

Paweł Rokita

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

**POMIAR RYZYKA PORTFELA Z WYKORZYSTANIEM
FUNKCJI POWIĄZAŃ (*COPULA FUNCTIONS*) I TEORII
WARTOŚCI EKSTREMALNYCH W PRZYPADKU
DYWERSYFIKACJI MIĘDZYNARODOWEJ**

1. Wstęp

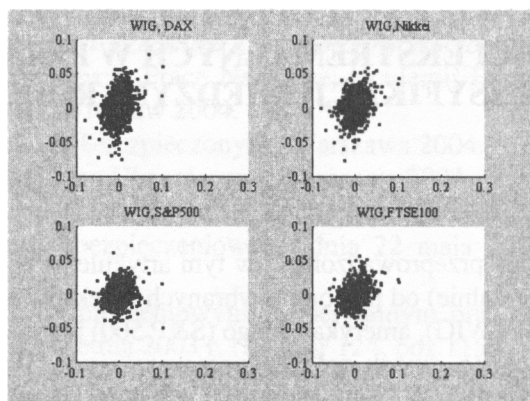
Przedmiotem badań przeprowadzonych w tym artykule są portfele, których wartość zależy (proporcjonalnie) od poziomu wybranych indeksów akcji z rynków europejskich (DAX, FTSE, WIG), amerykańskiego (S&P 500) i japońskiego (Nikkei).

Na wstępie dokonano dwóch założeń upraszczających. Po pierwsze, analiza stóp zwrotu z wspomnianych indeksów pomijać będzie dochody z różnic kursowych. To uproszczenie usprawiedliwia fakt, że artykuł nie jest poświęcony badaniu efektywności dywersyfikacji międzynarodowej, ale analizie wpływu struktury zależności na ryzyko portfela. Oczywiście, pomijamy wówczas tę część ryzyka portfela międzynarodowego, która wynika z ryzyka kursowego. Stanowi to niewątpliwie duże uproszczenie (por. np. [Elton, Gruber 1998, s. 314])¹. Drugie zastrzeżenie dotyczy rodzajów ryzyka, jakie będą rozważane. Ograniczamy się tylko do ryzyka rynkowego (ryzyka zmian cen). Ponadto analizowane będzie ryzyko ponoszone na co dzień, w zwykłej działalności inwestycyjnej na rynku kapitałowym. Wykorzystywane w tych badaniach modele, nawet zakładające grube ogony rozkładów strat – tutaj przybliżane przy wykorzystaniu twierdzeń teorii wartości ekstremalnych – nie służą do przewidywania takich katastrof gospodarczych, jak np. kryzys azjatycki w 1997 r. bądź rosyjski w 1998 r., ani ich wpływu na wartość portfela.

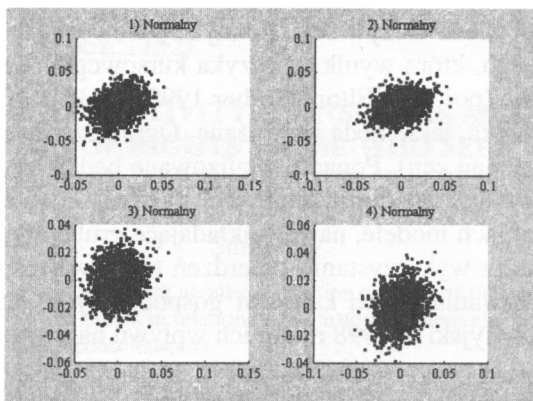
¹ Wyniki badań Solnika (1988), przedstawione w pracy [Elton, Gruber 1998, s. 362], pokazują, że stopy zwrotu z różnic kursowych nie zawsze stanowią liczący się składnik stóp zwrotu ze zdywersyfikowanego międzynarodowo portfela akcji.

Dywersyfikacja międzynarodowa jest ważną metodą ograniczania ryzyka portfela. Dotyczy to zarówno ryzyka rynkowego, jak i innych rodzajów ryzyka, np. kredytowego. Powszechnie jest znany fakt, że mimo postępującej integracji rynków, współczynniki korelacji stóp zwrotu z indeksów głównych giełd światowych są na ogół niższe niż korelacja stóp zwrotu z akcji występujących na jednym rynku (por. [Elton, Gruber 1998, s. 326]). Ponieważ jednak rynki coraz silniej wzajemnie na siebie oddziałują, badanie ich zależności jest ważnym zagadnieniem.

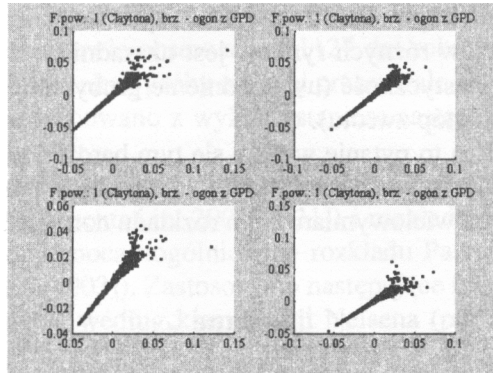
Jak już wspomniano, badane tutaj jest ryzyko rynkowe portfeli. Zastosowane i porównane zostaną modele pozwalające na stosunkowo dużą elastyczność w zakresie opisywania zależności stóp zwrotu. Zakłada się przy tym, że wielowymiarowe rozkłady stóp zwrotu mogą mieć nieliniową strukturę zależności, a więc nie dającą się w pełni i jednoznacznie opisać za pomocą macierzy kowariancji. Przyjęto ponadto, że rozkłady brzegowe mogą mieć grube ogony. Ogony te będą modelowane przy wykorzystaniu uogólnionego rozkładu Pareto.



Rys. 1. Empiryczne wykresy rozrzutu względnych strat
Źródło: opracowanie własne.

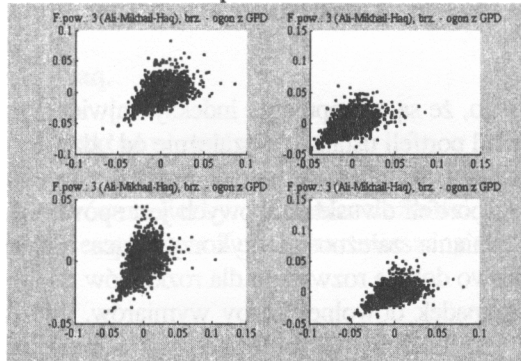


Rys. 2. Wykresy rozrzutu dla dwuwymiarowego rozkładu normalnego (symulacja 1600 liczb pseudolosowych), wartości oczekiwane i wariancje oszacowane na podstawie danych wykorzystanych w rys. 1
Źródło: opracowanie własne.



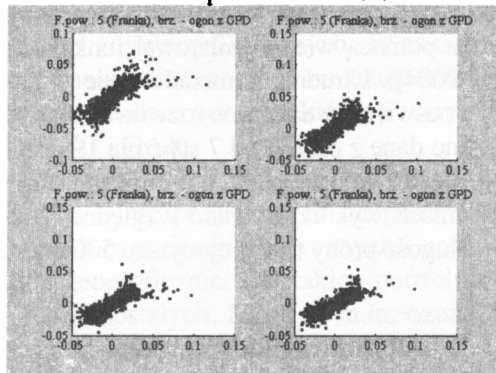
Rys. 3. Wykresy rozrzutu dla dwuwymiarowego rozkładu o funkcji powiązań Claytona i rozkładach brzegowych z ogonami przybliżonymi za pomocą uogólnionego rozkładu Pareto (symulacja 1600 liczb pseudolosowych)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Wykresy rozrzutu dla dwuwymiarowego rozkładu o funkcji powiązań Ali-Mikhail-Haq i rozkładach brzegowych z ogonami przybliżonymi za pomocą uogólnionego rozkładu Pareto (symulacja 1600 liczb pseudolosowych)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Wykresy rozrzutu dla dwuwymiarowego rozkładu o funkcji powiązań Franka i rozkładach brzegowych z ogonami przybliżonymi za pomocą uogólnionego rozkładu Pareto (symulacja 1600 liczb pseudolosowych)

Źródło: opracowanie własne.

Celem artykułu jest odpowiedź na pytanie, czy w analizie ryzyka portfela skonstruowanego z indeksów różnych rynków jest uzasadnione stosowanie modeli pozwalających na taką elastyczność (uwzględnienie grubych ogonów rozkładów oraz nieliniowej zależności stóp zwrotu).

Próba odpowiedzi na to pytanie wydaje się tym bardziej potrzebna, że już wzrokowa analiza wykresów rozrzutu względnych strat z takich portfeli wskazuje, iż rozkłady strat różnią się od wielowymiarowego rozkładu normalnego (por. rys. 1-5).

2. Dane

Badaniom zostały poddane portfele dwuskładnikowe indeksu WIG oraz wybranych indeksów giełd światowych. Są to następujące indeksy:

- 1) DAX,
- 2) FTSE-100,
- 3) Nikkei,
- 4) S&P500.

Wybór wynika z tego, że są to popularne indeksy największych zagranicznych rynków kapitałowych. Skład portfeli ustalano niezależnie od udziału tych indeksów w kapitalizacji portfela globalnego. W celu uproszczenia przyjęto portfele o równych udziałach. Ograniczenie badań do portfeli dwuskładnikowych jest spowodowane tym, że zastosowana metoda uwzględniania zależności, wykorzystująca archimedesowskie funkcje powiązań, jest stosunkowo dobrze rozwinięta dla rozkładów dwuwymiarowych, trudniej ją zaś uogólnić na przypadek dowolnej liczby wymiarów. Nie oznacza to jednak, że uogólnienie takie nie jest możliwe. Obecnie literatura poświęcona wielowymiarowym archimedesowskim funkcjom powiązań jest bogata (por. np. [Embrechts i in. 2001, s. 36]). Praktyczne zastosowanie wielowymiarowych archimedesowskich funkcji powiązań napotyka jednak ograniczenie polegające na braku możliwości swobodnego doboru parametrów dwuwymiarowych brzegowych funkcji powiązań w rozkładzie wielowymiarowym, modelowanym za pomocą wielowymiarowej funkcji archimedesowskiej (por. np. [Guegan, Ladoucette 2004]). Utrudnia to modelowanie struktury zależności. Niniejszy artykuł nie jest jednak poświęcony dalszemu rozwijaniu tego tematu.

Do badań wykorzystano dane z okresu od 7 stycznia 1997 r. do 7 kwietnia 2005 r., razem 1627 obserwacji. Obliczono dzienne logarytmiczne stopy zwrotu. We wszystkich prowadzonych badaniach wykorzystywano względne straty, czyli stopy zwrotu przemnożone przez -1 . Długość próby testowej wynosi 500 dni roboczych.

3. Zastosowane modele

Obliczano jednodniowe prognozy wartości zagrożonej przy poziomie tolerancji VaR 1%. W estymacji parametrów stosowano model statyczny (zwykłej zmiennej

losowej, a nie procesu stochastycznego). Parametry modeli wartości zagrożonej były estymowane na podstawie obserwacji z 1127 dni roboczych poprzedzających dzień prognozy. Następnie okno próby uczącej przesuwano się o jeden dzień.

Wartość zagrożoną szacowano z wykorzystaniem następujących modeli, zakładających:

1. Dwuwymiarowy rozkład z archimedesowskimi funkcjami powiązań (*copula functions*) (por. np. [Embrechts i in. 2001, s. 31]) i rozkładami brzegowymi o ogonach przybliżanych za pomocą uogólnionego rozkładu Pareto (por. [Rokita 2005; Di Clemente, Rommano 2003]). Zastosowano następujące funkcje powiązań:

1.1. Claytona (nr 1 według klasyfikacji Nelsena (por. [Nelsen 1998; Armstrong 2003])).

1.2. Ali-Mikhail-Haq (nr 3 według Nelsena).

1.3. Franka (nr 5 według Nelsena).

2. Dwuwymiarowy rozkład z archimedesowskimi funkcjami powiązań i normalnymi rozkładami brzegowymi. Zastosowano następujące funkcje powiązań:

2.1. Claytona.

2.2. Ali-Mikhail-Haq.

2.3. Franka.

3. Dwuwymiarowy rozkład normalny.

Uzyskane prognozy wartości zagrożonej poddano testom wstecznym. Przeprowadzone zostały testy zarówno liczby, jak i niezależności przekroczeń VaR. Wykorzystano w tym celu mieszany test Kupca oraz mieszany test Christoffersena.

4. Wyniki badań

Przydatność tych metod analizy ryzyka, które pozwalają na uwzględnienie grubych ogonów rozkładów strat, a także struktury zależności innej niż liniowa (np. wyższa zależność między wysokimi niż typowymi stratami), najlepiej badać na przykładzie portfeli gorzej zdywersyfikowanych. W takich bowiem przypadkach stosowanie tych metod może mieć szczególne uzasadnienie. W związku z tym poniżej posłużymy się przykładem portfela, którego wartość zależy – w równych udziałach – od indeksu WIG i DAX.

Stosunkowo słabego efektu dywersyfikacji portfela spodziewamy się w przypadku indeksów z krajów silnie powiązanych gospodarczo, należących do tych samych międzynarodowych organizacji politycznych i gospodarczych (Unia Europejska), a także bliskich geograficznie. Dla takich portfeli intuicyjnie oczekujemy wyższego ryzyka niż dla pozostałych. Może to m.in. oznaczać, że przydatne będą w ich przypadku wspomniane niestandardowe metody pomiaru ryzyka.

Tabele 1-4 przedstawiają wyniki testów liczby i niezależności przekroczeń wartości zagrożonej, oszacowanej za pomocą wybranych modeli.

Tabela 1. Model 1.1. i 2.1. Wyniki testów wstecznych

Model nr 1.1. Funkcja powiązań: 1 (Claytona)						Model nr 2.1. Funkcja powiązań: 1 (Claytona)					
Rozkład brzegowy: ogon z EVT - GPD						Rozkład brzegowy: normalny					
poziom istotności testów: 0,05						poziom istotności testów: 0,05					
pr. teor.: 0,01 (teoretyczne prawd. przekroczenia kwantyla)						pr. teor.: 0,01 (teoretyczne prawd. przekroczenia kwantyla)					
Wyniki mieszanego testu Kupca						Wyniki mieszanego testu Kupca					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.		LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.
LR_uc	0,21687	3,841459	0	4	0,008	LR_uc	10,05034	3,841459	1	0	0
LR_ind	19,12149	9,487729	1			LR_ind	-	-	-		
LR_mix	19,33836	11,0705	1			LR_mix	-	3,841459	0		
Wyniki mieszanego testu Christoffersena						Wyniki mieszanego testu Christoffersena					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.		LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.
LR_uc	0,21687	3,841459	0	4	0,008	LR_uc	10,05034	3,841459	1	0	0
LR_ind	5,462225	3,841459	1			LR_ind	0	3,841459	0		
LR_mix	5,679095	5,991465	0			LR_mix	10,05034	5,991465	1		

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Model 1.2. i 2.2. Wyniki testów wstecznych

Model nr 1.2. Funkcja powiązań: 3 (Ali-Mikhail-Haq)						Model nr 2.2. Funkcja powiązań: 3 (Ali-Mikhail-Haq)					
Rozkład brzegowy: ogon z EVT - GPD						Rozkład brzegowy: normalny					
poziom istotności testów: 0,05						poziom istotności testów: 0,05					
pr. teor.: 0,01 (teoretyczne prawd. przekroczenia kwantyla)						pr. teor.: 0,01 (teoretyczne prawd. przekroczenia kwantyla)					
Wyniki mieszanego testu Kupca						Wyniki mieszanego testu Kupca					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.		LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.
LR_uc	0,718703	3,841459	0	7	0,014	LR_uc	0,943116	3,841459	0	3	0,006
LR_ind	39,98072	14,06714	1			LR_ind	1,429499	7,814728	0		
LR_mix	40,69942	15,50731	1			LR_mix	2,372615	9,487729	0		
Wyniki mieszanego testu Christoffersena						Wyniki mieszanego testu Christoffersena					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.		LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.
LR_uc	0,718703	3,841459	0	7	0,014	LR_uc	0,943116	3,841459	0	3	0,006
LR_ind	9,419917	3,841459	1			LR_ind	0,036303	3,841459	0		
LR_mix	10,13862	5,991465	1			LR_mix	0,979419	5,991465	0		

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Model 1.3. i 2.3. Wyniki testów wstecznych

Model nr 1.3. Funkcja powiązań: 5 (Franka)						Model nr 2.3. Funkcja powiązań: 5 (Franka)					
Rozkład brzegowy: ogon z EVT - GPD						Rozkład brzegowy: normalny					
poziom istotności testów: 0,05						poziom istotności testów: 0,05					
pr. teor.: 0,01 (teoretyczne prawd. przekroczenia kwantyla)						pr. teor.: 0,01 (teoretyczne prawd. przekroczenia kwantyla)					
Wyniki mieszanego testu Kupca						Wyniki mieszanego testu Kupca					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.		LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.
LR_uc	2,352982	3,841459	0	2	0,004	LR_uc	10,05034	3,841459	1	0	0
LR_ind	8,606224	5,991465	1			LR_ind	-	-	-		
LR_mix	10,95921	7,814728	1			LR_mix	-	-	0		
Wyniki mieszanego testu Christoffersena						Wyniki mieszanego testu Christoffersena					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.		LR	CV	Czy odrz.	l.przetr.	cz.przetr.
LR_uc	2,352982	3,841459	0	2	0,004	LR_uc	10,05034	3,841459	1	0	0
LR_ind	0,016105	3,841459	0			LR_ind	0	3,841459	0		
LR_mix	2,369087	5,991465	0			LR_mix	10,05034	5,991465	1		

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Model zakładający wielowymiarowy rozkład normalny. Wyniki testów wstecznych

Model nr 3 Dwuwymiarowy rozkład normalny

poziom istotności testów: 0,05

pr. teor.: 0,01 (teoretyczne prawd. przekroczenia kwantyla)

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	4,813361	3,841459	1	1	0,002
LR_ind	-	3,841459	-		
LR_mix	65535	5,991465	0		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	4,813361	3,841459	1	1	0,002
LR_ind	0,00402	3,841459	0		
LR_mix	4,817381	5,991465	0		

Źródło: opracowanie własne.

5. Wnioski

Przeprowadzona analiza miała na celu zbadanie przydatności pewnej grupy modeli, które pozwalają na uwzględnianie grubych ogonów rozkładów strat oraz innej struktury zależności niż korelacja liniowa. Rozważane były modele rozkładów wielowymiarowych o brzegowych rozkładach mających grube ogony. Ogony te były przybliżane metodami wywodzącymi się z teorii wartości ekstremalnych. Strukturę zależności modelowano z wykorzystaniem archimedesowskich funkcji powiązań. W celu porównania przeanalizowano również modele z wybranymi archimedesowskimi funkcjami powiązań, ale o normalnych rozkładach brzegowych. W ten sposób nie można, co prawda, modelować grubych ogonów rozkładów brzegowych, ale jest możliwe uwzględnienie silniejszej zależności między wartościami z ogona niż w przypadku wielowymiarowego rozkładu normalnego. Metoda ta pozwala więc na modelowanie grubych ogonów rozkładu wielowymiarowego. Te podejścia porównano z kolei z klasycznym modelem zakładającym wielowymiarowy rozkład normalny. Jeżeli rzeczywiście występują grube ogony rozkładów stóp zwrotu (strat) oraz inna jest zależność między wartościami z ogona niż typowymi, to należałoby oczekiwać, że klasyczny model normalny będzie niedoszacowywał ryzyko, podczas gdy badane tu bardziej elastyczne modele powinny

dawać lepsze oszacowania ryzyka bądź też – w niektórych przypadkach – wręcz je przeszacowywać².

Pośród rozpatrzonych modeli tylko model z funkcją powiązań Ali-Mikhail-Khan (nr 3 według katalogu Nelsena) oraz normalnymi rozkładami brzegowymi nie został odrzucony przez testy liczby ani też niezależności przekroczeń VaR.

Modele z brzegowymi rozkładami normalnymi i funkcjami powiązań Clayтона i Franka zawyżały znacznie oszacowania VaR. Zostały one odrzucone wobec braku przekroczeń jednoprocetowej wartości zagrożonej przez którąkolwiek z 500 strat w próbie testowej.

Na uwagę zasługuje to, że w przeprowadzonym badaniu również model z wielowymiarowym rozkładem normalnym przeszacowywał VaR, choć w mniejszym stopniu niż poprzednie modele. Przyczyna leży najprawdopodobniej w samej koncepcji modelu długoterminowego bezwarunkowego rozkładu strat. Jest to model statyczny, nie zaś model szeregu czasowego. Przy malejącej zmienności stóp zwrotu z portfela (a tak właśnie było w analizowanym przypadku) wykorzystanie długich (1627-dniowych) prób bez postarzania danych musi prowadzić do zawyżania prognoz ryzyka.

Dalsze badania nad wykorzystaniem omawianych modeli należy prowadzić raczej dla przypadku dynamicznego, w którym modelowany byłby warunkowy rozkład w danej chwili, a nie rozkład bezwarunkowy szeregu czasowego.

Innym zagadnieniem, które wymaga dalszych badań, jest wspomniany już we wcześniejszych rozważaniach (por. [Rokita 2005]) problem uogólnienia przeprowadzonej w artykule analizy na większą liczbę wymiarów (por. też np. [Embrechts i in. 2001, s. 37]).

Na koniec warto poruszyć kwestię raczej nieoczekiwanych wyników testów dla 1 grupy modeli (modeli z funkcjami powiązań i rozkładami brzegowymi o ogonach estymowanych za pomocą uogólnionego rozkładu Pareto). Co prawda, również one zawyżały oszacowania ryzyka, ale w mniejszym stopniu niż modele z brzegowymi rozkładami normalnymi i tymi samymi funkcjami powiązań. Należało oczekiwać, że modele z 1 grupy będą dawały wyższe prognozy VaR niż modele z grupy 2. Fakt, że liczba przekroczeń otrzymana dla modeli z grupy 1 jest nieco bliższa teoretycznej nie oznacza, że są one lepsze. Testy niezależności przekroczeń odrzuciły bowiem hipotezę o losowości przekroczeń. Ponadto właśnie modele z grupy 1, mimo teoretycznie większej elastyczności, mogą być w praktyce mniej dokładne, gdyż wymagają one estymacji większej liczby parametrów (po dwa parametry GPD dodatkowo dla każdego rozkładu brzegowego, a także wartości progowe³ –

² Zawyżanie oszacowań i prognoz ryzyka miałyby miejsce wówczas, gdyby model zakładał jeszcze grubsze ogony rozkładów brzegowych lub silniejszą zależność między wartościami pochodzącymi z tych ogonów, niż miałyby to miejsce w rzeczywistości.

³ Które tu były narzucone arbitralnie na poziomie kwantyla odpowiadającego prawdopodobieństwu 98% (oczywiście kwantyl progowy musi się znajdować poniżej wartości zagrożonej, aby tę grupę metod można było stosować do szacowania VaR).

kwantyle „odcinające” ogony). Przy kilkusetkrotnym wykonywaniu procedury estymacji parametrów GPD metodą największej wiarygodności, oprócz statystycznych błędów estymacji, mogła w niektórych przypadkach ujawnić się też niestabilność wykorzystywanego algorytmu optymalizacyjnego. Choć modele należące do grupy 1 dawały na pozór nieco lepsze wyniki testów, to raczej do nich właśnie należy podchodzić zatem z większą ostrożnością niż do modeli z grupy 2.

Podsumowując, można stwierdzić, że:

- modele wykorzystujące funkcje powiązań mogą być użyteczne w analizie wartości zagrożonej portfeli zdywersyfikowanych międzynarodowo – przykład: nie ma podstaw do odrzucenia modelu 2.2. dla pary indeksów WIG i DAX,
- wskazana jest próba zastosowania omawianych tu modeli w połączeniu z modelami procesów stochastycznych lub zastosowanie postarzania danych wykorzystywanych do estymacji parametrów,
- nie wykazano żadnej przewagi modeli z rozkładami brzegowymi o ogonach estymowanych za pomocą metod teorii wartości ekstremalnych nad modelami z brzegowymi rozkładami normalnymi i tymi samymi funkcjami powiązań. Może to sugerować, że struktura zależności odgrywa większą rolę niż rozkłady brzegowe.

Literatura

- Armstrong M., *Copula Catalogue. Part 1: Bivariate Archimedean Copulas*, maszynopis, CERNA, Paryż 2003, <http://www.cerna.ensmp.fr>.
- Bouyé E. (i.in.), *Copulas for Finance. A Reading Guide and Some Applications*, maszynopis, City University Business School, London, Crédit Lyonnais, Paris 2000.
- Di Clemente A., Romano C., *Measuring Portfolio Value at Risk by a Copula-EVT Based Approach*, 2003, gloriamundi.org.
- Elton E.J., Gruber M.J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, maszynopis, ETH, Zürich, 2001.
- Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
- Genest C., MacKay J., *The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals*, „The American Statistician” 1986, nr 40, s. 280-283.
- Genest C., Rivest L.P., *Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas*, „Journal of the American Statistical Association” 1993, nr 88, s. 1034-1043.

- Guegan D., Ladoucette S., *Dependence Modelling of the Joint Extremes in a Portfolio Using Archimedean Copulas: Application to MSCI Indices*, raport badawczy, IDHE-MORA 2004, nr 05-2004.
- Gumbel E.J., *Bivariate Logistic Distributions*, „Journal of American Statistical Association” 1961, nr 56.
- Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, „Lecture Notes in Statistics”, nr 139, Springer Verlag, New York 1998.
- Papla D., Piontek K., *Zastosowanie rozkładów α -stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, praca złożona do Zeszytu Jubileuszowego Instytutu Zarządzania Finansami Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2005 (w druku).
- Rokita P., *Zastosowanie modeli wykorzystujących funkcje powiązań (copula functions) i teorię wartości ekstremalnych w analizie ryzyka portfeli akcji*, maszynopis AE Wrocław, referat wygłoszony na konferencji „Modelowanie preferencji a ryzyko” 2005.
- Sklar A., *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, „Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris” 1959, nr 8, s. 229-231.

MEASURING RISK OF INTERNATIONALLY DIVERSIFIED PORTFOLIOS USING COPULAS AND EXTREME-VALUE THEORY

Summary

This paper addresses the problem of modeling risk of internationally diversified stock portfolios. According to the results of other published researches, it is assumed that the models applied here should allow for fat tails, as well as for non-linear dependence structure. Classical multivariate-normal portfolio model does not fulfill that requirement.

Generally speaking, the research carried out here may be divided into two stages. In the first stage series of subsequent one-day Value at Risk (VaR) forecasts are calculated for some chosen portfolios. The following models are used in the calculations:

- Archimedean copulas with margins whose tails are approximated using generalized Pareto distribution (extreme-value-theory approach),
- Archimedean copulas with normal margins,
- the benchmark model: multivariate normal VaR.

In the second stage the results of applying aforementioned models are compared using back testing. The VaR-forecasts-testing procedure comprises tests of number and independence of VaR exceedances.