

Michał Stachura

Akademia Świętokrzyska w Kielcach

METODY SYMULACYJNE A STOCHASTYCZNY MODEL POLIS WIELOOPCYJNYCH

1. Wstęp

W ubezpieczeniach życiowych często są stosowane tzw. polisy kombinowane, zwane inaczej wieloopcyjnymi. Umożliwiają one zakładowi ubezpieczeń stworzenie dla klientów bardzo bogatej oferty. Wszelkie tego typu polisy, prócz ubezpieczenia na życie, oferują także dodatkową ochronę ubezpieczeniową w różnych (oczywiście ściśle określonych w umowie) przypadkach, np. na wypadek inwalidztwa, niezdolności do pracy, hospitalizacji, rehabilitacji itd. W sytuacjach takich zakład ubezpieczeń może wypłacać odpowiednie świadczenia lub też po prostu nie pobierać składek. W związku z tym, oprócz wypłaty sumy ubezpieczenia w przypadku śmierci, możliwe są także i wypłaty innych świadczeń. Co więcej, możliwa jest sytuacja, że każdy przypadek objęty ochroną ubezpieczeniową, niezależnie od pozostałych przypadków, jest rozważany terminowo lub bezterminowo, i dla każdego przypadku terminy wygaśnięcia ochrony mogą być zupełnie różne (por. np. [Doan 1995; Gajek, Ostaszewski 2002; Skałba 1999]).

Nakreślona w wielkim skrócie istota polis wieloopcyjnych uwidacznia pewne komplikacje związane z wyznaczeniem czystej składki netto. Dzieje się tak zwłaszcza wtedy, gdy polisa przewiduje bardzo wiele różnych przypadków i w odniesieniu do każdego z nich – różne, zmienne w czasie świadczenia. Owszem, na podstawie tablic życia czy pewnych, nawiązujących do tablic, przyjętych modelowych rozkładów dalszego trwania życia, a także na bazie estymowanych przez ubezpieczyciela częstotliwości znajdowania się ubezpieczonego w określonych przypadkach objętych polisą, można wprost, bądź w przybliżeniu, obliczyć zdyskontowaną łączną wartość przyszłych świadczeń, a przez to określić czystą składkę netto. Niemniej z uwagi na to, że dla skomplikowanych typów polis obliczenia te

bywają żmudne i uciążliwe (i nie zawsze prowadzą do wyrażeń w postaci wzorów analitycznych), warto odwołać się do badań symulacyjnych i na tej podstawie zarówno określić wysokości świadczeń, jak i dobrać do nich wielkość składki.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie możliwości, jakie dają badania symulacyjne w kontekście polis wieloopcyjnych. Dokonano tego na podstawie kilku wybranych, umownych polis, dla których wygenerowano dostatecznie wiele przebiegów stosownych szeregów liczbowych. Nim jednak przejdziemy do samych przykładów, nakreślimy pokrótce formalną ideę stochastycznego modelu polis wieloopcyjnych oraz schemat symulacji dyskretnego procesu Markowa i budowanego na jego kanwie strumienia przepływów pieniężnych.

2. Model teoretyczny

Przyjmijmy, że liczba stanów, które objęte są umową ubezpieczeniową, jest skończona i równa $m \in \mathbf{N}$, a sam zbiór stanów oznaczmy jako $S = \{s_1, \dots, s_m\}$. Zmiany stanów polisy można prawidłowo opisać, używając procesu stochastycznego $Y = \{Y(t) : t \in \mathbf{T}\}$, przyjmującego wartości w S , gdzie odpowiednio $\mathbf{T} = \mathbf{N}$ w przypadku dyskretnym, lub $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ w przypadku ciągłym. Zakładamy, że w dowolnym momencie $t \in \mathbf{T}$ polisa może znajdować się dokładnie w jednym stanie, co więcej, stanem początkowym jest zawsze stan s_1 , stan s_m zaś jest stanem pochłaniającym, odpowiadającym śmierci ubezpieczonego. Oznacza to, iż $\mathbf{P}(Y(0) = s_1) = 1$ i dla wszystkich $t_2 > t_1 > 0$ mamy: $\mathbf{P}(Y(t_2) = s_m \mid Y(t_1) = s_m) = 1$. Przyjmujemy także, że $\{Y(t) : t \in \mathbf{T}\}$ jest procesem Markowa¹ o stosownych prawdopodobieństwach przejścia ze stanu s_j do stanu s_k : $p_{j,k}(t, u) = \mathbf{P}(Y(u) = s_k \mid Y(t) = s_j)$.

Z procesem Y ściśle związany jest pewien, wynikający wprost z treści umowy ubezpieczeniowej, strumień płatności P , odzwierciedlający wpływy i wypływy środków z towarzystwa ubezpieczeniowego. Zauważmy, że P jest funkcją określoną na $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, przypisującą każdemu $t \geq 0$ łączną wartość płatności $P(t)$ zrealizowanych w przedziale $\langle 0, t \rangle$. Zwróćmy uwagę na dwa fakty. Po pierwsze, strumień P zadaje na zbiorach Borelowskich półosi $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ addytywną funkcję zbioru, która jest różnicą dwu miar² (niekoniecznie probabilistycznych!) – miary pochodzącej od wpłat i miary pochodzącej od wypłat. Po drugie, strumień P można rozbić na „podstrumienie”, z których każdy jest związany albo z pozostawianiem procesu Y w określonym ze stanów („podstrumień” P_j dla stanu s_j), albo z przej-

¹ Widać więc, że jest to proces ciągły lub dyskretny w sensie czasu, lecz zawsze dyskretny w sensie zbioru wartości.

² Uzasadnia to, rozważaną w ciągu dalszym, możliwość całkowania względem strumienia P .

ściem procesu Y w odpowiednią stronę pomiędzy parą określonych stanów („podstrumień” P_{jk} dla przejścia z s_j do s_k). Tę ostatnią prawidłowość można zapisać następująco:

$$P(t) = \sum_j I_j(t) \cdot P_j(t) + \sum_j \sum_{k \neq j} N_{jk}(t) \cdot P_{jk}(t),$$

gdzie odpowiednio: $I_j(t) = I_{\{Y(t)=s_j\}}$ jest indykátorem zdarzenia „proces Y jest w stanie s_j ”, a $N_{jk}(t) = \#\{u \in \langle 0, t \rangle : Y(u^-) = s_j, Y(u) = s_k\}$ jest procesem liczącym przejścia procesu Y ze stanu s_j do stanu s_k .

Dołączając dodatkowo do rozważań zmienność wartości pieniądza w czasie, otrzymujemy, że w dowolnej chwili t wartość ${}_{(t)}P$ strumienia płatności P jest równa:

$${}_{(t)}P = \frac{1}{v(t)} \int_{\langle 0, t \rangle} v(u) dP(u),$$

gdzie funkcja $v: \langle 0, +\infty \rangle \ni t \rightarrow v(t) \in \langle 0, +\infty \rangle$ jest czynnikiem dyskontującym z chwili t na chwilę 0. Można także oczywiście wartość ${}_{(t)}P$ odnieść do „rozbitego” na składowe strumienia P i powyższą całkę otrzymać jako sumę całek dla stosownych „podstrumieni”³. Taką metodę zastosowano w dalszej części w badaniach symulacyjnych. Z punktu widzenia ubezpieczyciela w momencie podpisywania umowy najistotniejszą wartością strumienia płatności jest ${}_{(0)}P$. Można nawet tę wartość uznać za zmienną decyzyjną, albowiem ubezpieczyciel w swej ofercie będzie mieć tylko takie typy polis, dla których ${}_{(0)}P \geq 0$.

3. Metoda symulacji

Od tej chwili skupimy się jedynie na dyskretnym przebiegu czasu, czyli przyjmujemy, że $T = \mathbf{N}$. Dla odpowiednio ustalonych: 1) szeregu $Y = \{Y(t) : t \in \mathbf{N}\}$, 2) strumienia P dobranego do szeregu Y oraz 3) dla funkcji dyskontującej v celem badań symulacyjnych jest wyznaczenie wartości ${}_{(0)}P$.

W przypadku dyskretnym, dysponując dowolną trajektoriá szeregu Y , w bardzo prosty sposób można znaleźć dla niej zdyskontowaną względem v wartość strumienia P poprzez sprowadzenie całej procedury obliczeniowej do najprostszych

³ Więcej szczegółów na temat samego strumienia P , a także jego dyskontowania znaleźć można np. w [Ostasiewicz W. 2000].

działań algebraicznych – wyznaczania sum stosownych iloczynów. Dzieje się tak dlatego, że bez względu na postać funkcji v i P mamy do czynienia jedynie z ciągami wartości, określającymi te funkcje. Problemem więc pozostaje wygenerowanie odpowiednio wielu trajektorii szeregu Y . A wtedy za ${}_{(0)}P$ można przyjąć średnią z wartości uzyskanych dla każdego przebiegu szeregu Y . Generowanie szeregu nie nastręcza także zbyt wielkich trudności, możemy bowiem np. postąpić w następujący sposób.

Ustalamy na początek prawdopodobieństwa przejścia $p_{j,k}(t, t+1) = \mathbf{P}(Y(t+1) = s_k \mid Y(t) = s_j)$ dla wszystkich $t \in \mathbf{N}$ i $j, k \in \{1, \dots, m\}$ oraz przyjmujemy $Y(0) = s_1$. Następnie, generując liczbę pseudolosową $u_0 \in (0, 1)$, kładziemy $Y(1) = s_k$, dla k spełniającego: $p_{1,1}(0, 1) + \dots + p_{1,k-1}(0, 1) \leq u_0 < p_{1,1}(0, 1) + \dots + p_{1,k}(0, 1)$. Procedurę tę powtarzamy rekurencyjnie, czyli mając już określone $Y(t) = s_j$, generujemy liczbę pseudolosową $u_t \in (0, 1)$ i definiujemy $Y(t+1) = s_k$, jeśli tylko zachodzi: $p_{j,1}(t, t+1) + \dots + p_{j,k-1}(t, t+1) \leq u_t < p_{j,1}(t, t+1) + \dots + p_{j,k}(t, t+1)$. Postępujemy w ten sposób tak długo, aż uzyskamy szereg $Y = \{Y(t) : t \in \mathbf{N}\}$ o żądanej długości, lub też do momentu pierwszego wejścia szeregu Y do stanu pochłaniającego s_m ⁴.

4. Przykładowe badania symulacyjne

W niniejszym opracowaniu będziemy rozważać trzy typy kombinowanych polis ubezpieczeniowych na życie:

- ubezpieczenie bezterminowe na życie i bezterminowe na wypadek hospitalizacji,
- ubezpieczenie terminowe na życie i bezterminowe na wypadek hospitalizacji,
- ubezpieczenie terminowe na życie i terminowe na wypadek hospitalizacji.

Niech dany będzie zatem następujący zbiór stanów $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, gdzie: s_1 oznacza, iż ubezpieczony jest zdrowy, s_2 – ubezpieczony jest hospitalizowany, s_3 – ubezpieczony nie żyje. Niech będą także określone następujące strumienie płatności: P_1 – strumień wpłacanych przez ubezpieczonego składek w każdej jednostce czasu, P_2 – strumień wypłacanych w każdej jednostce czasu przez ubezpieczyciela świadczeń, P_{13} , P_{23} – strumienie jednorazowych wypłat⁵. Pozostałe strumienie są strumieniami zerowymi.

⁴ Postępowanie to jest na tyle nieskomplikowane, że autor dokonał wszelkich prezentowanych dalej symulacji w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel.

⁵ Wypłaty te są jednorazowe, ponieważ związane są z wejściem do stanu pochłaniającego.

Dla ułatwienia dalszych rozważań i większej łatwości porównania trzech przyjętych typów polis przyjmijmy, że dla wszystkich t zachodzi: $P_1(t) = p_1$, $P_2(t) = p_2$, $P_{13}(t) = P_{23}(t) = p$, przy czym wartości p_1 , p_2 , p są stosownie dobrane dla każdego typu polisy.

Za jednostkę czasu przyjmujemy jeden miesiąc, a prawdopodobieństwa przejścia dla szeregu Y ustalamy w nawiązaniu do prawa umieralności Gompertza-Makehama⁶. Przyjmujemy bowiem, że $p_{j,k}(t, t+1) = a_{ij} + b_{ij}(c_{ij})^t$ dla $t \geq 0$ i dla czterech zestawów indeksów: (i) $i = 1, j = 2$, (ii) $i = 1, j = 3$, (iii) $i = 2, j = 2$, (iv) $i = 2, j = 3$. Pozostałe brakujące prawdopodobieństwa przejścia dobrane są w ten sposób, by łączne prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na pozostaniu lub wyjściu z każdego ustalonego stanu było równe jedności. Same współczynniki, występujące w funkcjach intensywności, ustalone zostały arbitralnie w następujący sposób:

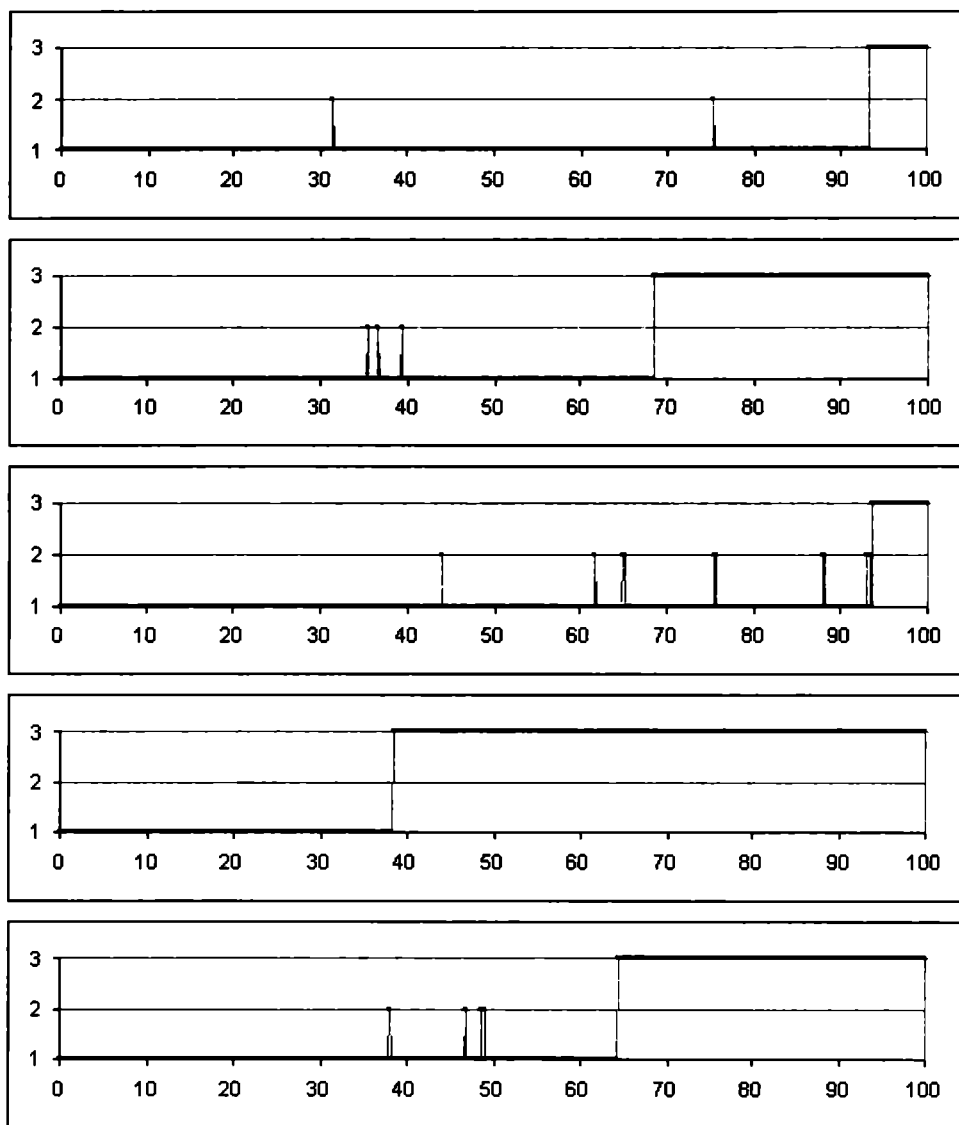
- (i) $a_{12} = 0,00004$, $b_{12} = 0,000000035$, $c_{12} = 1,0715$,
- (ii) $a_{13} = 0,000004$, $b_{13} = 0,0000005$, $c_{13} = 1,084$,
- (iii) $a_{22} = 0,008$, $b_{22} = 0,00000000075$, $c_{22} = 1,00046$,
- (iv) $a_{23} = 0,00015$, $b_{23} = 0,000001$, $c_{23} = 1,0765$.

Głównym motywem przyjęcia takich a nie innych wartości była chęć uzyskania dla symulowanych szeregów średniej długości życia osoby w wieku 0 lat równej ok. 75 lat. Przykładowe trajektorie szeregu Y dla takiej osoby przedstawiono na wykresach na rys. 1, na których na osi poziomej odłożony jest czas, na osi pionowej zaś zaznaczone są stany (dla uproszczenia użyto „i” zamiast: „ s_i ”).

Na podstawie przyjętych trzech typów polis: a), b) i c) zbudujemy teraz cztery modele symulacyjne. Ogólnie przyjmujemy, że we wszystkich z nich ubezpiecza się osoba 18-letnia, umowa zaś przewiduje comiesięczną wpłatę składki w kwocie p_1 , gdy ubezpieczony jest w stanie s_1 , comiesięczną wypłatę świadczenia w kwocie p_2 , gdy ubezpieczony jest w stanie s_2 , i wreszcie jednorazową wypłatę kwoty p , gdy ubezpieczony przejdzie do stanu s_3 . Zakładamy także, że przez cały okres ubezpieczenia czynnik dyskontujący v jest stały i pochodzi od inflacji równej 3%. Dodatkowo dla poszczególnych modeli ustalamy, że:

- (♣) $p_1 = 10$, $p_2 = 50$, $p = 5000$ w ubezpieczeniu bezterminowym na życie i bezterminowym na wypadek hospitalizacji, przy składce pobieranej przez całe życie,
- (♥) $p_1 = 10$, $p_2 = 50$, $p = 18000$ w ubezpieczeniu terminowym na życie na 45 lat i bezterminowym na wypadek hospitalizacji i dla składki pobieranej przez całe życie,

⁶ Prawo umieralności Gompertza-Makehama dotyczy ciągłego ujęcia czasu, a za pomocą funkcji wykładniczej zadana jest intensywność wymierania. W niniejszych rozważaniach zaś mamy do czynienia z czasem dyskretnym, a funkcja wykładnicza zadaje prawdopodobieństwa przejścia. Szczegółowe opisy różnych praw umieralności znaleźć można np. w [Gajek, Ostaszewski 2002; Ostasiewicz S. 2000; Ostasiewicz W. 2000].



Rys. 1. Przykładowe trajektorie procesu Markowa o trzech stanach
Źródło: opracowanie własne.

- (♦) $p_1 = 10$, $p_2 = 1300$, $p = 5000$ w ubezpieczeniu terminowym na życie i terminowym na wypadek hospitalizacji, przy składce pobieranej również terminowo – we wszystkich przypadkach dla okresu 45 lat,
- (♣) $p_1 = 5$, $p_2 = 50$, $p = 5000$ w ubezpieczeniu i dla składki jak w (♦).

Dla każdego z modeli polis wieloopcyjnych zostało wygenerowanych ponad 1000 trajektorii szeregów Markowa. Spośród nich odrzucono te, w przypadku któ-

rych szereg Y wchodzi do stanu s_3 w chwili $t \leq 18$ i pozostawiono dokładnie po 1000 początkowych trajektorii dla każdego z przypadków: ($\spadesuit$), ($\heartsuit$), ($\diamondsuit$) i ($\clubsuit$). Następnie względem każdej trajektorii zostały policzone wartości ${}_{(0)}P$. Uzyskane w ten sposób wyniki zebrano w tab. 1.

Tabela 1. Wartości uzyskane w badaniach symulacyjnych

Model	${}_{(0)}P$	ET	ET_1	ET_2	Licz. s_2	Statystyka
($\spadesuit$)	691,2799	75,5503	75,2563	0,2607	1,4960	średnia
	1873,9238	18,4816	18,3385	0,3373	1,3409	odch. stand.
	2,7108	0,2446	0,2437	1,2939	0,8963	wsp. zmien.
($\heartsuit$)	1345,3379	75,4944	75,2151	0,2460	1,4910	średnia
	8150,0729	18,4064	18,2852	0,2828	1,3221	odch. stand.
	6,0580	0,2438	0,2431	1,1495	0,8867	wsp. zmien.
($\diamondsuit$)	1233,5790	75,1241	74,8572	0,2336	1,4540	średnia
	2941,7265	18,7701	18,6576	0,2753	1,3379	odch. stand.
	2,3847	0,2499	0,2492	1,1787	0,9201	wsp. zmien.
($\clubsuit$)	818,7578	75,1373	74,8718	0,2322	1,4000	średnia
	2087,9729	18,8842	18,7706	0,2843	1,2969	odch. stand.
	2,5502	0,2513	0,2507	1,2245	0,9264	wsp. zmien.

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 1, nie licząc średnich wygenerowanych wartości ${}_{(0)}P$, podano także ich próbkowe odchylenia standardowe i współczynniki zmienności. Dodatkowo umieszczono pewne wybrane statystyki, dotyczące samych szeregów Markowa Y , mianowicie: średnią długość życia 0-latka (ozn. „ ET ”), średni czas pobytu w stanie s_1 (ozn. „ ET_1 ”), średni czas pobytu w stanie s_2 (ozn. „ ET_2 ”) i średnią liczbę wejść do stanu s_3 (ozn. „licz. s_2 ”). Oprócz wartości średnich w tabeli znalazły się również odpowiednie odchylenia standardowe i współczynniki zmienności.

5. Zakończenie

Po przeprowadzonych badaniach symulacyjnych można wysnuć dwa wnioski płynące z badań bezpośrednio i pośrednio. Po pierwsze, z tab. 1 wynika, że skrócenie czasu ochrony ubezpieczeniowej pozwala ubezpieczycielowi podwyższyć kwoty świadczeń lub obniżyć składki. Równocześnie, w przypadku gdy część ze strumieni płatności może być zgodnie z treścią polisy realizowana terminowo, a część bezterminowo, można zaobserwować większą zmienność i odchylenie standardowe dla ${}_{(0)}P$, niż w sytuacji, kiedy wszystkie strumienie są realizowane w takim samym czasie. A zatem „niejednorodne czasowo” polisy z punktu widzenia ubezpieczyciela zdają się być obciążone większym ryzykiem.

Po drugie, nawet proste badania symulacyjne, jak np. te przeprowadzone w niniejszym artykule, wyraźnie pokazują ogrom możliwości zastosowań opisanych w niniejszym opracowaniu procedur, nie tylko zresztą w odniesieniu do polis wielo-

opcyjnych, ale również w wielu innych przypadkach. Symulacje opisanego tu szeregu Markowa mogą posłużyć bowiem do badań umieralności różnych populacji czy kohort.

Dodajmy na koniec, że tego typu badania symulacyjne są świetnym uzupełnieniem teoretycznych metod wyliczania oczekiwanych wartości strumieni pieniężnych i składek netto, pozwalającym sprawdzać poprawność tychże wyliczeń. Co więcej, badania symulacyjne mogą być dla ubezpieczyciela szybkim wyznacznikiem do podjęcia decyzji, który produkt ubezpieczeniowy wdrożyć (dobór stanów procesu Y i strumienia P) i których klientów zgodnie z nim ubezpieczać (dobór prawdopodobieństw bądź intensywności przejścia dla procesu Y).

Literatura

Doan O. (red.), *Ubezpieczenia życiowe*, Poltext, Warszawa 1995.

Gajek L., Ostaszewski M., *Plany emerytalne. Zarządzanie aktywami i zobowiązaniami*, WNT, Warszawa 2002.

Ostasiewicz S. (red.), *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych*, AE, Wrocław 2000.

Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, AE, Wrocław 2000.

Skalba M., *Ubezpieczenia na życie*, WNT, Warszawa 1999.

SIMULATION METHODS FOR THE STOCHASTIC MULTIOPTIONAL POLICY MODEL

Summary

The paper deals with some possibilities of applications of the Markov chain simulation methods in the live insurance area. Namely as long as Markov processes may be considered as a theoretical model for the multioptional policy notion, one can simulate some sample paths and conclude with the aid of the generated data.

The author introduces a very simple Markov chain generation algorithm and uses it in four exemplary policies. It is shown additionally in each case how to build the payment stream of premiums and pays off. Thereby an insurer may use the presented methods as a decisive factor when creating new offer or when selecting new potential clients.