PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1088 — 2005
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

Krzysztof Piontek, Daniel Papla
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WYKORZYSTANIE WIELORÓWNANIOWYCH MODELI *AR-GARCH* W POMIARZE RYZYKA METODĄ VaR

1. Wstęp

Wśród różnych metod wyznaczania wartości zagrożonej dla portfeli instrumentów (akcji, indeksów, walut, towarów)[1] bardzo popularnym jest metoda wariancji-kowariancji zakładająca, iż stopy zwrotu z poszczególnych instrumentów pochodzą z pewnego rozkładu wielowymiarowego (zazwyczaj normalnego) oraz możliwe jest oszacowanie wektora wartości oczekiwanych oraz właśnie macierzy wariancji-kowariancji dla zmiennych opisujących stopy zwrotu z poszczególnych instrumentów. U podstaw rozważań tej metody znajduje się każdorazowo dyskusja o postaci rozkładu wielowymiarowego stóp zwrotu oraz o modelach opisujących zmiany cen instrumentów finansowych (por. [Jorion 2001; Best 2000; Lopez, Walter 2000; Rokita 2004]).

W artykule zaprezentowano przykład zastosowania wielowymiarowych modeli *AR-GARCH* do pomiaru ryzyka dwuelementowych portfeli instrumentów (akcji, indeksów, walut) w ramach metody wariancji-kowariancji. To nowoczesne podejście, wykorzystujące tzw. wartości warunkowe, porównane zostanie z klasyczną (tzw. bezwarunkową) metodą, w której zakłada się, iż parametry rozkładu wielowymiarowego są stałe w czasie.

Pierwsza część artykułu wprowadza (bardzo skrótowo) niezbędne pojęcia związane z wartością zagrożoną oraz jej pomiarem metodą macierzy wariancji-kowariancji. Drugi punkt prezentuje dwa rozpatrywane modele stóp zwrotu oraz techniki wyznaczania wektora warunkowych wartości oczekiwanych, a także warunkowej macierzy wariancji-kowariancji w ramach podejścia klasycznego i wykorzy-

[1] Odmienne metody stosuje się dla instrumentów dłużnych oraz dla instrumentów pochodnych, szczególnie opcji.

stującego wielowymiarowy model *AR-GARCH*. Następnie przedstawiono wykorzystywane w części empirycznej metody testowania jakości modeli VaR. Pracę kończy przykład, w którym dokonano weryfikacji przydatności prezentowanych metod do wyznaczania ryzyka portfeli dwuelementowych ze szczególnym uwzględnieniem instrumentów z rynku polskiego.

2. Wartość zagrożona dla portfela papierów

Wartość zagrożona (wartość narażona na ryzyko – ang. *value at risk*, VaR) w chwili t to taka strata wartości rynkowej portfela, że prawdopodobieństwo jej osiągnięcia lub przekroczenia w rozpatrywanym okresie $(t, t+1)$ równe jest zadanemu poziomowi tolerancji.

Powyższą definicję można zapisać jako (por. [Jorion 2001; Best 2000; Rokita 2004]):

$$P\left(W_{t+1} \leq W_t - VaR_t\right) = q\,, \tag{1}$$

gdzie: W_t – obecna wartość portfela instrumentów, W_{t+1} – wartość portfela na końcu analizowanego okresu, q – tzw. poziom tolerancji VaR.

Nie zmniejszając ogólności rozważań (nie zakładając wartości portfela W_t), powyższą zależność można zapisać, wykorzystując pojęcie stopy zwrotu[2] ($r_{p,t+1}$):

$$P\left(r_{p,t+1} \leq F^{-1}_{rp,t+1}(q)\right) = q\,, \tag{2}$$

co oznacza, iż prawdopodobieństwo, że stopa zwrotu z portfela w danym horyzoncie czasu nie przekroczy wartości równej odpowiedniemu kwantylowi rozkładu stóp zwrotu $F^{-1}_{rp,t+1}(q)$ wynosi q. Metody wyznaczania wartości VaR sprowadzają się więc właściwie do wyznaczenia wartości tego nieznanego kwantyla[3] rozkładu stóp zwrotu w chwili t + 1. Podstawowe metody estymacji VaR zaprezentowane zostały m.in. w pracach Joriona (por. [Jorion 2001]) i Rokity (por. [Rokita 2004]).

W dalszej części pracy analizie podlegać będzie jedynie tzw. podejście wariancji-kowariancji (*variance-covariance approach*), z typowym założeniem[4], że rozkład stóp zwrotu instrumentów jest wielowymiarowym rozkładem normalnym, a co z tego wynika, rozkład stóp zwrotu z portfela – rozkładem normalnym. Odpowiedni kwantyl rozkładu stóp zwrotu z portfela dwuelementowego[5] $F^{-1}_{rp,t+1}$ wyznacza się z zależności:

---

[2] Indeks p oznacza wartości dla portfela instrumentów.

[3] W dalszej części pracy rozróżnione zostaną podejścia wykorzystujące kwantyle bezwarunkowego oraz warunkowego rozkładu stóp zwrotu.

[4] W bardziej zaawansowanych podejściach stosuje się rozkłady o grubszych ogonach, np. t-Studenta lub α-stabilne. Standardem w zagadnieniach wielowymiarowych jest jednak nadal wielowymiarowy rozkład normalny.

[5] W celu uproszczenia zapisu dalsze rozważania konsekwentnie są przedstawione w wersji dla portfela dwuelementowego, który będzie obiektem analiz w przykładzie empirycznym. Rozszerzenie na przypadek wielowymiarowy jest trywialne.

$$F^{-1}_{rp,t+1} = \mu_{p,t+1} + F^{-1}_{sn}(q)\sigma_{p,t+1}, \tag{3}$$

gdzie: $\mu_{p,t+1}$ – wartość oczekiwana rozkładu stóp zwrotu z portfela w okresie, dla którego szacowana jest miara VaR, $\sigma_{p,t+1}$ – odchylenie standardowe rozkładu stóp zwrotu z portfela, $F^{-1}_{sn}(q)$ – kwantyl standaryzowanego rozkładu normalnego dla prawdopodobieństwa q, ($F^{-1}_{sn}(q) = -1,65$ dla $q = 0,05$[6] oraz $F^{-1}_{sn}(q) = -2,33$ dla $q = 0,01$).

Odpowiednie charakterystyki rozkładu stóp zwrotu portfela wyznacza się z następujących znanych wzorów:

$$\boldsymbol{\mu}_{p,t+1} = \mathbf{w}^T \mu_{t+1}, \ \sigma_{p,t+1} = \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{H}_{t+1} \mathbf{w}}, \tag{4}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, w_1 + w_2 = 1, \tag{5}$$

gdzie: $\mathbf{w}$ to wektor udziałów poszczególnych instrumentów w portfelu, $\boldsymbol{\mu}_{t+1}$ – wektor wartości oczekiwanych, a $\mathbf{H}_{t+1}$ – macierz wariancji-kowariancji.

W zaprezentowanym wzorami (2)-(5) podejściu mieści się zarówno (por. [Rokita 2004]) tzw. podejście klasyczne wykorzystujące jedynie koncepcję zmiennej losowej, jak i znacznie nowocześniejsze podejście oparte na teorii procesów stochastycznych; w analizie portfeli instrumentów finansowych – wielowymiarowych procesów stochastycznych. W podejściu klasycznym zakłada się, iż kolejne stopy zwrotu dla następujących po sobie okresów pomiaru VaR pochodzą z wielowymiarowego rozkładu normalnego o stałych w czasie parametrach równych odpowiednim oszacowaniom, tzw. wartościom bezwarunkowym. W drugim, nowocześniejszym podejściu obserwowane w kolejnych okresach stopy zwrotu pochodzą również z wielowymiarowych rozkładów normalnych, lecz kolejne wektory wartości średnich i macierze kowariancji dla każdej z chwil opisywane są pewnymi szczególnymi zależnościami dynamicznymi. Koncepcja ta wykorzystuje tzw. rozkłady warunkowe względem dostępnej informacji (por. [Bollerslev 1994; Jorion 2001; Piontek 2002; Rokita 2004]).

Wykorzystanie procesów stochastycznych umożliwia opis wielu efektów obserwowanych w finansowych szeregach czasowych, wśród których wymienia się najczęściej: autokorelację stóp zwrotu, grube ogony rozkładów bezwarunkowych, gromadzenie zmienności, zmienną w czasie korelację szeregów (por. [Piontek 2002; Tsay 2002]). Lepsze dopasowanie szeregów do danych empirycznych powinno skutkować lepszymi metodami pomiaru wartości zagrożonej (por. [Piontek 2002]).

W dalszej części zaprezentowane zostaną metody opisu odpowiednich wartości warunkowych. Warto zaznaczyć, iż podejście klasyczne ze stałymi parametrami rozkładów warunkowych zawiera się w podejściu wykorzystującym procesy stochastyczne.

[6] Wartości 0,05 i 0,01 to typowe analizowane poziomy tolerancji wartości zagrożonej.

3. Wielorównaniowy model *AR-GARCH*

Zasygnalizowanym punktem wyjścia do dalszych rozważań są pojęcia warunkowych wartości oczekiwanych $(\boldsymbol{\mu}_{t+1})$, warunkowej macierzy wariancji-kowariancji $(\mathbf{H}_{t+1})$ wyznaczanych na podstawie informacji dostępnej w chwili t oraz pojęcie postaci warunkowego rozkładu standaryzowanych reszt modelu. Wszystkie trzy zagadnienia należy rozpatrywać łącznie, gdyż wzajemnie wpływają na siebie i wspólnie determinują własności ostatecznego modelu. Więcej informacji na ten temat znaleźć można w pracach np. Bollersleva [1994], Piontka [2002] i Tsaya [2002]. Tutaj przedstawione zostaną jedynie podstawowe i niezbędne informacje.

W rozpatrywanym w pracy dwuwymiarowym modelu stopy zwrotu w kolejnym okresie $t+1$ zadane są następującym równaniem:

$$\mathbf{r}_{t+1} = \boldsymbol{\mu}_{t+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \tag{6}$$

gdzie:

$$\mathbf{r}_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{1,t+1} \\ r_{2,t+1} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\mu}_{t+1} = \begin{bmatrix} \mu_{1,t+1} \\ \mu_{2,t+1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t+1} \\ \varepsilon_{2,t+1} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Przyjęto więc, że stopy zwrotu $r_{1,t+1}$ i $r_{2,t+1}$ dla każdej wartości t pochodzą z dwuwymiarowego warunkowego rozkładu normalnego[7], co oznacza się jako:

$$\mathbf{r}_{t+1} \mid \Im_t \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}_{t+1}, \mathbf{H}_{t+1}), \tag{8}$$

gdzie $\Im_t$ to informacja dostępna w chwili t.

Wektor $\boldsymbol{\mu}_{t+1}$ oznacza wektor warunkowych wartości oczekiwanych na podstawie informacji w chwili t dla szeregu pierwszego oraz drugiego. Przyjmuje się, że (por. [Tsay 2002]):

$$\mu_{i,t+1} = \mathbf{E}[r_i \mid \Im_t] = f(r_{1,t-k}, r_{2,t-l}),\ i = 1, 2,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

gdzie $f(.)$ to liniowa funkcja przeszłych wartości stóp zwrotu.

Gdy $\mu_{1,t+1}$ i/lub $\mu_{2,t+1}$ zależą jednocześnie od przeszłych wartości zarówno r_1, jak i r_2, to mamy do czynienia z klasą modeli *VAR* (*vector autoregressive models*). Najczęściej zakłada się jednak, iż (por. [Jorion 2001; Tsay 2002; Piontek 2002]):

$$\mu_{i,t+1} = f(r_{i,t-k}),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

czyli, że warunkowe wartości oczekiwane dla jednego instrumentu nie zależą od przeszłych realizacji stóp zwrotu dla drugiego instrumentu. W większości przypad-

[7] Możliwe są oczywiście rozwiązania z warunkowymi rozkładami o grubszych ogonach, np. z wielowymiarowym rozkładem t-Studenta lub α-stabilnym. (por. [Jorion 2001; Rokita 2004; Papla, Piontek 2004]).

ków wystarczające bywa uwzględnienie jedynie ostatniej stopy zwrotu ($k = 1$), co wprowadza analizowany w dalszej części pracy dwuwymiarowy model autoregresyjny $AR(1)$ zadany wzorem:

$$\boldsymbol{\mu}_{t+1} = \begin{bmatrix} \mu_{01} + \varphi_1 r_{1,t} \\ \mu_{02} + \varphi_2 r_{2,t} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Drugim zagadnieniem jest opis zmian wartości warunkowej macierzy wariancji-kowariancji oznaczanej przez $\mathbf{H}_{t+1}$. W dalszej części pracy elementy warunkowej macierzy wariancji-kowariancji oznaczane będą w sposób następujący:

$$\mathbf{H}_{t+1} = \begin{bmatrix} h_{11,t+1} & h_{12,t+1} \\ h_{21,t+1} & h_{22,t+1} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } h_{12,t+1} = h_{21,t+1}. \tag{12}$$

Poniżej w sposób skrótowy zaprezentowany zostanie model zmian wartości warunkowej macierzy wariancji-kowariancji. Model ten posłuży do prognozowania przyszłych warunkowych wartości wariancji-kowariancji na kolejny okres $(\mathbf{H}_{t+1})$ w ramach koncepcji pomiaru VaR, wykorzystującej procesy stochastyczne, i porównany zostanie z koncepcją klasyczną.

W rozpatrywanym modelu zakłada się, że warunkowa macierz wariancji-kowariancji opisywana jest wielorównaniowym modelem *GARCH*, będącym naturalnym rozszerzeniem modeli jednorównaniowych wprowadzonych przez Engle'a w 1982 r. i Bollersleva w 1986 r. (por. [Bollerslev 1994; Piontek 2002]). Ogólna postać wielowymiarowego modelu *GARCH* (*Multivariate GARCH – MGARCH*) zaproponowana została przez Bollersleva w roku 1988 (por. np. [Bollerslev 1994; Gourieroux 1997]) i w literaturze nosi nazwę *VECH-GARCH*.

Macierz $\mathbf{H}_{t+1}$ opisywana jest następującym równaniem:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_{t+1}) = \text{vech}(\tilde{\mathbf{W}}) + \tilde{\mathbf{A}}\text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_t^T . \boldsymbol{\varepsilon}_t) + \tilde{\mathbf{B}}\text{vech}(\mathbf{H}_t), \tag{13}$$

w którym operator $\text{vech}(.)$ (*vector-half operator*) zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$\text{vech}\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}\right) = [a\ b\ c\ d\ e\ f]^T. \tag{14}$$

Zaprezentowany model jest wielowymiarowym odpowiednikiem jednowymiarowego modelu *GARCH*(1,1). Możliwa jest oczywiście analiza modeli *VECH* wyższych rzędów, ale w praktyce nie jest ona spotykana (por. [Bollerslev 1994; Gourieroux 1997; Ding, Engel 2001]). Dla przypadku dwuwymiarowego macierz $\tilde{\mathbf{W}}$ jest symetryczną macierzą o wymiarach 2×2, a macierze $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{B}}$ są symetrycznymi macierzami o wymiarach 3×3.

Podstawowymi problemami, które występują w przypadku praktycznego stosowania modelu *VECH-GARCH*, są duża liczba parametrów, które należy wyestymować, konieczność zapewnienia dodatniej określoności macierzy $\mathbf{H}_{t+1}$ w każdym punkcie czasu oraz konieczność zapewnienia skończoności wartości bezwarunkowej macierzy wariancji-kowariancji. W przypadku pełnego dwuwymiarowego modelu *VECH* niezbędna jest estymacja 21 parametrów (tylko w zakresie modelu warunkowej macierzy wariancji-kowariancji), co już samo w sobie w praktyce uniemożliwia stosowanie tego rozwiązania (por. [Bollerslev 1994; Gourieroux 1997; Ding, Engel 2001]).

W związku z tym zaproponowano szereg modeli zawierających się w ogólnym modelu *VECH*, które ograniczają liczbę estymowanych parametrów lub zapewniają dodatnią określoność macierzy. Odbywa się to jednak zawsze kosztem ogólności modelu. Do najczęściej wykorzystywanych rozwiązań zalicza się modele diagonalne *DVECH* oraz modele klasy *BEKK* (pełne i diagonalne) (por. [Bollerslev 1994; Gourieroux 1997]).

W niniejszej pracy wykorzystano model diagonalny *DVECH* zaproponowany w 1988 r. przez Bollersleva, Engle'a i Wooldridge'a (por. [Bollerslev 1994]). Macierze $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{B}}$ są w tym rozwiązaniu macierzami diagonalnymi, a wykorzystany w dalszej części pracy model ma postać:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t+1} \\ h_{12,t+1} \\ h_{22,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t}^2 \\ \varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{2,t}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Jak łatwo zauważyć, w modelu tym niezbędna jest już tylko estymacja 9 parametrów. Elementy $h_{ij,t+1}$ macierzy $\mathbf{H}_{t+1}$ zależą jedynie od swoich przeszłych wartości $\left(h_{ij,t}\right)$ oraz odpowiednich iloczynów błędów z chwili t $\left(\varepsilon_{i,t}\varepsilon_{j,t}\right)$, co powoduje, że brak jest tzw. efektu przenikania (por. [Bollerslev 1994; Gourieroux 1997; Ding, Engel 2001; Piontek 2005]). Elementy h_{11} oraz h_{22} opisane są w tym przypadku wprost klasycznym, jednowymiarowym modelem *GARCH*(1,1), a element h_{12} – jego odpowiednikiem [Piontek 2002]):

$$\begin{aligned} h_{11,t+1} &= \omega_{11} + a_{11}\varepsilon_{1,t}^2 + b_{11}h_{11,t} \\ h_{12,t+1} &= \omega_{12} + a_{12}\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t} + b_{22}h_{12,t} \\ h_{22,t+1} &= \omega_{22} + a_{22}\varepsilon_{2,t}^2 + b_{22}h_{22,t} \end{aligned} . \tag{16}$$

Skutkuje to ułatwieniami w zakresie estymacji oraz prognozowania wartości macierzy.

Nietrudno także pokazać, że model diagonalny można przedstawić w postaci, która ułatwia dalsze analizy [Ding, Engle 2001; Piontek 2005]):

$$\mathbf{H}_{t+1} = \mathbf{W} + \mathbf{A} \circ \left(\boldsymbol{\varepsilon}_t^T . \boldsymbol{\varepsilon}_t\right) + \mathbf{B} \circ \mathbf{H}_t, \tag{17}$$

gdzie $\mathbf{X} \circ \mathbf{Y}$ oznacza iloczyn Hadamarda[8] oraz

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Postać ta ułatwia zapis oraz analizę warunków dodatniej określoności macierzy $(\mathbf{H}_{t+1})$, co jest znacznym problemem dla modeli *VECH*.

Korzystając z faktu, że suma macierzy dodatnio określonej oraz macierzy (pół)dodatnio określonej jest macierzą dodatnio określoną, uzyskuje się warunki wystarczające, by zapewnić dodatnią określoność macierzy $\mathbf{H}_{t+1}$ w każdym momencie czasu (por. [Ding, Engle 2001]):

- macierze **W**, **A**, **B** muszą być dodatnio określone[9], co uzyskuje się przez spełnienie następujących nierówności:

$$x_{11} > 0\,,\ x_{22} > 0\,,\ x_{11}x_{22} - x_{12}^2 > 0\,, \tag{19}$$

gdzie x_{ij} to odpowiednie elementy ω_{ij}, a_{ij} i b_{ij} macierzy **W**, **A** i **B**.

- macierz $\mathbf{H}_1$ musi być dodatnio określona, co najprościej zapewnić, przyrównując ją do bezwarunkowej macierzy wariancji-kowariancji z próby.

Oprócz dodatniej określoności macierz wariancji-kowariancji niezbędne jest zapewnienie również skończoności elementów bezwarunkowej macierzy wariancji--kowariancji[10] $\mathbf{H}$. W dwuwymiarowym diagonalnym modelu *DVECH* dodatkowe warunki mają wyjątkowo prostą postać analogiczną jak w modelach jednowymiarowych, a mianowicie (por. Piontek [2002]):

$$a_{ij} + b_{ij} < 1; \quad i,j = 1,2, \tag{20}$$

$$a_{ij} = a_{ji},\ b_{ij} = b_{ji}\ ; \quad i,j = 1,2, \quad i \neq j\,.$$

Parametry modelu estymuje się zazwyczaj metodą największej wiarygodności, maksymalizując funkcję (por. [Bollerslev 1994; Gourieroux 1997]):

$$LLF = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln|H_t| + \varepsilon_t{}' H_t^{-1}\varepsilon_t\right]. \tag{21}$$

Postać diagonalna umożliwia estymację osobno każdego z równań (16). Parametry modeli wariancji h_{11} i h_{22} estymuje się jako jednorównaniowe modele, a parametry modelu kowariancji h_{12} – na podstawie maksymalizacji funkcji wiarygodności (wzór (21)) przy założeniu, że parametry modeli wariancji zostały wyestymowane wcześniej. Pozwala to skrócić szereg niezbędny do estymacji.

---

[8] Iloczyn Hadamarda jest tzw. iloczynem tablicowym. Jeśli macierze **Z**, **X** i **Y** mają te same wymiary i $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \circ \mathbf{Y}$, to elementy macierzy **Z** wyznacza się jako iloczyny odpowiadających elementów macierzy **X** i **Y**, tj. $z_{ij} = x_{ij} y_{ij}$.

[9] Formalnie, przynajmniej jedna macierz spośród **W**, **A**, **B** musi być dodatnio okręcona, pozostałe dwie mogą być połówkowo dodatnio określone. Najczęściej warunek dodatniej określoności narzuca się jednak na wszystkie macierze.

[10] Bezwarunkowa macierz wariancji-kowariancji dana jest ogólnie wzorem: $\mathbf{H} = \mathrm{E}[\mathbf{H}_t]$.

W metodzie opartej na modelu *DVECH* oszacowania kolejnej warunkowej macierzy wariancji-kowariancji uzyskuje się na podstawie tożsamych w tym przypadku wzorów (15)-(17), wykorzystując informację dostępną w chwili t.

W metodzie klasycznej prognozy elementów macierzy kowariancji dla chwili $t + 1$ równe są elementom oszacowanej bezwarunkowej macierzy wariancji-kowariancji:

$$\mathbf{H}_{t+1} = \mathbf{H} = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_t^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t\right], \tag{22}$$

czyli

$$h_{ii,t+1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_{ii,t-k}^2, \quad i = 1, 2, \tag{23}$$

$$h_{12,t+1} = h_{21,t+1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_{1,t-k}\varepsilon_{2,t-k}. \tag{24}$$

Warto zwrócić uwagę, iż problemem pozostaje wybór wielkości tzw. okna, czyli parametru m. Dopuszcza się tu pewną niekonsekwencję, uzasadniając wybór wielkości m zmiennymi w czasie parametrami procesu. Podejście, w którym stałą macierz wariancji-kowariancji na kolejnych m dni prognozuje się na podstawie historycznej macierzy wariancji-kowariancji z porównywalnej liczby dni z przeszłości, nazywa się najczęściej prognozą naiwną. Zakładając jednak, zgodnie z wcześniejszym ogólnym założeniem, że macierz **H** jest stała w czasie dla całego szeregu dwuwymiarowych danych, macierz bezwarunkowa powinna być wyznaczana na podstawie całego zbioru dostępnych danych z przeszłości (rozszerzające się okno), a przynajmniej na podstawie odpowiednio dużego zbioru obserwacji (por. przykład empiryczny).

Jeśli jest znane oszacowanie warunkowego kwantyla stopy zwrotu z portfela w okresie (t, $t + 1$) (na podstawie założenia o postaci warunkowego rozkładu oraz wartości wektora $\boldsymbol{\mu}_{t+1}$ i macierzy $\mathbf{H}_{t+1}$), to możliwe staje się porównanie go z faktycznie obserwowaną stopą zwrotu w tym okresie (por. wzory (1)-(4)) celem identyfikacji tzw. przekroczeń w okresie weryfikacji modelu VaR. Gdy znane są liczba oraz momenty czasu, w których w próbie testowej wystąpiły przekroczenia, możliwa staje się ocena modelu VaR, a tym samym ocena przydatności odpowiednich modeli stóp zwrotu w zagadnieniu pomiaru ryzyka rynkowego tą metodą.

4. Testowanie modeli VaR

Weryfikacji jakości modelu VaR dokonuje się przez tzw. testowanie wsteczne (*bactesting*). W praktyce wykorzystuje się w tym celu testy liczby przekroczeń oraz niezależności przekroczeń (por. [Jorion 2001; Hass 2001; Piontek 2002; Rokita 2004]).

Podstawę do statystycznej oceny modeli VaR stanowi tzw. szereg przekroczeń I_t:

$$I_t = \begin{cases} 1; & r_{p,t} \le F_{rp,t}^{-1}(q) \\ 0; & r_{p,t} > F_{rp,t}^{-1}(q) \end{cases}. \tag{25}$$

Szereg przekroczeń I_t przyjmuje więc wartości 1, jeśli w chwili t stopa zwrotu z portfela była mniejsza lub równa odpowiedniemu kwantylowi (por. wzór (2)), czyli nastąpiło tzw. przekroczenie, oraz przyjmuje wartość 0, jeśli przekroczenie nie nastąpiło.

Najczęściej wykorzystywanym testem jest test liczby przekroczeń (*failure test*). Dla danej wielkości próby teoretycznej liczba przekroczeń ma rozkład dwumianowy. Odpowiednią statystykę testową zaproponował w 1995 r. Kupiec (por. [Jorion 2001; Hass 2001; Piontek 2002; Rokita 2004]). Ma ona postać:

$$LR_{uc} = -2\ln\left(\frac{(1-q)^{T_0} q^{T_1}}{(1-\hat{q})^{T_0} \hat{q}^{T_1}}\right), \tag{26}$$

gdzie:

$$\hat{q} = \frac{T_1}{T_0 + T_1} \tag{27}$$

oraz: T_i – liczba okresów, w których $I_t = i$, q – przyjęty poziom tolerancji VaR.

Statystyka LR_{uc} ma rozkład χ^2 z jednym stopniem swobody. Wartość krytyczna (CV) testu Kupca dla najczęściej rozpatrywanego poziomu istotności 0,05 wynosi 3,8415. Hipotezę zerową o poprawności modelu VaR odrzuca się, jeśli $LR_{uc} > CV$.

Test liczby przekroczeń nie jest jedynym testem, któremu należy poddać weryfikowany model. Do testu liczby przekroczeń należy dołączyć test, czy przekroczenia są niezależne w czasie. Największą popularność zdobył w tym zakresie test Christoffersena LR_{ind}:

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{(1-\overline{q})^{T_{00}+T_{10}} \overline{q}^{T_{01}+T_{11}}}{(1-q_{01})^{T_{00}} q_{01}^{T_{01}} (1-q_{11})^{T_{10}} q_{11}^{T_{11}}}\right), \tag{27}$$

gdzie:

$$q_{ij} = \frac{T_{ij}}{T_{i0} + T_{i1}}; \quad \overline{q} = \frac{T_{01} + T_{11}}{T_{00} + T_{01} + T_{10} + T_{11}},$$

gdzie: T_{ij} – liczba okresów, w których $I_t = j$, jeśli $I_{t-1} = i$.

Statystyka LR_{ind} ma również rozkład χ^2 z 1 stopniem swobody.

Ponieważ statystyki LR_{uc} oraz LR_{ind} są niezależne, zaproponowano test mieszany LR_{mix} uwzględniający zarówno liczbę przekroczeń oraz czas pomiędzy przekroczeniami (por. [Jorion 2001; Hass 2001; Piontek 2002; Rokita 2004]):

$$LR_{mix} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi_2^2.$$

Zaprezentowane testy staną się podstawą oceny modeli VaR w części empirycznej.

5. Przykład empiryczny

Ze względu na subiektywny wybór szeregów czasowych oraz ich ograniczoną liczbę przykład ten nie da jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, która z wybranych metod jest ogólnie najlepsza. Możliwe jest jednak wysnucie pewnych ostrożnych wniosków na podstawie wyników zaobserwowanych dla wybranych szeregów.

Wszystkie prezentowane pracy wyniki badań empirycznych uzyskano na podstawie autorskich procedur napisanych w środowisku MATLAB 6.0.

W badaniach empirycznych wykorzystano 8 par szeregów dziennych stóp zwrotu[11] w większości pochodzących z polskiego rynku. Są to następujące pary akcji: BRE–Vistula, Computerland–Jutrzenka, Kredytbank–Stalexport; pary kursów walut: USD/PLN–GPB/PLN, EURO/PLN–USD/PLN oraz indeksów: SP500–NIKKEI, DAX–FTSE100, WIG–DJIA. Podstawowym kryterium wyboru była jak największa długość badanych szeregów, dlatego wykorzystano dzienne (a nie np. tygodniowe lub miesięczne) stopy zwrotu. Estymacji parametrów poszczególnych modeli dokonywano z 750 ostatnich dni, by zapewnić prawidłowe oszacowania modeli, szczególnie w modelu *AR*(1)-*DVECH-GARCH*, oraz spełnione było założenie dla klasycznego modelu o stałości parametrów (por. pkt 1 i 2). Ograniczenie analizy do portfeli dwuskładnikowych wynika z ograniczeń modelu *AR*(1)-*DVECH-GARCH*, który dla większej liczby wymiarów staje się bardzo trudny do oszacowania.

Za każdym razem analizowane portfele miały równe udziały. Na podstawie prezentowanych metod wyznaczono wartość miary VaR, zidentyfikowano przypadki przekroczeń oraz wyznaczono wartości testu liczby przekroczeń, ich niezależności oraz testu łącznego.

Tabela 1 przedstawia wyniki badań empirycznych w postaci wartości odpowiednich statystyk testowych dla poszczególnych par i metod oraz dla poziomów tolerancji wartości zagrożonej równych 0,05 i 0,01. W pierwszej kolumnie tab. 1 przestawiono dodatkowo informację o długości szeregu przekroczeń dla każdego z przypadków.

W tabeli 1 metody 1-4 oznaczają poszczególne modele leżące u podstaw miary VaR. Metoda 1 to klasyczna technika oparta na modelu wariancji-kowariancji ze stałymi parametrami, metoda 2 oparta jest na modelu, w którym dopuszcza się występowanie autoregresji w stopach zwrotu, w metodzie 3 VaR wyznacza się na podstawie modelu *DVECH* bez ewentualnej autokorelacji, zaś w metodzie 4 – na podstawie modelu *AR-DVECH*. Pogrubiono wartości statystyk empirycznych, które pozwalają przyjąć hipotezę zerową o poprawności modelu VaR na poziomie

[11] Analizowane szeregi są różnej długości, lecz wszystkie kończą się 7 marca 2005 r.

istotności 0,05. Na szarym tle przedstawiono najmniejsze wartości dla poszczególnych testów uzyskane jedną z 4 metod, sugerujące, że dana metoda jest najlepsza.

Tabela 1. Wartości statystyk testowych

Wyszczególnienie	Metoda	*alfa*=0,05			*alfa*=0,01		
		LR uc	*LR ind*	*LR mix*	*LR uc*	*LR ind*	*LR mix*
BRE–VISTULA (2016 obs.)	1	4,38	26,15	30,53	5,06	6,42	11,48
	2	4,38	19,11	23,49	6,93	9,87	16,79
	3	1,78	7,76	9,54	9,05	5,14	14,18
	4	**3,51**	0,70	4,22	5,06	2,84	7,90
COMP–JUTRZENKA (1601 obs.)	1	47,04	**1,00**	48,03	4,96	0,08	5,04
	2	44,90	**1,07**	45,98	**1,78**	**0,15**	**1,93**
	3	22,87	0,63	23,49	**3,68**	**0,10**	**3,79**
	4	12,67	**3,36**	16,03	0,27	**0,25**	0,51
KREDYTBANK–-STALEXPORT (1855 obs.)	1	**3,38**	8,32	11,71	8,10	9,74	17,83
	2	**1,63**	6,84	8,47	11,69	4,73	16,42
	3	12,00	22,39	34,39	54,19	33,68	87,87
	4	1,36	11,13	12,49	2,69	3,75	6,44
USD–GBP (2345 obs.)	1	**1,64**	1,23	**2,87**	6,73	9,43	16,16
	2	**1,39**	5,19	6,58	7,68	13,51	21,19
	3	**1,90**	**1,86**	**3,76**	0,09	0,40	0,49
	4	0,16	**1,38**	1,55	**3,49**	**0,51**	**4,00**
EURO–USD (834 obs.)	1	10,46	**1,30**	11,77	**1,57**	0,06	**1,64**
	2	10,46	0,19	10,65	**1,57**	0,06	**1,64**
	3	**0,85**	**0,24**	**1,10**	**0,31**	**0,24**	**0,56**
	4	0,35	**0,40**	0,75	0,23	**0,12**	0,35
SP500–NIKKEI (3500 obs.)	1	**2,38**	4,20	6,58	5,76	8,42	14,18
	2	**1,87**	3,85	**5,72**	5,76	8,42	14,18
	3	**1,04**	**3,13**	**4,18**	0,80	0,83	1,62
	4	0,03	0,44	0,46	**2,49**	**1,03**	**3,51**
DAX–FTSE100 (1802 obs.)	1	**3,16**	19,73	22,89	36,61	**3,76**	40,38
	2	4,34	15,55	19,89	34,60	4,01	38,60
	3	1,00	0,04	1,04	0,24	0,29	0,52
	4	10,12	**0,70**	10,82	**2,44**	**0,70**	**3,14**
WIG–DJIA (1752 obs.)	1	**3,11**	37,61	40,72	1,58	20,78	22,35
	2	5,53	24,99	30,52	2,85	13,19	16,04
	3	**1,03**	22,02	23,05	15,09	21,33	36,42
	4	0,03	6,54	6,57	1,07	1,17	2,24

Źródło: obliczenia własne.

Analizując wyniki zawarte w tab. 1, można zauważyć, że zastosowanie modelu *DVECH* w większości przypadków pozwala osiągnąć lepsze rezultaty niż wykorzystanie klasycznego modelu stałej warunkowej macierzy wariancji-kowariancji. Lepszy rezultat oznacza w tym przypadku, że dla danej metody otrzymano niższą wartość statystyki testu liczby przekroczeń, ich niezależności oraz testu łącznego. Metody oparte na modelu *DVECH* (modele 3 i 4) są lepsze dla większości par szeregów dla poziomu tolerancji VaR równego zarówno 0,05, jak i 0,01.

Okazuje się również, że większe znaczenie dla poprawy jakości modeli ma wprowadzenie zmiennej w czasie warunkowej macierzy kowariancji (modele *DVECH*) niż zmiennych w czasie warunkowych wartości oczekiwanych (modele AR). Wprowadzenie autoregresji może jednak poprawić także wyniki, jak to widać na przykładzie par Computerland–Jutrzenka czy też Kredytbank–Stalexport.

Omawiając wyniki bardziej szczegółowo, można zauważyć, że zastosowanie metod opartych na modelu *DVECH* daje najlepsze rezultaty zarówno dla wszystkich trzech badanych par indeksów giełdowych, jak i dla pary akcji BRE–Vistula. Należy przy tym zauważyć, że są to również jedne z najdłuższych analizowanych szeregów czasowych, jednakże liczba przebadanych par jest zbyt mała, aby potwierdzić istnienie jakiejś zależności. Wyniki dla pozostałych czterech par (Computerland–Jutrzenka, Kredytbank–Stalexport, USD/PLN–GPB/PLN i EURO/PLN–USD/PLN) są już mniej jednoznaczne, nadal jednak wskazują na przewagę metod wykorzystujących model *DVECH* w wyznaczaniu VaR.

6. Podsumowanie

Choć wyniki prezentowanych badań są bardzo zachęcające, należy jednak ostrożnie formułować zbyt daleko idące wnioski. Po pierwsze, przebadana próbka jest niezbyt wielka (8 par), co raczej nie uprawnia do wydawania kategorycznych sądów. Po drugie, wszystkie analizowane modele wykazują jednak wrażliwość na wielkość próby wykorzystywanej w ich estymacji, co może wpływać na ich ocenę. Problemem może być również to, że metody oparte na zmiennej w czasie warunkowej macierzy kowariancji-wariancji są o wiele bardziej skomplikowane, co utrudnia ich estymację i sprawia, że na razie są mało popularne. Dokładniejsze zbadanie problemu wielkości próby wykorzystywanej do estymacji parametrów oraz rozszerzenie badań o kolejne pary szeregów czasowych stanowić będzie cel dalszych badań autorów.

Należy jednak zaznaczyć, iż wykorzystanie modeli warunkowej macierzy wariancji-kowariancji jest stosunkowo proste dla portfeli dwuelementowych. W portfelach wieloelementowych modele stają się zbyt skomplikowane w praktycznych zastosowaniach ze względu na konieczność zapewnienia dodatniej określoności macierzy oraz na dużą liczbę parametrów. Wraz z rozwojem oprogramowania dostępnego w praktyce oraz ze zwiększaniem się długości (lub częstotliwości) szeregów danych modele te powinny zyskiwać na znaczeniu.

Pomimo zasygnalizowanych wątpliwości, autorzy, o ile to możliwe, zalecają stosowanie metod wyznaczania VaR wykorzystujących modele *AR-DVECH* w zastosowaniach praktycznych, ponieważ metody te pozwalają poprawić jakość estymacji VaR, co z kolei pozwala na skuteczniejsze zarządzanie ryzykiem.

Literatura

Best P., *Wartość narażona na ryzyko*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2000.

Bollerslev T., Engle. R., Nelson D., *ARCH Models*, [w:] *Handbook of Econometrics*, vol. IV, Amsterdam 1994, s. 2959-3038.

Ding Z., Engle R., *Large Scale Conditional Covariance Matrix Modeling, Estimation and Testing*, Academia Economic Papers 2001.

Gourieroux C., *ARCH Models and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York 1997.

Hass M., *New Methods in Backtesting*, Financial Engineering Research Center, Bonn 2001.

Jorion P., *Value at Risk*, 2nd edition, McGraw-Hill, 2001.

Lopez J., Walter C., *Evaluating Covariance Matrix Forecasts in a Value-at-Risk Framework*, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Papers in Applied Economic Theory, 2000-21.

Papla D., Piontek K., *Zastosowanie rozkładów α-stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, praca złożona do Zeszytu Jubileuszowego Instytutu Zarządzania Finansami Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2004.

Piontek K., *Modelowanie i prognozowanie zmienności instrumentów finansowych*, praca doktorska, AE, Wrocław 2002.

Piontek K., *Prognozowanie macierzy kowariancji i korelacji finansowych szeregów czasowych*, praca złożona w ramach konferencji „Modelowanie preferencji a ryzyko", Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Ustroń 2005.

Rokita P., *Koncepcja wartości zagrożonej (VaR) w analizie ryzyka inwestycji banków na rynku polskim*, praca doktorska, AE, Wrocław 2004.

Tsay R., *Analysis of Financial Time Series*, Wiley and Sons, 2002.

USING MULTI EQUATIONS *AR-GARCH* MODELS IN MEASURING RISK WITH VaR METHOD

Summary

In this paper an example of utilizing multi equations *AR-GARCH* models in measuring risk of two elements portfolio using a variation – covariation method is presented. This modern – conditional – approach was compared with more classic, non-conditional method, which assumes that parameters of multidimensional density function are constant in time.

In first part of this paper few essential concepts related to VaR and its measurement using variance-covariance matrix are introduced. In second part two models of returns and methods of calculating vector of conditional means and conditional variance-coviariance matrix are presented, one model is non-conditional, second is a multidimensional *AR-GARCH* model. Then tests of goodness of VaR models are presented. Empirical example, in which data from chosen worlds and Polish capital markets were used, concludes the paper.