PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1088 — 2005
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

Luiza Pawela-Wargocka
Katolicki Uniwersytet Lubelski

WARIACYJNA METODA POMIARU RYZYKA

1. Wstęp

Większość obecnie stosowanych miar ryzyka wywodzi się z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki. Ich faktyczna przydatność zależy jednak w dużej mierze od spełnienia wielu, niekiedy przemilczanych, założeń dotyczących m.in. struktury probabilistycznej opisywanego procesu, liniowych zależności pomiędzy parametrami, itd., które niestety dość często nie znajdują odzwierciedlenia w gospodarczej rzeczywistości. Ograniczenia te od wielu lat są przyczyną krytyki – zarówno teoretyków, jak i praktyków ekonomii matematycznej i ekonometrii. Odkąd w 1952 r. H. Markowitz za wskaźnik poziomu ryzyka w swoim modelu portfela efektywnego przyjął odchylenie standardowe – jak do tej pory – na gruncie ekonomii nie udało się skonstruować i spopularyzować żadnej nowej miary ryzyka (w sensie zmienności). I chociaż już sam twórca owej teorii wskazywał na jej słabe punkty (np. odniesienie do wartości średniej), to jednak konstruktywność i rachunkowa efektywność jego metody sprawiły, że stała się ona przebojem teorii rynków kapitałowych. Wydawać by się mogło, że żadna nowa metoda pomiaru zmienności nie dorówna sławą przełomowemu podejściu Markowitza. Nie oznacza to jednak, że nie należy podejmować prób poszukiwania rozwiązań alternatywnych, omijających słabe punkty jego teorii. Zagadnienie to nabiera szczególnego znaczenia w obecnej rzeczywistości gospodarczej.

Zauważmy, że od początku lat osiemdziesiątych rynki finansowe charakteryzuje coraz większa zmienność stóp zwrotu. Poszukiwanie źródeł tej zmienności jest przedmiotem studiów, których wyniki są prezentowane w wielu monografiach. Jednak nie tylko wiedza na temat przyczyn samego zjawiska jest istotna. Równie ważne są próby opracowania bardziej efektywnej metody jego pomiaru. Jest to m.in. warunkiem skutecznego zabezpieczania się przed ryzykiem. W tej sytuacji poszukiwanie alternatywnych sposobów modelowania danych o dużej częstotliwości zmian nabiera coraz większego znaczenia.

Celem niniejszej pracy jest prezentacja nowej metody pomiaru ryzyka opartej na pojęciu wariacji funkcji.

2. Średnia wariacyjna jako miara ryzyka

2.1. Definicja i własności wariacji

Załóżmy, że $\Omega(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ jest dowolnie ustaloną przestrzenią mierzalną, gdzie Ω jest zbiorem niepustym, $\mathcal{F}$ – σ-ciałem podzbiorów Ω, zaś

$$\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty. \infty\}$$

funkcją rzeczywistą spełniającą warunek przeliczalnej addytywności, tzn.

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \tag{1}$$

dla dowolnych $A_n \in \mathcal{F}$ takich, że $A_k \cap A_l = \varnothing,\ k \neq l.\ k, l, n \in \mathbb{N}$.

Dla ν spełniających powyższe warunki i dowolnego $A \in \mathcal{F}$ definiujemy

$$\nu^+(A) := \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{F} \wedge B \subset A\}$$

oraz

$$\nu^-(A) := \inf\{\nu(B) : B \in \mathcal{F} \wedge B \subset A\}.$$

Łatwo zauważyć, że $\nu^+(A) \geq 0$, zaś $\nu^-(A) \leq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$. Zatem *wariacją funkcji* ν na zbiorze $A \in \mathcal{F}$ nazywać będziemy liczbę $|\nu|$ określoną wzorem

$$|\nu|(A) := \nu^+(A) - \nu^-(A) \tag{2}$$

W przypadku, gdy $A = \Omega$, liczbę $\|\nu\|$ określoną wzorem

$$\|\nu\| := \|\nu\|(\Omega) \tag{3}$$

nazywać będziemy *wariacją funkcji* ν w przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.

Definicja 1. *Mówimy, że miara* ν *ma wariację skończoną na* $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, *jeżeli* $0 \leq \|\nu\| \leq \infty$.

Łatwo można zauważyć, że wariacja υ określona na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ ma własności miary nieujemnej, a ponadto własności

$$\|\nu_1 + \nu_2\| \leqslant \|\nu_1\| + \|\nu_2\|$$

oraz

$$\|\lambda\nu_1\| = |\lambda| \cdot \|\nu\|$$

mają miejsce dla dowolnych ν_1, ν_2 i ν oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że przestrzeń liniowa funkcji ν określonych na ustalonym σ-ciele $(\Omega, \mathcal{F})$, wyposażonych w funkcjonał określony wzorem (3), jest przestrzenią unormowaną. Można sprawdzić, że jest to przestrzeń Banacha [Alexiewicz 1969].

Mając dane dowolne $A \subset \Omega$, możemy rozważyć *przestrzeń relatywną* $(A, \mathcal{F}_A, \nu_A)$ i wtedy, powtarzając poprzednią procedurę z Ω zastąpionym przez A, otrzymamy wariację $\|\nu\|_A$.

Aby przedstawione rozważania można było zastosować w teorii podejmowania decyzji w warunkach niepewności, a zwłaszcza do efektywnej konstrukcji portfela optymalnego, musimy pokazać, które elementy teorii wariacji mogą mieć zastosowanie w analizie zjawisk ekonomicznych i w jaki sposób należy je identyfikować. W tym celu niech oś czasu ze zmienną t będzie oznaczona symbolem $\mathbb{R}$; w tym przypadku Ω utożsamiamy z $\mathbb{R}$. Rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów osi czasu tworzących σ-ciało będzie powstawać z działań mnogościowych na elementach bazowych utworzonych przez przedziały domknięte $<a;b>$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$ są dowolne. Jeżeli f jest dowolną funkcją rzeczywistą określoną na osi czasu $\mathbb{R}$, to symbolem f^* będziemy oznaczać funkcję określoną wzorem

$$f^*(\langle a;b\rangle) := f(b) - f(a),$$

oznaczającą przyrost f na $<a;b>$. Funkcję f^* utożsamiamy zatem z funkcją ν.

Można sprawdzić, że posiada ona te same własności. A zatem wariację funkcji f na przedziale $<a;b>$ określamy wzorem

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) := \|f^*\|_{\langle a;b\rangle}.$$

Oczywiście pojęcie wariacji funkcji f określonej i ciągłej na $<a;b>$ określa się zazwyczaj w literaturze matematycznej w sposób następujący

$$\mathrm{V}_a^b(f) := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| : n \in \mathbb{N},\ (x_k) \in \Pi_{a,b}^n\right\}, \qquad (4)$$

gdzie $\prod_{a,b}^n := \{(x_k)_{k=0,1,2\ldots n} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ oznacza zbiór podziałów przedziału $<a;b>$. Jeżeli podany we wzorze (4) kres górny jest skończony, to mówimy, że funkcja f ma *wahanie ograniczone*.

Można wykazać, że

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f)$$

w przypadku gdy σ-ciało podzbiorów $<a;b>$ jest generowane przez przedziały domknięte zawarte w $<a;b>$.

W sytuacji notowań giełdowych mierzonych funkcją f zauważamy, że jest ona określona punktowo na pewnym podzbiorze $\{t_k\}$, rozważanym jako momenty czasów notowań. Aby móc stosować podaną powyżej technikę rachunkową, wystarczy przedłużyć funkcję f w sposób przedziałami liniowy na $<a;b>$. Łatwo można zauważyć, że podane sposoby wyznaczania wariacji takiej funkcji ulegną wtedy znacznemu uproszczeniu, gdyż pojawiają się sumy skończone, supremum zaś można zamienić przez maksimum lub nawet je odrzucić.

Jeżeli symbolem $\mathbb{V}_{\langle a;b\rangle}[M]$ oznaczmy zbiór wszystkich funkcji ciągłych określonych na <*a;b*>, których wariacja nie przekracza *M* > 0, to $\mathbb{V}_{\langle a;b\rangle}[M_1] \subset \mathbb{V}_{\langle a;b\rangle}[M_2]$, o ile $M_1 < M_2$. Jeżeli

$$\mathbb{V}_{\langle a;b\rangle} := \bigcup_{M>0} \mathbb{V}_{\langle a;b\rangle}[M],$$

to mówimy, że elementy $\mathbb{V}_{\langle a;b\rangle}$ są funkcjami ciągłymi o wariacji skończonej określonymi na <*a;b*>.

Własności wariacji

Własność 1. *Jeżeli f jest funkcją ciągłą i jest monotoniczna na <a;b>, to*

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) = |f(b) - f(a)|. \tag{5}$$

Własność 2. *Jeżeli f jest funkcją o wariacji skończonej na <a;b>,* $c \in (a;b)$ *zaś jest dowolne, to*

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) = \mathrm{V}_{<a;c>}(f) + \mathrm{V}_{<c;b>}(f). \tag{6}$$

Własność 3. *Jeżeli f jest funkcją c-lipschitzowską,* $c \geq 0$*, na <a;b>, tzn.*

$$\bigwedge_{x,y\in\langle a;b\rangle} |f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|,$$

to wtedy

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) \leqslant c(b - a). \tag{7}$$

Własność 4. *Jeżeli f jest funkcją c-lipschitzowską,* $c \geqslant 0$*, na <a;b>, a funkcja g ma wariację skończoną na <a;b>, to*

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f \circ g) \leqslant c\,\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(g). \tag{8}$$

Własność 5. *Jeżeli* $\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) < \infty$ *i* α *jest dowolną liczbą rzeczywistą, to wtedy*

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(\alpha \cdot f) = |\alpha|\,\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f). \tag{9}$$

Własność 6. *Jeżeli* $\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) < \infty$ *i* $\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(g) < \infty$, *to*

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f + g) \leqslant \mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) + \mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(g). \tag{10}$$

Własność 7. *Jeżeli funkcja f jest absolutnie ciągła na <a;b>, to:*

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) = \int_a^b |f'(x)|dx < \infty. \tag{11}$$

Własność 8.

$$\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f \cdot g) \leqslant M(g)\,\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) + M(f)\,\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(g), \tag{12}$$

gdzie

$M(g) = \sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} |g(x)|$, *zaś* $M(f) = \sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} |f(x)|$.

2.2. Średnia wariacyjna

Definicja 2. *Wyrażenie*

$$\overline{\mathrm{V}}_{\langle a;b\rangle}(f) := \frac{1}{b-a}\,\mathrm{V}_{\langle a;b\rangle}(f) \tag{13}$$

nazywamy średnią wariacyjną funkcji f na przedziale <a;b>.

Na podstawie tak zdefiniowanej miary dyspersji możemy podać definicję:

Definicja 3. *Wyrażenie*

$$V_{\bar{\mathrm{V}}}(f) = \frac{\overline{\mathrm{V}}_{\langle a;b\rangle}(f)}{\bar{f}_{\langle a;b\rangle}} \tag{14}$$

nazywamy wariacyjnym współczynnikiem zmienności funkcji f, gdzie $\bar{f} \neq 0$ *oznacza średnią całkową f na <a;b>, określoną wzorem*

$$\bar{f}_{\langle a;b\rangle} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{15}$$

2.3. Średnie wariacyjne wyższych rzędów

Definicja 4. *Wyrażenie*

$$\overline{\mathrm{V}}^{(r)}_{\langle a;b\rangle}(f) := \sup\left\{\left[\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^r\right]^{\frac{1}{r}},\ x_i \in \Pi_a^b\right\} \tag{16}$$

nazywamy średnią wariacyjną rzędu r funkcji f na przedziale <a;b>.

Oczywiście $\overline{\mathrm{V}}^{(1)}_{\langle a;b\rangle}(f) = \overline{\mathrm{V}}_{\langle a;b\rangle}(f)$, co oznacza, że $\overline{\mathrm{V}}^{(r)}_{\langle a;b\rangle}(f)$ jest uogólnieniem pojęcia średniej wariacyjnej.

2.4. Średnia wariacyjna w ujęciu dyskretnym

Jeżeli funkcja *f* jest określona na podzbiorze liczb naturalnych, tzn.

$$f(i) = x_i,$$

gdzie $i = 1, 2, \ldots n$, to widzimy, że przy zastosowaniu interpolacji liniowej ze wzoru (16) otrzymujemy

$$\overline{\mathrm{V}}^{(r)}_{<1;n>}(f) := \left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}|x_i - x_{i-1}|^r\right\}^{\frac{1}{r}}. \tag{17}$$

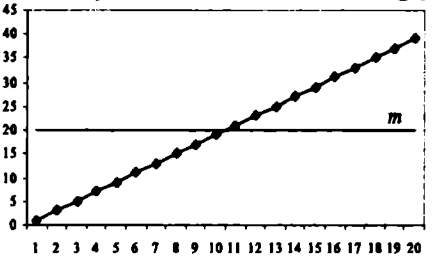
2.5. Porównanie średniej wariacyjnej i odchylenia standardowego

Punktem wyjścia w pracy nad nowym ujęciem pomiaru zmienności na rynkach finansowych była szczegółowa analiza mankamentów odchylenia standardowego w takim zastosowaniu. Najistotniejszym z nich wydaje się być odniesienie w jego formule do wartości średniej.

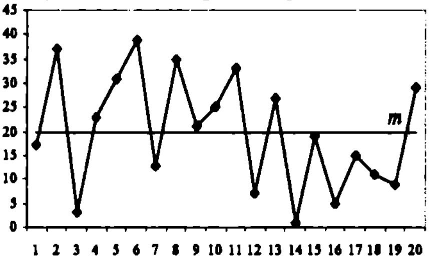
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}, \tag{18}$$

gdzie: σ – odchylenie standardowe, m – wartość oczekiwana, n – liczba obserwacji.

Wartość oczekiwana (której estymatorem może być średnia arytmetyczna z próby) jest podstawowym parametrem rozkładu zmiennej losowej, jednak po przeniesieniu na grunt obserwacji danego zjawiska ma ona niewiele wspólnego z jego rzeczywistym poziomem (syndrom głowy w piekarniku i nóg w lodówce – nikt nie ma złudzeń, że średnia temperatura otoczenia będzie odzwierciedlała odczucia osoby poddawanej takiemu eksperymentowi). Co więcej, te same wartości parametrów, takich jak wartość oczekiwana, odchylenie standardowe itd., mogą charakteryzować różne przebiegi zmienności.



Rys. 1. Cena akcji spółki X
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Cena akcji spółki Y
Źródło: opracowanie własne.

Załóżmy, że powyższe wykresy przedstawiają zmiany poziomu cen pewnych aktywów finansowych. W obu zilustrowanych przypadkach wartość oczekiwana m i odchylenie standardowe σ są jednakowe, lecz z punktu widzenia inwestora opisywane przez nie sytuacje różnią się diametralnie. Z jednej strony mamy do czynienia z wyraźnym trendem, zależnością liniową, z drugiej strony zaś z chaosem i destabilizacją rynku – a zatem dwiema skrajnościami, którym przyporządkowane są te same parametry m oraz σ.

Zauważmy jednak, że średnia wariacyjna w analizowanych przypadkach wynosi odpowiednio 2 i 16.

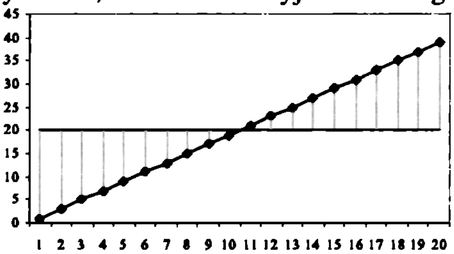
Tabela 1. Parametry charakteryzujące zmienność cen akcji spółek X i Y

Wskaźnik	Spółka X	Spółka Y
Wartość oczekiwana m	20	20
Odchylenie standardowe σ	11,53	11,53
Klasyczny współczynnik zmienności V_σ	0,5765	0,5765
Średnia wariacyjna $\overline{V}$	**2**	**16**
Wariacyjny współczynnik zmienności $V_{\overline{V}}$	**0,1**	**0,8**

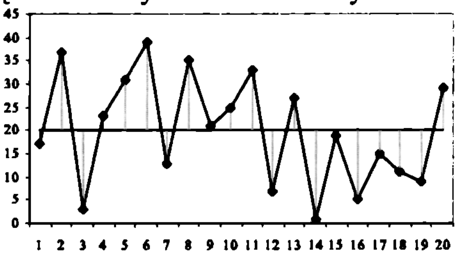
Źródło: opracowanie własne.

Dzieje tak się m.in. dlatego, że odchylenie standardowe nie uwzględnia w swojej formule chronologii zdarzeń.

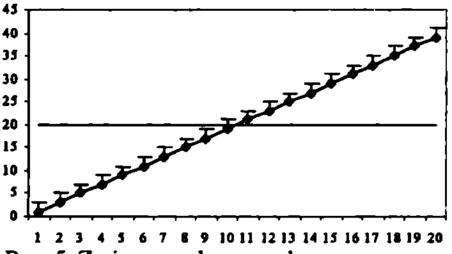
Odległości brane pod uwagę przy obliczaniu odchylenia standardowego ilustrują rys. 3 i 4, średnia wariacyjna zaś uwzględnia zmiany zaznaczone na rys. 5 i 6.



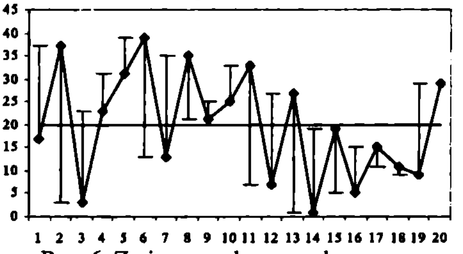
Rys. 3. Odległości brane pod uwagę przy obliczaniu σ – spółka X
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Odległości brane pod uwagę przy obliczaniu σ – spółka Y
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Zmiany cen brane pod uwagę przy obliczaniu $\overline{V}$ – spółka X
Źródło: opracowanie własne.



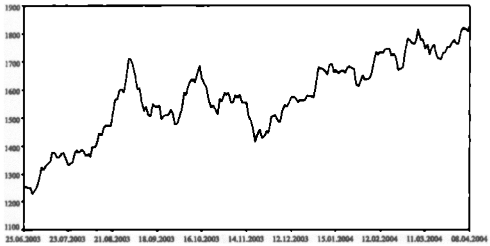
Rys. 6. Zmiany cen brane pod uwagę przy obliczaniu $\overline{V}$ – spółka Y
Źródło: opracowanie własne.

Powyższy przykład ilustruje jednocześnie kolejną istotną różnicę pomiędzy odchyleniem standardowym a średnią wariacyjną. W przypadku wyraźnych trendów, wznoszących bądź opadających, odchylenie standardowe stanowi zawyżoną ocenę ryzyka. Dla inwestora istotna jest przede wszystkim zmienność wokół trendu, podczas gdy odchylenie standardowe za punkt odniesienia (podstawę odchyleń) przyjmuje wartość oczekiwaną (którą przedstawia pozioma linia) (por. rys. 3 i 5).

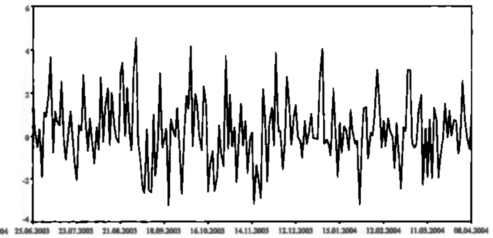
Jak wynika ze wstępnie przeprowadzonych badań, w miarę wzrostu zmienności odchylenie standardowe staje się dla niej coraz mniej wymiernym wskaźnikiem (pomiar jest zaniżany). Przede wszystkim nie stanowi ono dobrej podstawy do analiz porównawczych różnych aktywów (por. rys. 4 i 6).

Kolejna słabość odchylenia standardowego pojawia się w związku z analizą ryzyka portfela aktywów finansowych. Współzmienność poszczególnych walorów jest tutaj wyrażona za pomocą kowariancji, która jest miarą liniowej zależności. Założenie liniowości jest niestety rzadko spełnione na gruncie zjawisk ekonomicznych, zwłaszcza w przypadku notowań giełdowych, i sprawia, że odchylenie standardowe jest miarą obciążoną dodatkowym błędem.

Porównajmy średnią wariacyjną z odchyleniem standardowym na przykładzie rzeczywistych danych giełdowych.

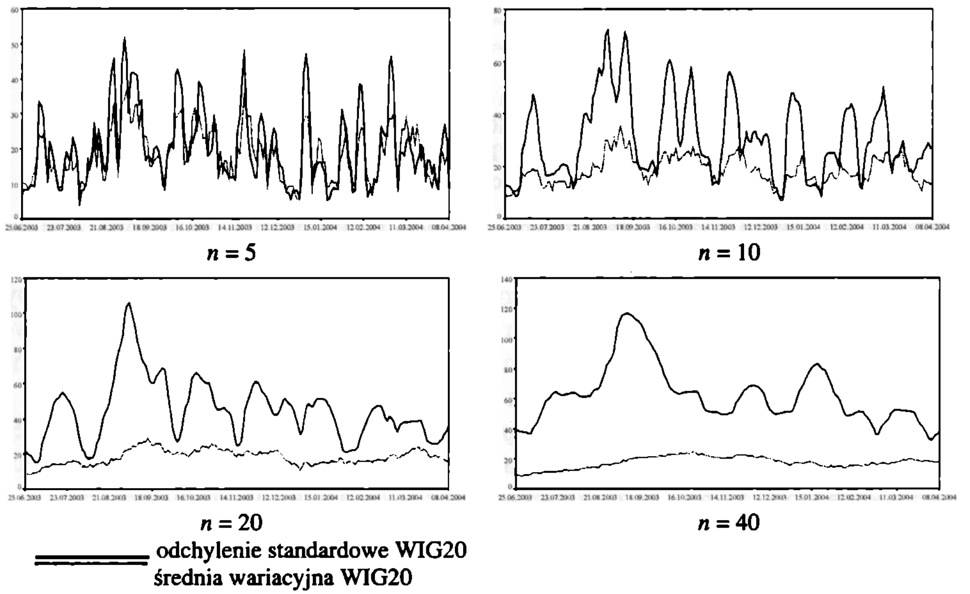


Rys. 7. Indeks WIG20 (w dniach 25.06.03-
-8.04.04, 201 sesji)
Źródło: opracowanie własne.



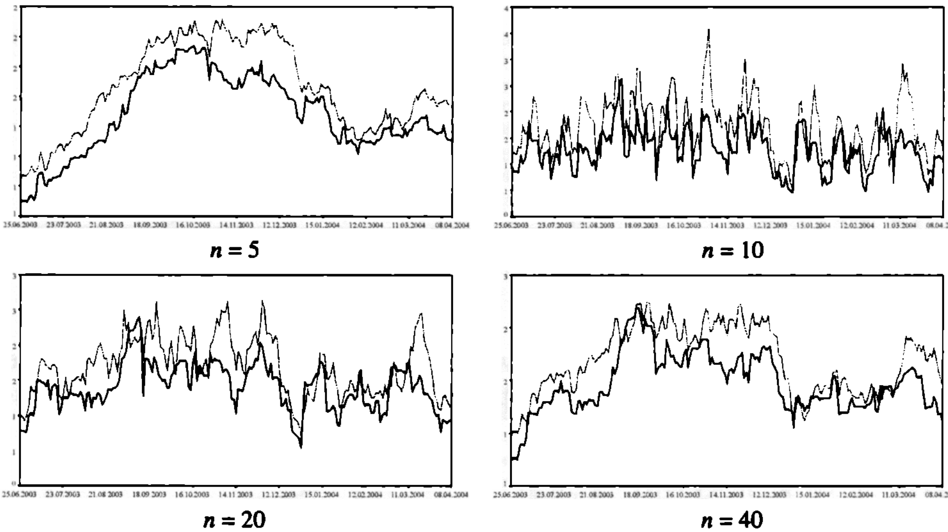
Rys. 8. Stopa zwrotu z indeksu WIG20 (w dniach 25.06.03-8.04.04, 201 sesji)
Źródło: opracowanie własne.

Przyjrzyjmy się, jak zmieniają się w czasie średnia wariacyjna i odchylenie standardowe badanego indeksu oraz stopy zwrotu z indeksu w zależności od długości horyzontu czasu.



Rys. 9. Zmienność indeksu WIG20 w zależności od długości horyzontu czasu
Źródło: opracowanie własne.

Jak widać na przedstawionych wykresach, w miarę wydłużania horyzontu czasu pogłębiają się różnice w poziomach odchylenia standardowego i średniej wariacyjnej. W przypadku analizy zmienności indeksu, który charakteryzuje trend wzrostowy, odchylenie standardowe staje się coraz wyższe od średniej wariacyjnej. Z kolei dla stopy zwrotu, zmiennej o dużej częstotliwości (ale bez wznoszącego lub opadającego trendu), średnia wariacyjna wskazuje na wyższy poziom ryzyka względem odchylenia standardowego.



——— odchylenie standardowe stopy zwrotu z WIG20

——— średnia wariacyjna stopy zwrotu z WIG20

Rys. 10. Zmienność stopy zwrotu z indeksu WIG20 w zależności od długości horyzontu czasu

Źródło: opracowanie własne.

Przyczyny takich różnic oraz mechanizm ich powstawania omówione zostały wcześniej na przykładzie hipotetycznych danych (por. rys. 1-6).

W zastosowaniach finansowych dużo częściej przeprowadza się analizę stopy zwrotu z aktywa niż jego ceny. Wynika to przede wszystkim z tego, że rozkłady prawdopodobieństwa cen są zwykle niestacjonarne. Stacjonarny rozkład prawdopodobieństwa stopy zwrotu pozwala analitykowi na oszacowanie przyszłej stopy zwrotu.

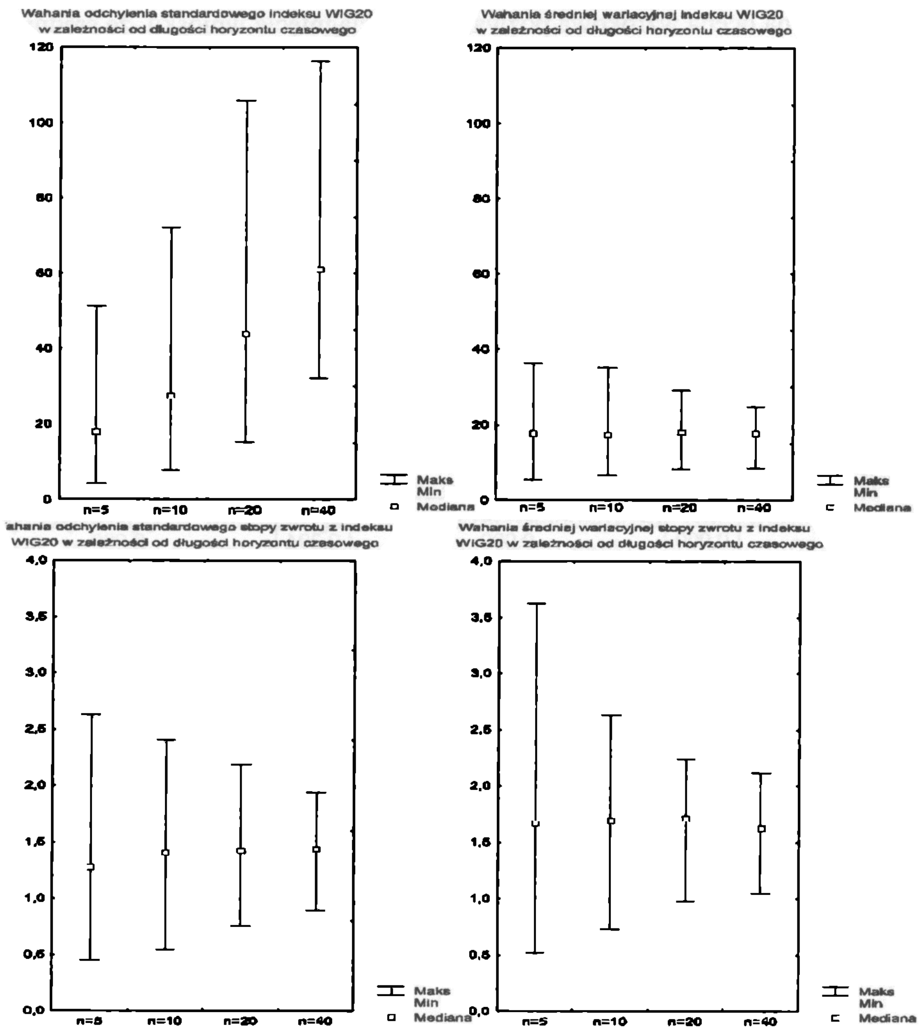
Kolejny problem pojawia się w związku z założeniem o niezależności poszczególnych obserwacji w rozkładzie normalnym i log-normalnym. W rzeczywistości poszczególne stopy zwrotu są ze sobą związane i wykazują autokorelację.

Stabilizacja średniej wariacyjnej w dłuższym horyzoncie czasu pozwala na ominięcie ograniczających założeń i wykorzystanie tego parametru w zagadnieniach predykcji (por. rys. 9).

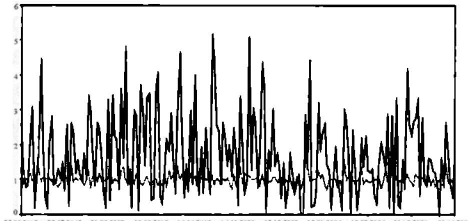
Ponadto, średnia wariacyjna rozważana jest na przestrzeni Banacha funkcji unormowanych, co zapewnia prawidłowość wykonywania operacji granicznych i daje do dyspozycji wiele twierdzeń matematycznych dotyczących tych przestrzeni. Za ich pomocą można będzie wyprowadzić szereg wniosków co do finansowych procesów ekonomicznych.

* * *

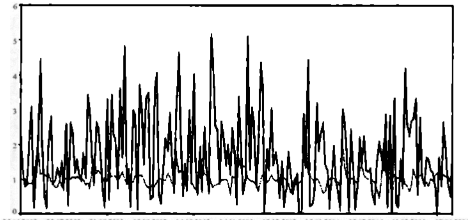
Uznano, że dla oceny ryzyka podstawowego znaczenie mają nie absolutne wielkości badanych parametrów, ale ich względne zmiany. Poniższe wykresy przedstawiają bezwzględne zmiany stopy zwrotu z indeksu w porównaniu do zmian średniej wariacyjnej i odchylenia standardowego (dla $n = 10$).



Rys. 11. Amplituda wahań odchylenia standardowego i średniej wariacyjnej w zależności od długości horyzontu czasu
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 12. Bezwzględne zmiany stopy zwrotu a dynamika średniej wariacyjnej WIG20
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 13. Bezwzględne zmiany stopy zwrotu a dynamika odchylenia standardowego WIG20
Źródło: opracowanie własne.

Już wstępna ocena wzrokowa pozwala na wyciągnięcie wniosku, że średnia wariacyjna jest bardziej wrażliwa na zmiany stopy zwrotu i lepiej je odzwierciedla. Aby to sprawdzić, przeprowadzono analizę korelacji zmiennych zilustrowanych na rys. 12 i 13. Wyniki przedstawiono[1] w tab. 2.

Tabela 2. Korelacje pomiędzy bezwzględnymi zmianami stopy zwrotu a dynamiką odchylenia standardowego i średniej wariacyjnej dla indeksu WIG20 i spółek wchodzących w jego skład

Spółka	Korelacja Pearsona			
	SD	istotność dwustronna	$\overline{V}$	istotność dwustronna
PEKAO	0,090	0,001	0,333	0,000
TPSA	0,133	0,000	0,309	0,000
BPHPBK	0,121	0,000	0,287	0,000
PROKOM	0,062	0,015	0,267	0,000
NETIA	0,135	0,000	0,263	0,000
AGORA	0,086	0,000	0,244	0,000
BZWBK	0,082	0,000	0,267	0,000
BRE	0,075	0,000	0,264	0,000
KETY	0,090	0,000	0,294	0,000
BACA	0,186	0,049	0,268	0,004
SOFTBANK	0,058	0,028	0,252	0,000
COMPLAND	0,103	0,000	0,286	0,000
SWIECIE	0,226	0,000	0,351	0,000
DEBICA	0,061	0,003	0,258	0,000
ORBIS	0,086	0,001	0,261	0,000
PGF	0,134	0,000	0,316	0,000
CERSANIT	0,145	0,000	0,289	0,000
BUDIMEX	0,076	0,000	0,275	0,000
KGHM	0,116	0,000	0,322	0,000
PKN ORLEN	0,073	0,017	0,315	0,000
WIG20	0,024	0,228	0,236	0,000

Źródło: opracowanie własne.

3. Zastosowania średniej wariacyjnej w optymalizacji portfela inwestycji

Istotą teorii Markowitza jest możliwość minimalizacji ryzyka stopy zwrotu poprzez jego dywersyfikację, czyli budowę portfela aktywów o odpowiednio dobranej strukturze. Miarą ryzyka jest tutaj odchylenie standardowe stopy zwrotu (choć w obliczeniach stosuje się wariancję). Portfel (w klasycznym ujęciu) można opisać następującymi zależnościami [Jajuga, Jajuga 1997; Luce, Raiffa 1964]:

[1] Do obliczeń wykorzystano wszystkie notowania poszczególnych spółek – od momentu ich wejścia na giełdę 8 kwietnia 2004 r. włącznie.

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \tag{19}$$

$$R_p = \sum_{i=1}^{k} w_i R_i, \tag{20}$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{k} w_i^2 s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} w_i w_j s_i s_j \rho_{ij}, \tag{21}$$

gdzie: k – liczba spółek, w_i – udziały aktywów w portfelu, R_i – oczekiwana stopa zwrotu i-tej spółki, R_p – oczekiwana stopa zwrotu portfela, V_p – wariancja stopy zwrotu portfela, s_i – odchylenie standardowe stopy zwrotu i-tej spółki, ρ_{ij} – współczynnik korelacji pomiędzy spółkami i i j.

Problem wyboru portfela jest zazwyczaj formalizowany w postaci dwukryterialnego modelu średniej i ryzyka [Markowitz 1952], w którym oczekiwana stopa zwrotu jest maksymalizowana, a pewna miara ryzyka jest minimalizowana. W klasycznym ujęciu miarą tą jest odchylenie standardowe (lub wariancja) stopy zwrotu. W ciągu ostatnich pięćdziesięciu lat wielu naukowców modyfikowało model Markowitza, wprowadzając do niego inne parametry dyspersji. Jednymi z najbardziej znanych osiągnięć w tym zakresie są modele: Konno-Yamazakiego (oparty na odchyleniu przeciętnym) [1991] i Yitzhakiego (wykorzystujący średnią Gini'ego) [1982].

W ten sam sposób można jako miarę ryzyka wprowadzić do modelu portfela inwestycji średnią wariacyjną. W ujęciu wariacyjnym będzie on opisany następująco:

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \tag{19'}$$

$$R_p = \sum_{i=1}^{k} w_i R_i, \tag{20'}$$

$$\mathrm{V}_p \leqslant \sum_{i}^{k} |w_i| \mathrm{V}_i \tag{21'}$$

gdzie: k – liczba spółek, w_i – udziały aktywów w portfelu, R_i – oczekiwana stopa zwrotu i-tej spółki, R_p – oczekiwana stopa zwrotu portfela, V_p – wariacja stopy zwrotu portfela, V_i – wariacje stóp zwrotu poszczególnych składników portfela. Wynika to z własności 5 i 6 wariacji (por. (9) i (10)).

W klasycznym ujęciu optymalna decyzja inwestora wiąże się z maksymalizacją oczekiwanej użyteczności. Wybór portfela spośród portfeli efektywnych zależeć będzie głównie od skłonności inwestora do ryzyka.

Określenie najlepszego portfela jest możliwe z zastosowaniem programowania liniowego (w przypadku średniej wariacyjnej rzędu pierwszego) lub programowania kwadratowego (dla średniej wariacyjnej drugiego rzędu).

4. Podsumowanie

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że chociaż odchylenie standardowe nadaje się do rozważań teoretycznych, co niewątpliwie stanowi jego zaletę, to wykorzystanie go jako indeksu ryzyka ujawnia szereg poważnych wad. Najważniejsze z nich to:

a) odniesienie wartości zmiennej do jej średniego poziomu;
b) brak uwzględnienia chronologii danych;
c) założenia dotyczące rozkładu zmiennej, jego stacjonarności i stabilności;
d) dalsze założenia, np. dotyczące liniowych form zależności[2] itd.

Jak wykazano w niniejszej pracy, żadnej z tych wad nie ma proponowana metoda wariacyjna. Podjęto próbę przeniesienia jej na grunt tradycyjnych modeli, ich weryfikacji i modyfikacji. Pozwoliło to stwierdzić, że średnia wariacyjna stanowi konstruktywną alternatywę dla klasycznych miar ryzyka. Łatwo można sprawdzić, że spełnia ona również własności miary koherentnej [Artzner i in. 1999]. Dodatkową zaletą jest też prostota i uniwersalność nowej metody.

Literatura

Alexiewicz A., *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 1969.

Artzner P., Delbaen F., Eber J. M., Heath D., *Coherent Measures of Risk*, „Mathematical Finance 1999 (listopad), s. 203-228.

Bernstein P.L., *Przeciw bogom.* Niezwykłe *dzieje ryzyka*, WIG-Press, Warszawa 1997.

Brachinger H.W., Weber M., *Risk as a Primitive – A Survey of Measures of Perceived Risk*, „Invited Review in Operations Research – Spektrum" 1997, 193, s. 235-250.

Dunis Ch.L. (red.), *Prognozowanie rynków finansowych*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001.

Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. III, PWN, Warszawa 1985.

Holliwell J., *Ryzyko finansowe*, Liber, Warszawa 2001.

Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-Press, Warszawa 1999.

Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.

Konno H., Yamazaki H., *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Application to Tokyo Stock Market*, „Management Science" 1991, 37, s. 519-531.

Luce R. D., Raiffa H., *Gry i decyzje*, PWN, Warszawa 1964.

Markowitz H., *Portfolio Selection*, „The Journal of Finance", marzec 1952, vol. VII, nr 1, s. 77-91.

Mansini R., Ogryczak W., Speranza M.G., *LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison*, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej, Raport 01-25, 2001.

---

[2] Zasada skalowania liniowego cen aktywów finansowych oraz ich stóp zwrotu.

Ogryczak W., *Stochastic Dominance and LP Solvable Models for Portfolio Optimization*, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej, Raport 00-24, 2000.

Szegö G., *Measures of Risk*, „Journal of Banking & Finance" 2002, 26, s. 1253-1272.

Yitzhaki S., *Stochastic Dominance, Mean Variance and Gini's Mean Difference*, „American Economic Review" 1982, 72, s. 178-185.

VARIATIONAL METHOD OF MEASUREMENT OF RISK

Summary

Extending notations and completing some well known results concerning the theory of measurable space the author presents a new approach to the variation of a give function. Using it one introduces the square variational average proposing it as a risk measure instead of the classical one – the standard deviation. Basic properties, examples and a number of applications to the market analysis will be given.