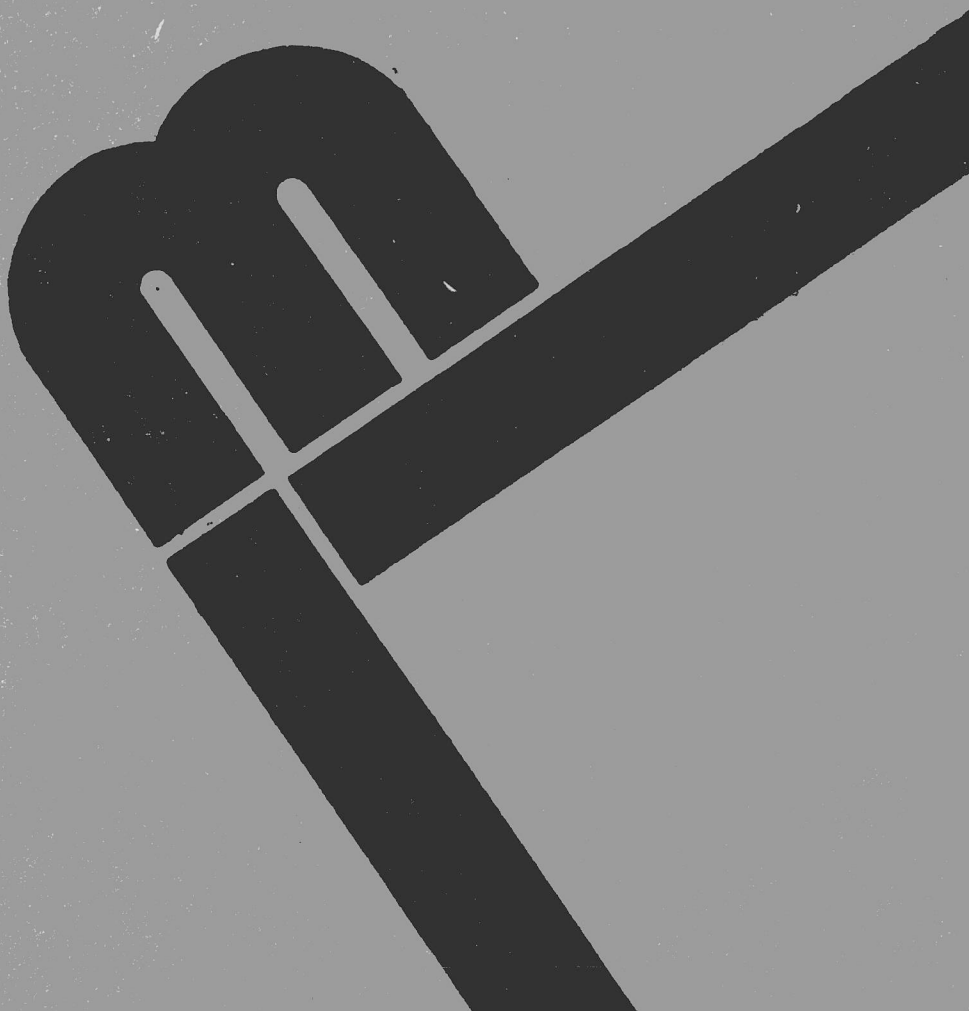


**Ryszard Szetela**

**Interpretacja hamowania substratowego  
w reaktorze osadu czynnego o pełnym wymieszaniu  
z wykorzystaniem modelu matematycznego**

Wrocław 1988



PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Environment Protection Engineering  
No. 58 of Technical University of Wrocław No. 58

---

Monographs

No. 26

1988

Ryszard SZETELA

Interpretation of inhibitory substrate biodegradation  
in the completely mixed activated sludge reactor  
with the use of mathematical model

**Ryszard Szetela**

**Interpretacja  
hamowania substratowego  
w reaktorze osadu czynnego  
o pełnym wymieszaniu  
z wykorzystaniem modelu  
matematycznego**



**Recenzenci**

Jerzy CHMIEŁOWSKI  
Edward S. KEMPA

**Redaktor naczelny**

Jerzy CIEKOT

**Redaktor naukowy**

Edward GOMÓŁKA

**Opracowanie redakcyjne**

Teresa JARMAKOWICZ

**Korekta**

Wanda CHRZANOWSKA

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1988

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0084 – 2869

Nakład 155 + 65 egz. Ark. wyd. 3,75. Ark. druk. 3 1/2. Papier offset. kl. III, 70 g, B1.  
Oddano do druku w lipcu 1988 r. Druk ukończono we wrześniu 1988 r.  
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 3299/88 – Cena zł 95,-



Ryszard SZETELA\*

## INTERPRETACJA HAMOWANIA SUBSTRATOWEGO W REAKTORZE OSADU CZYNNEGO O PEŁNYM WYMIESZANIU Z WYKORZYSTANIEM MODELU MATEMATYCZNEGO

Przedstawiono wykorzystanie modelu matematycznego biodegradacji w komorze osadu czynnego o pełnym wymieszaniu do interpretacji zjawisk towarzyszących hamowaniu substratowemu. W rozważaniach uwzględniono zużycie substratu na przyrost biomasy oraz utrzymanie jej aktywności metabolicznej. Stwierdzono, że możliwa jest wielokrotność warunków ustalonych. W takim przypadku istnieje niebezpieczeństwo niestabilności procesu oczyszczania ścieków. Może się to objawiać nagłymi załamaniem sprawności oczyszczania. Podano warunki, których spełnienie usuwa to niekorzystne zjawisko. Powyżej pewnego stężenia substratu w ściekach oczyszczanych wielokrotność warunków ustalonych nie da się wyeliminować. Niestabilnej pracy reaktora można wtedy uniknąć tylko częściowo. Przeanalizowano wpływ następujących zabiegów technologicznych na eliminację tej niestabilności: a) recyrkulacji z leja osadnika wtórnego, b) doprowadzania biomasy spoza układu, c) unieruchomienia części biomasy na nośniku wewnątrz reaktora, d) rozcieńczenia ścieków surowych wodą odbiornika. Stwierdzono, że najbardziej celowe jest unieruchomienie części biomasy na nośniku.

### Oznaczenia

- c - bezwymiarowy współczynnik zużycia substratu na utrzymanie aktywności metabolicznej
- D - szybkość rozcieńczenia, 1/d
- k - bezwymiarowy współczynnik inhibicji
- $k_I$  - stała inhibicji, g/m<sup>3</sup>

---

\* Instytut Inżynierii Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

- $K_S$  - stała Michaelisa,  $g/m^3$   
 $m$  - zużycie substratu na utrzymanie aktywności metabolicznej,  $g/g\ sm\ d$   
 $Q_1$  - natężenie dopływu ścieków,  $m^3/d$   
 $Q_5$  - natężenie recyrkulacji,  $m^3/d$   
 $S_1$  - stężenie substratu w dopływie,  $g/m^3$   
 $\bar{S}_1$  - bezwymiarowe stężenie substratu w dopływie  
 $S_2$  - stężenie substratu w odpływie,  $g/m^3$   
 $\bar{S}_2$  - bezwymiarowe stężenie substratu w odpływie  
 $t$  - czas zegarowy,  $d$   
 $\bar{t}$  - bezwymiarowy czas zegarowy  
 $V_2$  - objętość czynna reaktora,  $m^3$   
 $X_1$  - stężenie biomasy w dopływie,  $g\ sm/m^3$   
 $\bar{X}_1$  - bezwymiarowe stężenie biomasy w dopływie  
 $X_2$  - stężenie biomasy w odpływie z reaktora,  $g\ sm/m^3$   
 $X_3$  - stężenie biomasy w odpływie z osadnika wtórnego,  $g\ sm/m^3$   
 $X_5$  - stężenie biomasy w recyrkulacji,  $g\ sm/m^3$   
 $X_{5,Q}$  - "zredukowane" stężenie biomasy recyrkulowanej  
 $X_{5,Q} = \alpha X_5$ ,  $g\ sm/m^3$   
 $\bar{X}_{5,Q}$  - bezwymiarowa postać  $X_{5,Q}$   
 $X_A$  - stężenie biomasy unieruchomionej,  $g\ sm/m^3$   
 $\bar{X}_A$  - bezwymiarowe stężenie biomasy unieruchomionej  
 $X_D = X_A + \frac{X_1 + X_{5,Q}}{1 + \alpha}$ ,  $g\ sm/m^3$   
 $\bar{X}_D$  - bezwymiarowa postać  $X_D$   
 $Y$  - maksymalna wartość współczynnika wydajności przyrostu biomasy,  $g\ sm/g$   
 $Y_{obs}$  - współczynnik wydajności przyrostu biomasy,  $g\ sm/g$   
 $\alpha$  - stopień recyrkulacji ( $\alpha = Q_5/Q_1$ )  
 $\beta$  - stopień usuwania osadu nadmiernego ( $\beta = Q_4/Q_1$ )  
 $\theta$  - czas przetrzymania,  $d$   
 $\bar{\theta}$  - bezwymiarowy czas przetrzymania

$\mu$  - stała szybkość przyrostu biomasy, 1/d

$\mu_{\max}$  - maksymalna wartość stałej szybkości przyrostu biomasy, 1/d

## 1. ZAGADNIENIA WSTĘPNE

### 1.1 Wprowadzenie

Niniejsza praca ma charakter teoretyczny. Dotyczy analizy hamowania substratowego w reaktorze osadu czynnego o pełnym wymieszaniu. Jest to zjawisko interesujące, które często występuje w praktyce biologicznego oczyszczania ścieków (np. fenolowych), a jego konsekwencje mają istotne znaczenie praktyczne. Świadomość tych konsekwencji wśród specjalistów zajmujących się biologicznym oczyszczaniem ścieków jest niewystarczająca. Podjęto zatem próbę analizy tych aspektów zjawiska, które są ważne przy projektowaniu i eksploatacji procesu osadu czynnego. Dążąc do możliwie dużej ścisłości i jednoznaczności wysnuwanych wniosków, zdecydowano się wykorzystać model matematyczny procesu.

Praca składa się z trzech zasadniczych części. Pierwsza (technologiczna), zakończona wnioskami, obejmuje wyprowadzenie modelu matematycznego procesu osadu czynnego z uwzględnieniem hamowania substratowego. Na tej podstawie przeanalizowano zjawisko niestabilnej pracy reaktora i możliwości zapobiegania jego przyczynom. Przedstawione rozważania nie są w pełni szczegółowe. Wynika to z potrzeby komunikatywności także wobec czytelników, których nie interesują szczegóły wyprowadzeń matematycznych, lecz głównie zagadnienia technologiczne. Rozdziały te można czytać bez konieczności zapoznania się z pozostałymi.

Druga część, zatytułowana Wyprowadzenie podstawowych zależności, zawiera szczegółowe wyprowadzenia matematyczne, będące podstawą wniosków przedstawionych w części technologicznej (p. 7.1-7.8). W punkcie 7.9 zamieszczono program komputerowy, który może przydać się czytelnikowi do wykonania samodzielnych obliczeń.

Ostatni podrozdział 7.10 jest ważny ze względów praktycznych. Podano w nim sposoby wyznaczania wartości podstawowych parametrów kinetyki i stechiometrii przemian biochemicznych w procesie osadu czynnego. Ich znajomość jest podstawą wniosków technologicznych.

## 1.2. Podstawowe pojęcia

W obecności źródła energii i związków biogennych, przy braku inhibitorów uniemożliwiających przyrost, we właściwych warunkach fizykochemicznych następuje przyrost biomasy mikroorganizmów. W czasie  $dt$  następuje przyrost biomasy  $dX$  proporcjonalny do ilości biomasy  $X$  znajdującej się w reaktorze

$$dX = \mu X dt. \quad (1.1)$$

Przyrost biomasy jest proporcjonalny do ilości zużytych związków biogennych (substratów)  $dS$

$$dX = -Y_{\text{obs}} dS. \quad (1.2)$$

Wydajność przyrostu biomasy zależy od szybkości przyrostu  $\mu$

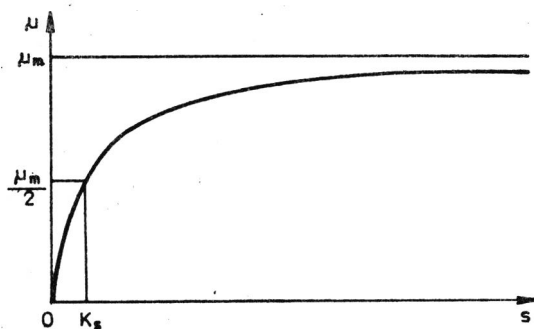
$$\frac{1}{Y_{\text{obs}}} = \frac{1}{Y} + \frac{m}{\mu}. \quad (1.3)$$

Z kolei szybkość przyrostu biomasy  $\mu$  zależy od stężenia substratu. Monod [1] podał formułę dobrze przybliżającą wyniki doświadczalne zależności  $\mu$  od  $S$

$$\mu = \frac{\mu_{\text{max}} S}{K_S + S}. \quad (1.4)$$

Miarą stężenia substratu  $S$  może być także ChZT,  $C_{\text{org}}$  lub BZT.

Przebieg zależności Monoda przedstawiono na rys. 1.1. Należy zauważyć, że jednej wartości  $\mu$  odpowiada tylko jedna wartość  $S$ .



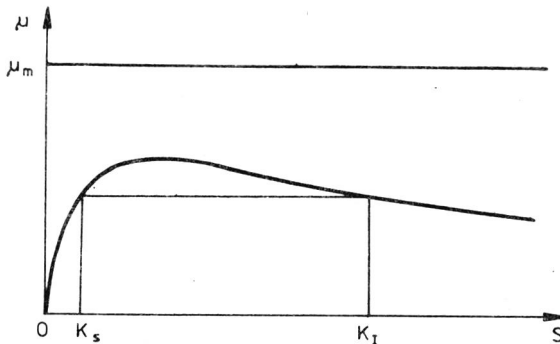
Rys. 1.1. Zależność szybkości przyrostu biomasy drobnoustrojów ( $\mu$ ) od stężenia substratu ( $S$ ) wg Monoda [1]

Fig. 1.1. Dependence of the biomass growth rate ( $\mu$ ) on substrate concentration ( $S$ ) acc. to Monod [1]

Zdarza się jednak, że formuła Monoda jest niewystarczająca do opisu kinetyki rozkładu substratu zawartego w ściekach. Jest tak przy występowaniu hamowania substratowego, np. w przypadku fenoli [2]-[6], n-butanolu [7], pentanu [8], octanu fenylu, benzoesanu sodowego [9], azotynów [10], zwłaszcza przy dużych ich stężeniach. W odniesieniu do takich substratów powinno się stosować inne formuły empiryczne do opisu zależności  $\mu - S$ . W wielu publikacjach można znaleźć różnorodne wzory opisujące tę zależność [11]-[13]. Najczęściej jednak jest używana następująca formuła (rys. 1.2);

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}} \quad (1.5)$$

(analogia do niekompetencyjnego hamowania reakcji enzymatycznej substratem). Będzie ona także wykorzystywana w tej pracy. Należy podkreślić, że dyskusja w dalszej części pracy obowiązuje jakościowo, niezależnie od wykorzystywania tej czy innej formuły empirycznej.



Rys. 1.2. Zależność szybkości przyrostu biomasy drobnoustrojów ( $\mu$ ) od stężenia substratu ( $S$ ) z uwzględnieniem hamowania substratowego  
Fig 1.2. Dependence of the biomass growth rate ( $\mu$ ) on inhibitory substrate concentration ( $S$ )

Istotne jest jedynie, żeby zależność  $\mu - S$  była podobna do pokazanej na rys. 1.2 (tj. każdej wartości  $\mu$  odpowiadały dwie wartości  $S$ ).

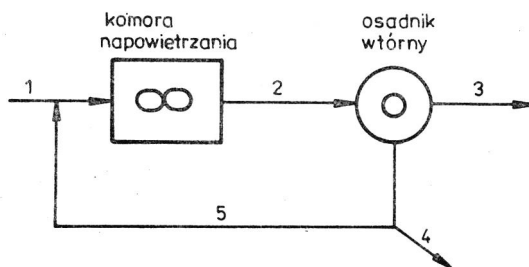
Rozważając problem biologicznego oczyszczania specyficznych ścieków, należy określić, czy zależność  $\mu - S$  jest taka jak na rys. 1.1 czy jak na rys. 1.2. Jeżeli ścieki, które mają być oczyszczane, zawierają związki specyficzne podobne do wymienionych, to należy się spodziewać, że dla tych ścieków zależność  $\mu - S$  będzie podobna do tej z rys. 1.2.

Do najczęściej stosowanych sposobów wyznaczania wartości  $\mu$  przy

różnych stężeniach substratu S należy wykorzystywanie hodowli ciągłej lub okresowej [4], [5], [14], [17] (patrz rozdz. 7).

## 2. MODEL MATEMATYCZNY OCZYSZCZANIA ŚCIEKÓW W REAKTORZE O CAŁKOWITYM WYMIESZANIU

Schemat oczyszczania przedstawiono na rysunku 2.1. Założono



Rys. 2.1. Schemat reaktora osadu czynnego z recyrkulacją: 1-5-punkty charakterystyczne układu (patrz tekst)  
Fig. 2.1. Sketch of activated sludge reactor with recirculation: 1-5-  
- characteristic points of the system (c.f. text)

możliwość unieruchomienia części biomasy na nośniku (np. ziarnistym węglu [18], piasku [19], jonicie [20] utrzymywanym w zawieszeniu, czy innym wypełnieniu) wewnątrz reaktora oraz dopuszczono obecność biomasy w ściekach surowych (punkt 1 na rys. 2.1).

W warunkach bliskich stanowi ustalonemu ilość biomasy, która może podlegać recyrkulacji, jest stała i może być określona z bilansu biomasy zawartej w odpływie z reaktora (2), biomasy usuwanej z osadem nadmiernym (4) i biomasy odpływającej ze ściekami oczyszczonymi (3). Bilans taki można zapisać następująco:

Biomasa do recyrkulacji	=	Biomasa w od- pływie z reaktora	-	Biomasa w osa- dzie nadmier- nym	-	Biomasa w ście- kach oczysz- czonych
$Q_1 \alpha X_5$		$Q_1 (1 + \alpha) X_2$		$Q_1 \beta X_5$		$Q_1 (1 - \beta) X_3$
						(2.1)

Skoro w warunkach zbliżonych do ustalonych wszystkie czynniki po prawej stronie równania (2.1) mogą być uważane za stałe, to można się spodziewać, że  $\alpha X_5 = X_5, Q = \text{const}$ . Oznacza to, że dla danego stężenia biomasy zawieszonyj (osadu czynnego poza nośnikiem) w reaktorze  $X_2$ ,

wzrost stopnia recyrkulacji  $\alpha$  spowoduje spadek stężenia biomasy w recyrkulacji  $X_5$ . Jeżeli natomiast istnieje możliwość zwiększenia stężenia osadu recyrkulowanego, to stopień recyrkulacji może być obniżony.

Zakładając, że:

- zawartość reaktora jest doskonale wymieszana
- objętość czynna reaktora jest stała
- mikroorganizmy na nośniku, poza nim oraz w recyrkulacji i w ściekach surowych są takie same (równe wartości współczynników kinetyki i stechiometrii przemian biochemicznych), można napisać bilans biomasy dla reaktora

$$\frac{dX_2}{dt} = D [X_{5,Q} + X_1 - (1 + \alpha) X_2] + \mu (X_A + X_2). \quad (2.2)$$

Jeśli  $X_1 = 0$ , to model odpowiada przypadkowi, gdy w ściekach surowych nie ma biomasy. Gdy  $X_A = 0$ , otrzymuje się przypadek bez biomasy unieruchomionej na nośniku.

W warunkach ustalonych ( $dX_2/dt = 0$ )

$$\mu = \frac{D [(1 + \alpha)X_2 - X_1 - X_{5,Q}]}{X_A + X_2}. \quad (2.3)$$

Bilans dla substratu ma postać:

$$\frac{dS_2}{dt} = D (S_1 - S_2) - \frac{\mu}{Y_{obs}} (X_A + X_2). \quad (2.4)$$

W warunkach ustalonych ( $dS_2/dt = 0$ )

$$X_2 = \frac{Y_{obs} D (S_1 - S_2)}{\mu} - X_A. \quad (2.5)$$

Uwzględniając równania (2.3) i (2.5) otrzymuje się

$$X_2 = \frac{Y_{obs} (S_1 - S_2) + X_1 + X_{5,Q}}{1 + \alpha}. \quad (2.6)$$

Podstawiając  $X_2$  z równania (2.6) do równania (2.4) i uwzględniając

$$X_D = \frac{X_1 + X_{5,Q}}{1 + \alpha} + X_A,$$

otrzymuje się

$$\frac{dS_2}{dt} = D (S_1 - S_2) - \mu \left( \frac{S_1 - S_2}{1 + \alpha} + \frac{X_D}{Y_{obs}} \right). \quad (2.7)$$

ro wprowadzeniu

$$\frac{1}{Y_{\text{obs}}} = \frac{1}{Y} + \frac{m}{\mu}; \quad \mu = \frac{\mu_{\text{max}} S_2}{K_S + S_2 + \frac{S_2^2}{K_I}}$$

i oznaczeniu

$$\mu_{\text{max}} t = \bar{t}; \quad \mu_{\text{max}} \theta = \frac{\mu_{\text{max}}}{D} = \bar{\theta}; \quad S_1/K_S = \bar{S}_1; \quad S_2/K_S = \bar{S}_2; \quad K_S/K_I = k$$

$$\frac{X_D}{Y K_S} = \bar{X}_D; \quad \frac{X_A}{Y K_S} = \bar{X}_A; \quad \frac{X_1}{Y K_S} = \bar{X}_1; \quad \frac{X_{S,Q}}{Y K_S} = \bar{X}_{S,Q}; \quad \frac{m Y}{\mu_{\text{max}}} = c,$$

otrzymuje się bezwymiarową formę równania (2.7).

$$\frac{d\bar{S}_2}{d\bar{t}} = \frac{1}{\bar{\theta}} (\bar{S}_1 - \bar{S}_2) - \frac{\bar{S}_2 \left( \bar{X}_D + \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{1 + \alpha} \right)}{1 + \bar{S}_2 + k \bar{S}_2^2} + c \bar{X}_D. \quad (2.8)$$

Stąd dla warunków ustalonych wynika:

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{\frac{\bar{S}_2 \left( \bar{X}_D + \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{1 + \alpha} \right)}{1 + \bar{S}_2 + k \bar{S}_2^2} + c \bar{X}_D} = \frac{SD}{SU}, \quad (2.9)$$

gdzie:

SU - szybkość utylizacji substratu,

SD - szybkość dostarczania substratu.

Równanie (2.8) można zapisać w postaci

$$\frac{d\bar{S}_2}{d\bar{t}} = SD - SU. \quad (2.10)$$

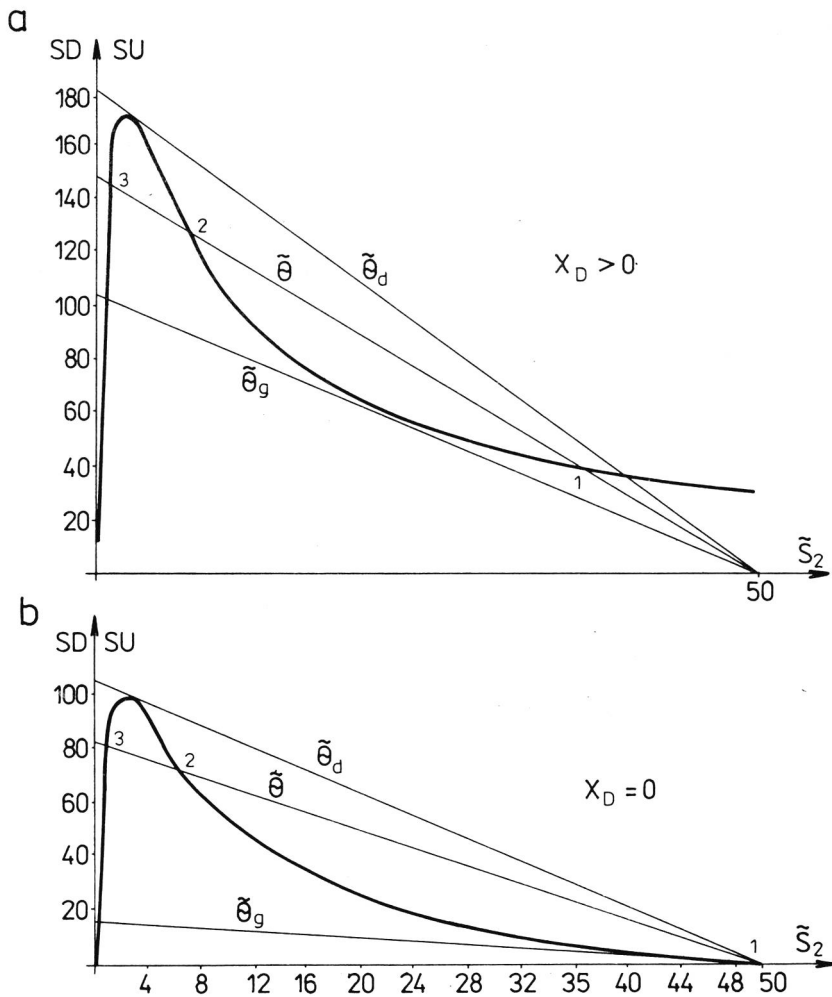
Rozwiązaniem tego równania w warunkach ustalonych jest przecięcie wykresów SU i SD, których przebiegi zbadano w rozdz. 7 i przedstawiono na rys. 2.2.

Jak widać, wykresy SU i SD mogą mieć 1, 2 lub 3 punkty wspólne w dodatnim zakresie wartości  $S_2$ . Tym punktom przecięcia odpowiadają rozwiązania równania (2.9). Można zauważyć, że powyżej pewnego czasu retencji ( $\bar{\theta}_g$ ) i poniżej pewnego czasu retencji ( $\bar{\theta}_d$ ) jest możliwy tylko jeden punkt przecięcia, a zatem jedno rozwiązanie równania (2.9). W zakresie czasów przetrzymania spełniających warunek (2.11) występują trzy różne rozwiązania.



$$\bar{\theta}_d < \bar{\theta} < \bar{\theta}_g \quad (2.11)$$

Warunki ustalone w reaktorze odpowiadające rozwiązaniom 1 i 3 (rys. 2.2) są stabilne, natomiast odpowiadające rozwiązaniu 2 są niestabilne. Jeśli w warunkach ustalonych w punkcie 3 nastąpi zakłócenie



Rys. 2.2. Zależność szybkości dostarczenia (SD) i szybkości utylizacji (SU) substratu od stężeń substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ ); a - dla  $\bar{X}_D > 0$ , b - dla  $\bar{X}_D = 0$

Fig. 2.2. Dependence of the rate of supply (SD) and utilization (SU) of substrate on substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ ): a - for  $\bar{X}_D > 0$ , b - for  $\bar{X}_D = 0$

wywołujące chwilowy wzrost stężenia substratu w reaktorze, to nastąpi wzrost wartości SU i spadek wartości SD (tzn.  $SU > SD$ ). Wynika stąd, że  $\frac{d\bar{S}_2}{dt} < 0$ , czyli w reaktorze nastąpi zmniejszenie stężenia substratu aż do ponownego osiągnięcia warunków ustalonych w 3.

Jeśli zakłócenie wywoła chwilowy spadek stężenia substratu w reaktorze, to powstanie taki stan, że  $SU < SD$ , czyli  $\frac{d\bar{S}_2}{dt} > 0$ , a więc w reaktorze nastąpi zwiększenie stężenia substratu aż do osiągnięcia warunków ustalonych w 3. Analogicznie jest w punkcie 1, w którym także następuje samoregulacja procesu.

W punkcie 2 wzrost stężenia substratu w reaktorze powoduje, że  $SU < SD$ , czyli  $\frac{d\bar{S}_2}{dt} > 0$ . Znaczy to, że następuje wtedy ciągły wzrost stężenia substratu w reaktorze aż do osiągnięcia stabilnych warunków ustalonych w punkcie 1.

Gdy zakłócenie wywołuje spadek stężenia w reaktorze, wówczas  $SU > SD$ , czyli  $\frac{d\bar{S}_2}{dt} < 0$ . Oznacza to, że następuje wtedy ciągły spadek stężenia  $\bar{S}_2$  w reaktorze aż do osiągnięcia stabilnych warunków ustalonych w punkcie 3.

Uogólniając można powiedzieć, że jeżeli jest spełniony warunek (2.12), to przy stężeniu  $\bar{S}_n$  w reaktorze są stabilne warunki ustalone.

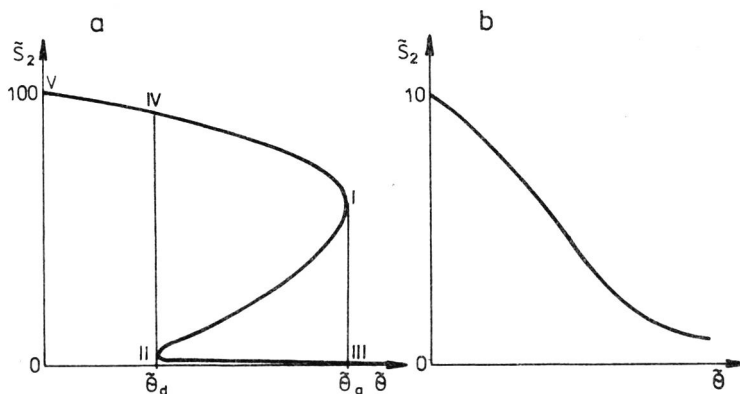
$$\left. \frac{d(SU)}{d\bar{S}_2} \right|_{\bar{S}_n} > \left. \frac{d(SD)}{d\bar{S}_2} \right|_{\bar{S}_n} \quad (2.12)$$

Z analizy wykresu na rys. 2.2b łatwo zauważyć, że dla  $\bar{X}_D = 0$  rozwiązanie 1 jest trywialne, gdyż jest ono równoznaczne z wypłukaniem biomasy z reaktora i zerowym stopniem rozkładu substratu. Kiedy  $\bar{X}_D > 0$ , rozwiązanie 1 nie jest trywialne. Oznacza to, że jeśli w reaktorze nie ma biomasy unieruchomionej na nośniku, to dla czasów retencji  $\bar{\theta} < \bar{\theta}_d$  występuje wypłukanie biomasy z komory i całkowity zanik rozkładu substratu.

### 3. ZALEŻNOŚĆ STĘŻENIA SUBSTRATU OD CZASU PRZETRZYMANIA

Na rysunku 3.1 przedstawiono krzywe zależności stężenia substratu ( $\bar{S}_2$ ) od czasu przetrzymania ( $\bar{\theta}$ ) dla warunków ustalonych. Krzywe te

sporządzono na podstawie równania (2.9). Kształt wykresu zależności  $\bar{S}_2$  od  $\bar{\theta}$  może być taki jak na rys. 3.1a lub taki jak na rys. 3.1b, zależnie od wartości parametrów  $S_1$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $X_D$  oraz  $\alpha$ .



Rys. 3.1. Zależność stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ ) od czasu przetrzymania ( $\bar{\theta}$ ) w warunkach ustalonych: a - układ potencjalnie niestabilny, b - układ stabilny

Fig. 3.1. Dependence of substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ ) on the retention time ( $\bar{\theta}$ ) in steady-state conditions: a - potentially unstable system, b - stable system

Kiedy krzywe mają kształt jak na rysunku 3.1a, wtedy dla czasów przetrzymania z przedziału  $\bar{\theta}_d$  i  $\bar{\theta}_g$  równanie (2.9) ma trzy rozwiązania (wielokrotność warunków ustalonych). Rozwiązanie odpowiadające odcinkowi I-II jest niestabilne. Oznacza to, że stężenia odpowiadające temu odcinkowi krzywej nie występują w praktyce inżynierskiej.

Skracanie czasu przetrzymania od wartości wyższych niż  $\bar{\theta}_g$  do  $\bar{\theta}_d$  (tj. w przedziale występowania wielokrotności warunków ustalonych rys. 3.1) powoduje, że stężenie substratu ( $\bar{S}_2$ ) uzyskiwane w warunkach ustalonych jest coraz większe aż do osiągnięcia punktu II. Większe skrócenie czasu przetrzymania spowoduje przeskok do punktu IV, czemu odpowiada nagły spadek sprawności reaktora. Dalsze skracanie czasu przetrzymania spowoduje ciągły wzrost  $\bar{S}_2$  aż do osiągnięcia wartości  $\bar{S}_1$  w punkcie V. Kiedy stężenia substratu w dopływie ( $\bar{S}_1$ ) są duże, to skok z punktu II do IV (i wynikający stąd wzrost stężenia substratu inhibitującego przyrost biomasy) może spowodować zniszczenie biomasy, utratę przez nią właściwości sedimentacyjnych i w konsekwencji załamanie procesu oczyszczania [21]. Z drugiej strony wyjście z punktu V i wydłużenie czasu przetrzymania powoduje obniżanie stężenia substratu w warunkach ustalonych aż do osiągnięcia punktu I. Dalsze wydłużenie

czasu przetrzymania spowoduje przeskok do punktu III, co wywoła nagły wzrost sprawności reaktora.

W praktyce inżynierskiej utrzymanie warunków ustalonych w reaktorze jest bardzo trudne ze względu na zmienność zarówno natężenia przepływu, jak i stężenia substratu w ściekach. Wielkie znaczenie ma także zmienny skład ścieków oczyszczanych, co powoduje zmienność parametrów kinetyki biodegradacji. Nie bez znaczenia są również zmiany temperatury oraz skład mikrobiologiczny biomasy. W konsekwencji stężenie substratu w reaktorze waha się wokół wartości odpowiadającej stanowi ustalonemu. Zatem, w przedziale czasów przetrzymania między  $\bar{\theta}_d$  i  $\bar{\theta}_g$  może się zdarzyć, że pomimo iż reaktor pracuje z wysoką sprawnością (odcinek II-III), następuje takie zachwianie procesu, że stężenie substratu znacznie się zwiększy i nastąpi przeskok do odcinka I-IV, co wywoła znaczne zmniejszenie się sprawności lub nawet załamanie się procesu oczyszczania. Może także zaistnieć taka sytuacja, że czas przetrzymania  $\bar{\theta}$  tylko niewiele przekracza  $\bar{\theta}_d$ . Wtedy chwilowy wzrost natężenia przepływu ścieków spowoduje skrócenie czasu przetrzymania poniżej  $\bar{\theta}_d$  i może wywołać przeskok do bardzo wysokich stężeń substratu.

Niezależnie od tego który czynnik spowoduje spadek sprawności reaktora, powrót do wysokiej sprawności jest bardzo trudny. Może to być osiągnięte przez wydłużenie czasu przetrzymania do wartości wyższych od  $\bar{\theta}_g$  i - po osiągnięciu wysokiej sprawności - powrót do krótszych czasów przetrzymania (w dół do poziomu  $\bar{\theta}$ ). Jednakże, jeśli biomasa została zniszczona, aby to osiągnąć trzeba będzie ponownie wyhodować osad czynny. Należy podkreślić, że do wydłużenia czasu przetrzymania konieczne jest zrzucenie dużej ilości ścieków do odbiornika z pominięciem biologicznego oczyszczania. Żeby uniknąć takich "niespodzianek" należałoby przewidywać w projekcie procesu wystarczająco długie czasy przetrzymania. Oznacza to jednak zwiększone nakłady inwestycyjne.

#### 4. OKREŚLENIE WARUNKÓW WYSTĘPOWANIA I ELIMINOWANIA NIESTABILNEJ PRACY REAKTORA

Dla pewnych wartości parametrów krzywe zależności  $\bar{S}_2 - \bar{\theta}$  nie mają ekstremów (jak to widać na rys. 3.1b). Innymi słowy, nie występuje dla tych wartości parametrów wielokrotność warunków ustalonych. Unika się zatem omówionych niepożądanych konsekwencji, tj. nagłego spadku sprawności reaktora. Jest to sytuacja pożądana w praktyce inżynierskiej. Sensowne jest więc określenie warunków (zwłaszcza dotyczących wartości

parametrów  $\bar{S}_1$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $\bar{X}_D$ ,  $\alpha$ ), których spełnienie zagwarantuje osiągnięcie takiej sytuacji.

Podobnym problemem dla chemostatu zajmował się Chi i inni [22]. W swoich badaniach przyjął on następujące założenia: brak biomasy w dopływie, brak recyrkulacji, pomija się zużycie substratu na utrzymanie aktywności metabolicznej ( $c=0$ ). W stosunku do rzeczywistego obrazu procesu oczyszczania ścieków osadem czynnym są to bardzo duże uproszczenia. Przyjęcie  $c=0$  pociąga za sobą szczególnie duże błędy przy opisie procesów o wysokim stopniu oczyszczania. Tutaj podjęto próbę rozwiązania tego zagadnienia bez czynienia wspomnianych założeń upraszczających.

Jak widać z rysunku 2.2, brzegami podziału, poza którym nie występuje niestabilność reaktora, są wartości  $\bar{\theta}_d$  i  $\bar{\theta}_g$ .

Gdy  $\bar{\theta}=\bar{\theta}_d$  i  $\bar{\theta}=\bar{\theta}_g$ , spełnione są zależności:

$$\frac{d(SU)}{d\bar{S}_2} = \frac{d(SD)}{d\bar{S}_2}, \quad (4.1)$$

$$SU = SD, \quad (4.2)$$

z których pierwsza oznacza, że nachylenia krzywych SU i SD są równe, a druga, że krzywe mają punkt wspólny, będący pierwiastkiem równania (2.9). Po obliczeniu  $\bar{\theta}$  z warunku (4.2), podstawieniu do (4.1) oraz uporządkowaniu otrzymuje się

$$\bar{X}_E = \bar{X}_D (1 + \alpha) = \frac{(\bar{S}_1 - \bar{S}_2)^2 (k\bar{S}_2^2 - 1)}{2k\bar{S}_2^3 + \bar{S}_2^2 (1 - k\bar{S}_1) + \bar{S}_1 + c(1 + \bar{S}_2 + k\bar{S}_2^2)^2}. \quad (4.3)$$

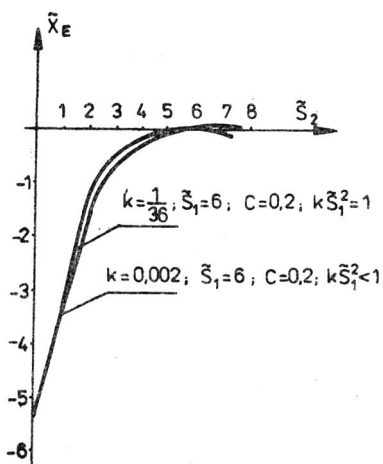
Wracając do rozważanego problemu można powiedzieć, że jeżeli dla  $\bar{X}_E \gg 0$  równanie (4.3) nie ma żadnego rozwiązania w zakresie wartości  $\bar{S}_2 \in [0, \bar{S}_1]$ , to w całym zakresie  $\bar{\theta}$  od zera do  $+\infty$  nie występuje niestabilna praca reaktora. Jeżeli równanie (4.3) ma rozwiązania (może być ich dwa lub jedno podwójne), to po podstawieniu go do (2.9) otrzymuje się wartości  $\bar{\theta}_d$  i  $\bar{\theta}_g$ .

Gdy  $\bar{X}_E=0$  (tzn. nie ma biomasy w dopływie,  $X_1=0$ , brak biomasy na nośniku,  $X_A=0$  i nie recyrkuluje się biomasy,  $X_{5,Q}=0$ ), wówczas równanie (4.3) przechodzi w

$$(\bar{S}_1 - \bar{S}_2)^2 (k\bar{S}_2^2 - 1) = 0. \quad (4.4)$$

Równanie to dla  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$  ma tylko jeden dodatni pierwiastek z przedziału  $\bar{S}_2 \in [0, \bar{S}_1]$ ;  $\bar{S}_2 = \bar{S}_1$  (patrz rozdz. 7). Po wstawieniu tej wartości

do (4.2) otrzymuje się  $\bar{\theta}_d = \bar{\theta}_g = 0$ , co oznacza, że dla żadnych wartości  $\bar{\theta}$  nie występuje wielokrotność warunków ustalonych. Na rysunku 4.1 przedstawiono wykresy obrazujące omawiany przypadek.



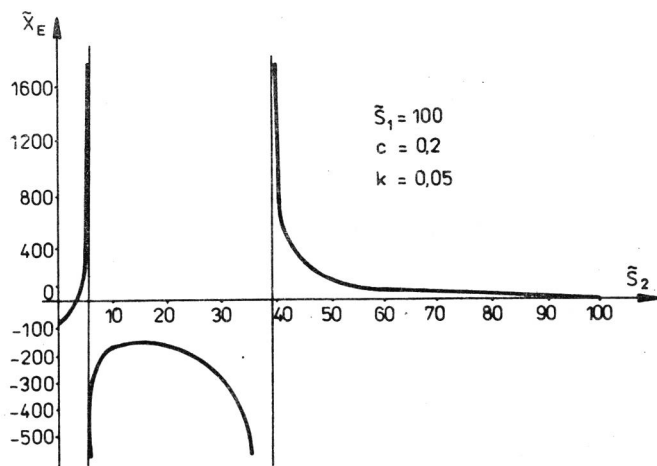
Warunek  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$  jest spełniony tylko dla stosunkowo małych stężeń substratu w ściekach surowych (np.

Rys. 4.1. Przebieg zmienności prawej strony równania (4.3) w funkcji stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ ), przy stężeniu substratu w dopływie ( $\bar{S}_1$ ) spełniającym warunek  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$   
Fig 4.1. Variation of the right-hand side of the equation (4.3) as a function of substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ ), with the substrate concentration in the influent ( $\bar{S}_1$ ) meeting the condition  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$

dla  $K_s=20$ ,  $K_I=200$  tylko przy  $S_1 \ll 63 \text{ g/m}^3$ ). Dla większych stężeń  $\bar{S}_1$  można uzyskać pożądany kształt zależności  $\bar{S}_2 - \bar{\theta}$  tylko, gdy  $\bar{X}_E > 0$ .

Intuicyjnie można sądzić, że dla skończonych wartości  $\bar{S}_1$  wystarczy tylko dobrać odpowiednio dużą wartość  $\bar{X}_E$ , żeby zapewnić jednokrotność warunków ustalonych. Aby rozstrzygnąć, czy tak jest w rzeczywistości, należy sprawdzić, czy jest możliwa wielokrotność warunków ustalonych dla  $\bar{X}_E = +\infty$ . Jeżeli tak, to intuicyjne przypuszczenie jest nieprawdziwe, jeżeli nie, to może być ono prawdziwe.  $\bar{X}_E = +\infty$  wtedy, gdy mianownik prawej strony równania (4.3) równa się zero. Łatwo zauważyć, że wtedy funkcja opisana całym ułamkiem jest nieciągła, a jej wartość w tych punktach dąży do  $+\infty$  i  $-\infty$  (rys. 4.2). Oznacza to, że w takim przypadku nawet dla  $\bar{X}_E = +\infty$  istnieje rozwiązanie równania (4.3), a więc wielokrotność warunków ustalonych. Z dotychczasowego rozumowania wynika wniosek, że problemu wielokrotności warunków ustalonych nie można w każdym przypadku rozwiązać tylko przez zwiększenie wartości  $\bar{X}_E$ . Gdy pewna wartość  $\bar{S}_1$  zostanie przekroczona, niekorzystny kształt wykresu  $\bar{S}_2 - \bar{\theta}$  będzie występował niezależnie od wartości  $\bar{X}_E$ . Tę wartość graniczną  $\bar{S}_1$  można obliczyć, rozwiązując równanie (4.5) po wstawieniu do niego określonych wartości  $k$  oraz  $c$ :

$$ck^2 y^4 + 2k(1+c)y^3 + (1+c+2kc-k\bar{S}_1)y^2 + 2cy + \bar{S}_1 + c = 0, \quad (4.5)$$



Rys. 4.2. Przebieg zmienności prawej strony równania (4.3.) w funkcji stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ ) przy stężeniu substratu w dopływie ( $\bar{S}_1$ ) nie mniejszym niż pierwiastek równania (4.5.)

Fig. 4.2. Variation of the right-hand side of the equation (4.3.) as a function of substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ ) with the substrate concentration in the influent ( $\bar{S}_1$ ) not smaller than the root of the equation (4.5)

gdzie

$$y = A \cos \frac{B}{3} - D,$$

$$A = \frac{[3(1+c)^2 - 2wc]^{1/2}}{3^{1/2} ck},$$

$$B = \arccos \frac{-3(3^{1/2})(1+c)^3 - w(1+c)c + 2c^3k}{[3(1+c) - 2w]^{3/2}},$$

$$D = \frac{1+c}{2ck}, \quad w = 1+c + 2ck - k\bar{S}_1.$$

W przypadku, gdy  $c=0$ , gwarancję jednokrotności warunków ustalonych daje spełnienie zależności (patrz rozdz. 7):

$$(1 - k\bar{S}_1)^3 + 27k^2 \bar{S}_1 > 0. \quad (4.6)$$

Aby określić wartość  $\bar{X}_{E,\min}$  ( $0 < \bar{X}_{E,\min} < +\infty$ ) gwarantującą jednokrotność warunków ustalonych, należy policzyć wartość wyrażenia (4.3) w punkcie, w którym występuje jego maksimum lokalne w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ .

Wartość  $\bar{S}_2$ , przy której występuje lokalne maksimum (4.3), jest pierwiastkiem równania (patrz rozdz. 7):

$$a_5 \bar{S}_2^5 + a_4 \bar{S}_2^4 + a_3 \bar{S}_2^3 + a_2 \bar{S}_2^2 + a_1 \bar{S}_2 + a_0 = 0, \quad (4.7)$$

$$a_0 = \bar{S}_1 + \bar{S}_1 c + c,$$

$$a_3 = k(2 + k\bar{S}_1 c - 1 - 4c),$$

$$a_1 = c + \bar{S}_1 + \bar{S}_1 c + 3k\bar{S}_1 c,$$

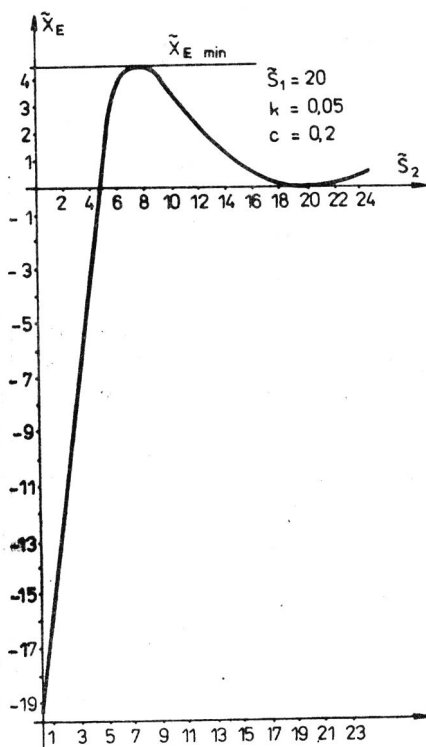
$$a_4 = -k(1 + c + 3ck + k\bar{S}_1 c),$$

$$a_2 = k(4c\bar{S}_1 + \bar{S}_1 - 2c),$$

$$a_5 = -k^2(1 + c + k\bar{S}_1 c),$$

który jest zawarty w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ . Można wykazać (patrz rozdz.7), że występuje tylko jeden taki pierwiastek. Po wstawieniu wartości tego pierwiastka do wyrażenia (4.3) można obliczyć wartość  $\bar{X}_{E, \min}$ , powyżej której nie występuje wielokrotność warunków ustalonych, tzn. równanie (4.3) nie ma rozwiązań w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ . Przykładowy wykres obrazujący omawianą zależność przedstawiono na rys. 4.3.

Na rysunku 4.4 przedstawiono przykładową zależność  $\bar{S}_1$  od  $k$  dla różnych wartości  $\bar{X}_E$  i  $c=0,06$ . Na podstawie wykresów z tego rysunku łatwo rozstrzygnąć, czy w konkretnych warunkach będzie, czy nie będzie występować wielokrotność warunków ustalonych. Jeżeli punkt o współrzędnych  $k, \bar{S}_1$  leży w rejonie I, to wielokrotność warunków ustalonych występuje niezależnie od wartości  $\bar{X}_E$ . Dla punktów leżących w rejonie III wielokrotność ta nie występuje nawet wówczas, gdy  $\bar{X}_E=0$ . Dla



punktów z rejonu II występowanie lub brak wielokrotności warunków ustalonych zależy od wartości  $\bar{X}_E$ . Oznacza to, że jeżeli dla określonej wartości  $\bar{X}_E$  punkt leży poniżej krzywej odpowiadającej tej wartości, to wielokrotność nie występuje. Gdy leży on powyżej tej krzywej, to wielokrotność ta istnieje.

Korzystanie z wykresów przedstawionych na rys. 4.4 nie jest dogodne ze względu na duże błędy odczytu wartości  $k, \bar{S}_1$  oraz  $\bar{X}_E$  na skalach logarytmicznych. Ponadto, dla inżynierów ma znaczenie znajomość war-

Rys. 4.3. Przebieg zmienności prawej strony równania (4.3) w funkcji stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ ) przy stężeniu substratu w dopływie ( $\bar{S}_1$ ) mniejszym od rozwiązania równania (4.5)

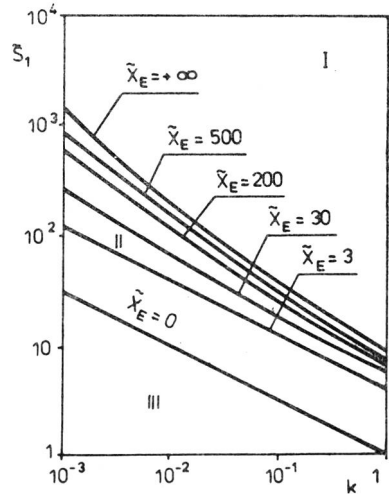
Fig. 4.3. Variation of the right-hand side of the equation (4.3) as a function of substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ ), with the substrate concentration in the influent ( $\bar{S}_1$ ) smaller than the root of the equation (4.5)



tości  $\bar{X}_{E,\min}$ , której nie można odczytać z rys. 4.4 dostatecznie dokładnie. Z tego powodu numeryczne rozwiązania równania (4.5) dla  $k$  i  $c$  z przedziałów odpowiednio od 0,001 do 1,0 i od 0 do 1,0 aproksymowano równaniem:

Rys. 4.4 Przedziały występowania i braku wielokrotności warunków ustalonych procesu osadu czynnego

Fig. 4.4 Intervals of the occurrence of multiplicity of steady states of the activated sludge process



$$\bar{S}_1 = \exp [0,024(\ln k)^2 - 0,6039 \ln k + 1,8908] + c [\exp 0,0459 (\ln k)^2 - 0,3311 \ln k + 2,7659] \quad (4.8)$$

(współczynnik korelacji  $> 0,99$ ).

Z równania tego można obliczyć graniczną wartość  $\bar{S}_1$ , powyżej której niestabilna praca reaktora występuje nawet, gdy  $\bar{X}_E = +\infty$ . Jak widać z (4.8), uwzględnienie zużycia substratu na utrzymanie aktywności metabolicznej ( $c > 0$ ) daje wartości  $\bar{S}_1$  większe od uzyskiwanych dla  $c=0$ . Po przyjęciu  $k=0,1$  uzyskuje się dla  $c=0$  i  $c=0,2$  odpowiednio 30,1 i 38,6, z czego, gdy  $K_S=20 \text{ g/m}^3$ , odpowiednio otrzymuje się wartości graniczne stężenia ścieków oczyszczanych ( $S_1$ ) 600 i 772  $\text{g/m}^3$ .

Dla danych wartości  $k$  i  $c$  oraz  $\bar{S}_1$  między wartościami obliczonymi z warunku  $k\bar{S}_1^2 \ll 0$  i (4.5) (lub (4.8)) można obliczyć  $\bar{X}_{E,\min}$  za pomocą prostego programu w BASICU. Program ten zamieszczono w rozdz. 7.

Dla  $k=0,1$ ;  $\bar{S}_1=30$ , obliczone wartości  $\bar{X}_{E,\min}$  wynoszą odpowiednio 5084,5 i 64,1, gdy  $c=0$  oraz  $c=0,2$ . Przyjąwszy  $Y=0,5 \text{ g smo/g}$  i  $K_S=20 \text{ g/m}^3$ , otrzymuje się odpowiednie wartości wymiarowe ( $X_{E,\min}$ ) 50845 i 641  $\text{g smo/m}^3$ . Jak widać, pominięcie zużycia substratu na utrzymanie aktywności metabolicznej [22] jest przyczyną zupełnie błędnych oszacowań  $X_{E,\min}$ . Skoro

$$\bar{X}_E = (1 + \alpha) \bar{X}_A + \bar{X}_1 + \bar{X}_{5,Q}, \quad (4.9)$$

to wartość  $\bar{X}_E$  można zwiększać przez zwiększanie wartości  $\bar{X}_A$  i/lub  $\bar{X}_1$ , i/lub  $\bar{X}_{5,Q}$ , i/lub  $\alpha$ . Z (2.9) widać, że zwiększenie  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{X}_1$  lub  $\bar{X}_{5,Q}$  powoduje skrócenie czasu przetrzymania niezbędnego do uzyskania określonego stężenia substratu w odpływie. Zwiększenie wartości tych parametrów powoduje zatem intensyfikację procesu oczyszczania. Uzyskanie znacznych wartości  $\bar{X}_1$  jest wątpliwe, gdyż oznaczałoby to koniecz-

ność ciągłego, intensywnego zasilania reaktora biomasa spoza układu. Wzrost  $\bar{X}_1$  powoduje ponadto zwiększenie stężenia biomasy w dopływie do osadnika wtórnego (2.6), z czego wynika konieczność zwiększenia gabarytów tego osadnika. Wzrost  $\bar{X}_{5,Q}$  można uzyskać przez zwiększenie wartości  $X_5$ , tj. zwiększając gabaryty osadnika wtórnego. Konieczność zwiększania gabarytów osadnika nie występuje, gdy stężenie biomasy w reaktorze jest duże, ale biomasa jest unieruchomiona na nośniku. Gdy wartość  $\bar{X}_A$  jest wystarczająco duża, recyrkulacja biomasy może nie być konieczna ( $\bar{X}_{5,Q} = 0$ ). Ponadto biomasa unieruchomiona na nośniku ziarnistym lub na upakowanym wypełnieniu w reaktorze może być łatwo w nim utrzymywana. W takim wypadku osadnik wtórny może być mały.

Kiedy  $\bar{X}_A \neq 0$ , wtedy  $\bar{X}_E$  można zwiększać, zwiększając stopień recyrkulacji  $\alpha$ . Chociaż można dzięki temu wyeliminować niestabilną pracę reaktora, to w konsekwencji czas przetrzymania w celu uzyskania wymaganej sprawności oczyszczania musiałby być wydłużony (2.9). Ponadto znaczny wzrost  $\alpha$  powoduje wzrost kosztów pompowania oraz niezbędny wzrost gabarytów osadnika wtórnego. Wydaje się zatem, że zwiększanie stopnia recyrkulacji nie jest dobrym sposobem zwiększania wartości  $\bar{X}_E$ .

## 5. NIEPEŁNA ELIMINACJA NIESTABILNEJ PRACY REAKTORA

Dla punktów z górnej części rejonu II (rys. 4.4) całkowita eliminacja wielokrotności warunków ustalonych wymagałaby bardzo dużych wartości  $\bar{X}_E$ . W praktyce inżynierskiej takie wartości nie mogą być osiągnięte. W takiej sytuacji można próbować tylko częściowo wyeliminować niestabilną pracę reaktora przez skrócenie  $\bar{\theta}_g$  (rys. 3.1) do bardzo małych wartości i pracę przy czasach przetrzymania dłuższych od  $\bar{\theta}_g$ . Analogiczne rozumowanie dotyczy punktów z rejonu I. Można pokazać (patrz rozdz. 7), że zwiększenie wartości  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_{5,Q}$  powoduje zmniejszenie wartości  $\bar{\theta}_g$ . Zwiększenie natomiast stopnia recyrkulacji, powoduje wzrost wartości  $\bar{\theta}_g$ , co jest niekorzystne.

Niestabilna praca reaktora może być całkowicie lub częściowo wyeliminowana także przez obniżenie stężenia substratu w ściekach surowych  $S_1$ . Może to być osiągnięte przez dodatek ścieków nie zawierających substratu inhibitującego przyrost mikroorganizmów albo rozcieńczenie wodą (np. z odbiornika ścieków). Jeżeli dopływ ma być rozcieńczony wodą odbiornika, to niezbędne jest odpowiednie zwiększenie sprawności oczyszczania, gdyż w przeciwnym wypadku do odbiornika trafiłby większy ładunek zanieczyszczeń.

Po oznaczeniu natężenia przepływu ścieków i ich stężenia po rozcieńczeniu wodą odbiornika odpowiednio  $Q_{1r}$  oraz  $\bar{S}_{1r}$  można napisać:

$$\frac{Q_1}{Q_{1r}} = r < 1, \quad (5.1)$$

$$\bar{S}_{1r} = r \bar{S}_1. \quad (5.2)$$

Aby przy oczyszczaniu ścieków rozcieńczonych ładunek zanieczyszczeń odprowadzanych do odbiornika pozostał taki sam, musi być spełniony warunek

$$\bar{S}_{2r} = r \bar{S}_2 \quad (5.3)$$

Niezbędny czas przetrzymania  $\bar{\theta}_r$  można wtedy obliczyć ze wzoru (2.9) po podstawieniu zamiast  $\bar{S}_2$  argumentu  $r\bar{S}_2$ , z czego po prostych ale żmudnych przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{\bar{\theta}_r}{\bar{\theta}} = \frac{\bar{\theta}(r\bar{S}_2)}{\bar{\theta}(\bar{S}_2)} = r \frac{A + C}{A + B} = rE, \quad (5.4)$$

$$A = c\bar{X}_D (1 + \bar{S}_2 + k\bar{S}_2^2) (1 + r\bar{S}_2 + r^2 k\bar{S}_2^2) + r\bar{S}_2^2 \bar{X}_D + r^2 k\bar{S}_2^3 \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{1 + \alpha},$$

$$B = \bar{X}_D (r\bar{S}_2 + kr^2\bar{S}_2^3) + \bar{S}_2 \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{1 + \alpha} (r^2 + r^2\bar{S}_2),$$

$$C = \bar{X}_D (\bar{S}_2 + r^2\bar{S}_2^3) + \bar{S}_2 \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{1 + \alpha} (1 + r\bar{S}_2).$$

Jak widać,  $C > B$ , a więc  $E > 1$ .

Przechodząc do wielkości wymiarowych można obliczyć stosunek niezbędnych objętości reaktora

$$\frac{\bar{\theta}_r}{\bar{\theta}} = \frac{\mu_m \bar{\theta}_r}{\mu_m \bar{\theta}} = \frac{\bar{\theta}_r}{\bar{\theta}} = \frac{Q_1 V_{2r}}{Q_{1r} V_2} = \frac{r Q_1 V_{2r}}{Q_1 V_2} = r \frac{V_{2r}}{V_2} = rE.$$

Stąd

$$V_{2r} = rE V_2, \quad (5.5)$$

a więc niezbędna objętość reaktora ( $V_{2r}$ ) przy rozcieńczeniu ścieków surowych wodą musi być większa. Ponadto wzrost natężenia przepływu (do  $Q_{1r}$ ) powoduje konieczność odpowiedniego zwiększenia gabarytów osadnika wtórnego.

## 6. WNIOSKI

Przy oczyszczaniu ścieków zawierających związki wykazujące hamowanie substratowe może występować niestabilna praca reaktora. Taka niestabilność występuje tylko w pewnym przedziale czasów przetrzymania. Granice tego przedziału zależą od parametrów  $\bar{S}_1$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $\bar{X}_D$  oraz  $\alpha$ . Praca reaktora o pełnym wymieszaniu przy czasach przetrzymania, przy których występuje wielokrotność warunków ustalonych może powodować duże zmniejszenie sprawności lub nawet załamanie procesu oczyszczania. Niestabilną pracę można wyeliminować przez zwiększenie stężenia biomasy w ściekach oczyszczanych (co jest zwykle w praktyce inżynierskiej niemożliwe) lub przez zwiększenie ilości biomasy recyrkulowanej. Oba te sposoby mają tę wadę, że powodują konieczność zwiększenia gabarytów osadnika wtórnego. Gdy zwiększy się stopień recyrkulacji  $\alpha$  w celu wyeliminowania niestabilności, wówczas jest konieczne znaczne zwiększenie niezbędnej objętości reaktora. Najlepszą metodą okazuje się zwiększanie stężenia biomasy unieruchomionej na nośniku wewnątrz reaktora, przy czym uzyskuje się dodatkowo zmniejszenie objętości reaktora i osadnika wtórnego.

Kiedy stężenie substratu w ściekach surowych jest bardzo duże, całkowitą eliminację niestabilnej pracy reaktora można uzyskać metodą rozcieńczania ścieków surowych. Konieczne jest jednak znaczne zwiększenie gabarytów reaktora i osadnika wtórnego.

## 7. WYPROWADZENIE PODSTAWOWYCH ZALEŻNOŚCI

7.1. Przebieg zmienności SD

- Punkty przecięcia z osiami

$$\text{Gdy } \bar{S}_2 = 0, \quad SD = \frac{\bar{S}_1}{\delta}.$$

$$\text{Gdy } SD = 0, \quad \bar{S}_2 = \bar{S}_1.$$

7.2. Przebieg zmienności SU w przedziale  $\bar{S}_2 \in [0, +\infty)$

- Granice

$$\lim_{\bar{S}_2 \rightarrow +\infty} SU = -\frac{1}{k(1+\alpha)} + c\bar{X}_D,$$

$$\lim_{\bar{S}_2 \rightarrow 0} SU = c\bar{X}_D.$$

- Punkty zerowe ( $SU = 0$ )

Gdy  $\bar{X}_D = 0$ ,

$$\bar{S}_{2(1)} = 0 \quad \text{i} \quad \bar{S}_{2(2)} = \bar{S}_1.$$

Gdy  $\bar{X}_D > 0$ ,

$\bar{S}_{2(1)} < 0$  i  $\bar{S}_{2(2)} > \bar{S}_1$  lub  $\bar{S}_{2(2)}$  nie istnieje.

- Ekstrema

Po przyrównaniu  $\frac{dSU}{d\bar{S}_2}$  do zera otrzymuje się równanie:

$$\bar{S}_2^2 [1 + k\bar{S}_1 + \bar{X}_D k(1 + \alpha)] + 2\bar{S}_2 - [\bar{S}_1 + \bar{X}_D(1 + \alpha)] = 0, \quad (7.1)$$

które ma jeden dodatni pierwiastek:

$$\bar{S}_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + [1 + k\bar{S}_1 + \bar{X}_D k(1 + \alpha)] [\bar{S}_1 + \bar{X}_D(1 + \alpha)]}}{1 + k\bar{S}_1 + \bar{X}_D k(1 + \alpha)}.$$

W punkcie tym  $\frac{d^2SU}{d\bar{S}_2^2} < 0$ , zatem występuje w nim maksimum.

- Punkty przegięcia

Po przyrównaniu  $\frac{d^2SU}{d\bar{S}_2^2}$  do zera otrzymuje się równanie:

$$k\bar{S}_2^3 [1 + k\bar{S}_1 + \bar{X}_D k(1 + \alpha)] + 3k\bar{S}_2^2 - 3k\bar{S}_2 [\bar{S}_1 + \bar{X}_D(1 + \alpha)] - [1 + \bar{S}_1 + \bar{X}_D(1 + \alpha)] = 0. \quad (7.2)$$

Równanie to zgodnie z twierdzeniem Kartezjusza ma jeden dodatni pierwiastek, któremu odpowiada jeden punkt przegięcia funkcji SU w przedziale  $\bar{S}_2 \in [0, +\infty)$ .

7.3. Przebieg zmienności licznika (L) prawej strony  
równania (4.3) w przedziale  $\bar{S}_2 \in [0, \bar{S}_1]$

- Punkty zerowe ( $L = 0$ )

Po pomnożeniu obydwu stron równania (4.4) przez  $-\bar{S}_1/(1 + \sqrt{k} \bar{S}_2)$  otrzymuje się

$$(\bar{S}_1 - \bar{S}_2)^2 (\bar{S}_1 - \sqrt{k} \bar{S}_1 \bar{S}_2) = 0 \quad (7.3)$$

Gdy  $\sqrt{k} \bar{S}_1 = 1$ , równanie to ma jeden potrójny pierwiastek

$$\bar{S}_2(1, 2, 3) = \bar{S}_1.$$

Gdy natomiast  $\sqrt{k} \bar{S}_1 < 1$  - trzy pierwiastki, w tym jeden podwójny:

$$\bar{S}_2(1, 2) = \bar{S}_1 \quad \text{i} \quad \bar{S}_2(3) = \frac{1}{\sqrt{k}} > \bar{S}_1.$$

Gdy  $\sqrt{k} \bar{S}_1 > 1$ ,

$$\bar{S}_2(1, 2) = \bar{S}_1 \quad \text{i} \quad \bar{S}_2(3) = \frac{1}{\sqrt{k}} < \bar{S}_1.$$

- Granice i punkt przecięcia z osią rzędną.

$$\lim_{\bar{S}_2 \rightarrow +\infty} L = +\infty,$$

$$\lim_{\bar{S}_2 \rightarrow -\infty} L = +\infty,$$

Gdy  $\bar{S}_2 = 0$ ,  $L = -\bar{S}_1^2$ .

- Ekstrema

Po przyrównaniu  $\frac{dL}{d\bar{S}_2}$  do zera otrzymuje się

$$(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)(4k\bar{S}_2^2 - 2k\bar{S}_1\bar{S}_2 - 2) = 0. \quad (7.4)$$

Równanie to ma trzy pierwiastki rzeczywiste:

$$\bar{S}_2(1) = \bar{S}_1,$$

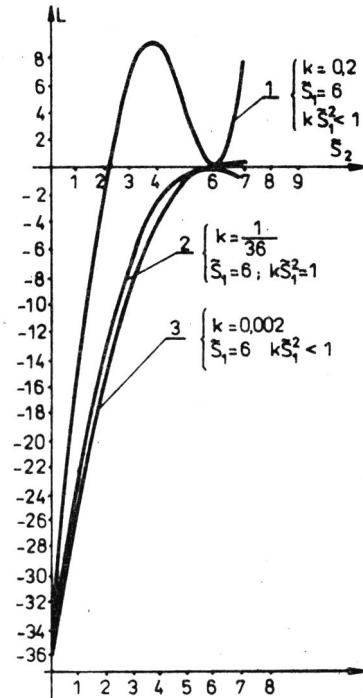
$$\bar{S}_{2(2)} = \frac{\bar{S}_1 - \sqrt{\bar{S}_1^2 + \frac{8}{k}}}{4} < 0,$$

$$\bar{S}_{2(3)} = \frac{\bar{S}_1 + \sqrt{\bar{S}_1^2 + \frac{8}{k}}}{4} > 0.$$

Pierwiastek  $\bar{S}_{2(3)}$  leży w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ , gdy spełniony jest warunek  $k\bar{S}_1^2 \gg 1$ .

Rys. 7.1. Przebieg zmienności licznika (L) prawej strony równania (4.3) w funkcji stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ ) przy stężeniu substratu w dopływie ( $\bar{S}_1$ ) spełniającym odpowiednio warunki  $k\bar{S}_1^2 < 1$ ,  $k\bar{S}_1^2 = 1$ ,  $k\bar{S}_1^2 > 1$

Fig. 7.1. Variation of the numerator (L) of the right-hand side of the equation (4.3) as a function of substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ ) with the substrate concentration in the influent ( $\bar{S}_1$ ) which meets the conditions  $k\bar{S}_1^2 < 1$ ,  $k\bar{S}_1^2 = 1$ ,  $k\bar{S}_1^2 > 1$  respectively



Skoro

$$\frac{d^2L}{dS_2^2} \Big|_{\bar{S}_2 = \bar{S}_1} = -2(1 - k\bar{S}_1^2),$$

to:

gdy  $k\bar{S}_1^2 > 1$ , w punkcie  $\bar{S}_2 = \bar{S}_1$  jest minimum,

gdy  $k\bar{S}_1^2 < 1$ , w punkcie  $\bar{S}_2 = \bar{S}_1$  jest maksimum,

gdy  $k\bar{S}_1^2 = 1$ , w punkcie  $\bar{S}_2 = \bar{S}_1$  jest punkt przegięcia.

Zatem dwa ekstrema są tylko wtedy, gdy  $k\bar{S}_1^2 > 1$ . Jedno z nich odpowiada odciętej  $\bar{S}_{2(1)} = \bar{S}_1$ , a drugie  $\bar{S}_{2(3)} < \bar{S}_1$ . Skoro w tym przypadku w  $\bar{S}_{2(1)} = \bar{S}_1$  jest minimum, to w  $\bar{S}_{2(3)}$  musi być maksimum.

Na rysunku 7.1 przedstawiono wykresy  $L(\bar{S}_2)$  dla wybranych wartości  $k$  i  $S_1$ .

7.4. Przebieg zmienności mianownika (M) prawej strony  
równania (4.3) w przedziale  $\bar{S}_2 \in [0, \bar{S}_1]$

- Punkty zerowe

Po wymnożeniu i uporządkowaniu mianownika:

$$M = a\bar{S}_2^4 + b\bar{S}_2^3 + d\bar{S}_2^2 + \bar{S}_2 + f, \quad (7.5)$$

$$a = ck^2,$$

$$e = 2c,$$

$$b = 2k(1+c),$$

$$f = \bar{S}_1 + c.$$

$$d = 1 + c + 2kc - k\bar{S}_1,$$

Jak widać, jedynie współczynnik  $d$  może przyjmować wartości ujemne. Gdy  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$ , wówczas także  $k\bar{S}_1 \ll 1$  i wtedy  $d > 0$ . Zatem mianownik (4.3) nie ma dodatniego pierwiastka rzeczywistego i gdy  $\bar{S}_2 \in [0, +\infty)$  jest dodatni. Jak stwierdzono wcześniej, gdy  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$  licznik (4.3) jest ujemny w przedziale  $[0, \bar{S}_1)$ , a gdy  $\bar{S}_2 = \bar{S}_1$  przyjmuje wartości zerowe. Wynika stąd, że cały ułamek (4.3) w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$  jest nieujemny. Ponadto, ze względu na brak pierwiastków mianownika ułamek jest wtedy funkcją ciągłą. Gdy  $d < 0$ , wówczas zgodnie z twierdzeniem Kartezjusza mianownik (4.3) może mieć dwa lub nie mieć wcale pierwiastków rzeczywistych. Ponadto ma on tyle pierwiastków większych od  $\bar{S}_1$ , ile dodatnich pierwiastków ma wielomian (7.5) po podstawieniu w miejsce  $\bar{S}_2$  argumentu  $\bar{S}_2 + \bar{S}_1$ . Po wykonaniu podstawienia i uporządkowaniu otrzymuje się wielomian czwartego stopnia o wszystkich współczynnikach dodatnich. Znaczy to, że mianownik (M) nie ma pierwiastków większych od  $\bar{S}_1$ , czyli wszystkie jego dodatnie pierwiastki leżą w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ .

- Ekstrema

Po przyrównaniu  $\frac{dM}{d\bar{S}_2}$  do zera otrzymuje się

$$a_1\bar{S}_2^3 + b_1\bar{S}_2^2 + d_1\bar{S}_2 + e_1 = 0, \quad (7.6)$$

$$a_1 = 2ck^2,$$

$$d_1 = 1 + c + 2kc - k\bar{S}_1,$$

$$b_1 = 3k(1 + c),$$

$$e_1 = c.$$

Gdy  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$  (tzn. także  $k\bar{S}_1 \ll 1$ ), wszystkie współczynniki (7.6) są dodatnie, więc mianownik nie ma ekstremów w dodatnim zakresie stężeń.

Gdy  $k\bar{S}_1^2 > 1$ , wówczas współczynnik  $d_1$  może przybierać wartości ujemne. Wtedy (7.6) może mieć dwa lub nie mieć wcale pierwiastków dodatnich i zawsze ma jeden ujemny. Postępując analogicznie jak w przypadku (7.5), można wykazać, że (7.6) nie ma pierwiastków większych od  $\bar{S}_1$ . Oznacza to, że jeżeli występują ekstrema mianownika (M) w dodatnim zakresie wartości  $\bar{S}_2$ , to są one w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ .



### 7.5. Określenie warunków ciągłości prawej strony równania (4.3)

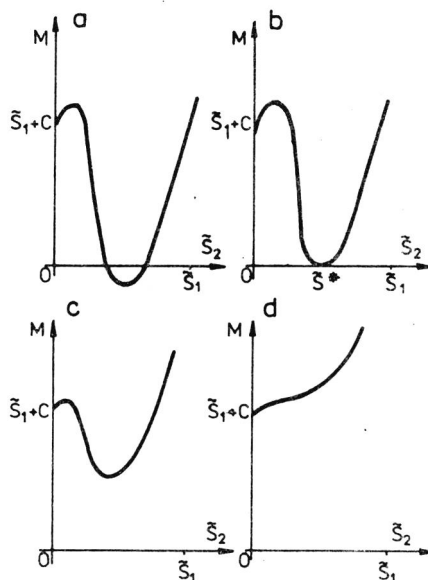
Wykres wielomianu (7.5) w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$  może mieć jeden z przebiegów przedstawionych na rys. 7.2. Rysunek ten obrazuje sposób wyprowadzenia zależności analitycznej, której spełnienie gwarantuje brak rzeczywistych pierwiastków mianownika (4.3) w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ . Zależność ta wynika z układu równań (7.5) i (7.6).

$$\begin{cases} M = 0, \\ \frac{dM}{d\bar{S}_2} = 0. \end{cases}$$

Z równania (7.5) należy obliczyć wartość  $\bar{S}_2^*$  (jest to największy dodatni pierwiastek) i wstawić do równania (7.6). Otrzymana się wtedy zależność analityczną, której spełnienie gwarantuje nieobecność doda-

Rys. 7.2. Możliwe kształty wykresów zależności mianownika (M) prawej strony równania (4.3) od stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ )

Fig. 7.2. Possible shapes of plots of denominator (M) of the right-hand side of the equation (4.3) versus substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ )



tnich pierwiastków mianownika w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ , a tym samym ciągłość funkcji opisanej ułamkiem (4.3). Ogólne rozwiązanie równania (7.5)

ma postać

$$Z_{1,2,3} = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + n \frac{2\pi}{3} \right),$$

gdzie:

$$\cos \varphi = \frac{3q}{2p \sqrt{\frac{-p}{3}}},$$

$$p = \frac{-3(1+c)^2 + 2(1+c+2kc - k\bar{S}_1)c}{4c^2 k^2},$$

$$q = \frac{(1+c)^3 - (1+c+2kc-k\bar{S}_1)(1+c)c+2c^3k}{4c^3k^3},$$

$$Z = \bar{S}_2 - w,$$

$$w = -\frac{1+c}{2ck}.$$

Ze względu na to, że  $(1+c+2kc-k\bar{S}_1) < 0$ , można napisać  $p < 0$  i  $q > 0$ , a więc

$$\cos \varphi = \frac{3\sqrt{3}[(1+c)^3 - (1+c+2kc-k\bar{S}_1)(1+c)c+2c^3k]}{-\sqrt{[3(1+c)^2 - 2(1+c+2kc-k\bar{S}_1)c]^3}} < 0.$$

Wynika z tego, że

$$\pi \gg \varphi > \pi/2.$$

Zatem, po oznaczeniu  $\gamma = \frac{\varphi}{3} + n \frac{2\pi}{3}$  otrzymuje się:

$$\text{dla } Z_1 \quad \gamma_1 = \varphi/3,$$

$$\text{dla } Z_2 \quad \gamma_2 = (\varphi + 2\pi)/3,$$

$$\text{dla } Z_3 \quad \gamma_3 = (\varphi + 4\pi)/3.$$

Stąd:

$$\pi/3 \gg \gamma_1 > \pi/6,$$

$$\pi \gg \gamma_2 > 5\pi/6,$$

$$5\pi/3 \gg \gamma_3 > 3\pi/2.$$

Wynika z tego:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > \cos \gamma_1 \gg 0,5,$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} > \cos \gamma_2 \gg -1,$$

$$0,5 \gg \cos \gamma_3 > 0$$

i dalej:

$$\cos \gamma_1 \gg \cos \gamma_3 > \cos \gamma_2,$$

czyli

$$Z_1 \gg Z_3 > Z_2.$$

Szukany pierwiastkiem jest zatem  $Z_1$ , gdyż ma on największą wartość.

Biorąc to pod uwagę można napisać

$$\bar{S}^* = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\arccos \frac{3q}{2p\sqrt{-p/3}}}{3} + w,$$

$$\bar{S}^* = \frac{1}{ck\sqrt{3}} \sqrt{3(1+c)^2 - 2(1+c+2kc-k\bar{S}_1)c} \times$$

$$\times \cos \frac{\arccos \frac{3\sqrt{3}[(1+c)^3 - (1+c+2kc-k\bar{S}_1)(1+c)c+2c^3k]}{\sqrt{[3(1+c)^2 - 2(1+c+2kc-k\bar{S}_1)c]^3}}}{3} - \frac{1+c}{2ck}$$

Po wstawieniu  $\bar{S}^*$  do równania (7.5) otrzymuje się zależność, którą muszą spełniać współczynniki wyrażenia (4.3), aby było ono funkcją ciągłą:

$$ck^2(\bar{S}^*)^4 + 2k(1+c)(\bar{S}^*)^3 + (1+c+2kc-k\bar{S}_1)(\bar{S}^*)^2 + 2c\bar{S}^* + \bar{S}_1 + c > 0 \quad (7.7)$$

Po przyrównaniu lewej strony tego wyrażenia do zera otrzymamy równanie przestępne, możliwe do rozwiązania tylko numerycznie. Zakładając w (7.7) wartości  $k$  i  $c$  oraz przyrównując do zera, otrzymujemy równanie, w którym jedyną niewiadomą jest  $\bar{S}_1$ . Po rozwiązaniu tego równania ze względu na  $\bar{S}_1$  dla różnych wartości  $k$  i  $c$  możemy sporządzić wykres  $\bar{S}_1 = f(k)$  dla  $c = \text{const}$ . Aby rozstrzygnąć, czy wielokrotność warunków ustalonych przy  $\bar{X}_E = +\infty$  zanika dla wartości  $\bar{S}_1$  mniejszych czy większych od  $\bar{S}_1$  obliczonych z wyrażenia (7.7), należy sprawdzić, znak pochodnej mianownika wyrażenia (4.3) w przedziale wartości  $\bar{S}$ , w którym znajduje się  $\bar{S}^*$ .

Zatem:

$$\frac{dM}{d\bar{S}_1} = -k\bar{S}_2^2 + 1$$

i dla

$$\frac{dM}{d\bar{S}_1} > 0 \quad \text{jest } \bar{S}_2 < \frac{1}{\sqrt{k}},$$

a dla

$$\frac{dM}{d\bar{S}_1} < 0 \quad \text{jest } \bar{S}_2 > \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Oznacza to, że gdy  $\bar{S}_2 > \frac{1}{\sqrt{k}}$  mianownik jest malejącą, a gdy  $\bar{S}_2 < \frac{1}{\sqrt{k}}$  rosnącą funkcją  $\bar{S}_1$ .

Gdy  $\bar{S}_2 \ll \frac{1}{\sqrt{k}}$ , mianownik (M) można zapisać w postaci

$$M = 2k \left( \frac{r}{\sqrt{k}} \right)^3 + \left( \frac{r}{\sqrt{k}} \right)^2 + \bar{S}_1(1-r^2) + c \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{k}} + r^2 \right)^2,$$

gdzie:

$$\frac{r}{\sqrt{k}} = \bar{S}_2 \quad \text{oraz} \quad 0 \ll r \ll 1.$$

Wynika z tego, że gdy  $0 \ll \bar{S}_2 \ll \frac{1}{\sqrt{k}}$ , jest on zawsze dodatni. Zatem, jeżeli M zeruje się w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ , to pierwiastki znajdują się: na pewno w przedziale  $\left( \frac{1}{\sqrt{k}}, \bar{S}_1 \right]$ . W szczególności w przedziale tym znajduje się także  $\bar{S}^*$ . Skoro w tym przedziale M jest malejącą funkcją  $\bar{S}_1$ , to dla wartości  $\bar{S}_1$  mniejszych niż policzone ze wzoru (7.7) nie występuje, a dla  $\bar{S}_1$  większych występuje wielokrotność warunków ustalonych dla  $\bar{X}_E = +\infty$ .

W przypadkach, gdy  $c=0$  (jest to przypadek czysto teoretyczny) (7.5) przybiera postać

$$M = 2k\bar{S}_2^3 + \bar{S}_2^2(1 - k\bar{S}_1) + \bar{S}_1. \quad (7.8)$$

Wielomian ten zgodnie z twierdzeniem Kartezjusza ma dwa albo jeden podwójny, albo nie ma wcale dodatnich pierwiastków. Jego wykres przedstawiono na rys. 7.3. Jak widać, wielomian (7.8) zeruje się w dodatnim przedziale wartości  $\bar{S}_2$  w przypadku, gdy punkt A leży poniżej punktu  $A_1$ . Jeżeli punkt A leży powyżej  $A_1$ , wielomian ten nie ma dodatnich pierwiastków. Przypadek, kiedy punkty A oraz  $A_1$  pokrywają się, rozgranicza te przypadki. Analitycznie ten graniczny przypadek można wyrazić układem równań:

$$\begin{cases} M = 0 & (7.9) \\ \frac{dM}{d\bar{S}_2} = 0 & (7.10) \end{cases}$$

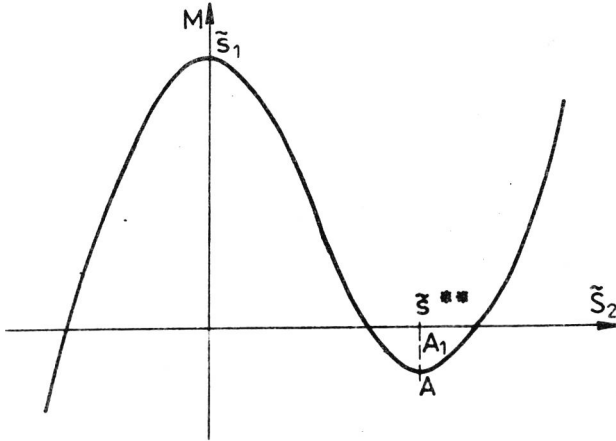
Zatem:

$$\frac{dM}{d\bar{S}_2} = 6k\bar{S}_2^2 + 2\bar{S}_2(1 - k\bar{S}_1) = 0 \quad (7.11)$$

Równanie to ma dwa rozwiązania:

$$\bar{S}_{(1)}^{**} = 0$$

$$\bar{S}_{(2)}^{**} = \frac{k\bar{S}_1 - 1}{3k} = \frac{\bar{S}_1}{3} - \frac{1}{3k} < \bar{S}_1$$



Rys. 7.3. Przebieg zmienności mianownika (M) prawej strony równania (4.3) w funkcji stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ ) w przypadku  $c=0$  (wzór (7.8))

Fig. 7.3. Variation of the denominator (M) of the right-hand side of the equation (4.3) as a function of substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ ) in the case of  $c=0$  (formula 7.8)

Po podstawieniu w (7.9) zamiast  $\bar{S}_2$  rozwiązania  $\bar{S}_2^{**}$  otrzymuje się warunek określający ciągłość funkcji (4.3), gdy  $c=0$ :

$$W = (1 - k\bar{S}_1)^3 + 27k^2\bar{S}_1 = 0. \quad (7.12)$$

Jeżeli

$$W > 0,$$

to punkt A leży powyżej punktu  $A_1$  i (7.8) nie ma żadnego pierwiastka większego od zera. Jeżeli  $W < 0$ , to (7.8) ma dwa pierwiastki dodatnie. Warunkiem istnienia fizycznego sensu tych pierwiastków jest niewykraczanie ich wartości poza przedział  $[0, \bar{S}_1]$ . Aby tak było wystarczy, żeby (zgodnie z twierdzeniem Kartezjusza) równanie (7.8) nie miało żadnego dodatniego pierwiastka dla argumentu wynoszącego  $(\bar{S}_2 + \bar{S}_1)$ .

Po podstawieniu tego argumentu do (7.8) otrzymuje się:

$$\bar{S}_2^3 + \bar{S}_2^2 \frac{5k\bar{S}_1 + 1}{2k} + \bar{S}_2 \frac{4k\bar{S}_1 + 2S_1}{2k} + \frac{k\bar{S}_1^3 + \bar{S}_1^2 + \bar{S}_1}{2k} = 0. \quad (7.13)$$

Zgodnie z twierdzeniem Kartezjusza równanie to ma dwa lub nie ma wcale dodatnich pierwiastków.

W punkcie  $\bar{S}_2^{**} < \bar{S}_1$  wielomian (7.8) ma minimum.

Zatem jeden z jego pierwiastków (gdy takie istnieją) jest na pewno mniejszy od  $\bar{S}_2^{**}$  (patrz rys. 7.3), a więc i mniejszy od  $\bar{S}_1$ . Dlatego ewentualnie tylko jeden z dodatnich pierwiastków mógłby być większy od  $\bar{S}_1$ . Jest to sprzeczne z wnioskami wynikłymi z analizy (7.13), a więc

niemożliwe. Jediną możliwością nie powodującą sprzeczności jest zawie-  
ranie się obu pierwiastków (7.8) w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ . W przypadku  
W < 0 istnieje zatem wielokrotność warunków ustalonych w reaktorze.

#### 7.6. Określenie ekstremów prawej strony równania (4.3)

$$\frac{d\bar{X}_E}{d\bar{S}_2} = (\bar{S}_1 - \bar{S}_2) \frac{L_1}{M_1}, \quad (7.14)$$

gdzie:

$$L_1 = b_5 \bar{S}_2^5 + b_4 \bar{S}_2^4 + b_3 \bar{S}_2^3 + b_2 \bar{S}_2^2 + b_1 \bar{S}_2 + b_0,$$

$$M_1 = d_4 \bar{S}_2^4 + d_3 \bar{S}_2^3 + d_2 \bar{S}_2^2 + d_1 \bar{S}_2 + d_0,$$

$$b_0 = 2(\bar{S}_1 + c + \bar{S}_1 c), \quad b_3 = 2k(2k\bar{S}_1 c - 4c - 1),$$

$$b_1 = 2(c + \bar{S}_1 + \bar{S}_1 c + 3k\bar{S}_1 c), \quad b_4 = -2k(1 + c + 3ck + k\bar{S}_1 c),$$

$$b_2 = 2k(4c\bar{S}_1 + \bar{S}_1 - 2c), \quad b_5 = -2k^2(1 + c + k\bar{S}_1 c),$$

$$d_0 = \bar{S}_1 + c, \quad d_3 = 2k(1 + c),$$

$$d_1 = 2c, \quad d_4 = ck^2.$$

$$d_2 = 1 + c + 2kc - k\bar{S}_1,$$

Wartość (7.14) wynosi zero, gdy  $(\bar{S}_1 - \bar{S}_2) L_1 = 0$ . Jednym pierwiastkiem  
jest zatem  $\bar{S}_2(1) = \bar{S}_1$ . Pozostałe zaś to pierwiastki  $L_1$ .

Jak łatwo zauważyć, współczynniki  $b_5$  i  $b_4$  są zawsze ujemne,  
a współczynniki  $b_1$  i  $b_0$  zawsze dodatnie. Jedyne współczynniki  $b_3$   
i  $b_2$  mogą przybierać zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

Z warunku  $b_3 > 0$  wynika:

$$\bar{S}_1 \gg \frac{4c+1}{2kc}. \quad (7.15)$$

Można wtedy napisać

$$b_2 = 8kc\bar{S}_1 + 2k\bar{S}_1 - 4kc \gg \frac{8kc(4c+1)}{2kc} + \frac{2k(4c+1)}{2kc} - 4kc,$$

$$b_2 \gg 16c + 8 + \frac{1}{c} - 4kc > 0.$$

Oznacza to, że jeżeli  $b_3 \gg 0$ , to także  $b_2 > 0$ . Są zatem możliwe co naj-  
wyżej następujące kombinacje znaków współczynników wielomianu  $L_1$ :

- - - + +  
 - - - + + +  
 - - + + + +

Każda z tych kombinacji daje tylko jeden dodatni pierwiastek, a więc prawa strona (4.3) ma tylko jedno ekstremum w przedziale  $\bar{S}_2 \gg 0$ .

Po podstawieniu do  $L_1$  argumentu  $(\bar{S}_2 + \bar{S}_1)$  otrzymuje się wielomian, który ma dla  $k\bar{S}_1^2 > 1$  wszystkie współczynniki dodatnie. Zatem  $L_1$  nie ma dodatnich pierwiastków większych od  $\bar{S}_1$ , więc rozważane tutaj ekstremum leży w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$ .

Przypadek  $k\bar{S}_1^2 \ll 1$  został wyłączony z rozważań, gdyż wtedy wielokrotność warunków ustalonych nie występuje, nawet gdy  $\bar{X}_E = 0$ .

Ostatecznie można stwierdzić, że gdy  $k\bar{S}_1^2 > 1$ , prawa strona (4.3) ma ekstrema w dwóch punktach z przedziału  $[0, \bar{S}_1]$ . W pierwszym

$$\bar{S}_{2(1)} = \bar{S}_1 \quad \text{i} \quad \bar{X}_E = 0.$$

W punkcie tym licznik (4.3) zeruje się i jest w nim jego minimum lokalne. Mianownik (4.3) w otoczeniu tego punktu jest dodatni i rosnący. Zatem cała prawa strona (4.3) ma w punkcie  $\bar{S}_{2(1)} = \bar{S}_1$  minimum lokalne. Wynika stąd, że drugim ekstremum (4.3) z przedziału  $[0, \bar{S}_1]$  jest maksimum lokalne. Jeżeli funkcja opisana równaniem (4.3) jest ciągła, to obecność maksimum w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$  oznacza, że istnieje pewna wartość  $\bar{X}_{E, \min}$ , powyżej której przy określonych wartościach  $k$ ,  $\bar{S}_1$ ,  $c$  nie występuje wielokrotność warunków ustalonych.

Aby dla określonych wartości  $k$ ,  $c$ ,  $\bar{S}_1$  określić wartość  $\bar{X}_{E, \min}$ , należy z wyrażenia  $L_1 = 0$  obliczyć wartość  $\bar{S}_2$ , przy której występuje ekstremum (4.3), wstawić ją do (4.3) i obliczyć wartość  $\bar{X}_{E, \min}$ . Oczywiście należy tak dobrać układ współczynników  $k$ ,  $c$ ,  $\bar{S}_1$ , żeby lewa strona wyrażenia (7.7) była dodatnia oraz żeby  $k\bar{S}_1^2 > 1$ .

#### 7.7. Określenie wpływu $\bar{X}_D$ na długość przedziału czasów przetrzymania, w którym występuje wielokrotność warunków ustalonych

Równanie (2.8) dla warunków ustalonych można przekształcić do postaci

$$Z = k\bar{S}_2^3 + \bar{S}_2^2(1 + \bar{\theta}kc\bar{X}_D - \frac{\bar{\theta}}{1+\alpha} - k\bar{S}_1) + \bar{S}_2(1 + \bar{\theta}\bar{X}_D + \frac{\bar{\theta}\bar{S}_1}{1+\alpha} - \bar{S}_1 + \bar{\theta}c\bar{X}_D) - \bar{S}_1 + \bar{\theta}c\bar{X}_D = 0. \quad (7.16)$$

Zatem

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{\theta}} = \bar{S}_2^2(kc\bar{X}_D - \frac{1}{1+\alpha}) + \bar{S}_2(\bar{X}_D + c\bar{X}_D + \frac{\bar{S}_1}{1+\alpha}) + c\bar{X}_D. \quad (7.17)$$

W przedziale  $[0, \bar{S}_1]$  jest  $\bar{S}_2^2 \ll \bar{S}_2 \bar{S}_1$ , zatem  $\frac{\partial Z}{\partial \bar{\theta}} > 0$ .

Skoro

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{X}_D} = \bar{S}_2^2 \bar{\theta} kc + \bar{S}_2 \bar{\theta} (1+c), \quad (7.18)$$

to w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$   $\frac{\partial Z}{\partial \bar{X}_D} \gg 0$ .

Skoro

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{X}_D \partial \bar{S}_2} = 2\bar{S}_2 \bar{\theta} kc + \bar{\theta} (1+c), \quad (7.19)$$

to w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$   $\frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{X}_D \partial \bar{S}_2} > 0$ , a więc przyrost  $Z$  przy zwiększeniu  $\bar{X}_D$  jest tym większy, im wyższa jest wartość  $\bar{S}_2$ .

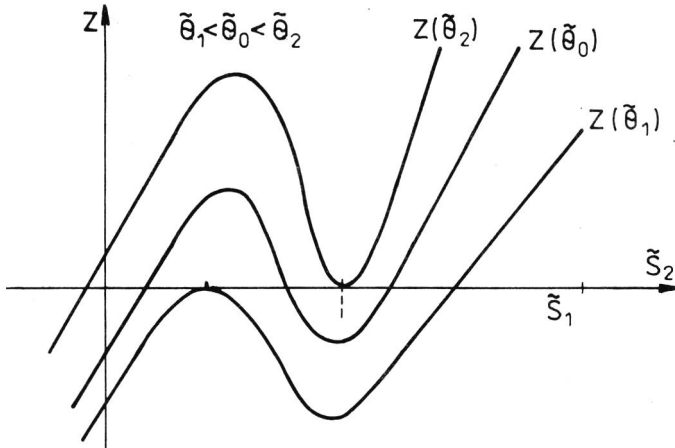
Skoro

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{\theta} \partial \bar{X}_D} = \bar{S}_2^2 kc + \bar{S}_2 (1+c), \quad (7.20)$$

to w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$   $\frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{\theta} \partial \bar{X}_D} \gg 0$ , co oznacza, że przyrost  $Z$  przy wydłużaniu  $\bar{\theta}$  jest tym większy, im wyższa jest wartość  $\bar{X}_D$ .

Ogólny kształt wykresu funkcji  $Z$  przedstawiono na rys. 7.4.

Krzywe  $Z(\bar{\theta}_1)$  i  $Z(\bar{\theta}_2)$  są przesunięte w stosunku do  $Z(\bar{\theta}_0)$  z powodu odpowiedniego zmniejszenia do  $\bar{\theta}_1$  i zwiększenia do  $\bar{\theta}_2$  czasu przetrzymania



Rys. 7.4. Przebiegi zmienności wielkości ( $Z$ ) opisanej wzorem (7.16) w funkcji stężenia substratu w odpływie ( $\bar{S}_2$ )  
 Fig. 7.4. Variation of the quantity ( $Z$ ) rendered by the equation (7.16) as a function of substrate concentration in the effluent ( $\bar{S}_2$ )



T a b e l a 7.1

Ekstrema funkcji opisanej wzorem (14) ( $c=0,2$ ;  $k=0,1$ )

Parametr	1 + $\alpha$				
	1	5	10	50	100
	a) $\bar{X}_D = 100, \bar{S}_1 = 100$				
$\bar{S}_2(\bar{\theta}_g)$	0,38958E 02	0,31580E 02	0,30327E 02	0,29242E 02	0,29100E 02
$\bar{\theta}_g$	0,11578E 01	0,14516E 01	0,15045E 01	0,15510E 01	0,15571E 01
$\bar{S}_2(\bar{\theta}_d)$	0,33597E 01	0,35106E 01	0,35476E 01	0,35833E 01	0,35882E 01
$\bar{\theta}_d$	0,68846E 00	0,10384E 01	0,11087E 01	0,11722E 01	0,11807E 01
$\bar{S}_2(\bar{\theta}_g) - \bar{S}_2(\bar{\theta}_d)$	0,35598E 02	0,28069E 02	0,26780E 02	0,25658E 02	0,25512E 02
$\bar{\theta}_g - \bar{\theta}_d$	0,46934E 00	0,41323E 00	0,39577E 00	0,37878E 00	0,37644E 00
b) $\bar{X}_D = 100, \bar{S}_1 = 400$					
$\bar{S}_2(\bar{\theta}_g)$	0,16493E 03	0,11612E 03	0,10523E 03	0,94556E 02	0,93053E 02
$\bar{\theta}_g$	0,60047E 01	0,87557E 01	0,94395E 01	0,10135E 02	0,10235E 02
$\bar{S}_2(\bar{\theta}_d)$	0,31798E 01	0,32115E 01	0,32259E 01	0,32454E 01	0,32487E 01
$\bar{\theta}_d$	0,12235E 01	0,30554E 01	0,37589E 01	0,46076E 01	0,47414E 01
$\bar{S}_2(\bar{\theta}_g) - \bar{S}_2(\bar{\theta}_d)$	0,16175E 03	0,11290E 03	0,10200E 03	0,91310E 02	0,89805E 02
$\bar{\theta}_g - \bar{\theta}_d$	0,47812E 01	0,57003E 01	0,56807E 01	0,55272E 01	0,54932E 01

	c) $\bar{x}_D = 500, \bar{s}_1 = 100$				
$\bar{s}_2(\bar{\theta}_g)$	0,31580E 02	0,29521E 02	0,29242E 02	0,29014E 02	0,28986E 02
$\bar{\theta}_g$	0,29032E 00	0,30780E 00	0,31020E 00	0,31217E 00	0,31241E 00
$\bar{s}_2(\bar{\theta}_d)$	0,35106E 01	0,35738E 00	0,35833E 01	0,35912E 01	0,35923E 01
$\bar{\theta}_d$	0,20767E 00	0,23114E 00	0,23445E 00	0,23716E 00	0,23751E 00
$\bar{s}_2(\bar{\theta}_g) - \bar{s}_2(\bar{\theta}_d)$	0,28069E 02	0,25947E 02	0,25658E 02	0,25423E 02	0,25393E 02
$\bar{\theta}_g - \bar{\theta}_d$	0,82646E - 01	0,76662E - 01	0,75756E - 01	0,75003E - 01	0,74907E - 01

w reaktorze. Dla czasów przetrzymania dłuższych od  $\bar{\theta}_2$  i krótszych od  $\bar{\theta}_1$  może występować najwyżej jeden pierwiastek Z. W przedziale czasów przetrzymania  $[\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$  równanie (7.16) ma trzy pierwiastki, zatem przedział między  $\bar{\theta}_1$  i  $\bar{\theta}_2$  jest tym przedziałem czasów przetrzymania, w którym występuje wielokrotność warunków ustalonych. Przedział ten jest tym dłuższy, im większa jest odległość pomiędzy minimum i maksimum lokalnym funkcji Z. Odległość ta zmniejsza się wraz ze wzrostem wartości  $\bar{X}_D$ , gdyż wtedy zgodnie z (7.19) wartość funkcji Z rośnie szybciej w miejscu, w którym ma ona minimum niż w miejscu, w którym ma maksimum. Oznacza to, że wartości Z w tych punktach zbliżają się do siebie wraz ze wzrostem  $\bar{X}_D$ .

Zważywszy, że  $\frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{\theta} \partial \bar{X}_D} > 0$ , można stwierdzić, że wraz ze wzrostem  $\bar{X}_D$  różnica wartości  $\bar{\theta}_1$  i  $\bar{\theta}_2$  maleje, a zatem maleje przedział czasów przetrzymania, w którym występuje wielokrotność warunków ustalonych. Ponadto wraz ze wzrostem wartości  $\bar{X}_D$  maleje zarówno  $\bar{\theta}_1$ , jak i  $\bar{\theta}_2$ , a więc przedział występowania wielokrotności warunków ustalonych przesuną się w kierunku krótszych czasów przetrzymania.

7.8. Określenie wpływu stopnia recyrkulacji ( $\alpha$ )  
na długość przedziału czasów przetrzymania,  
w którym występuje wielokrotność warunków ustalonych

Na podstawie (2.9) łatwo wykazać, że w przedziale  $[0, \bar{S}_1]$   $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \alpha} \gg 0$ . Wynika z tego, że wraz ze wzrostem  $\alpha$  przedział występowania wielokrotności warunków ustalonych przesuną się w kierunku dłuższych czasów przetrzymania ( $\bar{\theta}$ ). Nie udało się wykazać analitycznie wpływu wartości  $\alpha$  na długość przedziału czasów przetrzymania, w którym występuje wielokrotność warunków ustalonych.

W celu zobrazowania tego wpływu przeprowadzono obliczenia na maszynie cyfrowej. Dla dwóch przykładowych stężeń biomasy ( $\bar{X}_D$ ) oraz  $\bar{S}_1=100$ ,  $k=0,1$ ,  $c=0,2$  wyznaczono wartości stężeń  $\bar{S}_2$ , przy których występują ekstrema na krzywej zależności  $\bar{S}_2(\bar{\theta})$  (patrz rys. 3.1). Wyniki zestawiono w tabeli 7.1, w której przez  $\bar{S}_2(\bar{\theta}_d)$  oznaczono stężenie odpowiadające dolnemu krańcowi przedziału występowania wielokrotności warunków ustalonych ( $\bar{\theta}_d$ ), a przez  $\bar{S}_2(\bar{\theta}_g)$  stężenie odpowiadające górnemu krańcowi tego przedziału ( $\bar{\theta}_g$ ). Jak widać, wzrost wartości  $\alpha$  może spowodować zarówno skrócenie przedziału występowania wielokrotności warunków ustalonych (np. dla  $\bar{X}_D=100$  i  $\bar{S}_1=100$ ), jak i jego wydłużenie (np. dla  $\bar{X}_D=100$  i  $\bar{S}_1=400$ ).

7.9. Program "XEMIN FINDING"

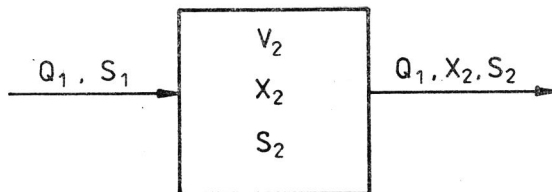
```

10 REM XEMIN= $\bar{X}_{E,\min}$ , S1= $\bar{S}_1$ , C=c, K=k
20 INPUT S1
30 INPUT K
40 INPUT C
50 LET B$=" -((S1-W)*(S1-W)*(K*W*W-1))/(2*K*W*W*W+W*W*(1-K*S1)+
      +S1+C*(1+W+K*W*W)*(1+W+K*W*W))"
60 LET A12=0
70 LET A13=S1
80 LET W=A12
90 LET H=(A13-A12)/100
100 LET H1=H
110 LET E1=H*1E-7
120 LET D=VAL B$
130 LET C1=D
140 LET W=W+H1
150 IF W < A13 THEN GOTO 170
160 LET XEMIN1=A13
170 LET D=VAL B$
180 IF D < C1 THEN GOTO 130
190 LET H$=-H1/2
200 IF ABS H1 > E1/2 THEN GOTO 130
210 LET XEMIN1=W
220 PRINT "XEMIN="; -VAL B$
230 STOP

```

7.10. Doświadczalne wyznaczanie stałych  $K_S$ ,  $K_I$ ,  $\mu_{\max}$ , Y oraz m

Niezależnie od charakteru zależności  $\mu$ -S do wyznaczania stałych  $\mu_m$ ,  $K_S$  i  $K_I$  niezbędna jest znajomość wartości stałej szybkości przyrostu ( $\mu$ ) dla różnych stężeń substratu (S). Wielu autorów uważa, że dobrym sposobem, jest wyznaczanie stałej  $\mu$  w hodowli ciągłej [14], [15], [23] przy wykorzystaniu chemostatu [24]. Dla chemostatu, którego



Rys. 7.5. Schemat chemostatu z zaznaczeniem stosowanych symboli  
Fig. 7.5. Sketch of chemostat with the used symbols

schemat przedstawiono na rys. 7.5. można napisać bilanse biomasy i substratu:

$$V_2 \frac{dX_2}{dt} = V_2 \mu X_2 - Q_1 X_2, \quad (7.21)$$

$$V_2 \frac{dS_2}{dt} = Q_1 (S_1 - S_2) - V_2 \frac{\mu}{Y_{\text{obs}}} X_2. \quad (7.22)$$

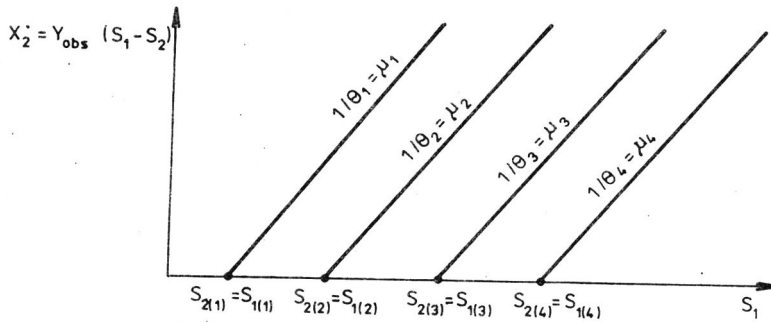
W warunkach ustalonych ( $dX_2/dt = dS_2/dt = 0$ ) uzyskuje się:

$$\mu = \frac{1}{\theta} \quad (7.23)$$

oraz

$$X_2 = Y_{\text{obs}} (S_1 - S_2). \quad (7.24)$$

Po określeniu dla różnych czasów przetrzymywania ( $\theta$ ) wartości odpowiadających im stężeń substratu w chemostacie ( $S_2$ ) ustala się zależność  $(1/\theta) = \mu = f(S_2)$ . Wyznaczenie wartości stężeń substratu dla bardzo długich czasów przetrzymania może być kłopotliwe ze względu na niedostateczną czułość metod analitycznych. Button [25] zaproponował metodę, która umożliwiła pokonanie tej trudności. Wykorzystuje się w niej fakt, że w warunkach ustalonych stężenie substratu w chemostacie ( $S_2$ ), przy stałej wartości  $\theta$ , nie zależy od stężenia substratu w dopływie do chemostatu ( $S_1$ ) oraz że stężenie biomasy w chemostacie ( $X_2$ ) wyraża się wzorem (7.24). Jak widać ze wzoru (7.24), zależność  $X_2 = f(S_1)$  dla określonej wartości  $\theta$  jest liniowa. Zatem po oznaczeniu stężenia biomasy w chemostacie dla różnych wartości  $S_1$  (rys. 7.6) i ekstrapolacji otrzymanych wyników liniowo do wartości  $X_2 = 0$  otrzymuje się szukane stężenie substratu w chemostacie ( $S_{2(n)} = S_{1(n)}$ ). Należy tutaj podkreślić, że wykorzystanie chemostatu jest na tyle uzasadnione, na ile dokładnie spełniona jest zależność (7.23). Niestety, najczęściej tak nie jest ze względu na obrastanie ścian chemostatu biomasą ( $X_A$ ). Gdy zjawiska tego nie wyeliminuje się w czasie doświadczenia, mogą wystąpić istotne niedokładności [26], [27]. Omawiana metoda jest nieprzydatna w przypadku inhibitowa-



Rys. 7.6. Pośredni sposób wyznaczania stężenia substratu ( $S_{2(n)}$ ) w chemostacie  
 Fig. 7.6. Indirect way of determining of substrate concentration ( $S_{2(n)}$ ) in the chemostat

nia wzrostu mikroorganizmów przez substrat, gdyż w pewnym zakresie stężeń substratu występuje wtedy wypłukanie biomasy z chemostatu [28]. Jones [2] zaproponował zastosowanie dwóch chemostatów, dzięki czemu można zapobiec zjawisku wypłukania biomasy.

Herbert [26] i Slezak [27] uważają, że najlepszym sposobem wyznaczania stałej  $\mu$  dla różnych stężeń substratów są badania w hodowlach okresowych. Wychodzi się z podstawowego równania opisującego przyrost biomasy w takich hodowlach:

$$\frac{dX_2}{dt} = \mu X_2. \quad (7.25)$$

Po scałkowaniu otrzymuje się zależność:

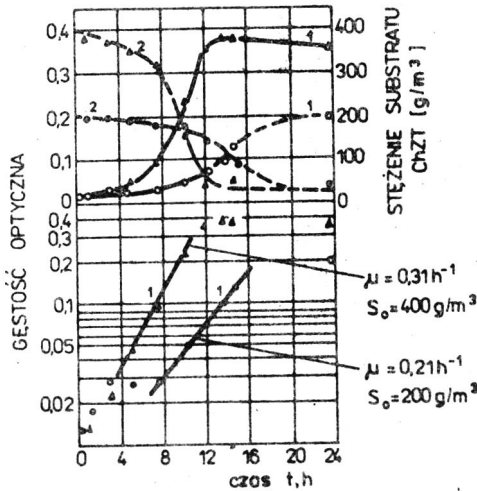
$$\ln X_2 = \mu \cdot t + \ln X_0, \quad (7.26)$$

w której:

$X_0$  oznacza początkowe stężenie biomasy w hodowli. Jak widać, wykres zależności  $\ln X_2 = f(t)$  jest linią prostą, której nachylenie określa wartość  $\mu$ .

Bierze się kilka naczyń zawierających roztwory substratu o różnych stężeniach i dodaje się mikroorganizmy zaadaptowane do rozkładu tego substratu. Co jakiś czas mierzy się stężenie biomasy w naczyniach. Otrzyma się szereg krzywych przyrostu biomasy. Krzywe te powinny w układzie współrzędnych  $\ln X_2 - t$  mieć prostoliniowe odcinki o różnych nachyleniach dla różnych początkowych stężeń substratu.

Należy zauważyć, że w czasie hodowli wzrostowi stężenia biomasy ( $X_2$ ) towarzyszy ciągły spadek stężenia substratu ( $S_2$ ). Przykładową zależność przedstawiono na rys. 7.7. Powstaje zatem problem, którą wartość stężenia substratu należy przyjąć przy sporządzaniu zależności



Rys. 7.7. Przebieg zmian stężenia biomasy (1) i substratu (2) w hodowli okresowej zasilanej przez 200 i 400 g/m<sup>3</sup> ChZT [16]  
 Fig. 7.7. Variation of the concentration of biomass (1) and substrate (2) in the batch culture, fed with 200 and 400 g/m<sup>3</sup> of COD [16]

$\mu = f(S_2)$ . Postać modelu Monoda (4) i innych (5) sugeruje, że każdej zmianie stężenia substratu ( $S$ ) w hodowli towarzyszy natychmiastowa zmiana stałej szybkości przyrostu ( $\mu$ ). Wynika z tego, że skoro w hodowli okresowej stężenie substratu ciągle się zmniejsza (rys. 7.7), to także ciągle musi ulegać zmianie stała szybkości przyrostu mikroorganizmów. Znaczyłoby to, iż nie może występować żaden prostoliniowy odcinek na krzywej  $\ln X_2 = f(t)$  (tzn. odcinek, na którym  $\mu = \text{const}$ ). Doświadczenia wykazują, że taki prostoliniowy odcinek występuje [4], [5], [16], [17], co podważa poprawność przytoczonego rozumowania. Błędem w nim jest stwierdzenie, że mikroorganizmy, podobnie jak wolne enzymy, natychmiast reagują na zmianę stężenia substratu w środowisku zewnętrznym, dostosowując do niego swoją szybkość przyrostu. W rzeczywistości o szybkości przyrostu mikroorganizmów decyduje stężenie substratu wewnątrz komórki (w mikrośrodowisku), które to stężenie zmienia się z pewnym opóźnieniem w stosunku do zmian stężenia w roztworze zewnętrznym. W związku z tym jest możliwe, że krzywa przyrostu ma odcinek prostoliniowy, tzn. wzrost następuje jak gdyby przy nie zmieniającym się stężeniu substratu, pomimo że w roztworze zewnętrznym następuje ciągła zmiana stężenia. Wynika z tego, iż do wyznaczenia zależności  $\mu = f(S_0)$  należy przyjąć stężenie początkowe substratu w hodowli okresowej [1].

Pewną niedogodnością stosowania hodowli okresowej jest możliwość występowania w doświadczeniu fazy zastoju. Pawlowsky [7] twierdzi, że długość lag fazy nie wpływa na wartość stałej szybkości przyrostu mikroorganizmów wyznaczonej metodą najmniejszych kwadratów z prostoliniowego odcinka krzywej przyrostu. Jednakże należy dążyć do skrócenia tej fazy, stosując odpowiednio wysokie stężenia początkowe mikroorganizmów zaadaptowanych do rozkładu badanego substratu i będących w fazie wzrostu logarytmicznego. Najłatwiej można to osiągnąć, pobierając mikroorganizmy z hodowli ciągłej. Stężenie początkowe mikroorganizmów należy tak dobierać, aby odcinek prostoliniowy krzywej przyrostu był dostatecznie długi (najlepiej kilka godzin). Dzięki temu mniejsze będą błędy wynikające z niedoskonałości metod analitycznych oznaczania stężenia mikroorganizmów.

Zależnie od rodzaju badanego substratu limitującego przyrost oraz od jego stężenia w hodowli stosuje się różne stężenia początkowe mikroorganizmów i uzyskuje się różne ich przyrosty. W zależności od wielkości tych stężeń oraz objętości prób, które można jednorazowo wziąć do oznaczenia zawartości biomasy, stosuje się różne metody analityczne (tab. 7.2).

T a b e l a 7.2

Porównanie czułości różnych metod oznaczania  
stężenia biomasy [28]

Lp.	Metoda	Minimalna ilość suchej masy bakterii potrzebna do wykonania oznaczenia z błędem < 2%, mg
1.	Oznaczenie suchej masy	5,0
2.	Oznaczenie białka komórkowego (zależnie do metody)	$10^{-1}$ -1,0
3.	Oznaczania DNA	1,0
4.	Oznaczenie gęstości optycznej hodowli	$10^{-1}$
5.	Liczenie komórek	$10^{-5}$

W przypadku osadu czynnego i w zakresie stężeń substratów interesujących z punktu widzenia biologicznego oczyszczania ścieków najbardziej przydatne są metody, w których wykorzystuje się oznaczanie gęsto-



ści optycznej hodowli i oznaczanie suchej masy. Gęstość optyczna musi być wyznaczana w próbach homogenizowanych.

### 7.10.1. Wyznaczanie stałych $K_S$ , $K_I$ oraz $\mu_{\max}$

Gdy  $K_I \rightarrow +\infty$ , to znaczy, gdy nie ma inhibicji substratem, model (5) upraszcza się do modelu Monoda, który można łatwo zlinearyzować do postaci:

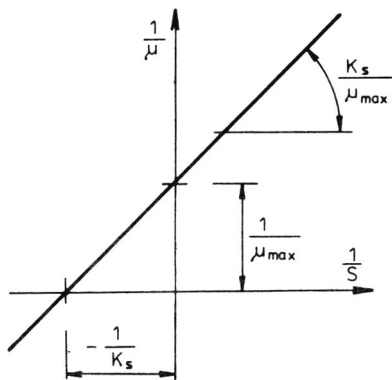
$$\frac{1}{\mu} = \frac{K_S}{\mu_{\max}} \frac{1}{S} + \frac{1}{\mu_{\max}}. \quad (7.27)$$

Z zależności  $\frac{1}{\mu}$  od  $\frac{1}{S}$  można wyznaczyć stałe  $K_S$  i  $\mu_{\max}$  (rys. 7.8). W przypadku, w którym występuje inhibicja substratem można postępować w następujący sposób w celu wyznaczenia stałych [2]:

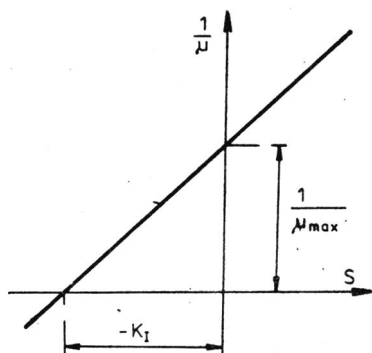
(1) Gdy stężenia substratu ( $S$ ) są bardzo duże, wówczas czynnik  $K_S$  w modelu (5) ma niewielkie znaczenie i można napisać:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_{\max}} + \frac{S}{\mu_{\max} K_I}. \quad (7.28)$$

Rysując wykres zależności  $\frac{1}{\mu} = f(S)$  dla dużych stężeń, można wyznaczyć wartości stałych  $\mu_{\max}$  i  $K_I$  (rys. 7.9).



Rys. 7.8. Sposób wyznaczania stałych  $K_S$  i  $\mu_{\max}$  w układzie bez hamowania substratowego  
Fig. 7.8. Way of determining of the constants  $K_I$  and  $\mu_{\max}$  in the system without substrate inhibition



Rys. 7.9. Sposób wyznaczania stałych  $K_I$  i  $\mu_{\max}$  w układzie z hamowaniem substratowym  
Fig. 7.9. Way of determining of the constants  $K_I$  and  $\mu_{\max}$  in the system with inhibitory substrate

(2) Gdy wartość  $S$  jest mała, wtedy w modelu (5) czynnik  $\frac{S^2}{K_I}$  ma niewielkie znaczenie i model przyjmuje postać Monoda, z której po lineary-

zacji łatwo wyznaczyć stałą  $K_S$  (rys. 7.8). Edwards [11] wyznaczał stałe  $K_S$ ,  $K_I$ ,  $\mu_{\max}$ , stosując nieliniową metodę najmniejszych kwadratów dla aproksymacji danych doświadczalnych funkcją opisaną wzorem (5).

Autor niniejszej pracy zaproponował przekształcenie modelu (5) do postaci wielomianu drugiego stopnia [6]:

$$\frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu_{\max} K_I} S^2 + \frac{1}{\mu_{\max}} S + \frac{K_S}{\mu_{\max}}. \quad (7.29)$$

Oznaczając:

$$\frac{S}{\mu} = y; \quad \frac{1}{\mu_{\max} K_I} = a; \quad \frac{1}{\mu_{\max}} = b; \quad \frac{K_S}{\mu_{\max}} = c,$$

można napisać:

$$y = aS^2 + bS + c. \quad (7.30)$$

Na podstawie podprogramu aproksymacji danych empirycznych wielomianem  $n$ -tego stopnia wyznacza się wartości współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , i na ich podstawie oblicza wartości stałych  $\mu_{\max}$ ,  $K_S$ ,  $K_I$  ze wzorów:

$$K_I = \frac{b}{a}; \quad K_S = \frac{c}{b}; \quad \mu_{\max} = \frac{1}{b}.$$

#### 7.10.2. Wyznaczanie stałych $Y$ i $m$

Wartość współczynnika wydajności przyrostu  $Y_{\text{obs}}$  jest często w praktycznych rozważaniach przyjmowana za stałą. Uproszczenie takie jest uzasadnione w przypadkach, kiedy wartość stałej szybkości wzrostu ( $\mu$ ) nie jest bardzo mała. Wtedy bowiem błąd powstały wskutek tego uproszczenia jest niewielki (3).

Korzystając ze wzoru (3) można wyznaczyć stałe  $Y$  i  $m$ . W tym celu należy sporządzić wykres zależności  $\frac{1}{Y_{\text{obs}}} = f\left(\frac{1}{\mu}\right)$  (rys. 7.10), na podstawie którego można wyznaczyć wartości szukanych stałych. Wartości  $Y_{\text{obs}}$  dla różnych  $\mu$  w hodowli okresowej należy wyznaczyć ze wzoru:

$$\bar{Y}_{\text{obs}} = \frac{\Delta X}{\Delta S}, \quad (7.31)$$

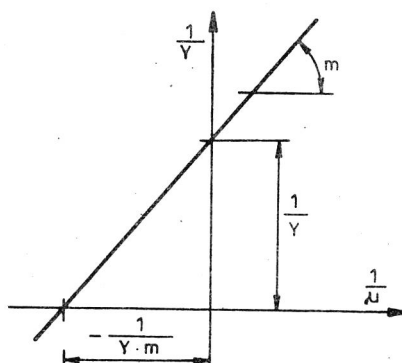
w którym:

$\Delta X$  - przyrost stężenia biomasy  $\text{g smo/m}^3$  uzyskany przy zmniejszeniu stężenia substratu  $\Delta S \text{ g/m}^3$ .

W przypadku stosowania chemostatu do wyznaczania parametrów kinetyki mikrobiologicznej, ze wzoru (7.24) otrzymuje się:

$$Y_{\text{obs}} = \frac{X_2}{S_1 - S_2}. \quad (7.32)$$

Zgodnie z tym wartość  $Y_{\text{obs}}$  można obliczać na podstawie jednego doświadczenia w warunkach ustalonych. Biorąc pod uwagę wykresy z rys. 7.6,  $Y_{\text{obs}}$  można wyznaczyć także jako wartość współczynnika kierunkowe-



Rys. 7.10. Sposób wyznaczania stałych  $Y$  i  $m$   
Fig. 7.10. Way of determining of the constants  $Y$  and  $m$

go prostej  $\bar{X}_2 - \bar{S}_1$ . W wyniku tego sposobu postępowania otrzymuje się wartości obarczone mniejszym błędem.

#### LITERATURA

- [1] MONOD J., Ann. Inst. Pasteur, 79, 390 (1950).
- [2] JONES G.L., JANSEN F., MCKAY A.J., J. Gen. Microbiol., 74, 139 (1973).
- [3] CHI C.T., HOWELL J.A., Biotechnol. Bioeng., 18, 63 (1976).
- [4] JANG R., HUMPHREY A.E., Biotechnol. Bioeng., 17, 1211 (1975).
- [5] PAWLOWSKY U., HOWELL J.A., Biotechnol. Bioeng., 15, 889 (1973).
- [6] SZETELA R.W., WINNICKI T.Z., Biotechnol. Bioeng., 23, 1485 (1981).
- [7] WAYMAN M., TSENG M.C., Biotechnol. Bioeng., 18, 383 (1976).
- [8] UEMURA N., TAKAHASHI J., UEDA K., J. Ferment. Technol., 47, 220 (1969).
- [9] GRANT D.J.W., J. Gen. Microbiol., 46, 213 (1967).
- [10] BOON B., LAUDELOUT H., Biochem. J., 85, 440 (1962).
- [11] EDWARDS V.H., Biotechnol. Bioeng., 12, 679 (1970).
- [12] YANO T., KOGA S., Biotechnol. Bioeng., 11, 139 (1969).
- [13] YANO T., NAKAHARA T., KAWIYAMA S., YAMADA K., Agr. Biol. Chem., 30, 42 (1966).
- [14] BOYLE W., ROHLICH G.A., Biotechnol. Bioeng., 8, 405 (1966).
- [15] GASSEL E.A., SULZER F.T., LAMB J.C., J. Wat. Pollut. Control. Fed., 38, 1398 (1966).
- [16] GAUDY A.F. Jr., GRANDY E.T., Advances in Biochemical Engineering, T.K. Ghose, Ed. (New York, Wiley, 1972).
- [17] GAUDY A.F. Jr., RAMANATHAN M., RAO B.S., Biotechnol. Bioeng., 9, 387 (1967).

- [18] SCOTT C.D., HANCHER C.W., HOLLADAY D.W., DINSMORE G.B., Proceedings of the Symposium on Environmental Aspects of Fuel Conversion Technology II, EPA, December 15 (1975).
- [19] EGGERS E., TERLOUW T., Water Res., 13, 1077 (1979).
- [20] SZETELA R., Praca doktorska, Instytut Inżynierii Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej (1979).
- [21] SZETELA R., Praca magisterska, Instytut Inżynierii Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej (1976).
- [22] CHI C.T., HOWELL A.J., PAWLOWSKY U., Chem. Eng. Sci., 29, 207 (1974).
- [23] SPICKA I., Adv. in Water Poll. Res. (proc. 4th Intern. Conf.), Prague, 329, (1969).
- [24] SCHLEGEL H., Mikrobiologia ogólna, Warszawa, PWRiL, 1975.
- [25] BUTTON D., GEN J., Mikrobiol., 58, 15 (1969).
- [26] HERBERT D., ELSWORTH R., TELLING R., GEN J., Microbiol., 14, 601 (1956).
- [27] SLEZAK J., SIKYTA B., J. Biochem. Microbiol. Technol. Eng., 3, 357 (1961).
- [28] PIRT S.J., Principles of Microbe and Cell cultivation, Black Well Scientific Publications, London, Oxford, (1975).

INTERPRETATION OF INHIBITORY SUBSTRATE BIODEGRADATION  
IN THE COMPLETELY MIXED ACTIVATED SLUDGE REACTOR  
WITH THE USE OF MATHEMATICAL MODEL

In the work, there is presented the use of mathematical model of biodegradation in the completely mixed activated sludge for the interpretation of phenomena that accompany biodegradation of inhibitory substrates.

Substrate consumption for the biomass growth and maintenance has been considered.

The multiplicity of steady-states has been stated to be possible. In such a case there exists a peril of instability of the sewage treatment process. It may be manifested by a sudden deterioration of sewage treatment efficiency.

The conditions to avoid this unfavourable phenomenon have been given. Above certain concentration of substrate in treated sewage it is impossible to eliminate the multiplicity of steady-states.

In such a case, unstable reactor work may be avoided only partially. The influence of the following technological variables on elimination of that instability has been analysed:

- a) recirculation from the hopper of secondary settling tank,
- b) biomass supply from beyond the system,
- c) immobilizing of a part of biomass on the carrier inside the reactor,
- d) dilution of raw sewage with receiver water.

It has been stated that the immobilizing of a part of biomass on the carrier is most purposeful.

## БИОДЕГРАДАЦИЯ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СУБСТРАТОВ В КАМЕРЕ ПОЛНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

В работе представлена математическая модель биодegradации субстратов, замедляющих прирост микроорганизмов в камере полного перемешивания. В ней учтено потребление субстрата на прирост биомассы и сохранение её метаболической активности. Было отмечено, что возможна многократность установленных условий. В таком случае существует опасность нестабильности процесса очистки сточных вод. Это может проявляться в неожиданном ухудшении эффективности очистки. Даны условия, которых выполнение исключает это отрицательное явление. Выше некоторой концентрации ингибирующего субстрата в очищаемых сточных водах невозможно исключение многократности установленных условий. Нестабильную работу реактора можно тогда исключить лишь частично. Проанализировано влияние следующих технологических действий на исключение этой нестабильности: а) рециркуляции из воронки вторичного отстойника, б) введения биомассы из вне системы, в) блокировки части биомассы на носителе внутри реактора, г) разбавления сырых сточных вод водой приёмника. Было установлено, что наиболее целесообразной является блокировка части биомассы на носителе.

## SPIS RZECZY

Oznaczenia . . . . .	3
1. Zagadnienia wstępne . . . . .	5
1.1. Wprowadzenie . . . . .	5
1.2. Podstawowe pojęcia . . . . .	6
2. Model matematyczny oczyszczania ścieków w reaktorze o całkowitym wymieszaniu . . . . .	8
3. Zależność stężenia substratu od czasu przetrzymania . . . . .	12
4. Określenie warunków występowania i eliminowania niestabilnej pracy reaktora . . . . .	14
5. Niepełna eliminacja niestabilnej pracy reaktora . . . . .	20
6. Wnioski . . . . .	22
7. Wyprowadzenie podstawowych zależności . . . . .	22
7.1. Przebieg zmienności SD . . . . .	22
7.2. Przebieg zmienności SU w przedziale $\bar{S}_2 \in [0, +\infty)$ . . . . .	23
7.3. Przebieg zmienności licznika L prawej strony równania (4.3) w przedziale $\bar{S}_2 \in [0, \bar{S}_1]$ . . . . .	24
7.4. Przebieg zmienności mianownika M prawej strony równania (4.3) w przedziale $\bar{S}_2 \in [0, \bar{S}_1]$ . . . . .	26
7.5. Określenie warunków ciągłości prawej strony równania (4.3) . . . . .	27
7.6. Określenie ekstremów prawej strony równania (4.3) . . . . .	32
7.7. Określenie wpływu $\bar{X}_D$ na długość przedziału czasów przetrzymania, w którym występuje wielokrotność warunków ustalonych . . . . .	33
7.8. Określenie wpływu stopnia recyrkulacji ( $\alpha$ ) na długość przedziału czasów przetrzymania, w którym występuje wielokrotność warunków ustalonych . . . . .	37
7.9. Program "XEMIN FINDING" . . . . .	38
7.10. Doświadczalne wyznaczanie stałych $K_S$ , $K_I$ , $\mu_{max}$ , Y oraz m. . . . .	38
7.10.1. Wyznaczanie stałych $K_S$ , $K_I$ oraz $\mu_{max}$ . . . . .	43
7.10.2. Wyznaczanie stałych Y i m . . . . .	44

## CONTENTS

Notation . . . . .	3
1. Introductory problems . . . . .	5
1.1. Introduction . . . . .	5
1.2. Fundamental notions . . . . .	6
2. Mathematical model of sewage treatment in reactor with the complete mix . . . . .	8
3. Dependence of substrate concentration on the retention time . .	12
4. Determining of the conditions of occurrence and elimination of unstable reactor work . . . . .	14
5. Incomplete elimination of unstable reactor work . . . . .	20
6. Conclusions . . . . .	22
7. Basic relationships development . . . . .	22
7.1. Variation of SD . . . . .	22
7.2. Variation of SU in the range of $\bar{S}_2 \in [0, +\infty)$ . . . . .	23
7.3. Variation of numerator L of the right-hand side of the equation (4.3) in the range of $\bar{S}_2 \in [0, S_1]$ . . . . .	24
7.4. Variation of denominator M of the right-hand side of the equation (4.3) in the range of $\bar{S}_2 \in [0, \bar{S}_1]$ . . . . .	26
7.5. Determination of continuity conditions of the right-hand side of the equation (4.3) . . . . .	27
7.6. Determination of extremes of the right-hand side of the equation (4.3) . . . . .	32
7.7. Determination of the influence of $\bar{X}_D$ on the range of retention times in which the multiplicity of steady-states occurs . . . . .	33
7.8. Determination of the influence of recirculation ratio ( $\alpha$ ) on the range of retention times in which the multiplicity of steadystates occurs . . . . .	37
7.9. "XEMIN FINDING" program . . . . .	38
7.10. Empirical determination of the constants $K_S, K_I, \mu_{max},$ Y and m . . . . .	38
7.10.1. Determination of the constants $K_S, K_I,$ and $\mu_{max}$ .	43
7.10.2. Determination of the constants Y and m . . . . .	44

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU INŻYNIERII OCHRONY ŚRODOWISKA  
(wydrukowane w latach 1983—1988)

- Nr 52, Monografie nr 21, T. Jaroszyński, E. Gomółka, *Wpływ rozpuszczalników organicznych na działanie osadu czynnego*, Wrocław 1983 95,—
- Nr 53, Monografie nr 22, W. Wardas, *Interakcja egzogennych węglowodorów z glonami Chlorella w środowisku wodnym*, Wrocław 1983 87,—
- Nr 54, Monografie nr 23, M. Świdarska-Bróż, *Interakcja związków humusowych z wybranymi metalami ciężkimi oraz jej wpływ na usuwanie badanych metali z wody*, Wrocław 1985 110,—
- Nr 55, Monografie nr 24, J. Zwoździak, *Metody identyfikacji źródeł emisji pyłów i oceny ich oddziaływania*, Wrocław 1986 105,—
- Nr 56, Monografie nr 25, Z. Siwoń, *Stochastyczne modelowanie procesu zużycia wody i prognozowanie zapotrzebowania na wodę w miastach*, Wrocław 1986 160,—
- Nr 57, Studia i Materiały nr 21, T. Winnicki, A. Mika, *Membrane phenomena and processes*, Wrocław 1986 180,—





Cena zł 95,—

**Subscription should be sent (at any time of the year) to:**

**„Ars Polona”**

**Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa**

**or OR PAN, 00-901 Warszawa, PKiN, POLAND**

**Bank account number: NBP, VIII OM Nr 1550-6-81574 Warszawa/Poland**

**Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej**

**ma stałe na składzie Księgarnia Wr 49**

**Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław**

**ISSN 0084-2869**