

Anna Szymańska

Uniwersytet Łódzki

WYBRANE METODY SZACOWANIA SKŁADEK W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH OC

1. Wstęp

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC klasyfikacja ubezpieczonych do grup taryfowych odbywa się na podstawie czynników *a priori* (obserwowalnych czynników ryzyka, takich jak np. rodzaj i rok produkcji samochodu, pojemność silnika, wiek i płeć kierowcy) oraz czynników *a posteriori* (historii szkodowości kierowcy). Dlatego składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC są wyznaczone w dwóch etapach. Pierwszy to obliczenie składki podstawowej na podstawie czynników *a priori*, a drugi to taryfikacja *a posteriori* [Lemaire 1995].

W niniejszej pracy skoncentrujemy się na drugim etapie nazywanym systemem bonus-malus. Systemem bonus-malus będziemy nazywać metody wyznaczania indywidualnych składek, uwzględniające liczbę szkód spowodowanych przez kierowcę w przeszłości. W każdym systemie bonus-malus musi być ustalona klasa startowa, do której trafiają ubezpieczeni bez historii szkodowości, wektor stawek składki podstawowej oraz zasady przejść między klasami. Aby system mógł funkcjonować, portfel ubezpieczeń powinien być niejednorodny, tzn. ubezpieczeni powinni być w przeszłości narażeni na inną przeciętną liczbę szkód [Hossack, Pollard, Zehnirith 1999].

Roczna składka netto jest wyznaczana jako iloczyn składki podstawowej obowiązującej w klasie taryfowej (taryfikacja *a priori*) oraz współczynnika bonus-malus.

W pracy nie uwzględniono dodatkowych zwyżek i zniżek, charakterystycznych dla poszczególnych ubezpieczycieli.

W ubezpieczeniach majątkowych składkę brutto oblicza się jako sumę trzech składników: składki netto, dodatku bezpieczeństwa i kosztów działalności ubezpie-

czeniuowej. Pomijamy trzeci z tych składników. Zatem składką brutto będziemy nazywać składkę netto powiększoną o dodatek bezpieczeństwa.

W pracy porównano dwie najczęściej stosowane metody szacowania składek brutto: metodę wartości oczekiwanej oraz metodę wariancji.

2. Badanie jednorodności portfela

W ubezpieczeniach komunikacyjnych zakłada się, że liczba szkód K w jednorodnym portfelu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem intensywności szkód λ :

$$P(K = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Jeżeli portfel jest niejednorodny, to parametr intensywności szkód ma najczęściej rozkład gamma z parametrami α i β , natomiast liczba szkód ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami p i q [Hossack, Pollard, Zehnirith 1999], czyli rozkład o funkcji prawdopodobieństwa postaci:

$$P(K = k) = \binom{q+k-1}{k} p^q (1-p)^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

gdzie $q = \alpha$ i $p = \beta / (1 + \beta)$. (3)

Na podstawie danych z łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego przeprowadzono badanie dla ubezpieczeń komunikacyjnych OC za rok 2000. Z całego portfela liczącego 31734 polis wylosowano w sposób niezależny 15 867. Wylosowane polisy pogrupowano według wieku kierowcy. Dane przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Liczba szkód w dwóch grupach portfela i całym portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych

Grupa		I	II	Cały portfel
Wiek kierowcy w latach		mniejszy od 25	większy lub równy 25	
Liczba szkód	0	2907	10221	13128
	1	592	1843	2435
	2	66	210	276
	3	5	18	23
	4	0	5	5
Suma		3570	12292	15867

Źródło: badania własne.

Na podstawie danych z tab. 1 oszacowano parametr rozkładu Poissona przyjmując, że

$$\hat{\lambda} = \bar{x}, \quad (5)$$

oraz parametry rozkładu ujemnego dwumianowego przyjmując, że

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{s^2}, \quad (6)$$

$$\hat{q} = \frac{s^2 \hat{p}^2}{1 - \hat{p}}, \quad (7)$$

gdzie \bar{x} jest wartością średniej z próby, s^2 wariancją z próby. Estymatory uzyskano metodą momentów [Domański 2001]. Parametry rozkładu gamma wyznaczono ze wzoru (3).

Tabela 2. Parametry dla rozkładu częstotliwości roszczeń (na podstawie danych z tab. 1)

	Średnia liczba szkód	Wariancja liczby szkód	Parametry rozkładu ujemnego dwumianowego		Parametry rozkładu gamma	
			p	q	α	β
I	0,207	0,209	0,98	16,95	16,95	81,88
II	0,19	0,2	0,95	3,61	3,61	19

Źródło: obliczenia własne.

W celu oceny jednorodności grup portfela z tab. 1 zbadano, za pomocą testu chi-kwadrat [Domański, Pruska 2000; Domański 2001], zgodność rozkładu liczby roszczeń z rozkładem Poissona oraz z rozkładem ujemnym dwumianowym.

Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że rozkład liczby szkód w grupie I jest rozkładem Poissona ($\chi^2 = 0,5049$; $\chi^2_\alpha = 5,99$). Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ odrzucamy hipotezę zerową, że rozkład liczby szkód w grupie I jest rozkładem ujemnym dwumianowym na korzyść hipotezy alternatywnej ($\chi^2 = 11,34$; $\chi^2_\alpha = 5,99$). W związku z tym można przyjąć, że rozkład liczby szkód w grupie I jest jednorodny.

Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ odrzucamy hipotezę zerową, że rozkład liczby szkód w grupie II jest rozkładem Poissona, na korzyść hipotezy alternatywnej ($\chi^2 = 27,349$; $\chi^2_\alpha = 5,99$). Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że rozkład liczby szkód w grupie II jest rozkładem ujemnym dwumianowym ($\chi^2 = 0,07$; $\chi^2_\alpha = 5,99$). W związku z tym można przyjąć, że rozkład liczby szkód w grupie II jest niejednorodny.

3. Systemy bonus-malus

System bonus-malus wyznaczony za pomocą analizy bayesowskiej jest nazywany systemem optymalnym [Lemaire 1995]. W tak rozumianym systemie wyznacza się składkę *a priori*, a następnie uwzględnia się indywidualny parametr ryzyka. Do wyznaczania indywidualnych parametrów ryzyka wykorzystuje się estymatory bayesowskie [Domański, Pruska 2000].

Aby system mógł funkcjonować, portfel ubezpieczeń powinien być niejednorodny. W związku z tym do dalszych badań uwzględniono tylko grupę II z portfela przedstawionego w tab. 1. Tabela 3 przedstawia system bonus-malus badanego towarzystwa ubezpieczeniowego.

Tabela 3. Zwyżki i zniżki ubezpieczeń OC komunikacyjnych

Klasa	% składki podstawowej	Liczba szkód k			
		0	1	2	3 lub więcej
1	200	4	1	1	1
2	150	4	1	1	1
3	125	4	1	1	1
4	100	5	2	1	1
5	90	6	3	2	1
6	80	7	4	3	1
7	70	8	5	3	1
8	60	9	6	4	2
9	50	10	7	5	3
10	50	11	8	6	4
11	40	11	9	7	5

Źródło: badania własne.

Niech K_j będzie zmienną losową oznaczającą liczbę szkód w roku j dla danej polisy, (k_1, k_2, \dots, k_t) – wektorem obserwacji liczby szkód przez t lat dla danej polisy; $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$ – nieznanym parametrem szkodowości w roku $t+1$ dla polisy opisaney wektorem obserwacji (k_1, k_2, \dots, k_t) .

Zakładamy, że rozkład liczby szkód w tym portfelu jest określony wzorem (2). Parametr intensywności szkód λ ma rozkład *a priori* gamma z parametrami α i β . Zatem rozkład *a posteriori* parametru jest rozkładem gamma z parametrami $\alpha' = \alpha + k$ oraz $\beta' = \beta + t$. Estymator bayesowski parametru λ jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* i przybiera postać

$$\lambda_{t+1} = \lambda_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha + k}{\beta + t}. \quad (8)$$

4. Zasada wartości oczekiwanej

Najprostszą zasadą kalkulacji składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych jest zasada wartości oczekiwanej. Według tej zasady szacowana indywidualna składka netto powiększona o dodatek bezpieczeństwa θ wynosi

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (1 + \theta)\lambda_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (1 + \theta)\frac{\alpha + k}{\beta + t}. \quad (9)$$

Ponieważ celem badania jest oszacowanie, ile procent składki podstawowej powinien płacić kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, więc stawka szacowanej składki w systemie bonus-malus wynosi

$$P'_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{(1 + \theta)\frac{\alpha + k}{\beta + t}}{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot 100\% = \frac{\beta(\alpha + k)}{\alpha(\beta + t)} \cdot 100\%. \quad (10)$$

5. Zasada wariacji

Według tej zasady szacowana indywidualna składka netto powiększona o dodatk bezpieczeństwa θ wynosi

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (1 + \theta)E_\lambda[\lambda | k_1, \dots, k_t] + \theta Var_\lambda[\lambda | k_1, \dots, k_t] =$$

$$= (1 + \theta) \frac{\alpha + k}{\beta + t} + \theta \frac{\alpha + k}{(\beta + t)^2}. \quad (11)$$

Stawka szacowanej składki w systemie bonus-malus wynosi:

$$P'_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\beta}{\alpha} \left[(1 + \theta) \frac{\alpha + k}{\beta + t} + \theta \frac{\alpha + k}{(\beta + t)^2} \right]. \quad (12)$$

6. Zastosowania

Dla grupy II portfela ubezpieczeń z tab. 2 oszacowano współczynniki bonus-malus za pomocą wzorów (10) i (12). Szacowane według wzoru (12) współczynniki bonus-malus są mnożone przez wskaźnik zapewniający 100% składki w klasie startowej.

Tabela 4. Współczynniki bonus-malus wyznaczone dla składek szacowanych metodą wartości oczekiwanej

Nr roku t	Liczba szkód k				
	0	1	2	3	4 i więcej
0	100				
1	95	121	148	174	200
2	90	116	141	166	191
3	86	110	134	158	182
4	83	105	128	151	174
5	79	101	123	145	167
6	76	97	118	139	160
7	73	93	114	134	154

Źródło: badania własne.

Tabela 5. Współczynniki bonus-malus wyznaczone dla składek szacowanych metodą wariacji ($\theta = 0,25$)

Nr roku t	Liczba szkód k				
	0	1	2	3	4 i więcej
0	100				
1	95	121	148	174	201
2	91	116	141	166	191
3	86	110	134	158	182
4	83	105	128	151	174
5	79	101	123	145	167
6	76	97	118	139	160
7	73	93	113	134	154

Źródło: badania własne.

Tabela 6. Współczynniki bonus-malus wyznaczone dla składek szacowanych metodą wariacji ($\theta = 2$)

Nr roku t	Liczba szkód k				
	0	1	2	3	4 i więcej
0	100				
1	95	121	148	174	200
2	90	115	140	165	190
3	86	110	134	158	181
4	82	105	128	151	173
5	79	101	122	144	166
6	75	96	117	138	159
7	72	93	113	133	153

Źródło: badania własne.

Tabela 7. Współczynniki bonus-malus stosowane w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym

Nr roku t	Liczba szkód k				
	0	1	2	3	4 i więcej
0	100				
1	90	150	200	200	200
2	80	125	150	200	200
3	70	100	125	200	200
4	60	90	125	200	200
5	50	80	100	150	150
6	50	60	80	100	100
7	40	50	70	90	90

Źródło: badania własne.

Tabela 8. Różnica między współczynnikami bonus-malus stosowanymi w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (tab. 7) i współczynnikami z tab. 6

Nr roku t	Liczba szkód k				
	0	1	2	3	4 i więcej
0	0				
1	-5	29	52	26	0
2	-10	10	10	35	10
3	-16	-10	-9	42	19
4	-22	-15	-3	49	27
5	-29	-21	-22	6	-16
6	-25	-36	-37	-38	-59
7	-32	-43	-43	-43	-63

Źródło: badania własne.

7. Wnioski

Współczynniki wyznaczone metodą wartości oczekiwanej oraz wariacji nie różnią się istotnie. Jednak w przypadku zasady wariacji współczynniki zostały pomnożone przez wskaźnik zapewniający 100% w klasie startowej. Bez uwzględ-

nienia tego wskaźnika otrzymujemy znacznie wyższe współczynniki bonus-malus. Są one tym większe, im większy jest współczynnik bezpieczeństwa.

Niestety, szacowane współczynniki bonus-malus różnią się znacznie w niektórych klasach od współczynników danego towarzystwa ubezpieczeniowego. To oznacza, że system nie ocenia w prawidłowy sposób kierowców. Znak dodatni (białe tło) różnic w tab. 8 oznacza podwyższoną składkę ubezpieczeniową, znak ujemny (szare tło) zaś – zaniżoną składkę ubezpieczeniową. Różnice między faktyczną a oczekiwaną zwyżką lub zniżką wahają się od 3 do 63%. Ubezpieczyciel powinien zatem przeanalizować zwyżki i zniżki systemu.

Literatura

Domański Cz., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.

Domański Cz. (red.), *Metody statystyczne*, Wydawnictwo UŁ, Łódź 2001.

Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B., *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambridge 1999.

Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

SELECTED METHODS OF ESTIMATING PREMIUMS IN CIVIL RESPONSIBILITY CAR INSURANCE

Summary

The foundation of insurance activity is the correct estimation of insurance premiums. The premiums should be estimated so that the insuring company would not incur losses and the insured would not pay too much or too little.

The overall premium is the net premium enlarged by the security loading and insurance activity costs. In the paper two methods of premium estimation are compared: the expected value method and the variance method. It was also investigated if estimating premiums by means of selected methods allows to build optimal bonus-malus system. The investigation was carried out a real data from a Łodz insurance company.