PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1088 — 2005
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

Stanisław Wieteska

Uniwersytet Łódzki

ZASTOSOWANIE DEMOGRAFICZNYCH MODELI WIELOKROTNEGO UBYTKU W KALKULACJI SKŁADEK W UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE

1. Wstęp

Głównym celem niniejszego artykułu jest analiza rozkładu dwóch zmiennych losowych, a mianowicie: czasu odejścia z danego statusu oraz przyczyny odejścia, w układzie uwzględniającym pojedyncze życie. W matematyce aktuarialnej odejście z danego statusu określa się mianem dekrimentu.

Przedmiotem rozważań w modelach wielokrotnego ubytku nie jest pojedyncze życie, lecz wiele różnych wypadków.

Zastosowanie tej problematyki obserwujemy np. w zakładzie pracy, w którym liczba pracowników zatrudnionych przez pracodawcę będzie się zmniejszać, gdy pracownik zostanie zwolniony z pracy, stanie się niezdolny do pracy, umrze lub przejdzie na emeryturę. Zatem w celach planowania zatrudnienia potrzebne będzie oszacowanie liczby osób obecnie pracujących, które pozostaną aktywne przez wiele następnych lat.

Aktuariusze potrzebują również modeli dotyczących planów świadczeń pracowniczych, w których świadczenie płacone na zakończenie zatrudnienia może zależeć od przyczyny zakończenia zatrudnienia. Świadczenia emerytalne na przykład będą zazwyczaj różniły się od tych płaconych z powodu śmierci czy inwalidztwa.

Tak więc modele przeżycia systemu świadczeń pracowniczych będą zawierały dwie zmienne losowe: dotyczącą momentu zakończenia pracy i dotyczącą przyczyny zakończenia pracy.

Ponadto większość indywidualnych ubezpieczeń życiowych zapewnia zapłatę nie utraconych świadczeń, jeżeli składki ustaną przed końcem określonego okresu płacenia składki. Przerwanie ubezpieczenia, czyli zaprzestanie opłaty dalszych składek w okresie ubezpieczenia, powoduje częściowy zwrot kapitału i likwidację ubezpieczenia lub obniżenie sumy ubezpieczenia stosownie do proporcji wpłaconego kapitału w stosunku do tego, jaki powinien być wpłacony według planu ubezpieczenia. Zastosowany w tym przypadku ogólny model dla takich ubezpieczeń będzie zawierał zarówno czas zakończenia płacenia składek, jak i przyczynę zakończenia płatności składek. Będą to dwie zmienne losowe w wykorzystanym do tego celu modelu wielokrotnego ubytku.

Kolejnym przykładem zastosowania modelu wielokrotnego ubytku jest ubezpieczenie dochodów w razie niezdolności do pracy, które zapewnia okresowe płatności dla ubezpieczonych spełniających warunki niezdolności zdefiniowanej i zawartej w polisie. Wówczas wielkość okresowych płatności może zależeć od tego, czy niezdolność do pracy była spowodowana chorobą, czy wypadkiem.

W systemie społecznej opieki zdrowotnej zainteresowanie wzbudza analiza przeżycia i śmiertelności w kategoriach przyczyny śmierci. Cele społecznej opieki zdrowotnej mogą być ustalone przez badanie łącznego rozkładu momentu śmierci i przyczyny śmierci.

W tym przypadku przedmiotem analizy będzie śmiertelność rozpatrywana w kategoriach składowych przyczyn śmierci, z których każda jest traktowana jak oddzielny ubytek (dekriment) [Bowers i in. 1986]. Zatem model matematyczny służący do przeprowadzania tego typu analiz nosi nazwę tablicy wielokrotnego ubytku.

W rozważaniach dotyczących modeli wielokrotnego ubytku wykorzystuje się dwie zmienne losowe: $T(x) = T$, która jest zmienną losową czasu, oraz $J(x) = J$, będącą zmienną losową przyczyny ubytku, gdzie x to wiek osoby. Przyjmijmy, że J jest zmienną losową dyskretną. Zastosowania przedstawione w tym rozdziale dostarczają przykładów tych zmiennych losowych. Mianowicie, np. dla planu świadczeń pracowniczych zmienna losowa J może przyjmować wartości 1, 2, 3 lub 4, w zależności od tego, czy odejście jest spowodowane odpowiednio – rezygnacją, inwalidztwem, śmiercią czy przejściem na emeryturę.

2. Podstawowe wzory i zależności w tablicy wielokrotnego ubytku

Symbole, które pojawiają się w problematyce dekrimentów, to:

$d_x^{(\tau)}$ – całkowita liczba ubytków z danego statusu ze względu na wszystkie przyczyny, pomiędzy wiekiem x a $x+1$,

$l_x^{(\tau)}$ – liczba osób, które osiągnęły wiek x, podlegających działaniu (τ) przyczyn ubytku, gdzie: $\tau = 1, 2, ..., m$,

$p_x^{(\tau)}$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x pozostanie w danym statusie przez przynajmniej 1 rok,

$q_x^{(\tau)}$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x opuści dany status w ciągu roku bez względu na wszystkie przyczyny,

$\mu_x^{(\tau)}$ – całkowita intensywność ubytku ze względu na wszystkie przyczyny dla osoby w wieku x,

$L_x^{(\tau)}$ – średnia liczba osób dożywających wieku x, które podlegają działaniu (m) przyczyn ubytku.

$d_x^{(j)}$ – liczba ubytków z danego statusu ze względu na przyczynę (j), pomiędzy wiekiem x a $x+1$,

$q_x^{(j)}$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x opuści dany status w ciągu roku ze względu na przyczynę (j),

$\mu_x^{(j)}$ – intensywność ubytku ze względu na przyczynę (j) dla osoby w wieku x.

W problematyce dekrimentów najbardziej podstawowymi ze względu na wszystkie przyczyny formułami są następujące wzory:

$$d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}. \tag{1}$$

$$q_x^{(\tau)} = \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}, \tag{2}$$

$$p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}, \tag{3}$$

$$p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)}. \tag{4}$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+t}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}. \tag{5}$$

Intensywność ubytku jest zdefiniowana następująco:

$$\mu_x^{(\tau)} = \frac{-d\left[\ln\left(l_x^{(\tau)}\right)\right]}{dx}. \tag{6}$$

Zależność ta umożliwia skorzystanie z relacji:

$$l_x^{(\tau)} = l_0^{(\tau)} \exp\left[-\int_0^x \mu_y^{(\tau)} dy\right] \tag{7}$$

oraz:

$${}_n p_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_x^{x+n} \mu_y^{(\tau)} dy\right] = \exp\left[-\int_0^n \mu_{x+t}^{(\tau)} dt\right], \tag{8}$$

$$l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = d_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt, \tag{9}$$

$$ {}_{n}q_x^{(\tau)} = \int_0^n {}_{t}p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt. \tag{10} $$

Ze względu na rodzaj ubytku zdefiniowane są następujące wzory:

$$ d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} d_x^{(j)}, \tag{11} $$

$$ q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}, \tag{12} $$

$$ q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}. \tag{13} $$

Intensywność ubytku $\mu_x^{(j)}$ zdefiniujemy następująco:

$$ \mu_x^{(j)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \cdot \frac{dl_x^{(j)}}{dx}. \tag{14} $$

Po przekształceniach wzoru (14) otrzymujemy:

$$ l_x^{(j)} = \int_x^{\infty} l_y^{(\tau)} \mu_y^{(j)} dy, \qquad j = 1, 2, ..., m. \tag{15} $$

Następnie stwierdzamy, że:

$$ l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = d_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt, \tag{16} $$

a także:

$$ {}_{n}q_x^{(j)} = \int_0^n {}_{t}p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt. \tag{17} $$

Analiza wzorów (2) i (13) wyjaśnia, dlaczego teoria wielokrotnego ubytku jest również nazywana teorią konkurujących rodzajów ryzyka. Prawdopodobieństwo ubytku ze względu na przyczynę (j) pomiędzy wiekiem x a x + 1 zależy od ${}_{t}p_x^{(\tau)}$, gdzie: $0 \le t \le 1$, a więc od wszystkich składowych intensywności. Gdy intensywności dla innych ubytków rosną, wówczas ${}_{t}p_x^{(\tau)}$ się obniża.

Istnieje prosty związek między całkowitą intensywnością ubytku a intensywnościami dotyczącymi poszczególnych przyczyn ubytku.

Podobnie jak:

$$ l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)}, \tag{18} $$

również:

$$\mu_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)}. \tag{19}$$

Zatem całkowita intensywność ubytku jest równa sumie poszczególnych intensywności.

Zwróćmy uwagę na istotną różnicę pomiędzy intensywnością ubytku a prawdopodobieństwem ubytku.

Funkcja prawdopodobieństwa zawiera pewien przedział czasu, podczas którego, pod wpływem działania wszystkich przyczyn ubytku, zmniejsza się liczebność danej grupy osób. Stąd liczba osób opuszczających dany statut ze względu na przyczynę (j) nie jest niezależna od wielkości innych ubytków, działających jednocześnie. Im skuteczniejsze jest działanie innych przyczyn ubytku, tym mniej będzie ubytków spowodowanych j-tą przyczyną i mniejsza będzie wartość prawdopodobieństwa ubytku ze względu na tę przyczynę. Tak więc wartości prawdopodobieństw różnych przyczyn zależą wzajemnie od siebie, a prawdopodobieństwa ubytku muszą być rozpatrywane jako zależne prawdopodobieństwa zawsze wtedy, kiedy działa kilka przyczyn ubytku [Jordan 1982].

Możemy zapisać:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt. \tag{20}$$

A zastępując ${}_t p_x^{(\tau)}$, otrzymamy:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds\right] \mu_{x+t}^{(\tau)} dt. \tag{21}$$

W tej formie oczywiste jest, że prawdopodobieństwo ubytku dla poszczególnej przyczyny zależy od intensywności ubytku ze względu na wszystkie przyczyny.

Z drugiej strony, funkcja $\mu_{x+t}^{(j)}$, będąca natychmiastową (chwilową) stopą ubytku, nie opiera się na żadnym przedziale czasowym i nie podlega działaniu konkurujących przyczyn. Intensywności ubytku dla poszczególnych przyczyn są więc niezależnymi funkcjami, w przeciwieństwie do prawdopodobieństw ubytku, które są zależne od siebie.

Kiedy potrzebne są wartości liczbowe $\mu_{x+t}^{(j)}$, można je otrzymać z tablicy wielokrotnego ubytku za pomocą aproksymacji:

$$\mu_{x+t}^{(j)} \cong \frac{d_{x-1}^{(j)} + d^{(\tau)}}{2l_x^{(\tau)}}. \tag{22}$$

Formuła ta wyrażona jest w kategoriach $d_x^{(j)}$ a nie $l_x^{(j)}$, ponieważ wartości $l_x^{(j)}$ zwykle nie występują w tablicy wielokrotnego ubytku.

Przykład 1

W tabeli 1 zamieszczono dane. Oblicz: $q_{24}^{(1)}$, $q_{25}^{(\tau)}$, ${}_3q_{26}^{(\tau)}$, ${}_2q_{26}^{(2)}$, ${}_2q_{27}^{(1)}$.

Tabela 1. Tabela podwójnego dekrimentu

Wiek x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
24	901020	299	92762
25	807959	314	86632
26	721013	324	80385
27	640304	329	74117
28	565858	329	67909
29	497620	324	61839

$q_{24}^{(1)} = \frac{299}{901,020}$, $q_{25}^{(\tau)} = \frac{314+86,632}{807,959}$, ${}_3q_{26}^{(\tau)} = \frac{497,620}{721,013}$, ${}_2q_{26}^{(2)} = \frac{80,385+74,117}{721,013}$,

${}_2q_{27}^{(1)} = \frac{324}{640,304}$.

3. Centralne stopy wielokrotnego ubytku

Centralną stopę ubytku ze względu na wszystkie przyczyny można zdefiniować następująco:

$$m_x^{(\tau)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} dt} = \frac{d_x^{(\tau)}}{L_x^{(\tau)}}, \tag{23}$$

gdzie: $L_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt$ i jest średnią ważoną $\mu_{x+t}^{(\tau)}$, $0 \le t \le 1$.

Analogicznie, centralną stopę ubytku ze względu na przyczynę (j) można zdefiniować następująco:

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} dt}. \tag{24}$$

Stopa ta jest średnią ważoną $\mu_{x+t}^{(j)}$, $0 \le t \le 1$.

Jest oczywiste, że:

$$m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} m_x^{(j)}. \tag{25}$$

Aby oszacować $m_x^{(j)}$, wygodnie jest przyjąć, że całkowity ubytek ma jednostajny rozkład w każdym roku. To założenie jest równoważne z aproksymacją:

$$l_{x+t}^{(\tau)} \cong {}_x^{(\tau)} - td_x^{(\tau)}, \quad \text{dla } 0 < t < 1.$$

Skąd:

$$L_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt \cong \int_0^1 \left(l_x^{(\tau)} - td_x^{(\tau)} \right) dt = l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}.$$

Następnie mamy:

$$m_x^{(j)} \cong \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}}. \tag{26}$$

Stąd możemy wnioskować, że $m_x^{(j)}$ może być również wyrażone w kategoriach prawdopodobieństw ubytku, mianowicie:

$$m_x^{(j)} \cong \frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}}. \tag{27}$$

Ważne jest, aby znać metodę umożliwiającą skonstruowanie tablicy wielokrotnego ubytku, gdy dane są centralne stopy ubytku każdej z przyczyn ubytku.

Mając:

$$l_x^{(\tau)} \cong L_x^{(\tau)} + \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}.$$

otrzymamy:

$$q_x^{(j)} \cong \frac{d_x^{(j)}}{L_x^{(\tau)} + \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}} = \frac{m_x^{(j)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}}.$$

W analogiczny sposób wyprowadzamy wzór:

$$p_x^{(\tau)} = \frac{1 - \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}}.$$

Powyższa formuła może być użyta do otrzymania $l_x^{(\tau)}$.

4. Przypadek stałej intensywności i jednostajnego rozkładu wielokrotnych ubytków

Zastosujmy założenie o stałej intensywności każdego ubytku w każdym roku życia. Daje nam to:

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)} \text{ oraz } \mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_x^{(\tau)} \text{ gdzie } 0 \le t \le 1.$$

Następnie otrzymamy:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}dt = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(\tau)}dt = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}q_x^{(\tau)}. \tag{28}$$

Powyższy wzór dostarcza formuły:

$$\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}. \tag{29}$$

Przy założeniu, że każdy z ubytków w kontekście wielokrotnego ubytku ma jednostajny rozkład w każdym roku, otrzymujemy:

$${}_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)}, \qquad j = 1,\ 2,\ ...,\ m,\ 0 \le t \le 1.$$

Wiedząc, że:

$${}_tq_x^{(\tau)} = 1 - {}_tp_x^{(\tau)},$$

prawdziwe są wzory:

$$q_x^{(j)} = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}, \tag{30}$$

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}. \tag{31}$$

5. Przykłady zastosowań dekrimentów w kalkulacji składek w ubezpieczeniach na życie

Do kalkulacji jednorazowej składki netto wykorzystujemy znane wzory z matematyki aktuarialnej.

Rozważmy ubezpieczenie okresowe płatne w momencie śmierci dla osoby w wieku (x) ubezpieczonej na n lat na sumę ubezpieczenia 1 zł.

Korzystając ze wzoru (17), otrzymujemy:

$$\bar{A}_{x:\bar{n}|}^{1(j)} = \int_0^n v^t\, {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt,$$

gdzie $\bar{A}_{x:\bar{n}|}^{1(1)}$ to jednorazowa składka netto dla ubezpieczenia na życie podlegających j-tej przyczynie ubytku.

Podobnie w przypadku ubezpieczenia pełnego płacącego 1 zł dla osoby w wieku x podlegającej wszystkim przyczynom τ w roku śmierci składkę jednorazową możemy zapisać w postaci:

$$A_x^{(\tau)} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\, {}_tp_x^{(\tau)} q_{x+t}^{(\tau)}.$$

Podobnie można wyprowadzić wzory na renty życiowe.

Jednostkową rentę życiową ciągłą (bezterminową) płacącą 1 zł dla osoby (x) ze względu na wszystkie przyczyny τ obecną wartość możemy zapisać w postaci:

$$\bar{a}_{x:n}^{(\tau)} = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} dt,$$

gdzie: $\tau = 1, 2, ..., m$.

Analogicznie dla rent życiowych dyskretnych płatnych z góry, np. okresowych dla osoby w wieku x, ze względu na wszystkie przyczyny τ obecną wartość możemy obliczyć następująco:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(\tau)} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)}.$$

Korzystając ze wzorów z matematyki aktuarialnej, można wskazać dalsze zastosowania i uogólnienia.

6. Zakończenie

Wprowadzone modele wielokrotnego ubytku to ważna część matematyki demograficznej. Są one uogólnieniem jednej zmiennej. Wprowadzone dekrimenty (przyczyny ubytku ludności) i obliczone na tej podstawie prawdopodobieństwa zgonu, przeżycia czy też intensywności wymieralności mają zastosowanie w kalkulacji składek w ubezpieczeniach na życie.

Literatura

Jordan Jr Ch.W., *Textbook on Life Contingencies*, The Society of Actuaries, Chicago, Illinois, 1982.

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, 1986.

APPLICATION OF DEMOGRAPHIC MULTIPLE-DECREMENT MODELS IN CALCULATION PREMIUM IN LIFE INSURANCE

Summary

Life probability parameter survival or death are very important in calculation premium in life insurance. Among this problems very often is included probability connected with reason of death. These parameters name is decrements.

In this article there is a definition of decrements, force of mortality, central rate death and at the end, there were given examples of their application.

There are also main mathematic formulas, witch should be used in actuarial practice.