PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1088 — 2005
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

Stanisław Wanat

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

MODELOWANIE FUNDUSZU NADWYŻKOWEGO W UBEZPIECZENIACH MAJĄTKOWYCH

1. Wstęp

W ramach projektu „Solvency II" Komisja Europejska zaproponowała zmiany w podejściu do oceny wypłacalności zakładów ubezpieczeń. Obowiązujący do tej pory system, bazujący głównie na ocenie norm ilościowych, proponuje ona zastąpić systemem, w którym podstawowym elementem nadzoru ubezpieczeniowego będzie ocena jakości zarządzania ryzykiem zakładu ubezpieczeń. Zmiana ta sprawi, że zakłady ubezpieczeń będą zmuszone do samodzielnego wypracowania wewnętrznych systemów zarządzania ryzykiem oraz do wykazania przed nadzorem ubezpieczeniowym, że metody te gwarantują panowanie nad ryzykiem towarzyszącym ich działalności, a tym samym gwarantują ich wypłacalność[1]. Zasadniczym elementem takich systemów powinny być moduły służące do modelowania i symulacji podstawowych zmiennych określających wypłacalność ubezpieczyciela. W dalszej części pracy zostanie przedstawiony sposób modelowania jednej z takich zmiennych, jaką jest fundusz nadwyżkowy (*surplus*)[2].

2. Opis modelu

Przedstawiony w artykule model wywodzi się z klasycznej teorii ryzyka. Zaprezentowane w nim podejście do modelowania funduszu nadwyżkowego oparte jest

[1] Gdy zakład nie opracuje wewnętrznych metod zarządzania ryzykiem lub wypracuje, ale nie zostaną one zaakceptowane przez nadzór, w ramach „Solvency II" proponuje się, aby do oceny wypłacalności tych zakładów wykorzystać modele uznawane przez międzynarodowe agencje ratingowe.

[2] Wielkość ta w literaturze przedmiotu jest określana także jako: *solvency margin, risk reserve, equalization reserve, capital at risk, adjustment reserve* (zob. [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994, s. 10-11]).

na pracach: [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994, rozd. 12; Savelli 2003]. W modelu tym zakłada się stałą wartość podstawowych czynników ryzyka ekonomicznego, inwestycyjnego i biznesowego, tzn. przyjmuje się, że stałe są: stopa inflacji i, stopa zysku j oraz że liczba roszczeń w każdym okresie wzrasta o stały współczynnik g. Fundusz nadwyżkowy U_t na koniec roku t dany jest wówczas równaniem (por. [Savelli 2003]):

$$U_t = (1+j)U_{t-1} + (B_t - X_t - E_t)\cdot(1+j)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

gdzie: B_t – składka brutto,

X_t – zagregowane roszczenia,

E_t – koszty,

j – roczna stopa zwrotu (zakładamy, że jest to stopa stała wolna od ryzyka).

Jeżeli przyjmiemy, że składka brutto zawiera następujące składniki:

$$B_t = P_t + \lambda P_t + cB_t, \tag{2}$$

gdzie: $P_t = E(X_t)$ – składka netto,

λP_t – dodatek bezpieczeństwa,

cB_t – dodatek na koszty,

to równanie (1) przyjmuje następującą postać:

$$U_t = (1+j)U_{t-1} + \left[(1+\lambda)P_t - X_t\right]\cdot(1+j)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

W modelu zakłada się roczny wzrost składki brutto B_t uwzględniający stałą stopę inflacji i oraz realną stałą stopę wzrostu g:

$$B_t = (1+i)(1+g)B_{t-1}. \tag{4}$$

Ze wzoru (3) wynika, że w rozważanym modelu funduszu nadwyżkowego ważną rolę będzie odgrywać sposób modelowania wysokości zagregowanych roszczeń X_t. W tym celu wykorzystuje się klasyczny model ryzyka kolektywnego:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_{it}, \quad t = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

gdzie: N_t – zmienna losowa określająca liczbę roszczeń w okresie t,

Z_{it} – zmienna losowa określająca wysokość i-tego roszczenia w okresie t.

Najczęściej zakłada się, że zmienna N_t podlega rozkładowi Poissona. Obserwując jednak liczbę roszczeń w czasie, zauważa się, że, oprócz zmian czysto losowych, występują też regularne długookresowe zmiany tej zmiennej, czyli trend, oraz zmiany o charakterze cyklicznym. W związku z tym proponuje się, aby parametr rozkładu Poissona zmieniał się w czasie (zob. np. [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994, s. 278-282]). Zmiany w czasie mogą być określone za pomocą deterministycznej funkcji zależnej od t lub procesu stochastycznego. W rozważanym modelu przyjęto zależność deterministyczną mającą postać:

$$n_t = n_0(1+g)^t. \tag{6}$$

Następnie zakłada się, że zmienne losowe Z_{it} są niezależne, o takim samym rozkładzie przeskalowanym indeksem inflacji:

$$Z_{it} = I_t Z_{i0}, \tag{7}$$

gdzie: $I_t = (1+i)^t$ – indeks inflacji,

Z_{i0} – zmienna określająca wysokość i-tego roszczenia w okresie wyjściowym $t = 0$.

Przy takich założeniach podstawowe charakterystyki zmiennej zagregowanych roszczeń X_t są następujące:

$$E(X_t) = n_t m_1(Z_t) = (1+g)^t (1+i)^t E(X_0), \tag{8}$$

$$D^2(X_t) = n_t m_2(Z_t) = (1+g)^t (1+i)^{2t} D^2(X_0), \tag{9}$$

$$\gamma(X_t) = \frac{m_3(Z_0)}{(m_2(Z_0))^{\frac{3}{2}} \cdot (n_t)^{\frac{1}{2}}}, \tag{10}$$

gdzie $m_s(Z_t)$ oznacza moment zwykły rzędu s zmiennej Z_t.

Ich znajomość pozwala na wykorzystanie następującego algorytmu do symulacji zmiennej X_t w kolejnych okresach (zob. np. [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994, s. 288]):

1. Wyznaczenie parametru rozkładu Poissona opisującego liczbę roszczeń w okresie t oraz parametru określającego indeks inflacji. Można tu zastosować podejście deterministyczne i stochastyczne.

2. Wyznaczenie na podstawie wzorów (8)-(10) podstawowych charakterystyk zmiennej zagregowanych roszczeń X_t.

3. Wygenerowanie realizacji zmiennej X_t. Przy ustalonych parametrach, określających liczbę roszczeń oraz inflację, zmienna X_t ma złożony rozkład Poissona. Można zatem zastosować WH-generator (generator Wilsona-Hilferty, zob. np. [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994, s. 144]).

W dalszej części zamiast bezwzględnej wartości funduszu nadwyżkowego U_t jest rozważany wskaźnik $u_t = \frac{U_t}{B_t}$, określający stosunek wartości funduszu nadwyżkowego U_t do składki brutto B_t. Otrzymuje się wtedy proces:

$$u_t = ru_{t-1} + w\left((1+\lambda) - \frac{X_t}{P_t}\right), \tag{11}$$

gdzie współczynniki r i w mają następującą postać:

$$r=\frac{1+j}{(1+i)(1+g)}, \tag{12}$$

$$w=\frac{1-c}{1+\lambda}(1+j)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Po dokonaniu odpowiednich przeliczeń proces (11) można zapisać w następującej postaci (por. [Savelli 2003]):

$$u_t=r^t u_0+w\left((1+\lambda)\sum_{\tau=0}^{t-1} r^\tau-\sum_{\tau=1}^{t}\frac{X_\tau}{P_\tau} r^{t-\tau}\right). \tag{14}$$

Gdy wykorzystamy tę postać, możemy wyznaczyć:

$$E(u_t)=\begin{cases} u_0+\lambda w t, & \text{gdy } r=1 \\ r^t u_0+\lambda w\frac{1-r^t}{1-r} & \text{gdy } r\neq 1 \end{cases}, \tag{15}$$

$$D^2(u_t)=\begin{cases} w^2\frac{1+v_Z^2}{n_0(1+g)^t}t, & \text{gdy } s=1 \\ w^2\frac{1+v_Z^2}{n_0(1+g)^t}\frac{1-s^{2t}}{1-s}, & \text{gdy } s\neq 1 \end{cases}, \tag{16}$$

przy czym $s^2=(1+g)r^2$, a v_Z oznacza współczynnik zmienności zmiennej Z.

Z (15) wynika, że gdy $r=1$ wartość oczekiwana u_t zależy liniowo od t oraz gdy $r<1$, to

$$\lim_{t\to\infty} E(u_t)=\frac{1-c}{1+\lambda}\frac{\lambda}{1-r}(1+j)^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

czyli dąży do pewnej stałej wartości.

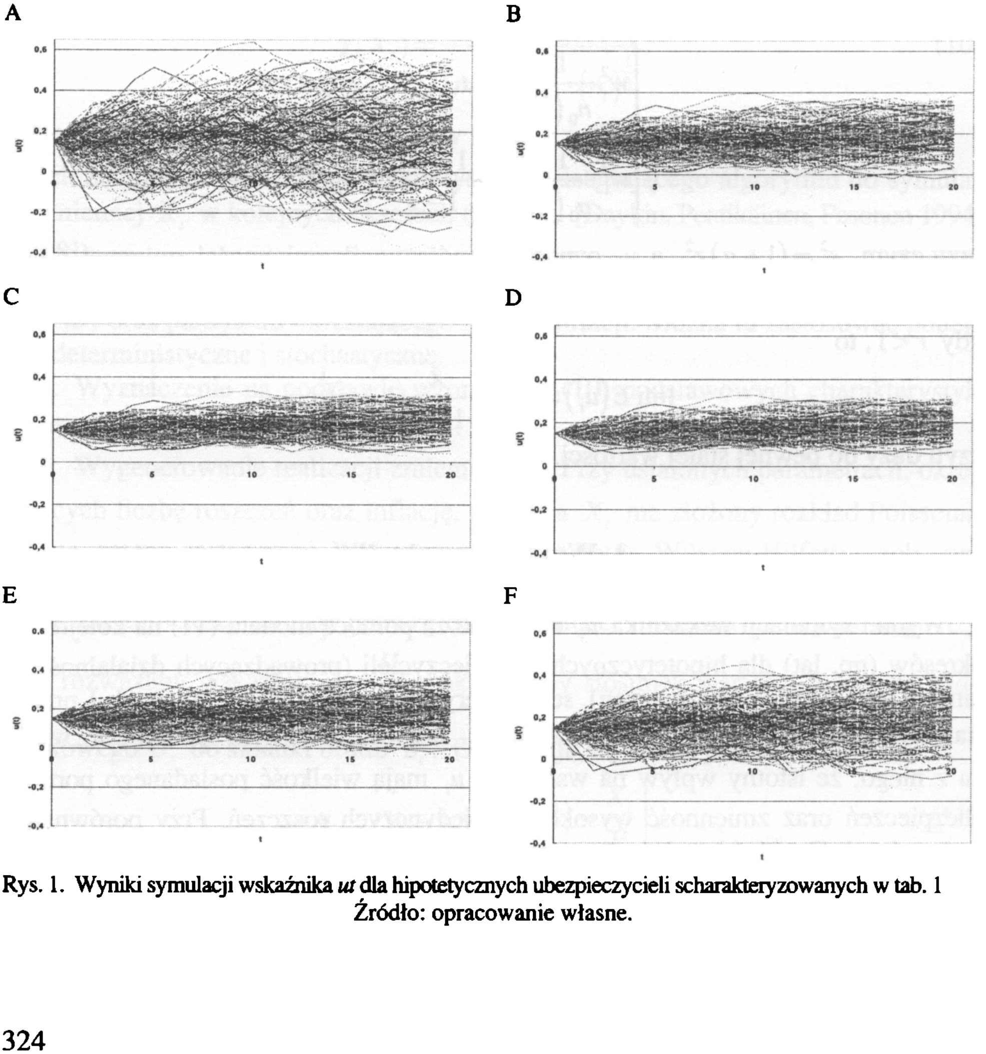
3. Wyniki symulacji

Wyniki symulacji wskaźnika u_t uzyskano za pomocą modelu (11) na kolejne 20 okresów (np. lat) dla hipotetycznych ubezpieczycieli (prowadzących działalność w ramach jednej grupy ubezpieczeń), scharakteryzowanych w tab. 1. Rysunek 1 przedstawia realizacje 200 wartości wskaźnika u_t. Jak można się było spodziewać, wynika z niego, że istotny wpływ na wskaźnik u_t mają wielkość posiadanego portfela ubezpieczeń oraz zmienność wysokości pojedynczych roszczeń. Przy porównaniu wykresów A-C widać bowiem, że wraz ze wzrostem liczby roszczeń, który jest wynikiem wzrostu wielkości portfela, maleje zmienność współczynnika u_t.

Tabela 1. Charakterystyka hipotetycznych ubezpieczycieli, dla których przeprowadzono symulacje wskaźnika u_t

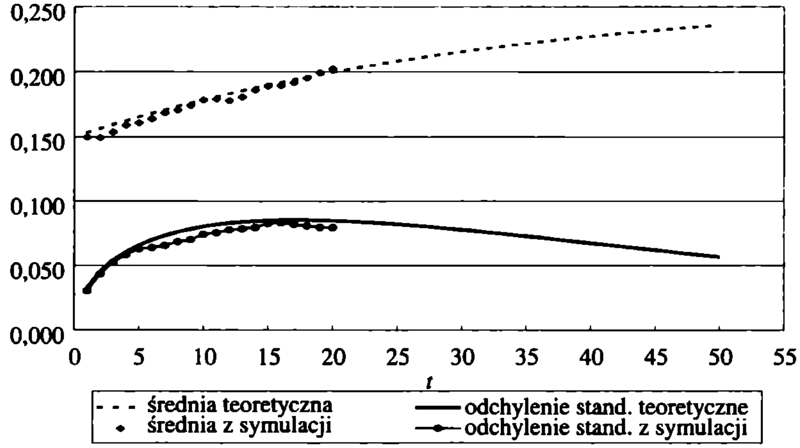
Parametr	Ubezpieczyciel					
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Początkowa wartość wskaźnika u_0	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
Początkowa wartość oczekiwana pojedynczego roszczenia $E(Z_0)$	10	10	10	10	10	10
Początkowa liczba roszczeń n_0	1000	5000	10000	5000	5000	5000
Współczynnik zmienności wysokości pojedynczych roszczeń	3	3	3	2	3	4
Dodatek bezpieczeństwa λ	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Dodatek na koszty c	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
Realna stała stopa wzrostu g	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Stopa inflacji roszczeń i	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
Stopa zwrotu j	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04

Źródło: dane umowne.



Rys. 1. Wyniki symulacji wskaźnika *ut* dla hipotetycznych ubezpieczycieli scharakteryzowanych w tab. 1
Źródło: opracowanie własne.

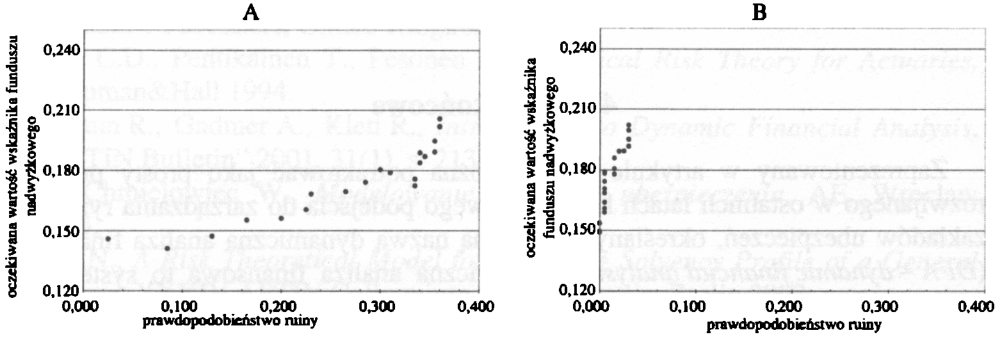
Z kolei na podstawie wykresów D-F można wnioskować, że wzrost współczynnika zmienności wysokości pojedynczych roszczeń wpływa na zwiększenie zmienności wskaźnika u_t. Oznacza to, że stabilną wartość funduszu nadwyżkowego można osiągać poprzez zwiększanie portfeli ubezpieczeń. Zarządzający ryzykiem mają ograniczony wpływ na wielkość współczynnika zmienności wysokości pojedynczych roszczeń. Można ją obniżyć jedynie na etapie selekcji i oceny ubezpieczanego ryzyka.

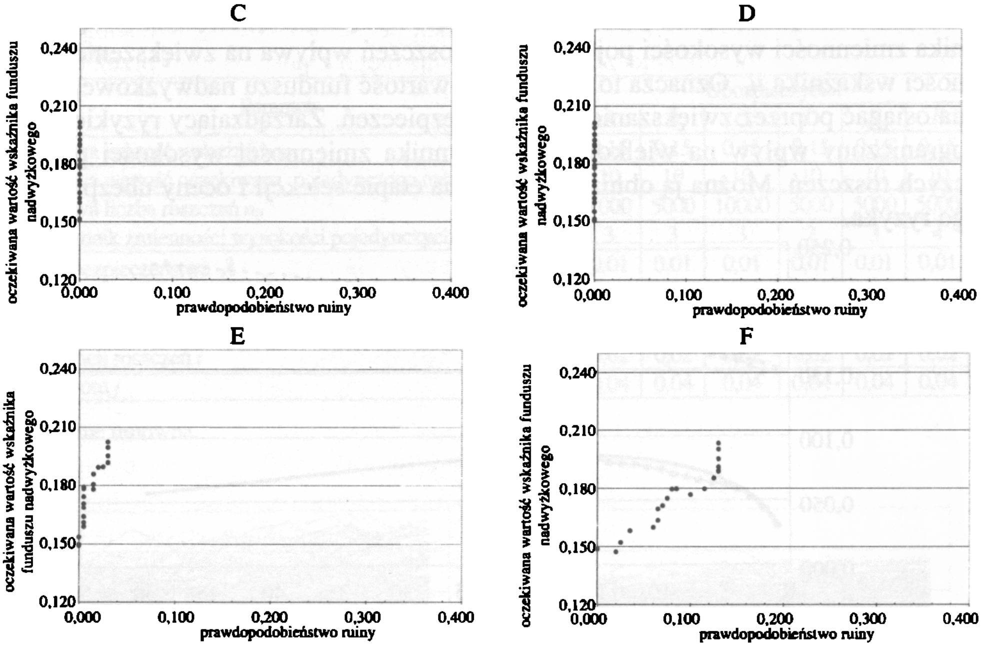


Rys. 2. Teoretyczne i uzyskane na podstawie symulacji wartości średniej i odchylenia standardowego procesu u_t dla ubezpieczyciela B

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2 przedstawia (na przykładzie hipotetycznego ubezpieczyciela typu B) zmiany w czasie wartości przeciętnej i odchylenia standardowego wskaźnika u_t. Przedstawione na wykresie wartości teoretyczne wyznaczono za pomocą wzorów (15) i (16) i porównano je z wartościami średniej oraz odchylenia standardowego uzyskanymi na podstawie symulacji.





W celu porównania zysku i ryzyka dla poszczególnych ubezpieczycieli każdy wykres zrobiony jest w takiej samej skali.

Rys. 3. Mapy „zysk-ryzyko" dla hipotetycznych ubezpieczycieli scharakteryzowanych w tab. 1 (miara ryzyka to prawdopodobieństwo ruiny do momentu t)

Źródło: opracowanie własne.

Realizacje wskaźnika u_t, uzyskane za pomocą omawianego modelu, wykorzystuje się przede wszystkim do oceny ryzyka ubezpieczyciela w kolejnych okresach (latach) [3]. Na rysunku 3 przedstawiono mapy „zysk-ryzyko" dla ubezpieczycieli scharakteryzowanych w tab. 1. Na wykresach tych za miarę ryzyka przyjęto prawdopodobieństwo ruiny do momentu t, które oszacowano na podstawie pracy [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994, rozdz. 13.1(c)].

4. Uwagi końcowe

Zaprezentowany w artykule model można potraktować jako prosty przykład rozwijanego w ostatnich latach kompleksowego podejścia do zarządzania ryzykiem zakładów ubezpieczeń, określanych wspólną nazwą dynamiczna analiza finansowa (*DFA – dynamic financial analysis*). Dynamiczna analiza finansowa to system powiązanych ze sobą modeli, za pomocą których można modelować reakcje ubezpie-

[3] Na podstawie modelu można uzyskać tysiące realizacji wskaźnika na kolejne okresy, co umożliwia wyznaczenie jego rozkładu prawdopodobieństwa. Po wyznaczeniu rozkładu otrzymuje się najlepszą charakterystykę ryzyka.

czyciela przez długi czas (np. kilka lat) na dużą liczbę powiązanych ze sobą czynników ryzyka zarówno ubezpieczeniowego (związanego z posiadanymi przez ubezpieczyciela portfelami ubezpieczeń), jak i ryzyka finansowego (związanego z posiadanymi aktywami). Można powiedzieć, że *DFA* integruje różne modele, techniki z finansów i ubezpieczeń w jeden wielowymiarowy, dynamiczny model symulacyjny. Ze względu na kompleksową analizę i duży zakres czasowy *DFA* bazuje przede wszystkim na modelowaniu stochastycznym, umożliwiającym wygenerowanie dużej liczby losowych scenariuszy i reakcji ubezpieczyciela na nie. Otrzymane w ten sposób wyniki są następnie poddawane analizie statystycznej. Szczegóły dotyczące tej metody można znaleźć m.in. w pracach: [Blum, Dacorogna 2003; Kaufmann, Gadmer, Klett 2001; Szkarłat 2003; Wanat 2004; Wieteska 2001].

W rozpatrywanym modelu w sposób stochastyczny zmieniały się tylko łączne roszczenia; pozostałe czynniki ryzyka (stopa zwrotu, stopa inflacji, udział w rynku) były potraktowane w sposób deterministyczny. W związku z tym, aby ten model w pełni spełniał wymogi dynamicznej analizy finansowej, należy uwzględnić w nim stochastyczne zmiany tych czynników ryzyka. W tym też kierunku będzie on dalej rozwijany.

Literatura

Bijak W., *Zewnętrzna ocena zakładu ubezpieczeń,* [w:] J. Monkiewicz (red.), *Podstawy ubezpieczeń. Tom III – przedsiębiorstwo,* Poltext, Warszawa 2003.

Blum P., Dacorogna M., *Dynamic Financial Analysis - Understanding Risk and Value Creation in Insurance,* [w:] J. Teugels, B. Sundt (red.), *Encyclopedia of Actuarial Science,* John Wiley&Sons 2003.

Cummins J.D., Derrig R.A., *Classical Insurance Solvency Theory,* Kulwer Academic Publishers, Finland 1988.

Cummins J.D., Derrig R.A., *Financial Models of Insurance Solvency,* Kulwer Academic Publishers, United Kingdom 1989.

Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries,* Chapman&Hall 1994.

Kaufmann R., Gadmer A., Klett R., *Introduction to Dynamic Financial Analysis,* „ASTIN Bulletin" 2001, 31(1), s. 213-249.

Ronka-Chmielowiec W., *Modelowanie ryzyka w ubezpieczenia,* AE, Wrocław 2003.

Savelli N., *A Risk Theoretical Model for Assessing Solvency Profile of a General Insurer,* XXXIV ASTIN Colloquium, 24-27 sierpnia, Berlin 2003.

Szkarłat A., *Metoda ALM w ubezpieczeniach majątkowych – rozważania teoretyczne,* [w:] W. Sułkowska (red.), *Rozwój rynków ubezpieczeń w krajach Europy Środkowej i Wschodniej,* AE, Kraków 2003.

Wanat S., *Modelowanie ryzyka w ubezpieczeniach z wykorzystaniem dynamicznej analizy finansowej,* [w:] A. Zeliaś (red.), *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, AE, Kraków 2004 (w druku).
Wieteska S., *Metoda ALM i zastosowanie w ubezpieczeniach na życie,* „Wiadomości Ubezpieczeniowe" 2001, nr 5, 6, Warszawa.

MODELLING SURPLUS PROCESS OF NON-LIFE INSURER

Summary

The European Commission is developing new rules (so-called Solvency II) for insurance companies. Under this concept, an insurer is allowed to verify its solvency by using an internal risk management model previously approved by regulatory authority. In this paper we presents such an internal approach for modelling the surplus process of non-life insurer. The proposed model uses a simulation technique and is based on dynamic financial analysis.