PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1088 — 2005
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

Joanna Nowicka-Zagrajek, Krzysztof Burnecki

Politechnika Wrocławska

WYBRANE RODZAJE SKŁADEK W MODELU RYZYKA KOLEKTYWNEGO

1. Wstęp

Do najważniejszych zadań matematyki aktuarialnej należy kalkulacja składki dla danego portfela ubezpieczeń. Wyznaczenie składki przeznaczonej na pokrycie wypłat polega na przypisaniu zmiennej losowej opisującej wypłatę pewnej liczby – ceny. Spośród wielu zasad określających różne sposoby kalkulacji tej ceny wybrano pięć najczęściej stosowanych i omówiono je w przypadku opisania całkowitej wypłaty w portfelu modelem ryzyka kolektywnego.

W pierwszej części pracy przedstawiono podstawowe informacje dotyczące modelu ryzyka kolektywnego. Następnie omówione zostały wybrane rodzaje składek dotyczących rozważanego modelu: składki oparte na wartości oczekiwanej oraz składkę wykładniczą. W związku z tym, że w praktyce dla modelu ryzyka kolektywnego często stosuje się aproksymację rozkładem normalnym lub przesuniętym rozkładem gamma, oba te oszacowania zaprezentowano w trzecim punkcie pracy. W szczególności pokazano, jak te przybliżenia wpływają na wysokość rozważanych składek. Aby zilustrować rozważania teoretyczne, w ostatniej części pracy przeanalizowano składki otrzymane dla modelu ryzyka kolektywnego dopasowanego do rzeczywistych danych szkodowych, opisujących wysokości strat związanych z katastrofami naturalnymi w USA w latach 1990-1999.

2. Model ryzyka kolektywnego

Niech zmienna losowa N oznacza liczbę wypłat w portfelu w ustalonym okresie. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą dodatnimi zmiennymi losowymi opisującymi wielkości kolejnych wypłat. W modelu ryzyka kolektywnego (*collective risk model*) całkowitą (zagregowaną) wypłatę w portfelu określa się jako losową sumę:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N, \quad \text{przy czym } S = 0, \text{ gdy } N = 0. \tag{1}$$

Załóżmy, że:

- $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi o jednakowych rozkładach danych dystrybuantą F_X,
- zmienne losowe $N, X_1, X_2, \ldots$ są wzajemnie niezależne,
- istnieje EX, EN, $VarX$, $VarN$.

O rozkładzie zmiennej losowej S mówi się, że ma rozkład złożony, który określa się przez podanie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej wyrażającej liczbę składników sumy oraz rozkładu prawdopodobieństwa pojedynczego składnika sumy. Do opisu liczby wypłat najczęściej stosuje się rozkład Poissona i rozkład ujemny dwumianowy, wysokości wypłat dobrze zaś opisują rozkłady takie, jak: gamma, Pareto, logarytmiczno-normalny [Burnecki, Misiorek, Weron 2005; Klugman, Panjer, Willmot 1998; Panjer, Willmot 1992]. Wyznaczenie prostej analitycznej postaci dystrybuanty zmiennej S jest w praktyce niemożliwe. W związku z tym, w celu określenia rozkładu całkowitej wypłaty, stosuje się metody oparte na wzorach rekurencyjnych, metody symulacyjne, a także metody przybliżone [Bowers i in. 1997; Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994; Iwanik, Nowicka-Zagrajek 2005].

W modelu ryzyka kolektywnego wartość oczekiwana i wariancja całkowitej wypłaty zależą od pierwszych dwóch momentów rozkładów: pojedynczej wypłaty i liczby wypłat:

$$ES = EXEN, \quad VarS = ENVarX + (EX)^2 VarN, \tag{2}$$

natomiast trzeci moment centralny jest dany wzorem:

$$E(S - ES)^3 = E(N - EN)^3 (EX)^3 + 3VarNEXVarX + ENE(X - EX)^3. \tag{3}$$

Jeśli założymy, że istnieją funkcje generujące momenty zmiennych uwzględnionych w modelu: $M_N(t) = Ee^{tN}$ i $M_X(t) = Ee^{tX}$, to funkcję generującą momenty zmiennej S wylicza się ze wzoru: $M_S(t) = M_N[\ln M_X(t)]$.

Więcej informacji o modelu ryzyka kolektywnego można znaleźć np. w [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994; Ostasiewicz 2000; Otto 2002; Panjer, Willmot 1992; Ronka-Chmielowiec 2000].

3. Wybrane rodzaje składek

Kalkulując składkę przeznaczoną na pokrycie wypłat (bez uwzględnienia kosztów działalności ubezpieczeniowej) za dany okres w modelu ryzyka kolektywnego, należy określić zmienną losową, opisującą wielkość całkowitej wypłaty w portfelu w rozważanym okresie, przez określenie zmiennych występujących w modelu, oraz wybrać zasadę wyznaczania składki. Własności omówionych składek oraz inne zasady wyznaczania składek można znaleźć np. w [Iwanik, Nowicka-Zagrajek 2000; Ronka-Chmielowiec 2000; Straub 1988; Young 2004].

Jedną z najczęściej stosowanych zasad obliczania składki jest zasada równoważności składki i świadczenia (inaczej zwana zasadą czystego ryzyka), zgodnie z którą wielkość składki ustala się na poziomie oczekiwanej wielkości wypłaty:

$$P = ES = EXEN. \tag{4}$$

Otrzymana w ten sposób składka jest nazywana składką netto (*pure risk premium*).

W związku z tym, że wielkości wypłat w przyszłości mogą się różnić od wartości oczekiwanej wypłat i oszacowanie wartości oczekiwanej wypłaty może być niedokładne, często modyfikuje się składkę netto, wprowadzając tzw. narzuty na bezpieczeństwo. W ten sposób wprowadza się np. zasadę wartości oczekiwanej, zgodnie z którą składka (*premium with safety loading*) wyraża się wzorem:

$$P_{SL}(\theta) = (1+\theta)ES = (1+\theta)EXEN, \quad \theta \geq 0, \tag{5}$$

czyli narzut na bezpieczeństwo jest proporcjonalny do wartości oczekiwanej zmiennej S. Liczbę θ nazywa się współczynnikiem bezpieczeństwa albo współczynnikiem narzutu na bezpieczeństwo. Oczywiście składka netto jest szczególnym rodzajem składki z narzutem na bezpieczeństwo, tj. $P_{SL}(0) = P$.

W związku z tym, że zarówno składka netto, jak i składka z narzutem na bezpieczeństwo nie zależą od zmienności zmiennej losowej opisującej całkowitą wypłatę, są czasami krytykowane i proponuje się inne rodzaje zasad liczenia składek. Dwie najpopularniejsze to zasada wariancji (*variance principle*) i zasada odchylenia standardowego (*standard deviation principle*). Składka wynikająca z zasady wariancji dana jest wzorem:

$$P_V(a) = ES + aVarS = EXEN + a[ENVarX + (EX)^2 VarN], \quad a \geq 0, \tag{6}$$

czyli zależy ona nie tylko od wartości oczekiwanej zmiennej S, ale i od wariancji tej zmiennej. Można powiedzieć, że w tym przypadku narzut na bezpieczeństwo jest proporcjonalny do wariancji (stąd nazwa *σ^2-loading principle*).

Składka opisana przez zasadę odchylenia standardowego zależy zarówno od wartości oczekiwanej całkowitej wypłaty S, jak i od jej odchylenia standardowego:

$$P_{SD}(b) = ES + b\sqrt{VarS} = EXEN + b\sqrt{ENVarX + (EX)^2 VarN}, \quad b \geq 0, \tag{7}$$

czyli narzut na bezpieczeństwo jest proporcjonalny do odchylenia standardowego (co tłumaczy nazwę *σ-loading principle*).

Z inną zasadą kalkulacji składki można się spotkać w teorii użyteczności, w której wprowadza się tzw. zasadę użyteczności zerowej [Ostasiewicz 2000; Straub 1988]. W najprostszym przypadku zasada ta prowadzi do składki netto. Ciekawszy wynik uzyskuje się dla wykładniczej funkcji użyteczności – otrzymuje się wówczas zasadę wykładniczą, która prowadzi do wyznaczenia składki wykładniczej (*exponential premium*) danej wzorem:

$$P_E(c) = \frac{\ln M_S(c)}{c} = \frac{\ln E(e^{cS})}{c}, \quad c > 0, \quad E(e^{cS}) < \infty. \tag{8}$$

Składka wykładnicza jest rosnącą funkcją parametru c, określającego stopień awersji do ryzyka. Gdy c dąży do zera, $P_E(c) \to EX$. Warto zauważyć, że składka wykładnicza jest w przybliżeniu równa składce wynikającej z zasady wariancji z parametrem $a = c/2$ [Ostasiewicz 2000]:

$$P_E(c) \approx ES + \frac{c}{2} VarS, \quad c > 0. \tag{9}$$

Po skorzystaniu z postaci funkcji generującej momenty dla zmiennej S w modelu kolektywnym można pokazać, że składka wykładnicza przybiera postać:

$$P_E(c) = \frac{1}{c} \ln M_N[\ln M_X(c)], \quad c > 0. \tag{10}$$

4. Aproksymacja całkowitej wypłaty

W literaturze aktuarialnej najczęściej rekomenduje się dwie podstawowe metody aproksymacji rozkładu całkowitej wypłaty w modelu ryzyka kolektywnego – metodę z rozkładem normalnym lub przesuniętym rozkładem gamma. W związku z tym, że rozkład normalny jest symetryczny, a rozkłady zagregowanych wypłat przeważnie charakteryzują się dość dużą skośnością, przyjmuje się, że aproksymację rozkładem normalnym można stosować tylko, gdy skośność rozkładu jest niewielka [Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994].

4.1. Aproksymacja rozkładem normalnym

Aproksymacja rozkładem normalnym polega na przybliżeniu rozkładu całkowitej wypłaty S rozkładem normalnym o średniej ES i wariancji $VarS$ [Bowers i in. 1997; Daykin, Pentikäinen, Pesonen 1994]. W związku z tym, że wartość oczekiwana i wariancja rozkładu S i aproksymującego go rozkładu normalnego są sobie równe, takie przybliżenie nie ma wpływu na składki wyrażone w terminach dwóch pierwszych momentów, tzn.: $P_{SL}^{nor}(\theta) = P_{SL}(\theta)$, $P_V^{nor}(a) = P_V(a)$, $P_{SD}^{nor}(b) = P_{SD}(b)$.

Zastosowanie aproksymacji rozkładem normalnym znacznie upraszcza liczenie składki wykładniczej. Można pokazać, że składka wykładnicza wyraża się wzorem [Iwanik, Nowicka-Zagrajek 2000]:

$$P_E^{nor}(c) = ENEX + \frac{c}{2}[ENVarX + (EX)^2 VarN], \quad c > 0, \tag{11}$$

czyli jest ona równa składce wynikającej z zasady wariancji z parametrem $a = c/2$.

4.2. Aproksymacja przesuniętym rozkładem gamma

Ponieważ rozkład całkowitej wypłaty S jest w praktyce zwykle skośny prawostronnie, więc rozkład S często aproksymuje się przesuniętym rozkładem gamma. Dystrybuanta przesuniętego rozkładu gamma (*translated gamma*) dana jest wzorem:

$$G^{trg}(x;\alpha,\beta,x_0) = F(x-x_0;\alpha,\beta), \quad x,\alpha,\beta > 0, \tag{12}$$

gdzie $F(x;\alpha,\beta)$ oznacza dystrybuantę rozkładu gamma z parametrami α i β:

$$F(x;\alpha,\beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt, \quad x,\alpha,\beta > 0. \tag{13}$$

Rozkład zmiennej S aproksymuje się przesuniętym rozkładem gamma z parametrami x_0, α, β takimi, żeby zachodziła równość trzech momentów: wartości oczekiwanej, wariancji i trzeciego momentu centralnego (o ile one istnieją). Uzyskuje się wtedy następujące równania, pozwalające wyliczyć szukane parametry:

$$\alpha = 4\frac{(VarS)^3}{[E(S-ES)^3]^2}, \quad \beta = 2\frac{VarS}{E(S-ES)^3}, \quad x_0 = ES - 2\frac{(VarS)^2}{E(S-ES)^3}. \tag{14}$$

Ponieważ rozkład S aproksymowany jest przesuniętym rozkładem gamma o takiej samej wartości oczekiwanej i wariancji, zastosowana aproksymacja nie ma wpływu na składki zależne od dwóch pierwszych momentów, tzn.: $P_{SL}^{trg}(\theta) = P_{SL}(\theta)$, $P_V^{trg}(a) = P_V(a)$, $P_{SD}^{trg}(b) = P_{SD}(b)$.

Wykorzystując postać funkcji generującej momenty dla przesuniętego rozkładu gamma, można uzyskać wzór na składkę wykładniczą [Iwanik, Nowicka-Zagrajek 2000]:

$$P_E^{trg}(c) = x_0 + \frac{\alpha}{c}\ln\left(\frac{\beta}{\beta-c}\right), \quad c \in (0,\beta). \tag{15}$$

Następnie, po zastosowaniu rozwinięcia funkcji logarytmicznej w szereg, można pokazać, że:

$$P_E^{tr}(c) = x_0 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{c}{2}\frac{\alpha}{\beta^2} + \alpha\sum_{k=3}^{\infty}\frac{c^{k-1}}{k\beta^k}, \quad c \in (0,\beta). \tag{16}$$

Przybliżenie wzoru (16) daje składkę wynikającą z zasady wariancji jak we wzorze (9), przy czym różnica między tymi składkami jest ograniczona przez funkcję:

$$P_E^{trg}(c) - P_V(c/2) < \frac{c^2\alpha}{\beta^2(\beta-c)}, \quad c \in (0,\beta). \tag{17}$$

5. Przykład

Załóżmy, że ubezpieczyciel chce obliczyć składkę roczną dla portfela polis, z których wypłata następuje w przypadku straty wywołanej katastrofą naturalną w

USA. Przyjmijmy, że wypłaty z tego portfela są opisane modelem ryzyka kolektywnego (1), a obliczenia przeprowadzone zostały na podstawie danych dotyczących katastrof naturalnych w USA w latach 1990-1999, udostępnionych przez Property Claim Services (PCS) [Burnecki, Misiorek, Weron 2005]. Do zmiennej N opisującej liczbę szkód dobrano rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 34{,}2$, otrzymując w ten sposób rozkład S, nazywany złożonym rozkładem Poissona. Przypomnijmy, że dla rozkładu Poissona $EN = VarN = E(N - EN)^3 = \lambda$, co powoduje, że wzory na momenty całkowitej wypłaty ulegają znacznemu uproszczeniu [Otto 2002]. Do danych dotyczących wysokości szkód (po uwzględnieniu inflacji) dobrano mieszankę dwóch rozkładów wykładniczych o gęstości [Burnecki, Misiorek, Weron 2005]:

$$f(x;\beta_1,\beta_2,d) = d\beta_1 \exp(-\beta_1 x) + (1-d)\beta_2 \exp(-\beta_2 x), \quad \beta_1,\beta_2 > 0,\ 0 \le d \le 1, \tag{18}$$

z parametrami $\beta_1 = 3{,}59 \cdot 10^{-10}$, $\beta_2 = 7{,}5088 \cdot 10^{-9}$, $d = 0{,}0584$. Przy tak ustalonych parametrach modelu można pokazać, że składka netto wynosi:

$$P = ES = \lambda EX = \lambda\left(\frac{d}{\beta_1} + \frac{1-d}{\beta_2}\right) = 9{,}8521 \text{ mld USD}. \tag{19}$$

Ponieważ wariancja całkowitej wypłaty wynosi:

$$VarS = \lambda E(X^2) = 2\lambda\left(\frac{d}{\beta_1^2} + \frac{1-d}{\beta_2^2}\right) = 3{,}2136.10^{19}, \tag{20}$$

więc $P_V(a) = 9{,}8521 \cdot 10^9 + a \cdot 3{,}2136 \cdot 10^9$, $P_{SD}(b) = 9{,}8521 \cdot 10^9 + b \cdot 5{,}6689 \cdot 10^9$.

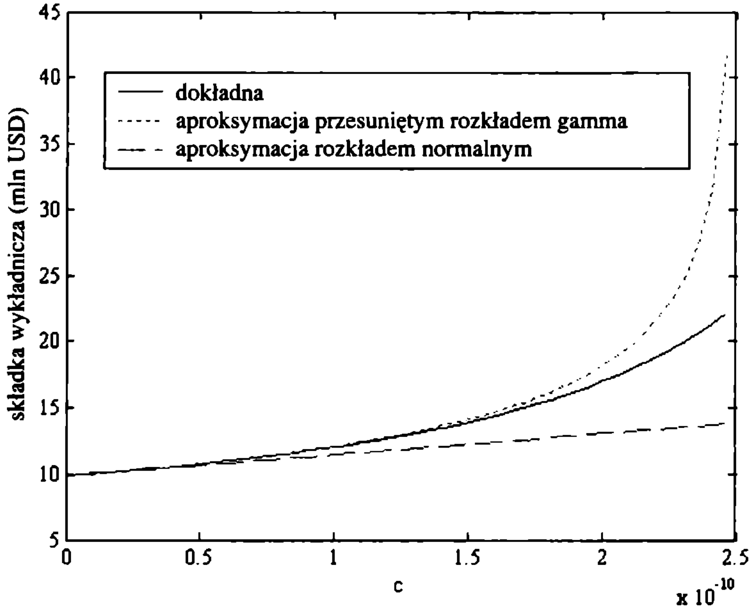
Po skorzystaniu z (18) i z $M_N(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$ otrzymujemy składkę wykładniczą:

$$P_E(c) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{d\beta_1}{\beta_1 - c} + \frac{(1-d)\beta_2}{\beta_2 - c} - 1\right), \quad 0 < c < \min(\beta_1,\beta_2). \tag{21}$$

Policzmy teraz współczynnik skośności:

$$\gamma = \frac{E(S-ES)^3}{(VarS)^{3/2}} = \frac{\lambda E(X)^3}{\left[\lambda E(X^2)\right]^{3/2}} = \frac{6\lambda}{\left[\lambda E(X^2)\right]^{3/2}}\left(\frac{d}{\beta_1^3} + \frac{1-d}{\beta_2^3}\right) = 1{,}4242. \tag{22}$$

Otrzymana wartość współczynnika skośności jest zbyt duża, aby przybliżać rozkład całkowitej wypłaty rozkładem normalnym. Co więcej, jest ona na tyle duża, że, według niektórych źródeł, jakość przybliżenia przesuniętym rozkładem gamma też jest wątpliwa [Otto 2002]. Zobaczmy, jak aproksymacja wpływa na składkę wykładniczą w zależności od parametru c.



Rys. 1. Porównanie składki wykładniczej rozważanego modelu ryzyka kolektywnego ze składką otrzymaną dla aproksymacji rozkładem normalnym i przesuniętym rozkładem gamma w zależności od parametru *c*
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 1 przedstawiono składkę wykładniczą daną dokładnym wzorem (21) oraz składki wykładnicze otrzymane dla aproksymacji rozkładu całkowitej wypłaty rozkładem normalnym o średniej $9,8521 \cdot 10^9$ i wariancji $3,2136 \cdot 10^{19}$ oraz dla aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma z parametrami $\alpha = 1,9720$, $\beta = 2,4772 \cdot 10^{-10}$, $x_0 = 1,8913 \cdot 10^9$. Można zauważyć, że składka otrzymana dla aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma lepiej przybliża składkę wykładniczą niż składka wynikająca z aproksymacji rozkładem normalnym, co potwierdza słuszność wyboru rodzaju aproksymacji. Ponadto warto zwrócić uwagę na to, że jakość przybliżenia jest tym lepsza, im mniejsza jest wartość parametru *c*.

Literatura

Bowers N.L. jr., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A. Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, 2nd edition, The Society of Actuaries, Schaumburg 1997.

Burnecki K., Misiorek A., Weron R., *Loss Distributions*, [w:] P. CČižek, W. Härdle, R. Weron (red.), *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer, Berlin 2005, s. 297-326.

Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.
Iwanik J., Nowicka-Zagrajek J., *Premiums in the Individual and Collective Risk Models*, [w:] P. Čižek, W. Härdle, R. Weron (red.), *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer, Berlin 2005, s. 415-435.
Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E., *Loss Models: From Data to Decisions*, Wiley, New York 1998.
Ostasiewicz W. (red), *Modele aktuarialne*, AE, Wrocław 2000.
Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe. Cz. I. Teoria ryzyka*, WNT, Warszawa 2002.
Panjer H.H., Willmot G.E., *Insurance Risk Models*, Society of Actuaries, Schaumburg 1992.
Ronka-Chmielowiec W. (red), *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach*, AE, Wrocław 2000.
Straub E., *Non-life Insurance Mathematics*, Springer, Berlin 1988.
Young V.R., *Premium Calculation Principles*, [w:] J.L. Teugels, B. Sundt (red.), *Encyclopedia of Actuarial Science*, Wiley, Chichester 2004.

SELECTED PREMIUMS IN THE COLLECTIVE RISK MODEL

Summary

In this paper we present the most important premium calculation principles for the collective risk model, namely equivalence, expected value, variance, standard deviation and exponential principles. Moreover, we study premiums for normal and translated gamma approximations. We illustrate theoretical results on a real-world natural catastrophe loss data.