PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1088 — 2005
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

Joanna Olbryś

Politechnika Białostocka

ESTYMATORY MIAR EXPECTED SHORTFALL I VALUE AT RISK: PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA DO POMIARU RYZYKA WALUTOWEGO

1. Wstęp

Instytucje regulujące rynki finansowe (np. Basel Commitee on Banking Supervision) zalecają modelowanie ryzyka kredytowego, ryzyka płynności oraz ryzyka operacyjnego. Motywacje stosowania modeli ryzyka są oczywiste, ponieważ inwestorzy mają ciągłą potrzebę pomnażania bogactwa i jednocześnie chcą zabezpieczyć swoje portfele. Z drugiej strony, mniej więcej od 1997 r., międzynarodowe grupy naukowców prowadzą intensywne badania nad udoskonaleniem stosowanych do tej pory miar, uznając niektóre z nich (np. Value at Risk) za dalekie od ideału[1].

Celem artykułu jest zaprezentowanie przykładów zastosowania estymatorów wartości zagrożonej Value at Risk (VaR_α) oraz miary Expected Shortfall (ES_α) do pomiaru ryzyka walutowego na rynku polskim, jak również przypomnienie i podsumowanie podobieństw i podstawowych różnic dzielących obie miary.

2. Wartość zagrożona Value at Risk oraz miara ryzyka Expected Shortfall – definicje

Dla danego horyzontu czasowego i poziomu prawdopodobieństwa α wartość zagrożona VaR_α jest wartością krytyczną rozkładu logarytmów stóp zwrotu. Jest to poziom straty, który może zostać przekroczony z prawdopodobieństwem α. W porównaniu ze stopami zwrotu, logarytmy stóp zwrotu charakteryzują się większą symetrią i dążą do rozkładu normalnego [Jackson, Staunton 2004, s. 156-157].

[1] Specjalne wydanie „Journal of Banking & Finance" 26 (lipiec), 2002.

Duże, gwałtowne zmiany logarytmów stóp zwrotu są bardzo mało prawdopodobne. Decydując, przez wybór poziomu istotności α, jak małe jest to prawdopodobieństwo, decydujemy, jakie wielkości strat są praktycznie niemożliwe oraz ile kapitału należy utrzymać na ich ewentualne pokrycie.

Stosowany przez praktyków sposób obliczania VaR_α (przy założeniu logarytmiczno-normalnego rozkładu stóp zwrotu) [Jackson, Staunton 2004, s. 157]:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \text{pozycja} \cdot u_\alpha \cdot \sigma, \tag{1}$$

gdzie: pozycja – wartość pozycji (np. walutowej),

u_α – wartość krytyczna, odczytana z tablicy rozkładu normalnego dla przyjętej wartości prawdopodobieństwa α,

σ – odchylenie standardowe *(volatility)* logarytmów stóp zwrotu.

Definicja $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ (niezależnie od postaci rozkładu zmiennej losowej X) [Yamai, Yoshiba 2002a, s. 88][2]:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = q_\alpha^+(X) = \inf\{x : P(X \le x) > \alpha\}, \tag{2}$$

czyli wartość zagrożona $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ jest zdefiniowana jako górny α-kwantyl $q_\alpha^+(X)$ rozkładu strata/zysk, a zmienna X, określona jako strata, przybiera następujące wartości:

$$\begin{cases} \text{strata} & \Rightarrow X > 0 \\ \text{zysk} & \Rightarrow X < 0 \end{cases}.$$

Definicja $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ (niezależnie od postaci rozkładu zmiennej losowej X) [Yamai, Yoshiba 2002a, s. 88][3]:

Niech X będzie zmienną losową określoną jako strata z danego portfela oraz niech $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ będzie wartością zagrożoną tego portfela dla poziomu ufności $(1-\alpha)$. Miarę ryzyka $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ definiujemy jako „średnią stratę w najgorszych α100% przypadkach” [Acerbi, Tasche 2002, s. 2], gdzie $\alpha \in [0;1]$:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = E\left[X \middle| X \ge \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right]. \tag{1.3}$$

Z definicji wynika, że $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ jest wartością oczekiwaną straty, o ile strata ta przekroczy poziom $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

3. Miary Value at Risk oraz Expected Shortfall – porównanie podstawowych własności

Koncepcja Value at Risk, zwanej wartością zagrożoną, pojawiła się w 1994 r. i od razu zyskała wielu zwolenników, wydając się precyzyjną odpowiedzią na pytanie:

---

[2] Jest to jedna z kilku równoważnych definicji miary VaR_α.

[3] Jest to jedna z kilku równoważnych definicji miary ES_α.

jakiej straty z portfela inwestycyjnego możemy się spodziewać w określonym czasie, z określonym z góry prawdopodobieństwem. Okazało się jednak, że w sytuacjach kryzysowych VaR_α nie sprawdza się jako miara ryzyka. Przykłady można znaleźć m.in. w pracach [Danielsson 2002; Danielsson i in. 2001]. Dotyczą one m.in. kryzysu z października 1998 r., wywołanego spadkiem kursu dolara z 131 do 112 jenów w ciągu dwóch dni. Uważa się, że kryzys ten był konsekwencją kryzysu rosyjskiego z sierpnia 1998 r. oraz jednorodności strategii stosowanych przez dużych inwestorów instytucjonalnych, którzy prognozowali ryzyko na podstawie VaR_α tak, jak przepowiada się pogodę [Danielsson i in. 2001, s. 5]. Poza tym zostało udowodnione, że miara VaR_α w ogólnym przypadku nie ma własności subaddytywności, co oznacza, że VaR_α portfela zdywersyfikowanego może być większe niż VaR_α portfela zawierającego jeden instrument finansowy. Przykłady można znaleźć m.in. w pracach [Acerbi, Tasche 2002; Artzner i in. 1999; Danielsson i in. 2001; Frey, McNeil 2002].

W ostatnich latach znacznie wzrosła liczba portfeli inwestycyjnych, zawierających instrumenty finansowe o nieciągłych rozkładach zmiennych losowych, będących ich stopami zwrotu lub wartościami końcowymi netto. Przykładami są portfele zawierające instrumenty pochodne lub niehandlowe pożyczki. Głównie z tego powodu miarą, która zyskuje coraz więcej zwolenników ze względu na spełnianie wszystkich warunków spójnej miary ryzyka, niezależnie od postaci rozkładu zmiennej losowej, jest α-Expected Shortfall (ES_α). Miara ES_α została wprowadzona w 1997 r. w pracy [Artzner i in. 1997].

Miara ryzyka ES_α ma wiele istotnych własności, które decydują o jej przewadze nad wartością zagrożoną VaR_α. Najważniejszą z nich jest spójność, która zapewnia spełnienie wszystkich warunków spójnej miary ryzyka, w tym również warunku subaddytywności [Acerbi, Tasche 2002, s. 5, 17]. Warunek ten gwarantuje, że niezależnie od rozkładu zmiennej losowej (nawet wtedy, gdy rozkład ten nie jest znany) właściwa dywersyfikacja portfela może znacznie zmniejszyć jego ryzyko. Pomiar ryzyka za pomocą miary ES_α nie wykazuje sprzeczności, która często pojawia się w przypadku pomiaru metodą VaR_α.

Nie tylko własność subaddytywności daje mierze ES_α przewagę nad VaR_α. W przeciwieństwie do VaR_α miara ES_α jest ciągła ze względu na współczynnik α [Acerbi, Tasche 2002, s. 7]. To powoduje, że nie jest wrażliwa na małe zmiany wartości α. Jest to szczególnie ważne w przypadku stosowania miary ryzyka do zmiennych losowych o rozkładach dyskretnych. Z rozkładem dyskretnym stóp zwrotu mamy do czynienia m.in. wtedy, gdy portfel zawiera instrumenty pochodne bądź niehandlowe pożyczki. Niezależnie od postaci rozkładu, zarządzający portfelem ma pewność, że ryzyko tego portfela nie zmieni się gwałtownie w przypadku zmiany poziomu współczynnika α o kilka punktów bazowych.

Inną ważną własnością miary ES_α jest jej monotoniczność [Acerbi, Tasche 2002, s. 7] ze względu na poziom prawdopodobieństwa α. Im niższa jest wartość α, tym większa jest wartość miary ryzyka danego portfela. Zarządzający portfelem decyduje o wyborze wartości współczynnika α i w zależności od tego szacuje ryzyko portfela. Należy dodać, że wartość zagrożona VaR_α także ma analogiczną własność.

W pracy [Acerbi, Tasche 2002] zostało również udowodnione [Acerbi, Tasche 2002, s. 10], że dla zmiennych losowych o rozkładach ciągłych miary $CVaR_\alpha$ (Conditional Value at Risk, zob. [Rockafellar, Uryasev 2000; 2001]) oraz ES_α są ekwiwalentne. Można wręcz stwierdzić, że są to dwie różne nazwy tej samej miary ryzyka. Uwaga ta ma o tyle duże znaczenie, że istnieją proste algorytmy programowania liniowego dla problemu optymalizacji (minimalizacji) wartości miary $CVaR_\alpha$ (np. w pracy [Rockafellar, Uryasev 2000]). Niestety, jeśli chodzi o miarę VaR_α, to jest ona dość trudna do optymalizacji, ponieważ nie jest wypukła, nie jest gładka oraz może mieć lokalne ekstrema.

Badania empiryczne wykazały jednak, że miara ES_α, pomimo oczywistych, wymienionych wcześniej zalet, wynikających z jej matematycznych własności, ma też słabe strony [Yamai, Yoshiba 2002b, s. 81]. Zdefiniowana jako wartość oczekiwana strat przewyższających poziom VaR_α, jest trudna do testowania wstecznego. Testy wsteczne powinny porównywać wartość średnią faktycznie zrealizowanych strat przekraczających poziom VaR_α z uzyskanym estymatorem miary ES_α. Wymaga to dużej liczby danych statystycznych, ponieważ straty przekraczające wartość VaR_α występują rzadko.

Efektywność stosowania miary ES_α jest zależna od stabilności rozkładu zmiennej losowej. Właściwa estymacja ogonów rozkładu jest trudna przy zastosowaniu konwencjonalnych metod estymacji. Błąd estymacji wartości zagrożonej VaR_α na podstawie tej samej próby statystycznej z reguły jest mniejszy niż błąd estymacji miary ES_α [Yamai, Yoshiba 2002a, s. 102]. Oznacza to, że uzyskanie zbliżonej dokładności estymacji wymaga, w przypadku miary ES_α, większej liczby danych [Yamai, Yoshiba 2002a, s. 95, 112]. Poza tym, w przeciwieństwie do wartości zagrożonej VaR_α, nie jest możliwe „dopasowanie", poprzez wybór odpowiedniego poziomu prawdopodobieństwa α, miary ES_α do indywidualnych potrzeb monitorowania ryzyka danej instytucji finansowej. Brakuje też oprogramowania i systemów pozwalających wyznaczać wartość miary ES_α w sposób zunifikowany. Są to główne przyczyny nieobecności miary ES_α wśród narzędzi pomiaru ryzyka stosowanych przez praktyków [Yamai, Yoshiba 2002b, s.81].

4. Estymatory miar Value at Risk oraz Expected Shortfall

Zgodnie z definicją, estymatorem wartości zagrożonej $VaR_\alpha(X)$, przy poziomie ufności $100(1-\alpha)\%$, jest górny $100\alpha\%$ kwantyl empirycznego rozkładu strat [Yamai, Yoshiba 2002a, s. 90, 113].

Przypuśćmy, że ciąg $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha+1)}, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(2)}, X_{(1)}$ tworzą empiryczne wartości strat, uporządkowane w sposób rosnący. Wtedy dla próby statystycznej o dużej liczności n:

$$\text{estymator } \mathrm{VaR}_\alpha(X) = X_{(n\alpha+1)}. \tag{4}$$

Przypomnijmy, że zgodnie z definicją $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ przyjętą w tej pracy (wzór (2)):

$$\begin{cases} \text{strata} & \Rightarrow X_i > 0, \\ \text{zysk} & \Rightarrow X_i < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Analogicznie – zgodnie z definicją miary ryzyka $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ jako wartości oczekiwanej straty – jeśli strata ta przekroczy poziom $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, w przypadku próby o dużej liczności n estymator tej miary przybiera postać [Yamai, Yoshiba 2002a, s. 90, 113]:

$$\text{estymator } \mathrm{ES}_\alpha(X) = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(n\alpha+1)}}{n\alpha + 1}. \tag{5}$$

5. Przykłady pomiaru ryzyka na polskim rynku walutowym

We wszystkich prezentowanych przykładach otrzymane wartości miar VaR_α oraz ES_α interpretujemy jako poziom straty, który może zostać przekroczony odpowiednio z prawdopodobieństwem $\alpha = 0{,}01$ lub $\alpha = 0{,}05$. Utrzymując długą pozycję o wartości 1 jednostki danej waluty, możemy oczekiwać, że strata poniesiona w ciągu jednego dnia nie przekroczy poziomu VaR_α lub ES_α z prawdopodobieństwem odpowiednio 0,99 lub 0,95. Przykłady uporządkowano według rosnącej liczności prób zawierających dane dotyczące średnich kursów NBP walut: euro, dolar, frank szwajcarski. Wszystkie obliczenia wykonano z wykorzystaniem procedur arkusza kalkulacyjnego Excel.

Przykład 5.1

Pomiaru jednodniowego ryzyka walutowego długiej pozycji 1 jednostki pieniężnej każdej z walut dokonano na podstawie próby statystycznej o liczności $n = 500$ (dane z okresu 11.03.2003 r.-24.02.2005 r.). Wartości miar VaR_α oraz ES_α są podane w zł. Uwzględniono kurs wymiany z dnia 24.02.2005 r. Obliczenia wykonano dla poziomów prawdopodobieństwa $\alpha = 0{,}01$ oraz $\alpha = 0{,}05$.

Tabela 1. Estymatory miar Value at Risk oraz Expected Shortfall

	$\mathrm{VaR}_{0{,}01}$ wzór (1)	Estymator $\mathrm{VaR}_{0{,}01}$ wzór (4)	Estymator $\mathrm{ES}_{0{,}01}$ wzór (5)	$\mathrm{VaR}_{0{,}05}$ wzór (1)	Estymator $\mathrm{VaR}_{0{,}05}$ wzór (4)	Estymator $\mathrm{ES}_{0{,}05}$ wzór (5)
1 euro	0,047	0,056	0,069	0,033	0,036	0,048
1 dolar	0,051	0,066	0,071	0,037	0,044	0,058
1 frank szwajcarski	0,034	0,041	0,050	0,024	0,029	0,037

Źródło: opracowanie własne na podstawie archiwum kursów średnich NBP ze strony www.money.pl.

Przykład 5.2

Pomiaru jednodniowego ryzyka walutowego pozycji długiej 1 jednostki pieniężnej każdej z walut dokonano na podstawie próby statystycznej o liczności $n=800$ (dane z okresu 27.12.2001 r.-24.02.2005). Wartości miar VaR_α oraz ES_α są podane w zł. Uwzględniono kurs wymiany z dnia 24.02.2005 r. Obliczenia wykonano dla poziomów prawdopodobieństwa $\alpha=0,01$ oraz $\alpha=0,05$.

Tabela 2. Estymatory miar Value at Risk oraz Expected Shortfall

	$VaR_{0,01}$ wzór (1)	Estymator $VaR_{0,01}$ wzór (4)	Estymator $ES_{0,01}$ wzór (5)	$VaR_{0,05}$ wzór (1)	Estymator $VaR_{0,05}$ wzór (4)	Estymator $ES_{0,05}$ wzór (5)
1 euro	0,054	0,056	0,071	0,038	0,036	0,050
1 dolar	0,049	0,065	0,070	0,034	0,041	0,054
1 frank szwajcarski	0,038	0,042	0,050	0,027	0,029	0,038

Źródło: opracowanie własne na podstawie archiwum kursów średnich NBP ze strony www.money.pl.

Przykład 5.3

Pomiaru jednodniowego ryzyka walutowego pozycji długiej 1 jednostki pieniężnej każdej z walut dokonano na podstawie próby statystycznej o liczności $n=1300$ (dane z okresu 3.01.2000 r.-24.02.2005 r.). Wartości miar VaR_α oraz ES_α są podane w zł. Uwzględniono kurs wymiany z dnia 24.02.2005 r. Obliczenia wykonano dla poziomów prawdopodobieństwa $\alpha=0,01$ oraz $\alpha=0,05$.

Tabela 3. Estymatory miar Value at Risk oraz Expected Shortfall

	$VaR_{0,01}$ wzór (1)	Estymator $VaR_{0,01}$ wzór (4)	Estymator $ES_{0,01}$ wzór (5)	$VaR_{0,05}$ wzór (1)	Estymator $VaR_{0,05}$ wzór (4)	Estymator $ES_{0,05}$ wzór (5)
1 euro	0,064	0,066	0,086	0,045	0,042	0,057
1 dolar	0,050	0,066	0,084	0,035	0,043	0,058
1 frank szwajcarski	0,044	0,046	0,059	0,031	0,031	0,040

Źródło: opracowanie własne na podstawie archiwum kursów średnich NBP ze strony www.money.pl.

Zaprezentowane przykłady szacowania ryzyka jednodniowej, długiej pozycji walutowej wskazują na niewielkie, w stosunku do pomiarów uzyskanych z wykorzystaniem estymatora (4), zaniżanie wartości tego ryzyka (poza nielicznymi wyjątkami) w przypadku wyznaczania miary VaR_α za pomocą wzoru (1). Oszacowania otrzymane ze wzoru (1) i za pomocą estymatora są podobnie zróżnicowane w przypadku różnych walut i próby o tej samej liczności. Są one najniższe dla franka szwajcarskiego, co jest zgodne z powszechnym przekonaniem, że jest to najbardziej stabilna z rozważanych walut. W większości przypadków oszacowanie oczekiwanych jednodniowych strat, uzyskane ze wzoru (1), jest z kolei najwyższe dla euro, poza okresem 11.03.2003 r.-24.02.2005 r. (przykład 5.1), kiedy to największe ryzyko wiązało się z inwestycją w dolara. Okazało się też, że długość okresu badania (czyli liczność próby) miała pewien wpływ na wartości estymatorów, ale nie był on bardzo istotny (większy w przypadku miary ES_α). W przypadku najliczniejszej próby (przykład 5.3) wartości VaR_α, obliczone dwoma sposobami, były najbardziej zbliżone (najmniejszy błąd estymacji).

Przykłady potwierdzają większą restrykcyjność miary ES_α w stosunku do wartości zagrożonej VaR_α, co ujawnia się w wyższych wartościach estymatora ES_α przy tym samym poziomie prawdopodobieństwa α dla tej samej waluty i próby statystycznej z tego samego okresu. Oznacza to, że stosowanie miary ES_α wymusza utrzymanie większego kapitału na pokrycie ewentualnych strat.

Przedstawione obliczenia pozwalają również zaobserwować własność monotoniczności obu miar ze względu na poziom prawdopodobieństwa α. Wartości estymatorów $VaR_{0,01}$ oraz $ES_{0,01}$ są wyższe, niż wartości $VaR_{0,05}$ i $ES_{0,05}$, niezależnie od rodzaju waluty i liczności próby.

6. Podsumowanie

Podsumowując, należy stwierdzić, że przykłady empiryczne, uzyskane z wykorzystaniem estymatorów miar VaR_α oraz ES_α na polskim rynku walutowym, potwierdziły znane z literatury przedmiotu własności obu miar.

Interesujące mogłoby być również porównanie nie tylko własności samych miar VaR_α i ES_α, ale też własności ich estymatorów i analiza wpływu tych własności na otrzymane wyniki empiryczne pomiaru ryzyka walutowego. Może być to tematem oddzielnego opracowania, podobnie jak ważny problem pomiaru błędów estymacji miar VaR_α i ES_α, uzyskanych za pomocą wzorów (4) i (5) [Yamai, Yoshiba 2002a, s. 87-96].

Literatura

Acerbi C., *Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion*, [w:] G. Szegö (red.) *Beyond VaR*, „Journal of Banking & Finance" 2002, nr 26 (lipiec) (special issue).

Acerbi C., Tasche D., *On the Coherence of Expected Shortfall*, [w:] G. Szegö (red.) *Beyond VaR*, „Journal of Banking & Finance" 2002, nr 26 (lipiec) (special issue).

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., *Coherent Measures of Risk*. „Mathematical Finance" 1999, nr. 9, s. 203-228, www.gloriamundi.org.

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., *Thinking Coherently*, „Risk" 1997, nr 10, s. 33-49.

Danielsson J., Embrechts P., Goodhart C., Keating C., Muennich F., Renault O., Shin H.-S., *An Acedemic Responce to Basel II*, Special Paper nr 130, FMG and ESRC, London, May, 2001, www.riskresearch.org.

Danielsson J., *The Emperor Has no Clothes: Limits to Risk Modeling*, „Journal of Banking & Finance" 2002, nr 26 (lipiec), s. 1273-1296.
Frey R., McNeil A., *VaR and Expected Shortfall in Credit Portfolios: Conceptual and Practical Insights*, [w:] G. Szegö (red.) *Beyond VaR*, „Journal of Banking & Finance" 2002, nr 26 (lipiec) (special issue).
Jackson M., Staunton M., *Zaawansowane modele finansowe z wykorzystaniem Excela i VBA*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2004.
Olbryś J., *Czy Value-at-Risk jest właściwą miarą ryzyka? Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych IV*, Warszawa 2004, s. 237-246.
Rockafellar R.T., Uryasev S., *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Research Report 2001-5, ISE Depart., University of Florida.
Rockafellar R.T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, „Journal of Risk" 2000, nr 2(3), www.ise.ufl.edu/uryasev/.
Tasche D., *Expected Shortfall and Beyond*, „Journal of Banking & Finance" 2002, nr 26, s. 1519-1533.
Yamai Y., Yoshiba T., *Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization*, „Monetary and Economic Studies" styczeń 2002a, s. 87-121.
Yamai Y., Yoshiba T., *On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall*, „Monetary and Economic Studies" styczeń 2002b, s. 57-85.

THE ESTIMATORS OF EXPECTED SHORTFALL AND VALUE AT RISK: EXAMPLES OF CURRENCY RISK ESTIMATE

Summary

Concept of Value at Risk appears in 1994. Nowadays VaR is the most popular risk measure. Unfortunately, it fails to reward diversification, as it is not subadditive. In the search for a suitable alternative to VaR, Expected Shortfall (ES) has been characterized as the smallest coherent risk measure to dominate VaR. The aim of this paper is an application of Expected Shortfall and Value-at-Risk estimators to risk estimate examples on the Polish currency market. The paper also offers a comparison of ES and VaR as risk measures.