

**Beata Stolorz**

Uniwersytet Szczeciński

## **FUNKCJA PRAWDOPODOBIENSTWA REALIZACJI OPCJI DLA LOGARYTMICZNO-NORMALNEGO ROZKŁADU CEN**

### **1. Wstęp**

W celu oceny ryzyka, które ponosimy, inwestując pieniądze w akcje lub opcje na akcje, interesujące jest to, czy opcja zostanie zrealizowana, czy nie. Z punktu widzenia wystawców opcji kupna, szczególnie tych bez pokrycia, może zająć potrzeba analizy prawdopodobieństwa zrealizowania opcji przez kupującego [Stolorz, Tarczyński 2002]. Skomplikowany aparat matematyczny stosowany w zagadnieniach związanych z instrumentami pochodnymi nie pozwala przeciętnemu inwestorowi na korzystanie z wielu metod oceny ryzyka. Zachodzi więc potrzeba konstrukcji bardziej dostępnych metod.

Celami pracy są konstrukcja i analiza funkcji prawdopodobieństwa realizacji opcji na podstawie klasycznych pojęć rachunku prawdopodobieństwa, analizy matematycznej i statystyki. Jest to propozycja pewnej miary ryzyka inwestycji w opcje. Pozwala ona ocenić prawdopodobieństwo zdarzenia, że opcja kupna będzie zrealizowana. Na wstępie zostanie przeprowadzona analiza funkcji prawdopodobieństwa realizacji opcji w przypadku dowolnego rozkładu cen instrumentu bazowego. Następnie rozpatrzmy przypadek logarytmiczno-normalnego rozkładu cen. Skorzystamy tutaj z założenia, że ceny akcji podlegają błędzeniu losowemu i dla dowolnego przyszłego momentu ceny te mają rozkład logarytmiczno-normalny (wówczas logarytmiczna stopa zwrotu ma rozkład normalny).

### **2. Funkcja prawdopodobieństwa realizacji opcji dla dowolnego rozkładu cen akcji**

Żałóżmy, że kupujemy europejską opcję kupna akcji, której cena rynkowa w dniu zakupu opcji wynosi  $S$ , cena opcji –  $S_0$ , a cena wykonania –  $S_w$ . Niech  $S_t$  ozna-

cza cenę rynkową w dniu wygaśnięcia opcji,  $t_k$  – termin wygaśnięcia opcji,  $r_1$  i  $r_2$  niech będą rocznymi stopami zwrotu liczonymi z zastosowaniem kapitalizacji ciągłej takimi, że stopa zwrotu należy do przedziału  $\langle r_2, r_1 \rangle$ . Załóżmy również, że ceny rynkowe instrumentu bazowego mają rozkład o gęstości  $y = g(x)$ . Przeanalizujmy, w jaki sposób kształtuje się prawdopodobieństwo zdarzenia, że opcja zostanie zrealizowana, tzn. że  $S_t \geq S_w$ . Rozważmy przypadek, w którym  $r_2 \leq 0 \leq r_1$ . Przy przyjętych założeniach cena akcji dla czasu  $t \in \langle 0, t_k \rangle$  może przyjmować wartości z obszaru ograniczonego krzywymi (rys. 1):

$$y = Se^{r_1 t}, \quad (1)$$

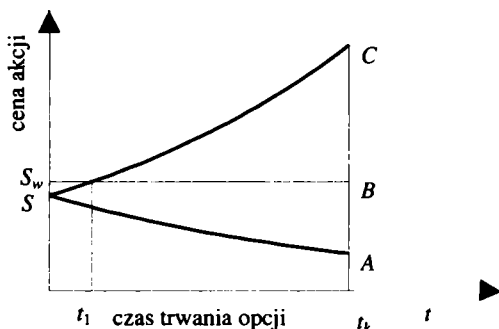
oraz

$$y = Se^{r_2 t}, \quad (2)$$

gdzie:  $t$  – czas upływający od momentu zakupu opcji, wyrażony w latach,

$r_1$  – maksymalna roczna stopa zwrotu,

$r_2$  – minimalna roczna stopa zwrotu.



Rys. 1. Obszar możliwych cen rynkowych akcji o cenie rynkowej  $S$  w dniu zakupu opcji i o czasie wygaśnięcia opcji równym  $t_k$  dla  $r_2 \leq 0 \leq r_1$  i  $S \leq S_w < Se^{r_1 t_k}$

Źródło: opracowanie własne.

Przy założeniu, że czas wykonania opcji jest nieskończenie długi, czyli  $t_k$  dąży do nieskończoności, oraz w zależności od wzajemnego położenia krzywych (1) i (2) względem prostej danej równaniem  $y = S_w$  należy rozważyć dwa przypadki.

1. Jeżeli  $S \leq S_w < Se^{r_1 t_k}$ , to prawdopodobieństwo zdarzenia A, że opcja zostanie zrealizowana w czasie  $t_k$  możemy obliczyć następująco:

$$P(A) = \frac{CB}{CA}. \quad (3)$$

Jeżeli  $t_k$  dąży do nieskończoności, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że opcja zostanie zrealizowana, można przedstawić jako funkcję  $\hat{P}$  zmiennej  $t$  w sposób następujący:

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle, \\ \frac{\int_{S_w}^{Se^{rt}} g(x) dx}{\int_{Se^{2t}}^{Se^{rt}} g(x) dx} & \text{dla } t \in (t_1, \infty), \end{cases} \quad (4)$$

gdzie:

$$t_1 = \frac{\ln \frac{S_w}{S}}{r_1}. \quad (5)$$

2. Jeżeli  $Se^{r_2 t} < S_w \leq S$ , to prosta o równaniu  $y = S_w$  przecina jedynie krzywą o równaniu  $y = Se^{r_2 t}$ . Funkcja  $\hat{P}$  przyjmuje wówczas postać:

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle, \\ \frac{\int_{S_w}^{Se^{rt}} g(x) dx}{\int_{Se^{2t}}^{Se^{rt}} g(x) dx} & \text{dla } t \in (t_1, \infty), \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:

$$t_1 = \frac{\ln \frac{S_w}{S}}{r_2}. \quad (7)$$

### 3. Ocena prawdopodobieństwa realizacji opcji w przypadku logarytmiczno-normalnego rozkładu cen akcji

W klasycznym podejściu w analizie danych finansowych przyjmuje się, że ceny akcji podlegają błędzeniu losowemu i dla dowolnego przyszłego momentu ceny te mają rozkład logarytmiczno-normalny, wówczas logarytmiczna stopa zwrotu ma rozkład normalny [Hull 1999, s. 290-291]. W celu uproszczenia założymy również, że spółka nie wypłaca dywidendy.

Niech stopa zwrotu w rozważanym okresie będzie ograniczona i zawarta w przedziale  $\langle r_2, r_1 \rangle$ .

Gęstość rozkładu jest określona wzorem:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

a dystrybuantę tego rozkładu opisuje funkcja:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (9)$$

Niech  $y = \Phi(x)$  oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

1. Funkcja (4) przybiera wówczas postać (zob. dodatek (i)):

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle, \\ \frac{\Phi\left(\frac{\ln Se^{rt} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln S_w - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln Se^{rt} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln Se^{t_1} - \mu}{\sigma}\right)} & \text{dla } t \in (t_1, \infty), \end{cases} \quad (10)$$

gdzie  $t_1$  jest określone wzorem (5).

2. Funkcja (6) przybiera wówczas postać (zob. dodatek (ii)):

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle, \\ \frac{\Phi\left(\frac{\ln Se^{rt} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln S_w - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln Se^{rt} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln Se^{t_1} - \mu}{\sigma}\right)} & \text{dla } t \in (t_1, \infty), \end{cases} \quad (11)$$

gdzie  $t_1$  jest określone wzorem (7).

3. W przypadku granicznym, kiedy czas realizacji opcji rośnie nieograniczenie, otrzymujemy (zob. dodatek (iii)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln S_w - \mu}{\sigma}\right). \quad (12)$$

Wynika z tego, że aby zwiększyć prawdopodobieństwo realizacji opcji, należy zwiększyć wartość wyrażenia  $1 - \Phi\left(\frac{\ln S_w - \mu}{\sigma}\right)$ . Będzie tak, jeżeli wyrażenie  $\Phi\left(\frac{\ln S_w - \mu}{\sigma}\right)$  będzie przyjmowało wartości bliskie zera, różnica  $\ln S_w - \mu$  powinna zatem przyjmować jak najmniejsze wartości, czyli dążyć do  $-\infty$ .

Jeżeli  $S_w$  będziemy wybierać bliskie  $S$ , to  $t_1$  będzie dążyło do zera, a co za tym idzie, funkcja prawdopodobieństwa realizacji opcji zarówno w sytuacji (10), jak i (11) będzie dążyła do funkcji  $P^*$  określonej następująco:

$$P^*(t) = \frac{\Phi\left(\frac{\ln Se^{r_1 t} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln S - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln Se^{r_1 t} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln Se^{r_2 t} - \mu}{\sigma}\right)}. \quad (13)$$

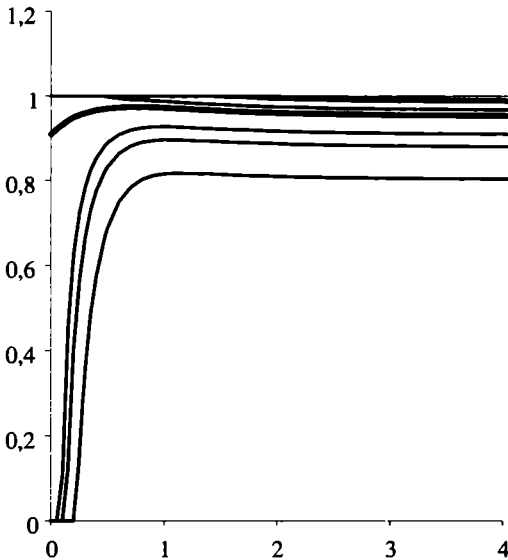
Funkcja  $P^*$  określona wzorem (13) jest granicą ciągu funkcyjnego  $(\hat{P}(t))$  dla  $S_w$  dążącego do  $S$ . Ma ona następujące własności:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^*(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln S - \mu}{\sigma}\right) \quad (14)$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow 0} P^*(t) = \frac{r_1}{r_1 - r_2}. \quad (15)$$

Funkcja  $P^*$  oraz funkcje określone wzorem (10) osiągają ekstremum typu maksimum, które można znaleźć, stosując metody numeryczne. Rodzinę tych funkcji przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Rodzina krzywych  $P_s$  i krzywa  $P^*$  dla  $r_2 \leq 0 \leq r_1$

Źródło: opracowanie własne.

#### 4. Podsumowanie

Po przeanalizowaniu funkcji prawdopodobieństwa realizacji opcji dla rozkładu logarytmiczno-normalnego rozkładu cen w przypadku  $r_2 \leq 0 \leq r_1$  można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Gdy  $S \leq S_w < Se^{r_1 t}$ , to prawdopodobieństwo realizacji opcji rośnie, osiąga wartość maksymalną, a następnie maleje do wartości  $1 - \Phi\left(\frac{\ln S_w - \mu}{\sigma}\right)$ . Wartość

maksymalna tego prawdopodobieństwa zależy od danych wyjściowych i jest różna dla różnych opcji.

2. Jeżeli  $Se^{r_2 t} < S_w \leq S$ , to prawdopodobieństwo realizacji opcji maleje do wartości  $1 - \Phi\left(\frac{\ln S_w - \mu}{\sigma}\right)$  wraz z wydłużeniem terminu realizacji opcji.

#### Dodatek

(i) Po skorzystaniu z prostej zależności między gęstością rozkładu a dystrybucją wzór (8) można przedstawić następująco:

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S_w)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})} & \text{dla } t \in (t_1, \infty) \end{cases} \quad (15)$$

Gdy do wzoru (15) podstawimy zależność [Kordecki 2000, s. 58-59]:

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln \tilde{x} - \mu}{\sigma}\right) & \text{dla } \tilde{x} > 0 \\ 0 & \text{dla } \tilde{x} \leq 0 \end{cases}, \quad (16)$$

to otrzymamy (10).

(ii) Podobnie jak w (i). Wzór (6) można przedstawić jako:

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S_w)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})} & \text{dla } t \in (t_1, \infty) \end{cases} \quad (17)$$

Po podstawieniu do wzoru (17) zależność (16) otrzymamy (11).

(iii) Ponieważ z własności dystrybucynty mamy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{\ln Se^{r_1 t} - \mu}{\sigma}\right) = 1 \text{ dla } r_1 > 0, \quad (18)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi \left( \frac{\ln S e^{r_2 t} - \mu}{\sigma} \right) = 0 \text{ dla } r_2 < 0, \quad (19)$$

to:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi \left( \frac{\ln S e^{r_1 t} - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left( \frac{\ln S_w - \mu}{\sigma} \right)}{\Phi \left( \frac{\ln S e^{r_1 t} - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left( \frac{\ln S e^{r_2 t} - \mu}{\sigma} \right)} = 1 - \Phi \left( \frac{\ln S_w - \mu}{\sigma} \right).$$

W ten sposób otrzymaliśmy zależność (14).

## Literatura

- Baxter M., Rennie A., *Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- Bullmann H., *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970.
- Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-Press, Warszawa 1999.
- Kellison S.G., *The Theory of Interest. Second Edition*, Irwin, Chicago 1991.
- Kordecki W., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Teoria, przykłady, zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2000.
- Ross Sheldon M., *An Elementary Introduction to Mathematical Finance. Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- Stolorz B., Tarczyński W., *Ocena prawdopodobieństwa realizacji europejskiej opcji kupna akcji*, „Rynek Terminowy” 2002, nr 2.

## FUNCTION OF PROBABILITY OF EXERCISE OF OPTION FOR LOG-NORMAL DISTRIBUTION OF PRICES

### Summary

To estimate the risk the investors take investing their money in stocks or stock options one must study if the option is exercised or not. From the point of view of call option writer, especially those uncovered, one should the probability of the exercise of option by a holder.

In the paper was presented the function of probability of exercise of option. The calculated probability is for an investor risk measure, which he can accept or reject. Function of probability of exercise of European call option presented in the paper was applied in the case of log-normal distribution of prices of the underlying instruments.