwość czy też czasy narostu /opadania/ zboczy? Wątpliwość tą rozwiązałyby przeprowadzenie pomiarów przy stałej częstotliwości ale przy zmiennym czasie narostu zboczy schodków co jak już napisano było niemożliwe.

Reasumując przedstawione w pkt. 5.3.3 skrótowe omówienie wyników badań należy stwierdzić, że choć badania te objęły ponad tysiąc pomiarów to jednak nie dały one oczekiwanych rezultatów i można je uznać za prace przyczynkowe dające jedynie pewien pogląd na omawiane zagadnienie. Szczególnie niemożliwość przeprowadzenia badań wymienionych w pkt. b, c, d i e spowodowała, że nie można sformułować żadnych w pełni uzasadnionych wniosków na temat wpływu zniekształceń sygnału schodkowego na skuteczność eliminacji harmonicznycch. Wydaje się także, że rozwiązanie tego zagadnienia jest na tyle obszerne, że może posłużyć za temat oddzielnych badań wychodzących poza ramy niniejszej pracy doktorskiej.

Tabela 1

Wyniki pomiarów widma sygnału schodkowego aproksymującego sygnał sinusoidalny dla  $N=3 / f_s=70 \text{ Hz/}$

$k$	$A_k \text{ [mV]}$	$\frac{A_k}{A_1}$	$\frac{A_{kt}}{A_1}$	$\frac{A_k}{A_1} \text{ [dB]}$	$\delta_k \text{ [%]}$
1	2	3	4	5	6
1	3000	1	1	-	-
2	0,45	0,00015	0	-76,5	-
3	0,15	0,00005	0	-86,0	-
4	0,40	0,00013	0	-77,5	-
5	600	0,200	0,200	-	0
6	0	0	0	-	-
7	428	0,142	0,1428	-	-0,133
8	0,35	0,00012	0	-78,7	-
9	0,15	0,00005	0	-86,0	-
10	0,35	0,00012	0	-78,7	-
11	273	0,0910	0,0909	-	0,100
12	0	0	0	-	-
13	230	0,0767	0,0769	-	-0,333
14	0,32	0,00011	0	-79,4	-
15	0,15	0,00005	0	-86,0	-
16	0,30	0,00010	0	-80,0	-
17	176	0,0587	0,0588	-	-0,26
18	0	0	0	-	-
19	158	0,0526	0,0526	-	0,07
20	0,35	0,00012	0	-78,7	-
21	0,15	0,00005	0	-86,0	-
22	0,33	0,00011	0	-79,2	-
23	130	0,0433	0,0435	-	-0,33
24	0	0	0	-	-
25	120	0,04	0,04	-	0
26	0,35	0,00012	0	-78,7	-
27	0,15	0,00005	0	-86,0	-
28	0,32	0,00011	0	-79,4	-

1	2	3	4	5	6
29	103	0,0343	0,0345	-	-0,43
30	0	0	0	-	-
31	97	0,0323	0,0322	-	0,23
32	0,35	0,00012	0	-78,7	-
33	0,15	0,00005	0	-86,0	-
34	0,31	0,00010	0	-79,7	-
35	86	0,0287	0,0286	-	0,33
36	0	0	0	-	-
37	81	0,0270	0,02702	-	0,10
38	0,35	0,00012	0	-78,7	-
39	0,15	0,00005	0	-86,0	-
40	0,34	0,00011	0	-78,9	-
41	73	0,0243	0,02439	-	-0,23
42	0	0	0	-	-
43	69,8	0,02326	0,02325	-	0,04
44	0,35	0,00012	0	-78,7	-
45	0,15	0,00005	0	-86,0	-
46	0,33	0,00011	0	-79,2	-
47	64	0,0213	0,02128	-	0,27
48	0	0	0	-	-
49	61	0,0203	0,02041	-	-0,37
50	0,35	0,00012	0	-78,7	-
51	0,15	0,00005	0	-86,0	-
52	0,31	0,00010	0	-79,7	-
53	56,5	0,0188	0,01887	-	-0,18
54	0	0	0	-	-
55	54,5	0,01816	0,01818	-	-0,08
56	0,34	0,00011	0	-78,9	-
57	0,15	0,00005	0	-86,0	-
58	0,31	0,00010	0	-79,7	-
59	50,5	0,0168	0,01695	-	-0,68
60	0	0	0	-	-
61	49	0,0163	0,01639	-	-0,37
62	0,34	0,00011	0	-78,9	-
63	0,15	0,00005	0	-86,0	-
64	0,31	0,00010	0	-79,7	-

1	2	3	4	5	6
65	46	0,0153	0,01538	-	-0,33
66	0	0	0	-	-
67	44,5	0,0148	0,01492	-	-0,62
68	0,34	0,00011	0	-78,9	-
69	0,15	0,00005	0	-86,0	-
70	0,31	0,00010	0	-79,7	-
71	42	0,0140	0,01408	-	-0,60
72	0	0	0	-	-
73	41	0,01366	0,01370	-	-0,23
74	0,34	0,00011	0	-78,9	-
75	0,15	0,00005	0	-86,0	-
76	0,31	0,00010	0	-79,7	-
77	39	0,0130	0,01299	-	0,10
78	0	0	0	-	-
79	37,8	0,0126	0,01266	-	-0,46
80	0,34	0,00011	0	-78,9	-
81	0,15	0,00005	0	-86,0	-
82	0,31	0,00010	0	-79,7	-
83	35,8	0,0119	0,01205	-	-0,95
84	0	0	0	-	-
85	35	0,0117	0,01176	-	-0,83
86	0,33	0,00011	0	-79,2	-
87	0,15	0,00005	0	-86,0	-
88	0,30	0,00010	0	-80,0	-
89	33,5	0,0112	0,01124	-	-0,62
90	0	0	0	-	-
91	32,6	0,0109	0,01099	-	-1,1
92	0,33	0,00011	0	-79,2	-
93	0,15	0,00005	0	-86,0	-
94	0,30	0,00010	0	-80,0	-
95	31,5	0,0105	0,01053	-	-0,25
96	0	0	0	-	-
97	30,6	0,0102	0,01031	-	-1,1
98	0,33	0,00011	0	-79,2	-
99	0,15	0,00005	0	-86,0	-
100	0,30	0,00010	0	-80,0	-
101	29,5	0,0098	0,0099	-	-0,68

Tabela 2

Wyniki pomiarów widma sygnału schodkowego aproksymującego sygnał sinusoidalny dla  $N=4 / f_s=70\text{Hz}/$

k	$A_k$ [ $\mu\text{V}$ ]	$\frac{A_k}{A_1}$	$\frac{A_{kt}}{A_1}$	$\frac{A_k}{A_1}$ [dB]	$S_k$ [%]
1	2	3	4 5	5	6
1	3000	1	1	-	-
2	0,45	0,00015	0	-76,5	-
3	1,0	0,00033	0	-69,5	-
4	0	0	0	-	-
5	1,0	0,00033	0	-69,5	-
6	0,35	0,00012	0	-78,7	-
7	429	0,143	0,1428	-	0,10
8	0	0	0	-	-
9	335	0,112	0,1111	-	0,50
10	0,35	0,00012	0	-78,7	-
11	1,0	0,00033	0	-69,5	-
12	0	0	0	-	-
13	1,0	0,00033	0	-69,5	-
14	0,33	0,00011	0	-79,2	-
15	200	0,0666	0,06666	-	0,0
16	0	0	0	-	-
17	176	0,0587	0,05882	-	-0,27
18	0,35	0,00012	0	-78,7	-
19	1,0	0,00033	0	-69,5	-
20	0	0	0	-	-
21	1,0	0,00033	0	-69,5	-
22	0,32	0,00011	0	-79,4	-
23	131	0,0436	0,04348	-	0,43
24	0	0	0	-	-
25	120	0,040	0,040	-	0,0
26	0,33	0,00011	0	-79,2	-
27	1,0	0,00033	0	-69,5	-
28	0	0	0	-	-
29	1,0	0,00033	0	-69,5	-

1	2	3	4	5	6
30	0,31	0,00010	0	-79,7	-
31	96,5	0,0322	0,03226	-	-0,28
32	0	0	0	-	-
33	90,5	0,0302	0,03030	-	-0,45
34	0,33	0,00011	0	-79,2	-
35	1,0	0,00033	0	-69,5	-
36	0	0	0	-	-
37	1,0	0,00033	0	-69,5	-
38	0,31	0,00010	0	-79,7	-
39	76,5	0,0255	0,02564	-	-0,55
40	0	0	0	-	-
41	73,0	0,0243	0,02439	-	-0,23
42	0,32	0,00011	0	-79,4	-
43	1,0	0,00033	0	-69,5	-
44	0	0	0	-	-
45	1,0	0,00033	0	-69,5	-
46	0,30	0,00010	0	-80,0	-
47	63,5	0,0212	0,02127	-	-0,52
48	0	0	0	-	-
49	60,5	0,0202	0,02041	-	-1,1
50	0,32	0,00011	0	-79,4	-
51	1,0	0,00033	0	-69,5	-
52	0	0	0	-	-
53	1,0	0,00033	0	-69,5	-
54	0,30	0,00010	0	-80,0	-
55	54,0	0,0180	0,01818	-	-1,0
56	0	0	0	-	-
57	52,5	0,0175	0,01754	-	-0,25
58	0,32	0,00011	0	-79,4	-
59	1,0	0,00033	0	-69,5	-
60	0	0	0	-	-
61	1,0	0,00033	0	-69,5	-
62	0,30	0,00010	0	-80,0	-
63	47,5	0,0158	0,01587	-	-0,25
64	0	0	0	-	-
65	46,0	0,0153	0,01538	-	-0,33

1	2	3	4	5	6
66	0,33	0,00011	0	-79,2	-
67	1,0	0,00033	0	-69,5	-
68	0	0	0	-	-
69	1,0	0,00033	0	-69,5	-
70	0,31	0,00010	0	-79,7	-
71	42,0	0,0140	0,01408	-	-0,60
72	0	0	0	-	-
73	40,8	0,0136	0,01370	-	-0,72
74	0,32	0,00011	0	-79,4	-
75	1,0	0,00033	0	-69,5	-
76	0	0	0	-	-
77	1,0	0,00033	0	-69,5	-
78	0,30	0,00010	0	-80,0	-
79	37,8	0,0126	0,01266	-	-0,46
80	0	0	0	-	-
81	36,8	0,0123	0,01235	-	-0,64
82	0,32	0,00011	0	-79,4	-
83	1,0	0,00033	0	-69,5	-
84	0	0	0	-	-
85	1,0	0,00033	0	-69,5	-
86	0,30	0,00010	0	-80,0	-
87	34,2	0,0114	0,01149	-	-0,82
88	0	0	0	-	-
89	33,5	0,0112	0,01124	-	-0,62
90	0,32	0,00011	0	-79,4	-
91	1,0	0,00033	0	-69,5	-
92	0	0	0	-	-
93	1,0	0,00033	0	-69,5	-
94	0,30	0,00010	0	-80,0	-
95	31,5	0,0105	0,01053	-	-0,25
96	0	0	0	-	-
97	30,7	0,0102	0,01031	-	-0,74
98	0,32	0,00011	0	-79,4	-
99	1,0	0,00033	0	-69,5	-
100	0	0	0	-	-
101	1,0	0,00033	0	-69,5	-

Tabela 3

Wyniki pomiarów widma sygnału schodkowego aproksymującego sygnał sinusoidalny dla  $N=15 / f_s=70\text{Hz}/$

k	$A_k$ [mV]	$\frac{A_k}{A_1}$	$\frac{A_{kt}}{A_1}$	$\frac{A_k}{A_1}$ [dB]	$\delta_k$ [%]
1	2	3	4	5	6
1	3000	1	1	-	-
2	0,30	0,00010	0	-80,0	-
3	0,15	0,00005	0	-86,0	-
4	0,10	0,00003	0	-89,5	-
5	0,15	0,00005	0	-86,0	-
6	0,05	0,000017	0	-95,6	-
7	0,15	0,00005	0	-86,0	-
8	0,05	0,000017	0	-95,6	-
9	0,15	0,00005	0	-86,0	-
10	0,05	0,000017	0	-95,6	-
11	0,15	0,00005	0	-86,0	-
12	0,05	0,000017	0	-95,6	-
13	0,15	0,00005	0	-86,0	-
14	0,05	0,000017	0	-95,6	-
15	0,15	0,00005	0	-86,0	-
16	0,05	0,000017	0	-95,6	-
17	0,15	0,00005	0	-86,0	-
18	0,05	0,000017	0	-95,6	-
19	0,15	0,00005	0	-86,0	-
20	0,05	0,000017	0	-95,6	-
21	0,15	0,00005	0	-86,0	-
22	0,05	0,000017	0	-95,6	-
23	0,15	0,00005	0	-86,0	-
24	0,05	0,000017	0	-95,6	-
25	0,15	0,00005	0	-86,0	-
26	0,05	0,000017	0	-95,6	-
27	0,15	0,00005	0	-86,0	-
28	0,05	0,000017	0	-95,6	-
29	103	0,0343	0,03448	-	-0,43
30	0	0	0	-	-
31	96	0,0320	0,03226	-	-0,80



1	2	3	4	5	6
32	0,05	0,000017	0	-95,6	-
33	0,15	0,00005	0	-86,0	-
34	0,05	0,000017	0	-95,6	-
35	0,15	0,00005	0	-86,0	-
36	0,05	0,000017	0	-95,6	-
37	0,15	0,00005	0	-86,0	-
38	0,05	0,000017	0	-95,6	-
39	0,15	0,00005	0	-86,0	-
40	0,05	0,000017	0	-95,6	-
41	0,15	0,00005	0	-86,0	-
42	0,05	0,000017	0	-95,6	-
43	0,15	0,00005	0	-86,0	-
44	0,05	0,000017	0	-95,6	-
45	0,15	0,00005	0	-86,0	-
46	0,05	0,000017	0	-95,6	-
47	0,15	0,00005	0	-86,0	-
48	0,05	0,000017	0	-95,6	-
49	0,15	0,00005	0	-86,0	-
50	0,05	0,000017	0	-95,6	-
51	0,15	0,00005	0	-86,0	-
52	0,05	0,000017	0	-95,6	-
53	0,15	0,00005	0	-86,0	-
54	0,05	0,000017	0	-95,6	-
55	0,15	0,00005	0	-86,0	-
56	0,05	0,000017	0	-95,6	-
57	0,15	0,00005	0	-86,0	-
58	0,05	0,000017	0	-95,6	-
59	50,5	0,0168	0,01695	-	-0,68
60	0	0	0	-	-
61	49,5	0,0165	0,01639	-	0,65
62	0,05	0,000017	0	-95,6	-
63	0,15	0,00005	0	-86,0	-
64	0,05	0,000017	0	-95,6	-
65	0,15	0,00005	0	-86,0	-
66	0,05	0,000017	0	-95,6	-
67	0,15	0,00005	0	-86,0	-

1	2	3	4	5	6
68	0,05	0,000017	0	-95,6	-
69	0,15	0,00005	0	-86,0	-
70	0,05	0,000017	0	-95,6	-
71	0,15	0,00005	0	-86,0	-
72	0,05	0,000017	0	-95,6	-
73	0,15	0,00005	0	-86,0	-
74	0,05	0,000017	0	-95,6	-
75	0,15	0,00005	0	-86,0	-
76	0,05	0,000017	0	-95,6	-
77	0,15	0,00005	0	-86,0	-
78	0,05	0,000017	0	-95,6	-
79	0,15	0,00005	0	-86,0	-
80	0,05	0,000017	0	-95,6	-
81	0,15	0,00005	0	-86,0	-
82	0,05	0,000017	0	-95,6	-
83	0,15	0,00005	0	-86,0	-
84	0,05	0,000017	0	-95,6	-
85	0,15	0,00005	0	-86,0	-
86	0,05	0,000017	0	-95,6	-
87	0,15	0,00005	0	-86,0	-
88	0,05	0,000017	0	-95,6	-
89	33,5	0,0112	0,01124	-	-0,62
90	0	0	0	-	-
91	33,0	0,0110	0,01099	-	0,10
92	0,05	0,000017	0	-95,6	-
93	0,15	0,00005	0	-86,0	-
94	0,05	0,000017	0	-95,6	-
95	0,15	0,00005	0	-86,0	-
96	0,05	0,000017	0	-95,6	-
97	0,15	0,00005	0	-86,0	-
98	0,05	0,000017	0	-95,6	-
99	0,15	0,00005	0	-86,0	-
100	0,05	0,000017	0	-95,6	-
101	0,15	0,00005	0	-86,0	-

Tabela 4

Porównanie widm przebiegów schodkowych o  $N=3$   
dla trzech różnych metod aproksymacji prze-  
biegu sinusoidalnego  $/f_s=70\text{Hz}/$

k	Wartości otrzymane w wyni- ku pomiaru			Wartości wyznaczone teore- tycznie		
	$A_{k1}$ [mV]	$A_{k2}$ [mV]	$A_{k3}$ [mV]	$A_{k\uparrow 1}$ [mV]	$A_{k\uparrow 2}$ [mV]	$A_{k\uparrow 3}$ [mV]
1	2	3	4	5	6	7
1	3000	3000	3000	3000	3000	3000
2	1,7	0,85	0,45	0	0	0
3	780	98	0,15	785	98	0
4	1,4	0,7	0,40	0	0	0
5	600	600	600	600	600	600
6	1,5	0,18	0	0	0	0
7	430	428	428	428	428	428
8	1,55	0,65	0,35	0	0	0
9	260	32,5	0,15	261	32,7	0
10	1,45	0,60	0,35	0	0	0
11	273	273	273	273	273	273
12	1,45	0,15	0	0	0	0
13	230	230	230	231	231	231
14	1,52	0,60	0,32	0	0	0
15	155	19,6	0,15	157	19,6	0
16	1,45	0,60	0,30	0	0	0
17	175	175	176	176	176	176
18	1,5	0,15	0	0	0	0
19	157	157	158	158	158	158
20	1,55	0,60	0,35	0	0	0
21	110	13,9	0,15	112	14,0	0
22	1,45	0,60	0,33	0	0	0
23	130	130	130	130	130	130
24	1,50	0,15	0	0	0	0
25	120	120	120	120	120	120
26	1,50	0,60	0,35	0	0	0
27	87	10,7	0,15	87	10,9	0
28	1,50	0,60	0,32	0	0	0
29	103	103	103	103	103	103

1	2	3	4	5	6	7
30	1,50	0,15	0	0	0	0
31	97	97	97	96,8	96,8	96,8
32	1,50	0,60	0,35	0	0	0
33	71	8,9	0,15	71	8,9	0
34	1,50	0,60	0,31	0	0	0
35	86	86	86	85,7	85,7	85,7
36	1,50	0,15	0	0	0	0
37	81	81	81	81,1	81,1	81,1
38	1,50	0,60	0,35	0	0	0
39	60	7,5	0,15	60,4	7,5	0
40	1,50	0,60	0,34	0	0	0
41	73	73	73	73,2	73,2	73,2
42	1,50	0,15	0	0	0	0
43	69,5	69,8	69,8	69,8	69,8	69,8
44	1,50	0,60	0,35	0	0	0
45	52	6,5	0,15	52,3	6,5	0
46	1,50	0,60	0,33	0	0	0
47	64	64	64	63,8	63,8	63,8
48	1,50	0,15	0	0	0	0
49	60,5	61	61	61,2	61,2	61,2
50	1,50	0,60	0,35	0	0	0
51	45,8	5,75	0,15	46,2	5,77	0
52	1,50	0,60	0,31	0	0	0
53	56	56	56,5	56,6	56,6	56,6
54	1,50	0,15	0	0	0	0
55	54,5	54,2	54,5	54,5	54,5	54,5
56	1,50	0,60	0,34	0	0	0
57	41	5,1	0,15	41,3	5,16	0
58	1,50	0,60	0,31	0	0	0
59	50,5	50,5	50,5	50,8	50,8	50,8
60	1,50	0,15	0	0	0	0
61	48,5	49	49	49,2	49,2	49,2
62	1,50	0,60	0,34	0	0	0
63	37	4,6	0,15	37,4	4,67	0
64	1,50	0,60	0,31	0	0	0

1	2	3	4	5	6	7
65	45,5	45,7	46	46,2	46,2	46,2
66	1,50	0,15	0	0	0	0
67	44,5	44,5	44,5	44,8	44,8	44,8
68	1,50	0,60	0,34	0	0	0
69	33,5	4,2	0,15	34,1	4,26	0
70	1,50	0,60	0,31	0	0	0
71	42	42	42	42,3	42,3	42,3
72	1,50	0,15	0	0	0	0
73	41	41	41	41,1	41,1	41,1
74	1,50	0,60	0,34	0	0	0
75	31	3,9	0,15	31,4	3,92	0
76	1,50	0,60	0,31	0	0	0
77	39	38,5	39	39,0	39,0	39,0
78	1,50	0,15	0	0	0	0
79	37,5	37,8	37,8	38,0	38,0	38,0
80	1,50	0,60	0,34	0	0	0
81	28,5	3,6	0,15	29,0	3,63	0
82	1,50	0,60	0,31	0	0	0
83	35,5	35,8	35,8	36,1	36,1	36,1
84	1,50	0,15	0	0	0	0
85	35,0	35,0	35,0	35,3	35,3	35,3
86	1,50	0,60	0,33	0	0	0
87	27	3,3	0,15	27,1	3,38	0
88	1,50	0,60	0,30	0	0	0
89	33,5	33,5	33,5	33,7	33,7	33,7
90	1,50	0,15	0	0	0	0
91	32,0	32,6	32,6	33,0	33,0	33,0
92	1,50	0,60	0,33	0	0	0
93	25	3,1	0,15	25,3	3,16	0
94	1,50	0,60	0,30	0	0	0
95	31,5	31,5	31,5	31,6	31,6	31,6
96	1,50	0,15	0	0	0	0
97	30,5	30,6	30,6	30,9	30,9	30,9
98	1,50	0,60	0,33	0	0	0
99	23	2,95	0,15	23,8	2,97	0
100	1,50	0,60	0,30	0	0	0
101	29,5	29,5	29,5	29,7	29,7	29,7

Tabela 5

Zależność amplitud k-tych harmonicznych sygnału  
schodkowego od częstotliwości /dla sygnału o  $N=15$ /

/Wartości amplitud podano w [mV]/						
$k \backslash f_s$	40Hz	70Hz	120Hz	400Hz	1kHz	2kHz
1	3000	3000	3000	3000	3000	3000
2	0,25	0,30	1,0	1,7	3,7	6,8
3	0,10	0,15	0,20	1,0	1,4	2,4
4	0,05	0,10	0,25	0,60	1,5	2,9
5	0,15	0,15	0,25	0,75	1,8	3,3
6	0,05	0,05	0,10	0,3	0,8	1,7
7	0,15	0,15	0,15	0,45	1,2	2,4
8	0,05	0,05	0,10	0,20	0,60	1,3
9	0,15	0,15	0,20	0,60	1,6	2,9
10	0,05	0,05	0,10	0,15	0,40	0,85
11	0,15	0,15	0,15	0,50	1,3	2,6
12	0,05	0,05	0,08	0,10	0,30	0,60
13	0,15	0,15	0,20	0,70	1,7	3,3
14	0,05	0,05	0,05	0,10	0,20	0,60
15	0,15	0,15	0,15	0,45	1,1	2,2
16	0,05	0,05	0,05	0,10	0,25	0,60
17	0,15	0,15	0,20	0,70	1,7	3,4
18	0,05	0,05	0,05	0,10	0,25	0,60
19	0,15	0,15	0,15	0,50	1,35	0,8
20	0,05	0,05	0,05	0,10	0,25	0,60
21	0,15	0,15	0,20	0,60	0,65	1,0
22	0,05	0,05	0,05	0,10	0,25	0,60
23	0,15	0,15	0,15	0,50	0,70	0,75
24	0,05	0,05	0,05	0,10	0,25	0,60
25	0,15	0,15	0,20	0,70	0,85	1,1
26	0,05	0,05	0,08	0,15	0,25	0,70
27	0,15	0,15	0,15	0,45	1,1	2,3
28	0,05	0,05	0,10	0,20	0,70	1,1
29	103	103	103	102	97	93
30	0	0	0,05	0,25	0,60	1,3
31	96	96	97	99	105	105
32	0,05	0,05	0,45	1,45	3,7	5,8

## 6. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Tematyka niniejszej pracy dotyczy problemów związanych z generacją przebiegów b.m.cz. metodą syntezy cyfrowej, stosowaną w generatorach cyfrowych. W skrócie idea tej metody polega na tym, że zamiast przebiegu żądanego generuje się jego aproksymatę w postaci sygnału schodkowego. Fakt ten powoduje, że generowane tą metodą przebiegi charakteryzują się niekorzystnym widmem częstotliwości harmonicznych, co jest zresztą ich oczywistą wadą. Poza tą wadą generatory cyfrowe charakteryzują się dużą liczbą niezaprzeczalnych zalet i w zakresie b.m.cz. ta metoda generacji sygnałów jest w zasadzie jedyną, która zapewnia możliwość budowy generatorów w pełni programowalnych przy niezbyt złożonej konstrukcji układu. Z tego właśnie względu celowym było podjęcie prac, których zadaniem było wyeliminowanie lub też zmniejszenie liczby harmonicznych w widmie, sygnału schodkowego generowanego metodą syntezy cyfrowej.

Ponieważ zastosowanie najprostszego rozwiązania w postaci filtrów dolnoprzepustowych w przypadku generatorów o przestrajanej częstotliwości napotyka na poważne trudności postanowiono oprzeć dalsze prace o stwierdzenie, że zawartość harmonicznych w widmie sygnału aproksymującego jest zależna od przyjętego sposobu aproksymacji. Zaprezentowano w pracy stanowisko, że stosowane do tej pory w generatorach cyfrowych metody aproksymacji oparte o amplitudowe kryteria oceny dokładności odwzo-

rowania przebiegu żądanego przebiegiem schodkowym nie są metodami optymalnymi, gdyż powodują zbyt silne zniekształcenie widma generowanego przebiegu. Należałoby więc opracować nową metodę aproksymacji posługując się jako kryterium zawartością harmoniczną w widmie generowanego sygnału. W przedstawionej pracy ograniczono obszar zainteresowań do sygnału sinusoidalnego, który jest wciąż najpowszechniej stosowanym sygnałem pomiarowym. W związku z tym celem postawionym przed pracą było opracowanie takich reguł aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym, przy spełnieniu których aproksymata byłaby pozbawiona możliwie maksymalnej liczby harmoniczných i tym samym jej widmo byłoby w maksymalnie możliwym stopniu zbliżone do widma idealnego sygnału sinusoidalnego. Sformułowano też tezę zakładającą, że istnieje taki optymalny sposób aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym, składającym się z dowolnej, skończonej liczby elementów, że zastosowanie tego sposobu w generacyjnych układach syntezy cyfrowej zapewni uzyskanie sygnału wyjściowego pozbawionego możliwie największej liczby harmoniczných.

Problem tak rozumianej aproksymacji optymalnej został rozwiązany na drodze teoretycznej a samo rozwiązanie przedstawiono w rozdziale 4 niniejszej pracy. Wyniki przeprowadzonych rozważań teoretycznych, potwierdzone także w przeprowadzonych eksperymentach doświadczalnych pozwalają stwierdzić, że istnieje taki sposób aproksymacji przebiegu sinusoidalnego przebiegiem schodkowym, który zapewnia wyeliminowanie z widma sygnału aproksymującego maksymalnie możliwej liczby harmoniczných.



nych. Jak wykazano harmoniczne o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$  nie są możliwe do wyeliminowania drogą doboru parametrów sygnału schodkowego, natomiast amplitudy wszystkich pozostałych harmonicznych mogą przyjąć wartości zerowe jeśli spełniony zostanie warunek aproksymacji opisany zależnością /50/. Można więc przyjąć, że zależność /50/ wyznacza warunki aproksymacji optymalnej rozumianej w sensie wyeliminowania maksymalnej liczby harmonicznych występujących w widmie sygnału aproksymującego. Rozwiązanie to wykazało słuszność postawionej tezy, która tym samym została udowodniona.

Wykazana w rozdziale 4 niemożliwość wyeliminowania harmonicznych o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$  znajduje potwierdzenie w pracach Franka i Sandberga [17] oraz Richardsa [58], w których autorzy nie zajmowali się co prawda aproksymacją sygnału sinusoidalnego ale wykazali, że dla każdego okresowego przebiegu schodkowego amplitudy harmonicznych o tych numerach mają wartość różną od zera oraz, że zachodzą pomiędzy nimi relacje określone zależnością  $b_k = \frac{b_1}{k}$ . Zależność ta jest identyczna jak wyprowadzona w pracy zależność /53/, co potwierdza raz jeszcze poprawność otrzymanych w pracy rozwiązań teoretycznych. Wynika też stąd jasno, że dla każdego dowolnego przebiegu schodkowego, aproksymującego przebieg sinusoidalny tą samą liczbą elementów, zachodzą te same relacje pomiędzy harmonicznymi o numerach 1 oraz  $m \cdot 2N \pm 1$  co zostało też potwierdzone doświadczalnie w niniejszej pracy dla kilku różnych sposobów aproksymacji. Zatem poszczególne przebiegi schodkowe o danej liczbie  $N$  aproksymujące przebieg sinusoidalny

będą różniły się między sobą harmonicznymi o numerach różnych od 1 oraz od  $m \cdot 2N + 1$ . Dalej wynika stąd że każdy inny sposób aproksymacji niż ten, który jest zaprezentowany w pracy musi zawierać dodatkowe harmoniczne a więc z punktu widzenia kryterium zawartości harmonicznymi będzie gorszy od sposobu określonego zależnością /50/, choć z punktu widzenia kryteriów amplitudowych /np. błędu średniego kwadratowego/ mógłby być lepszy. Wynika też stąd, że w przypadku optymalnym w sensie widmowym współczynnik zawartości harmonicznymi zdefiniowany jako:

$$h = \sqrt{\frac{b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + \dots}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + \dots}}$$

osiąga wartość minimalną. Zatem przy aproksymacji sygnału sinusoidalnego eliminacja maksymalnie możliwej liczby harmonicznymi wiąże się ściśle z minimalizacją współczynnika  $h$  i może on być stosowany jako kryterium aproksymacji sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym.

Reasumując zagadnienie optymalnej aproksymacji sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym należy stwierdzić, że obok istniejących już kryteriów amplitudowych i odpowiadających im metod aproksymacji należy wprowadzić także kryterium zawartości harmonicznymi w widmie generowanego sygnału oraz odpowiadającą mu metodę aproksymacji przedstawioną w niejszej pracy. Pewnym potwierdzeniem słuszności zaprezentowanego tutaj stanowiska jest artykuł Schiffera i Evansa [62], który przedstawia rozwiązanie zagadnienia aproksymacji sinusoidy odcinkami

prostych o różnych nachyleniach, przy czym autorzy za kryterium aproksymacji przyjęli także minimalizację zawartości harmoniczných w widmie generowanego sygnału. Jest to zresztą jedyny spotkany w literaturze przypadek zastosowania kryterium widmowego do aproksymacji, przy czym artykuł ten ukazał się już po zakończeniu prac teoretycznych i doświadczalnych zaprezentowanych w niniejszej pracy.

Stosowanie jednego czy też drugiego kryterium jest uzależnione oczywiście od właściwości układu, w którym sygnał jest wykorzystywany, jednak wydaje się, że znacznie liczniejsza jest ta grupa układów, które są bardziej czułe na dodatkowe harmoniczne niż na małe błędy amplitudowe obrabianych sygnałów sinusoidalnych.

Przedstawiona w pracy metoda aproksymacji może mieć też duże znaczenie we wszystkich tych przypadkach, gdzie badane układy czy też materiały wykazują pewne selektywne właściwości częstotliwościowe i w związku z tym wymagają wytworzenia sygnałów, które w danym paśmie nie zawierają częstotliwości harmoniczných.

Na zakończenie należy stwierdzić, że zaproponowana metoda aproksymacji nie dotyczy tylko i wyłącznie generatorów cyfrowych choć tego problemu dotyczyła niniejsza praca. Otrzymane rozwiązania są ogólne i dotyczą każdego przypadku aproksymacji sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym, składającym się z dowolnej, skończonej liczby elementów składowych. Podają one sposób optymalnej aproksymacji z punktu widzenia minimalnej zawartości harmoniczných w widmie sygnału schodkowego. Między

innymi metoda ta może znaleźć zastosowanie w generatorach cyfrowych, przy czym mogą tu być wyróżnione co najmniej trzy metody:

- binarny lub dekadowy przetwornik C/A współpracujący z odpowiednim układem sterowania,
- przetwornik C/A z odpowiednią liczbą wejść, z których każde posiada odpowiednią wagę,
- sumowanie funkcji Walsha w układzie sumatora wielow wejściowego,

a także w układach próbkujących, pracujących z ekstrapolacją zerowego rzędu, w których sygnał wyjściowy ma także postać schodkową.

Przedstawione w pracy zagadnienia mogą być podstawą do dalszych prac, przy czym główne kierunki tych prac powinny się koncentrować wokół dwóch problemów:

- dokładniejsze zbadanie wpływu zniekształceń sygnału schodkowego na skuteczność eliminacji określonych harmonicznych,
- zastosowanie kryterium widmowego przy aproksymacji przebiegiem schodkowym przebiegów periodycznych o kształcie innym niż sinusoidalny.

## 7. BIBLIOGRAFIA

1. Adamczewski T., Aktualny stan badań nad zmianami w czasie przewodnictwa naturalnego i wzbudzeniowego w dielektrykach ciekłych, Sympozjum pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969", Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. PWr., Wrocław 1970, t.1, s. 1-32.
2. Allan R., The function generator: more flexibility at lower prices, EDN 1973, nr 8, s. 36-46.
3. Badian L., O pewnej metodzie badania zjawisk starzeniowych w kondensatorach, Sympozjum pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969", Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. PWr., Wrocław 1970, t.3, s. 62-74.
4. Badian L., Lange D., Elektrodyfuzyjne starzenie ceramiki rutilowej, Sympozjum pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969", Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. PWr., Wrocław 1970, t.2, s. 34-70.
5. Beeler G.W., Bleil B.T., Long-Term Free-Ranging Recording Using Data Integral to Pulse Frequency Signal Transformation, IEEE Trans., Vol. BME-21, 1974, nr 3, s. 245-246.
6. Blazek V., Neelakantaswamy P.S., Reddy V., Generation of Complex Waveforms for Biomedical Application, IEEE Trans., Vol. BME-22, 1975, nr 6, s. 535-536.
7. Bogner R.E., Constantinides A.G., Introduction to Digital Filtering, John Wiley and Sons, London 1975.
8. Chess G.F., Calaresu F.R., A Mathematical Model of the Vagus - Heart Period System in the Cat, IEEE Trans., Vol. BME-21, 1974, nr 1, s. 21-27.
9. Cooper H.W., Why complicate frequency synthesis?, Electronic Design, Vol. 22, 1974, nr 15, s. 80-84.
10. Coulbourn D.W., Set frequency synthesizer with thumbwheel switches, EDN, 1975, April 5, s. 115-117.
11. Danielsson P.E., Incremental Curve Generation, IEEE Trans. Comp., Vol. C-19, 1970, nr 9, s. 783-793.

12. Davies A.C., Digital Generation of Low-Frequency Sine Waves, IEEE Trans., Vol. IM-18, 1969, nr 2, s. 97-105.
13. Filipow L.I., Zinowjew A.L., Metody analityczeskowo wyrażenija radiosignałow, Izdatielstwo "Wysszaja szkoła", Moskwa 1966.
14. Finak J., Nitsch K., Pomiar  $C$  i  $tg\delta$  w zakresie h.m.cz. metodą cyfrowego pomiaru przesunięcia fazowego, PAK, 1973, nr 12, s. 538-540.
15. Forsberg R.W., ROM Shrinks Function Generator, EDN/EEE, 1971, June 1, s. 43.
16. Franks L.E., Teoria sygnałów, PWN, Warszawa 1975.
17. Franks L.E., Sandberg I.W., An Alternative Approach to the Realization of Network Transfer Functions; The N-Path Filter, The Bell System Technical Journal, Vol. 39, 1960, nr 5, s. 1321-1350.
18. French A.S., Synthesis of Low-Frequency Noise for Use in Biological Experiments, IEEE Trans., Vol. BME-21, 1974, nr 3, s. 251-252.
19. Fulford J.F., Generation of waveforms at very low frequencies using the sampling technique, Proc. IEE, 1964, s. 1993-2001.
20. Gadway R., DAC differential linearity; it makes a difference, Electronics, 1973, July 19, s. 128.
21. Goliński J., Łabus-Nawrat K., Starzenie dielektryków stałych w wyniku działania wyładowań niezupełnych, Sympozjum pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969", Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. PWr., Wrocław 1970, t.2, s. 70-107.
22. Grzybowski S., Degradacja wytrzymałości dielektrycznej nasyconego papieru kondensatorowego, Sympozjum pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969", Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. PWr., Wrocław 1970, t.2, s. 107.

23. Heflin E.H., Compact Function Generator with Enhanced Capability / Cost Ratio, Hewlett-Packard Journal, 1973, July, s. 15-20.
24. Hilczer B., Wpływ defektów sieci krystalicznej na proces starzenia ferroelektryków, Sympozjum pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969", Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. PWr., Wrocław 1970, t.2, s. 1-14.
25. Himmelheber P., Digital sweep generator maintains constant output voltage at specified time, Electronic Design, Vol. 20, 1972, September 2, s. 66.
26. Holzschuh J.E., Programmable sawtooth generator settable at high and low output levels, Electronic Design, Vol.23, 1975, November 8, s. 106.
27. Hsia T.C., A Technique for Synthesizing Digital Filters, IEEE Trans., Vol. IM-18, 1969, nr 2, s. 93-96.
28. Kachelski T., Układ do cyfrowej syntezy różnych przebiegów falowych, PAK, 1972, nr 9, s. 401-402.
29. Kalus-Jęcek B., Pomiar prądów i napięć przemiennych bardzo małej częstotliwości, PAK, 1976, nr 2, s. 48-49.
30. Kardysz L., Programowane źródła napięć i prądów stałych i przykłady ich zastosowań, Biuletyn MERA-PIAP, 1972, nr 3, s. 33-39.
31. Klein R.D., Digitaler Sinusgenerator mit Festwertspeicher, Elektronik, 1976, Heft 3, s. 92-96.
32. Koken C., Prinzipien digitaler Synthesizer, Elektronik, 1976, Heft 11, s. 106-110 i 117.
33. Konorski B., Podstawy elektrotechniki t.3 Prądy niesinusoidalne, TEM Warszawa 1952.
34. Križan M., Versatile and accurate exponential generator, Journal of Physics E: Scientific Instruments, Vol. 9, 1976, nr 11, s. 933-934.



35. Kruppa G., Suhr H., Digitale Synthese von Rechteckschwingungen, *Elektronik*, 1975, nr 11, s. 99-101.
36. Lacefield M.M., Simple step-function generator aids in testing instruments, *Electronics*, Vol. 47, 1974, nr 26, s. 103-105.
37. Lange D., Badania termiczno-napięciowego mechanizmu starzenia w ceramice rutyłowej, Praca doktorska, Politechnika Warszawska 1968.
38. Lathi B.P., Teoria sygnałów i układów telekomunikacyjnych, PWN, Warszawa 1970.
39. Libura A., Stefański K., Przetworniki analogowo-cyfrowe, cyfrowo-analogowe i ich podzespoły, *Biuletyn MERA-PIAP*, 1975, nr 4-5, s. 63-84.
40. Lisiecki J., Zagadnienie starzenia elektrodyfuzyjnego żywic epoksydowych, Sympozjum pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969", *Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. Pwr.*, Wrocław 1970, t.1, s. 144-159.
41. Łapiński M., Dobór częstotliwości próbkowania sygnałów na podstawie uogólnionego szeregu Kotielnikowa, *PAK*, 1974, nr 5, s. 214-216.
42. Maassen U., Programmierbarer Funktionsgenerator mit Schieberegistern, *Elektronik*, 1976, Heft 10, s. 86-88.
43. Majchrzak B., Analiza metod i układów generacji przebiegów o programowanych kształtach, *Pr. nauk. Inst. Metrol. Elektr. Pwr.*, 1977, Raport nr R-126, s. 79-103.
44. Mączyński Z., Generator częstotliwości subakustycznych typ FG-2, Instrukcja obsługi, Politechnika Warszawska.
45. Mączyński Z., Rogowski J., Metoda pomiaru dyspersyjnych właściwości dielektryków w zakresie częstotliwości podakustycznych, *PAK*, 1973, nr 8, s. 350-352.
46. Mc Guire P.L., Digital pulses synthesize audio sine waves, *Electronics*, 1975, October 2, s. 104-105.



47. Mc Natt M.S., Use digital counting logic to generate precise waveforms, *Electronic Design*, Vol. 23, 1975, January 18, s. 62-65.
48. Mędrzycki J., *Technika analogowa i hybrydowa*, WNT, Warszawa 1974.
49. Millman J., Taub H., *Pulse, Digital and Switching Waveforms*, Mc Graw-Hill Book Co., New York 1965.
50. Milne R., Maas P., A digital very low frequency function generator, *Journal of Physics E Scientific Instruments*, Vol. 8, 1975, nr 10, s. 863-865.
51. Mochnacki W., Dyskretyzacja sygnałów ciągłych, *PAK*, 1973, nr 7, s. 307-308.
52. Ojala L., Digital microwave reconstructions for generating analogue waveform, *Electronic Engineering*, Vol. 45, 1973, nr 541, s. 27.
53. Orłowski H., Hawryluk J., *Modelowanie cyfrowe*, WNT, Warszawa 1971.
54. Paul F., Une nouvelle approche dans la génération de formes d'ondes utilisant la technique numérique, *EMI*, 1975, nr 203, s. 28-33.
55. Pisarkiewicz T., Zamarski A., Generator RC drgań sinusoidalnych bardzo małej częstotliwości, *Elektronika*, 1976, nr 7/8, s. 295-296.
56. Powner E., Digital waveform synthesis, *Electronic Engineering*, Vol. 41, 1969, nr 498, s. 50-54.
57. Przybył E., Wybrane metody przyspieszonych badań zjawisk starzeniowych w kondensatorach, *Symposium pt.: "Zjawiska starzeniowe w dielektrykach - Ustronie 28-30.10.1969"*, Pr. nauk. Inst. Podst. Elektrot. PWr., Wrocław 1970, t.3, s. 42.
58. Richards J.A., Modeling Parametric Processes: A Tutorial Review, *PIEEE*, Vol. 65, 1977, nr 11, s. 1549-1557.

59. Roszeitis D., Ein programmierbarer Funktionsgenerator auf der Basis von Walsh-Funktionen, Frequenz, Band 27, 1973, nr 10, s. 260-265.
60. Rydosz H., Formowanie przebiegu sinusoidalnego z fali prostokątnej z uwzględnieniem możliwości kształtowania innych form falowych, Praca dyplomowa, Politechnika Wrocławska 1975.
61. Sabah N.H., Adham M., A Function Generator for Neurophysiological Applications, IEEE Trans., Vol. BME-21, 1974, nr 1, s. 62-63.
62. Schiffer V., Evans W.A., Approximations in sinewave generation and synthesis, The Radio and Electronic Engineer, Vol. 48, 1978, nr 3, s. 113-121.
63. Smith J.R., Automatic Analysis and Detection of EEG Spikes, IEEE Trans., Vol. BME-21, 1974, nr 4, s. 1-7.
64. Thomas J.B., Liu B., Error Problems in Sampling Representations, IEEE International Convention Record, Vol. 12, 1964, nr 5, s. 269-278.
65. Wiles M.F., Digital to sinewave conversion simplified, EDN, 1975, nr 12, s. 114-116.
66. Witkowski J., Generator małej częstotliwości działający w oparciu o technikę próbkowania, Archiwum Elektrotechniki, t.18, 1969, zeszyt 4, s. 695-708.
67. Wydro K., Dobór skoku kwantowania i odstępu próbkowania ciągłych sygnałów pomiarowych, PAK, 1973, nr 1, s. 19-22.
68. Zagajewski T., Układy elektroniki przemysłowej, WNT, Warszawa 1971.
69. Praca zbiorowa, Automatyka - poradnik inżyniera, WNT, Warszawa 1973.
70. Praca zbiorowa, Matematyka - poradnik inżyniera, WNT, Warszawa 1971.

**Lista odbiorców:**

1. OINT IME PWr ..... 1 egz.
2. Biblioteka Główna PWr ..... 1 egz.
3. Biblioteka I-21 i I-28 ..... 1 egz.
4. Promotor ..... 1 egz.
5. Recenzenci ..... 2 egz.
6. Autor ..... 2 egz.

	* N *		
	N N S R T T B N	05	04
	107 5	02 79	I 2 1
	I 2 1 / P - 00 6 / 79 *		
Symbol UKD	Generatory elektro- niczne	79: Inst. Metrol.	
621.373.4/.5	Zniekształcenia nieliniarne	PWr MISzWT	
621.391.832.4		pol.	

Opis bibliograficzny

Majchrzak Bronisław

Zagadnienie eliminacji harmonicznych  
w widmie sygnału sinusoidalnego genero-  
wanego metodą syntezy cyfrowej

Raporty Inst. Metrol. PWr 1979 se. PRE nr 6/79  
121 s. 15 rys. 5 tabl. bibliogr. 70 poz.  
/maszyn. powiel./

Rozprawa doktorska

Politechnika Wrocławska, Instytut Metro-  
logii Elektrycznej, Wrocław

Promotor: prof. dr inż. Andrzej Jellonek

Charakter pracy: stosowana

Materiały odnotow. B

Rozpowszechnienie na praw.  
ręk.

Przedstawiono opracowaną teoretycznie metodę aproksymacji sygnału sinusoidalnego sygnałem schodkowym zapewniającą wyeliminowanie z widna sygnału aproksymującego maksymalnej liczby częstotliwości harmonicznych. Praca zawiera opis zrealizowanego układu generatora cyfrowego, który generuje sygnały sinusoidalne w oparciu o opracowaną teoretycznie metodę aproksymacji sinusoidy sygnałem schodkowym. Ponadto przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych, których celem było zweryfikowanie wyników prac teoretycznych w rzeczywistym układzie generatora.

Imię i nazwisko autora analizy

Bronisław Majchrzak

Słowa kluczowe

<S

generator cyfrowy, przebieg schodkowy

\*\*0480\*00\*

<A 032612 \*B \_\_\_\_\_ \*C \_\_\_\_\_ \*D \_\_\_\_\_

\*E \_\_\_\_\_ \*F \_\_\_\_\_ \*G \_\_\_\_\_ \*H \_\_\_\_\_

tytuł	APW	Podpis red.	Podpis asyst. d/b badań	Potwierdzenie przyjęcia poprawki.	Potwierdzenie przyjęcia karty w Centralnej Dokumentacji.
NIE	TAK	TAK	<i>Majchrzak</i>	<i>Majchrzak</i>	
Wzrost: TAK lub NIE					