

Wojciech Puła

Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów



$p_F = ?$



Oficina Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej



Wojciech Puła

**Zastosowania teorii
niezawodności konstrukcji
do oceny bezpieczeństwa
fundamentów**



**Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2004**

MS 115398

Recenzenci

Włodzimierz BRZĄKAŁA
Maciej GRZYCZMAŃSKI

Opracowanie redakcyjne i korekta

Maria IZBICKA

Projekt okładki

Editus, Sławomir PEŃCZEK

Zdjęcia na okładce

Anna PUŁA

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100000026



318289L/5

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-812-0

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 596/2004.

2004/1023 H

Spis treści

Objaśnienia niektórych symboli używanych w tekście	7
1. Wprowadzenie	11
1.1. Uwagi wstępne	11
1.2. Umiejscowienie pracy na tle rozwoju zbliżonych i pokrewnych badań	14
1.3. Cel, podstawowe założenia oraz zakres pracy	18
2. Miary niezawodności i metody ich obliczania	25
2.1. Wstępne uwagi i założenia	25
2.2. Momentowe miary niezawodności	27
2.3. Prawdopodobieństwo awarii	31
2.4. Metody FORM i SORM	32
2.5. Niezawodność systemu	38
2.6. Metody symulacyjne	43
2.6.1. Klasyczna metoda Monte Carlo	43
2.6.2. Metoda symulacji ważonej	45
2.6.3. Metoda warunkowej wartości oczekiwanej	47
2.6.4. Metoda adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej (<i>the adaptive conditional expectation method</i>)	47
2.6.5. Symulacja kierunkowa	49
2.7. Metody dla niejawnych funkcji stanu granicznego	50
2.7.1. Metoda perturbacyjna	50
2.7.2. Rozwinięcia Neumanna	53
2.7.3. Metoda FERM	55
2.7.4. Metoda powierzchni odpowiedzi (<i>the response surface method</i>)	57
2.7.5. Aproksymacja funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi wielomianami ortogonalnymi	59
2.7.6. Uwagi o zastosowaniu metod symulacyjnych	67
3. Probabilistyczne sposoby opisu parametrów podłoża gruntowego	68
3.1. Parametry gruntu jako zmienne losowe	70
3.1.1. Rozkłady prawdopodobieństwa i współczynniki zmienności najczęściej stosowane w opisie parametrów podłoża	70
3.1.2. Korelacja wzajemna pomiędzy parametrami podłoża	77
3.1.3. Uwagi do opisu parametrów podłoża za pomocą zmiennych losowych	81
3.2. Parametry podłoża gruntowego jako pola losowe	81
3.3. Uśrednienia lokalne (uśrednienia przestrzenne)	87
3.3.1. Koncepcja lokalnych uśrednień i podstawowe zależności	87
3.3.2. Wyznaczanie skali fluktuacji i jej wartości	92
3.4. Uwagi	96

4. Niektóre aspekty obliczeń miar niezawodności w przypadku stanów granicznych nośności fundamentów bezpośrednich	98
4.1. Wprowadzenie	98
4.1.1. Informacje na temat wcześniejszych prac z tego zakresu	98
4.1.2. Cel i zakres rozdziału	101
4.2. Prawdopodobieństwo wyparcia gruntu spod podstawy fundamentu	102
4.2.1. Przykładowe obliczenia wskaźników niezawodności dla łąw fundamentowych zaprojektowanych zgodnie z zasadami normowymi	102
4.2.1.1. Ława na podłożu niespoistym	104
4.2.1.2. Ława na podłożu spoistym	111
4.2.2. Przykłady obliczeń z zastosowaniem lokalnych uśrednień	115
4.3. Lokalne uśrednienia dla mechanizmu Prandtla	121
4.3.1. Lokalne uśrednienia wzdłuż linii poślizgu oraz ich kowariancje	122
4.3.2. Uśrednienie jednowymiarowe	123
4.3.3. Uśrednienie dwuwymiarowe	129
4.3.4. Funkcja stanu granicznego	136
4.3.5. Analizy numeryczne	138
4.3.5.1. Ława na podłożu niespoistym	139
4.3.5.2. Ława na podłożu spoistym	149
4.4. Uwagi końcowe	160
5. Zadania związane z przemieszczeniami fundamentów	163
5.1. O modelowaniu probabilistycznym parametrów sprężystych gruntu na potrzeby analizy niezawodności	164
5.1.1. Założenia dotyczące metody rozwiązania	165
5.1.2. Założenia probabilistyczne	166
5.1.3. Założenia przyjęte do analiz numerycznych	171
5.1.4. Wyniki analiz numerycznych	171
5.1.5. Uwagi podsumowujące	181
5.2. Wpływ losowego położenia granicy warstw geotechnicznych na osiadania fundamentu bezpośredniego posadowionego na podłożu sprężystym	183
5.2.1. Sformułowanie zadania i sposób jego rozwiązania	183
5.2.2. Założenia przyjęte do analiz numerycznych	184
5.2.3. Symulacja pola modułów Younga	186
5.2.4. Wyniki obliczeń	188
5.3. Losowe obciążenia. Efekt korelacji sił obciążających fundament	190
5.3.1. Sformułowanie zadania	190
5.3.2. Założenia przyjęte do analiz numerycznych	190
5.3.3. Wyniki obliczeń i komentarze	192
5.4. Adaptacja metody powierzchni odpowiedzi (<i>the response surface method</i>) do oszacowania prawdopodobieństwa przekroczenia osiadania dopuszczalnego przez fundament posadowiony na podłożu sprężystym	194
5.4.1. Funkcje odpowiedzi dla osiadań fundamentu bezpośredniego	195
5.4.1.1. Funkcja odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia	196
5.4.1.2. Aproksymacja drugiego stopnia ze „składnikiem edometrycznym”	197
5.4.1.3. Zastosowanie aproksymatorów wzorowanych na sieciach neuronowych	198
5.4.2. Funkcja osiadania wynikająca z analogu z analogu edometrycznego	199
5.4.3. Założenia do obliczeń numerycznych	201
5.4.4. Rezultaty obliczeń	203

5.4.4.1. Znajdowanie powierzchni odpowiedzi	203
5.4.4.2. Obliczenia wskaźników niezawodności	208
5.4.5. Wnioski z obliczeń	215
5.5. Przykład obliczania prawdopodobieństwa awarii w przypadku osiadań konstrukcji posadowionej na podłożu o cechach fizycznie nieliniowych	217
5.5.1. Rozwiązanie zadania nieliniową metodą elementów skończonych	217
5.5.2. Zastosowanie metody adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej	218
5.5.3. Osiedzenia fundamentu w sąsiedztwie ściany oporowej	220
6. Wpływ losowej nośności pali na momenty zginające w ławach posadowionych na palach	224
6.1. Wprowadzenie	224
6.2. Schemat współpracy	224
6.3. Sformułowanie problemu w ramach teorii niezawodności konstrukcji	228
6.4. Obliczenia dla rozwiązań w postaci zamkniętej (mała liczba pali)	230
6.5. Obliczenia oparte na symulacji cyfrowej	233
6.5.1. Cele obliczeń oraz założenia ogólne	233
6.5.2. Przykład nr 1	234
6.5.3. Przykład nr 2	242
6.5.4. Wnioski i uwagi	246
6.6. Zastosowanie do projektowania fundamentu suwnicy bramowej (konstrukcja istniejąca)	248
7. Nośność boczna pojedynczego pala sztywnego w podłożu o cechach losowych poddanego obciążeniom poprzecznym	256
7.1. Wprowadzenie	256
7.2. Schemat statyczny i równania równowagi	258
7.3. Metoda Brinch Hansena	261
7.4. Sformułowanie zadania i sposób rozwiązania w ośrodku niespoistym	266
7.5. Obliczenia numeryczne	272
7.6. Wnioski	277
8. Unikanie trudności związanych z obliczaniem miar niezawodności na przykładzie analizy losowych osiadań pali fundamentowych	279
8.1. Osiedlenie pojedynczego pala w sprężystym ośrodku dwuwarstwowym. Sformułowanie zadania	279
8.2. Trudności pojawiające się przy stosowaniu powierzchni odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia	280
8.3. Rozwiązanie zadania poprzez zastosowanie aproksymatora sieci neuronowej	284
9. Uwagi końcowe	289
9.1. Ważniejsze rezultaty przedstawione w pracy	290
9.2. Niektóre wnioski sformułowane w pracy lub wynikające z niej	292
9.3. Kierunki dalszych badań	295
Załącznik nr 1. Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności w zależności od osiadania dopuszczalnego i współczynnika korelacji pomiędzy parametrami E i ν	297
Załącznik nr 2. Wyniki obliczeń współczynników B_i powierzchni odpowiedzi dla różnych funkcji osiadania	301
Literatura	302

Objaśnienia niektórych symboli używanych w tekście

W pracy używane są zasadniczo symbole zgodne z sugerowanymi przez polskie normy oraz literaturę geotechniczną i dotyczącą niezawodności. Jednak obszerność tematyki powodowała często koincydencję symboli. Dlatego w niektórych przypadkach zrezygnowano z tradycyjnych oznaczeń. Poniżej podano wykaz najczęściej pojawiających się symboli.

Duże litery łacińskie:

- B** – wektor parametrów modelu regresyjnego
- B – równania powierzchni odpowiedzi
- B – szerokość fundamentu
- \bar{B} – zredukowana szerokość fundamentu
- $\text{Cov}(X, Y)$ – kowariancja zmiennych losowych X i Y
- D – średnica pala
- D_{min} – minimalne zagłębienie fundamentu
- E – moduł Younga
- $E\{X\}$ – wartość oczekiwana zmiennej losowej X (zob. też m_X)
- F – globalny współczynnik bezpieczeństwa
- F_i – obciążenie skupione i
- F_X – dystrybuanta zmiennej losowej X
- H – siła pozioma
- H_u – pozioma siła graniczna
- $I[A]$ – indyktor zbioru A
- I – moment bezwładności
- I_D – stopień zagęszczenia gruntu niespoistego
- I_L – stopień plastyczności gruntu spoistego
- I_p – wskaźnik plastyczności
- K_c – współczynnik parcia gruntu związanego z efektem spójności
- K_0 – współczynnik parcia spoczynkowego
- K_q – współczynnik parcia gruntu pochodzącego od obciążenia
- L – długość, np. fundamentu lub pala, wielkość jednowymiarowego obszaru uśrednienia

\bar{L}	– zredukowana długość fundamentu
$L^2([-1, 1])$	– przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na odcinku $[-1, 1]$
M_{ed}	– edometryczny moduł ściśliwości
M	– moment zginający
M_{\max}	– maksymalny moment zginający
M_u	– moment graniczny
$N_Y(N_B), N_c, N_D$	– współczynniki nośności podłoża
N_{rl}	– liczba realizacji w procesie symulacyjnym
$P\{A\}$	– prawdopodobieństwo zdarzenia A
P_c	– ciśnienie pęcznienia
Pd	– piasek drobny
P_i	– podatność pala i
P_{gr-t}	– nośności graniczna pala t
Po	– pospółka
Pr	– piasek gruby
Ps	– piasek średni
$P\pi$	– piasek pyłały
$R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	– funkcja kowariancji pola losowego
$P_n(x)$	– n -ty wielomian Legendre'a
\mathbf{R}^n	– n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa nad ciałem liczb rzeczywistych
$S(\kappa)$	– gęstość spektralna
$T_n(x)$	– n -ty wielomian Czebyszewa
$U(\mathbf{X}), U$	– funkcja osiadania fundamentu
$ V $	– miara obszaru uśrednienia pola losowego (długość, pole, objętość)
$\text{Var}\{X\}$	– wariancja zmiennej losowej X
$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$	– wektor bazowych zmiennych losowych
\dot{Z}	– żwir

Małe litery łacińskie:

c	– spójność gruntu
c_c	– wskaźnik skonsolidowania
c_v	– współczynnik konsolidacji
$\text{cov}\{X\}$	– współczynnik zmienności zmiennej losowej X
err	– zmienna losowa opisująca błąd estymacji funkcji w modelu regresyjnym
e	– wskaźnik porowatości
$f_{\mathbf{X}}$	– gęstość prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X}
f_i	– zawartość frakcji ilastej
$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lub $g(\mathbf{x})$	– funkcja stanu granicznego

- $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ lub $g(x) = 0$ – powierzchnia stanu granicznego
 h_i – miąższość warstwy podłoża o numerze i
 i_B, i_D, i_c – współczynniki wpływu nachylenia wypadkowej obciążenia
 m – współczynnik niepewności modelu
 m_X – wartość oczekiwana zmiennej losowej X
 \hat{m} – mediana rozkładu lognormalnego
 p – obciążenie rozłożone
 p_F – prawdopodobieństwo awarii
 p_u – jednostkowe wypadkowe parcie gruntu wzdłuż pobocznic palą
 r_i – reakcja w palu i
 supp – nośnik rozkładu prawdopodobieństwa
 u_{\max} – wartość progowa osiadania (osiadanie dopuszczalne)
 v_F – prędkość przemieszczania się mas gruntu w kierunku pionowym
 w – wilgotność naturalna
 w_L – granica płynności
 w_p – granica plastyczności
 $x^{(n)}$ – wartość charakterystyczna parametru geotechnicznego
 $x^{(r)}$ – wartość obliczeniowa parametru geotechnicznego
 y_0 – pionowe przemieszczenie końca belki
 \mathbf{y}^* – punkt obliczeniowy
 z_r – rzędna środka obrotu

Litery greckie:

- α_X – współczynnik wrażliwości zmiennej losowej X
 β – wskaźnik niezawodności
 β_C – wskaźnik niezawodności Cornella
 β_{FO} – wskaźnik niezawodności pierwszego rzędu
 γ – ciężar objętościowy gruntu
 γ_b – ciężar objętościowy betonu
 γ_m – współczynnik materiałowy
 γ_p – ciężar posadzki
 γ_{sr} – ciężar gruntu przy pełnym nasyceniu porów wodą
 $\chi(V)$ – funkcja redukcji wariancji
 δ – skala fluktuacji
 δ_h – skala fluktuacji w kierunku poziomym
 δ_v – skala fluktuacji w kierunku pionowym
 $\delta_{k,i}$ – względne przemieszczenie punktu styczności palą k z belką spowodowane jednostkową reakcją palą i

- $\Delta_{k,F}$ – pionowe przemieszczenie punktu styczności pala k z belką spowodowane wszystkimi pionowymi obciążeniami rzeczywistymi działającymi na belkę.
 φ – kąt tarcia wewnętrznego gruntu
 φ_0 – kąt obrotu końca belki
 ϕ_n – gęstość prawdopodobieństwa n -wymiarowego normalnego wektora losowego
 Φ – dystrybuanta rozkładu normalnego
 Φ_0 – dystrybuanta standardowego jednowymiarowego rozkładu normalnego
 Φ_0^{-1} – funkcja odwrotna do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego
 Φ_k – k -wymiarowa dystrybuanta rozkładu normalnego
 ν – współczynnik Poissona
 ρ – współczynnik korelacji liniowej
 $\rho\{X, Y\}$ – współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi X i Y
 ρ_d – gęstość objętościowa szkieletu gruntowego
 $\rho(z_1, z_2)$ – funkcja korelacji pola losowego
 $\sigma\{X\}$, σ_X – odchylenie standardowe zmiennej losowej X
 σ_z – naprężenia pionowe
 ω – parametr gaussowskiej funkcji kowariancji
 Inne litery mogą mieć kilka znaczeń, są jednak za każdym razem objaśniane.

W tekście książki pojawiają się słowa angielskie, które zaznaczono kursywą i zwykle podawano w nawiasach. Użycie tych słów związane jest ze specyficzną terminologią, nie zawsze mającą jednoznaczne odpowiedniki w języku polskim. Występują one tam, gdzie autor nie był do końca przekonany, że polskie ekwiwalenty mogą być rozumiane w identyczny sposób i funkcjonować w ramach rozpatrywanej teorii w ten sam sposób jak angielskie.

1. Wprowadzenie

1.1. Uwagi wstępne

„Ty wierzysz w Boga, który gra w kości, a ja w prawa i zupełny porządek”. To sławne stwierdzenie Alberta Einsteina, zaczerpnięte z listu do Maxa Borna, dotyczyło bezpośrednio mechaniki kwantowej, ale ilustrowało także filozofię wielkiego uczonego, który akceptował jedynie deterministyczny charakter praw natury. A jednak, pomimo tej opinii, narzędzia rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej rozprószyły się i głęboko zakorzeniły w fizyce. Metody probabilistyczne są dziś także obecne w mechanice konstrukcji i jej inżynierskich zastosowaniach. Jednym z przejawów tego zjawiska jest powstanie dziedziny, która nazywa się teorią niezawodności konstrukcji (*structural reliability theory*), a która na bazie metod rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej zajmuje się metodami szacowania bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji. W ramach tej teorii wypracowano uniwersalną miarę bezpieczeństwa (niebezpieczeństwa), którą jest wskaźnik niezawodności i odpowiadające mu w sposób wzajemnie jednoznaczny prawdopodobieństwo awarii. Uniwersalność tej miary polega na możliwości stosowania jej w różnorodnych sytuacjach, tj. zarówno do bardzo różnych typów konstrukcji, jak i bardzo różnych warunków środowiska. Umożliwia to porównywanie stopnia bezpieczeństwa różnych współpracujących ze sobą elementów konstrukcji, jak też różnych wariantów danej konstrukcji, a także porównywanie różnych konstrukcji pomiędzy sobą. W dalszej kolejności obliczenia niezawodnościowe służą zarówno projektowaniu przepisów normatywnych (kalibrowanie cząstkowych współczynników bezpieczeństwa na potrzeby obliczeń inżynierskich według stanów granicznych), jak i działalności eksperckiej (ocena bezpieczeństwa istniejących konstrukcji), pozwalającej na podejmowanie optymalnych decyzji w fazie projektowania oraz eksploatacji konkretnych obiektów budowlano-inżynierskich. Dziedzina ta stanowi bardzo specyficzny (ze względu na wypracowane własne metody) dział „ogólnej” teorii niezawodności funkcjonującej w ramach matematyki stosowanej oraz wielu innych obszarach działalności człowieka, np. w elektronice, teorii maszyn, aeronautyce, ekonomii, inżynierii genetycznej itp. Powstało międzynarodowe stowarzyszenie CERRA (*International Association for Civil Engineering Reliability and Risk Analysis*),

stawiające sobie za cel promocję metod teorii niezawodności konstrukcji w środowisku związanym z budownictwem oraz organizowanie międzynarodowych konferencji. Osiągnięcia teorii niezawodności konstrukcji wykorzystano w międzynarodowych normach ENV 1991-1(1993) (polskie tłumaczenie Eurokod 1, 1994), a przede wszystkim ISO 2394 (1998) (polskie tłumaczenie PN-ISO 2394, 2000).

Z drugiej strony, metody teorii niezawodności konstrukcji nie znalazły dotychczas adekwatnego zastosowania w geotechnice (Duncan 2000), co powoduje, że w zagadnieniach fundamentowania są one stosowane dużo rzadziej aniżeli w innych dziedzinach budownictwa, np. konstrukcjach betonowych czy metalowych. Jest to tym dziwniejsze, że to właśnie w geotechnice bardzo wcześnie, być może wcześniej niż w innych dziedzinach budownictwa, podjęto próby zastosowań metod statystycznych i probabilistycznych do oceny bezpieczeństwa. Prace takich autorów, jak Lumb (1966) czy Biernatowski (1966a, 1966b) są uważane za pionierskie w tej dziedzinie. Innym przejawem zainteresowania tematyką było zorganizowanie cyklicznych (organizowanych co cztery lata) konferencji ICASP – *International Conference Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, zainicjowanych przez środowisko geotechniczne. Organizatorem pierwszej z nich był Peter Lumb w 1971 roku. Jednak te początkowe próby szybko napotkały barierę w postaci braku odpowiednich metod obliczeniowych. Później, zapoczątkowany pracami Hasofera i Linda (1974), Rackwitza i Fiesslera (1978), Ditlevsena (1981) oraz Hohenbichlera i Rackwitza (1981), nastąpił intensywny rozwój metod teorii niezawodności konstrukcji, także w zakresie rozwiązań numerycznych. Metody te są systematycznie rozwijane i udoskonalane do dzisiaj. Niestety, stosowanie ich do zagadnień geotechniki ciągle jeszcze napotyka na trudności i nie osiągnęło zadowalającego poziomu. Konferencje ICASP odbywają się nadal, lecz ich część geotechniczna znalazła się na marginesie obrad, podobnie jak na innych dużych międzynarodowych konferencjach dotyczących niezawodności, takich jak np. ICOSSAR (*International Conference on Structural Safety and Reliability*), czy ESREL (*European Safety and Reliability Conference*). Za ważną próbę ożywienia zainteresowania zastosowaniami metod probabilistycznych w geotechnice należy uznać zorganizowanie międzynarodowej konferencji pt. „Metody probabilistyczne w inżynierii geotechnicznej” (*Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*) w Canberze w 1993 r.

Zdaniem autora, podstawowe przyczyny wspomnianej marginalizacji tematu są następujące:

- bardzo duża niejednorodność ośrodka gruntowego (rozzrzut parametrów, niejednorodność przestrzenna, brak powtarzalności sytuacji);
- brak odpowiedniej bazy danych statystycznych;
- stosunkowo słaby rozwój probabilistycznego modelowania cech ośrodka gruntowego;
- konieczność adaptacji metod teorii niezawodności konstrukcji na potrzeby geotechniki, gdyż metody te w wielu sytuacjach nie nadają się do zastosowania bezpośredniego;

- niewielka liczba opublikowanych analiz opartych na teorii niezawodności konstrukcji, dotyczących rzeczywistych obiektów pracujących w skomplikowanych warunkach geotechnicznych;

- konserwatywna postawa większości inżynierskiego środowiska geotechnicznego, które sceptycznie zapatruje się na możliwość zastosowania uniwersalnych miar bezpieczeństwa, zwłaszcza opartych na podejściu probabilistycznym, do bardzo różnorodnych i skomplikowanych sytuacji geotechnicznych.

Wspomniany konserwatyzm jest szczególnie widoczny tam, gdzie wypracowano na podstawie wieloletnich doświadczeń skuteczne deterministyczne metody obliczeń. Często jego źródłem jest także to, że teoria niezawodności konstrukcji posługuje się koncepcjami i metodami mało znanymi inżynierom geotechnikom.

Z drugiej strony, inżynierowie geotechnicy stają przed nowymi problemami, np. ochrony środowiska, zastosowania nowych materiałów, posadowienia wielkich konstrukcji na gruntach słabych, oddziaływań sejsmicznych i parasejsmicznych. Pojawienie się tych „nietradycyjnych” okoliczności sprzyja zastosowaniu metod probabilistycznych. Oszacowanie ryzyka bywa też często wymogiem przy zawieraniu kontraktów czy ubezpieczeniach budowli. Istnieje zatem potrzeba uzupełnienia luki teoretycznej, co polega na wypracowaniu metod oceny bezpieczeństwa dla wielu zadań z zakresu geotechniki, a zwłaszcza fundamentowania. Uzupełnianie tej luki odbywa się na przykład poprzez adaptację istniejących metod teorii niezawodności konstrukcji do obliczeń dotyczących fundamentów.

Istnieje ponadto bardzo ważny aspekt praktyczny zagadnienia. Otóż miary bezpieczeństwa w postaci wskaźników niezawodności są już stosowane w innych dziedzinach budownictwa, takich jak konstrukcje metalowe, betonowe czy mosty. Znalazło to odzwierciedlenie w odpowiednich przepisach normalizacyjnych, np. ISO 2394 (1998), Eurokodach, np. ENV 1991-1(1993). Należałoby więc zadbać o jednolitość oceny bezpieczeństwa dla całości konstrukcji, także jej elementów współpracujących z podłożem gruntowym. Taką możliwość obiektywnej oceny dają miary wypracowane w ramach teorii niezawodności konstrukcji, oparte na metodach probabilistycznych. Z drugiej strony wiadomo, że w obecnym projekcie *Eurocode 7* (normatyw dotyczący geotechniki, ENV 1997-1 (1997)) współczesne metody probabilistycznego badania niezawodności i bezpieczeństwa nie znalazły należytego zastosowania (por. Orr i Farrell 1999). Spotkało się to z licznymi głosami krytyki w środowiskach zajmujących się normowaniem.

Oprócz tego okazało się, że bezpośrednio zastosowanie gotowych receptur z zakresu teorii niezawodności konstrukcji prowadzi w niektórych zagadnieniach geotechniki do zbyt małych wartości wskaźnika (zbyt dużych wartości prawdopodobieństwa awarii), podczas gdy konstrukcje współpracujące z gruntem zostały prawidłowo zaprojektowane i obliczane zgodnie z powszechnie akceptowanymi modelami i metodami. Na ten fakt zwrócono uwagę w jednej z wcześniejszych prac autora niniejszej monografii (Puła 1993). Wynika z tego konieczność dokonania rewizji metod teorii niezawodności konstrukcji i dostosowania ich pod kątem zastosowań w geotechnice.

O istniejącym nadal zainteresowaniu międzynarodowych gremiów badaczy zastosowaniem metod teorii niezawodności w geotechnice świadczy chociażby opublikowanie specjalnego wydania czasopisma „Computers and Geotechnics” pod tytułem *Niezawodność w geotechnice (Reliability in Geotechnics, „Computers and Geotechnics”)*. Także w Polsce inicjowana jest dyskusja nad możliwością wprowadzenia teorii niezawodności do projektowania geotechnicznego (Cichy 2001).

1.2. Umiejscowienie pracy na tle rozwoju zblizonych i pokrewnych badań

Niniejsze studium można by umiejscowić w dziedzinie, którą określa się jako zastosowania metod probabilistycznych i statystycznych w zagadnieniach geotechniki. Począwszy od trzeciego, wszystkie rozdziały prezentują zagadnienia, w których stosuje się aparat teorii funkcji losowych, rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki do konkretnych zagadnień geotechniki. Z drugiej strony, omawiane problemy wiążą się bezpośrednio z bezpieczeństwem fundamentów (jako szczególnego przypadku teorii bezpieczeństwa konstrukcji), co więcej – z oceną tego bezpieczeństwa za pomocą metod teorii niezawodności konstrukcji. Z tego punktu widzenia praca znajduje się także na pograniczu teorii niezawodności konstrukcji (będącej częścią ogólnej teorii niezawodności), zwłaszcza że niektóre jej elementy można uznać jako nowe także w ramach teorii niezawodności konstrukcji. O wybranych metodach teorii niezawodności konstrukcji będzie mowa w następnym rozdziale.

Teoria bezpieczeństwa konstrukcji oparta na zasadach rachunku prawdopodobieństwa liczy sobie już prawie osiemdziesiąt lat. Za pionierskie prace w tej dziedzinie uważa się prace Maiera (1926), Chocjałowa (1929, 1932), Strieleckiego (1935), Prota (1936) i Wierzbickiego (1936, 1937). W latach czterdziestych i na początku lat pięćdziesiątych pojawiły się prace Rżanicyna (1947, 1949, 1952a, 1952b) i Leviego (1948, 1949, 1953), w których oprócz podejścia probabilistycznego do zagadnień bezpieczeństwa konstrukcji podano propozycje konkretnych procedur obliczeniowych, służących efektywnym obliczeniom współczynników bezpieczeństwa w sytuacjach skomplikowanych zależności matematycznych pomiędzy poszczególnymi parametrami konstrukcji. Istotnym krokiem w rozwoju tej gałęzi wiedzy były także prace Freudentala (1945, 1954). Prace te zapoczątkowały intensywny rozwój tej dziedziny w Stanach Zjednoczonych. W literaturze polskiej za jedno z wcześniejszych, bardzo znaczących monograficznych opracowań należy uznać rozprawę Eimera (1963).

Do najważniejszych pozycji książkowych z wcześniejszego okresu rozwoju teorii należą niewątpliwie dwie monografie Bołotina (1965 – polskie tłumaczenie 1968, 1971) oraz monografia Murzewskiego (1970). Współcześnie w literaturze polskiej

pojawiają się zarówno opracowania książkowe mające charakter monografii naukowych (Murzewki 1989, Biegus 1999, Śniady 2000), jak i podręczników akademickich (Murzewski i Sowa 1983, Biegus 1996, Murzewski 2001, Woliński 2001).

W zakresie zastosowań metod probabilistycznych w geotechnice opracowania zaczęły się ukazywać w połowie lat sześćdziesiątych. Za pierwsze próby można uznać publikacje Leviego (1958), Lazarda (1961) oraz Langejana (1965). O potrzebie „szacowania ryzyka” mówił Arthur Casagrande w wykładzie wygłoszonym na kongresie Amerykańskiego Stowarzyszenia Inżynierów Budownictwa (tzw. „Wykład Terzaghiego”, por. Casagrande 1965). Jednym z pierwszych badaczy tej dziedziny był wrocławski geotechnik profesor Kazimierz Biernatowski, który zaproponował adaptację metod Rżanicyna (1947) i Leviego (1948) do oceny bezpieczeństwa fundamentów bezpośrednich (1966a, 1966b, 1968a, 1969). Jest on też jednym z pierwszych autorów, którzy podjęli tematykę probabilistycznej oceny stateczności zboczy (1968b). Wieloletnie badania tego autora znalazły podsumowanie w monografii wydanej w 1982 roku (por. Biernatowski 1982).

Jedno z pierwszych obszernych studiów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa fundamentów, zarówno w zakresie nośności granicznej jak i osiadań, opublikowali Wu i Kraft (1967). Podstawą opisu probabilistycznego parametrów podłoża w tej pracy była estymacja rozkładem normalnym wyników badań uzyskanych z sondowania gruntu.

Pionierskie prace w zakresie probabilistycznego opisu fizycznych parametrów podłoża należą do Lumba (1966, 1971) (zaproponowano w nich charakteryzacje tychże parametrów za pomocą zmiennych losowych o rozkładach normalnych (Lumb 1966) lub rozkładach beta (Lumb 1971)), a także Schultzego (1971, 1975). Większe opracowania na temat zastosowań statystyki i prawdopodobieństwa w mechanice gruntów pojawiły się w latach siedemdziesiątych (Lumb 1974, Harr 1977). Bardzo istotnym postępowaniem okazało się efektywne zastosowanie teorii pól losowych do opisu zmienności parametrów podłoża. Stało się to możliwe dzięki pracom Vanmarcke’a (1977a, 1977b, 1984), w których zaproponował on przestrzenne uśrednienia dla poszczególnych parametrów oraz posługiwanie się w obliczeniach dodatkowym parametrem probabilistycznym – skalą fluktuacji, znaną też jako promień korelacji. Zagadnienia te będą szczegółowo omawiane w rozdziale 3. Nowe osiągnięcia dotyczące charakteryzacji własności podłoża za pomocą pól losowych przedstawił Rackwitz (2000).

Kolejne lata przyniosły próby wprowadzenia elementów teorii niezawodności do projektowania geotechnicznego. Początkowo metodami probabilistycznymi badano ryzyko powszechnie używanych wówczas globalnych współczynników bezpieczeństwa (Meyerhof 1970, Singh 1971). Za jedną z pierwszych kompleksowych rozwiązań w dziedzinie probabilistycznego normowania geotechnicznego należy uznać propozycję Matsuo i współautorów (1980). Później prace zorientowane na wdrożenie podejścia niezawodnościowego do geotechnicznych przepisów normatywnych podjęto

w Australii, co opisano w pracach Lo i współautorów (Lo et al. 1992) oraz Li i współautorów (Li et al. 1993). Na szczególną uwagę zasługuje praca Beckera (1996), stanowiąca propozycję dla normy kanadyjskiej, w której autor konsekwentnie stosuje zasady teorii niezawodności konstrukcji do kalibracji cząstkowych współczynników bezpieczeństwa. W projekcie *Eurocode 7* (ENV 1997-1 (1997)) metody teorii niezawodności nie znalazły bezpośredniego zastosowania (brak kalibracji częściowych współczynników bezpieczeństwa na zadany wskaźnik niezawodności), jednak wiele proponowanych tam elementów wynika z zastosowania zasad statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa, co szczegółowo wyjaśnił w swoich publikacjach Orr (Orr i Faarell 1999, Orr 2000). Ponadto, po dokonaniu odpowiednich przeliczeń wartości charakterystycznych parametrów losowych (Cardoso i Fernandes 2001), istnieje możliwość zaprojektowania fundamentu na z góry określone (docelowe – *target probability*) prawdopodobieństwo awarii.

Bardzo znaczny wkład w teorię niezawodności konstrukcji w ogóle miały obliczenia i badania morskich platform wiertniczych oraz ich fundamentów (Wu i inni 1989, Ronald 1990, Ronald i Bjerager 1992). Badania Ronalda i Bjeragera prowadzone były w firmie Der Norsk Vertas w związku z eksploatacją ropy na Morzu Północnym. Podobne badania niezawodnościowe prowadzono także w Chinach (Zheng et al. 1993).

Istotne z punktu widzenia projektowania fundamentów są także prace Tanga (1987) oraz Halima i Tanga (1993) dotyczące probabilistycznego opisu anomalii geologicznych w postaci soczewek gruntów słabych.

Niewątpliwie najwięcej prac związanych z zastosowaniami niezawodności w geotechnice dotyczy stateczności zboczy. Do najczęściej cytowanych (ze względu na kolejne etapy rozwoju) należą prace Alonso (1976), Yücemena i Tanga (1975), Li i Lumba (1987), Chowdhury'ego i innych (1987), Ishii'ego i Suzuki'ego (1987), Li'ego (1991) oraz Drumma i współautorów (1992). Obszerny przegląd prac i stosowanych metod przedstawili Mostyn i Li (1993). Z nowszych warto zasygnalizować prace Christiana, Ladda i Beachera (1994), Chonga, Phoona i Tana (2000) oraz prace Auvineta i Gonzaleza (2000). W Polsce wartościowe rezultaty w zakresie probabilistycznego badania stateczności zboczy uzyskali Knabe i Przewłocki (1990).

Prace związane z dynamiką gruntów zawierają się w ramach dynamiki stochastycznej, która to dziedzina doczekała się już wielu obszernych opracowań monograficznych (np. Sobczyk 1973, Soong i Grigoriu 1993, Lin i Cai 1995, Solnes 1997, Śniady 2000). Stosunkowo najwięcej prac związanych z dynamiką dotyczy probabilistycznego podejścia do upłynnienia gruntu. Należy tu wymienić prace Haldara i Tanga (1979), Faridisa i Veneziano (1981), Fentona i Venmarcke'a (1991), a z nowszych – publikacje Juanga i współautorów (1999, 2000). Ważne zastosowanie stanowi opis efektów trzęsień ziemi (Yücemen 1982, Chavez-Garcia i Bard 1989). Warto zwrócić też uwagę na prace dotyczące losowych drgań fundamentów (Mironowicz i Śniady 1990, Mironowicz i Zombron 2000, 2001, 2002).

Jak już stwierdzono w podrozdziale 1.1, stosunkowo niewielka liczba prac dotyczy probabilistycznej analizy geotechnicznych aspektów obiektów rzeczywistych. Tym bardziej na uwagę zasługują prace takich autorów jak Duncan i Houston (1983), którzy opracowali probabilistyczne studium awarii grobli w Kalifornii. Inne znamienne studium zawdzięczamy Christianowi i współautorom (1994), którzy przeprowadzili probabilistyczną analizę stateczności systemu tam nad zatoką Jamesa. Tamy te, o łącznej długości ok. 50 km, usytuowane na miękkich i wrażliwych glinach, stanowiły jeden z elementów przedsięwzięcia związanego z budową wielkiej hydroelektrowni. Inną bardzo interesującą analizę probabilistyczną stateczności zapory usytuowanej na centralnej Florydzie przedstawili Vick i Bromwell (1989). Do ważnych należy zaliczyć także pracę Sørensen i Burchartha (2000), którzy przeprowadzili analizę niezawodności (z geotechnicznego punktu widzenia) falochronów Niigata West w Japonii.

Warto też odnotować, że współcześnie pojawiają się prace, które, aby zachęcić inżynierów-geotechników do stosowania analiz niezawodnościowych, proponują różnego typu uproszczone, aczkolwiek niejednokrotnie stosunkowo skuteczne metody. Do takich prac należy opublikowana niedawno praca znanego geotechnika amerykańskiego Michaela Duncana (2000).

Pomimo bardzo dużej liczby publikacji dotyczących zastosowań metod statystycznych i probabilistycznych w geotechnice, ukazało się jedynie kilka opracowań monograficznych w formie książkowej. Oprócz wspomnianych już prac Harra (1977) i Biernatowskiego (1982) należy jeszcze odnotować monografię Rethatiego (1989), a także, dotyczącą modelowania zjawisk w ośrodku gruntowym procesami dyfuzyjnymi, monografię Brząkały (1990) i Przewłockiego (1998), poświęconą zagadnieniom losowej teorii sprężystości w odniesieniu do zagadnień mechaniki gruntów. Po części do tej kategorii opracowań można też zaliczyć publikację Vanmarcke'a (1984), która pomimo matematycznego charakteru opiera się na przykładach i zastosowaniach zaczerpniętych z mechaniki gruntów. Ostatnio ukazała się książka Baechera i Christiana (2003), która jest przede wszystkim podręcznikiem akademickim, ale zawiera wiele interesujących przykładów z geotechniki.

Coraz częściej pojawiają się prace, których autorzy proponują ocenę bezpieczeństwa konstrukcji współpracujących z gruntem i stosują metody probabilistyczne wraz z teorią zbiorów rozmytych. Na ten temat ukazała się monografia Tran-Chi (2000). Zastosowania zbiorów rozmytych nie są jednak dyskutowane w ramach tego opracowania (por. podrozdział 1.3).

Jeszcze inny sposób oceny bezpieczeństwa w geotechnice, polegający na zastosowaniu odpowiedniej przestrzeni metrycznej, zaproponował Hauryłkiewicz (1991).

Niniejszy podrozdział nie pretenduje do przedstawienia stanu rozwoju dyscypliny, którą stanowią zastosowania metod probabilistycznych w geotechnice. Literatura na ten temat jest bowiem już bardzo obszerna. W kolejnych rozdziałach podane będą jeszcze bardziej szczegółowe informacje bibliograficzne związane z problemami przedstawionymi w ramach tych rozdziałów.

1.3. Cel, podstawowe założenia oraz zakres pracy

Celem prezentowanej monografii jest adaptowanie niektórych metod wywodzących się z teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa pewnych rodzajów fundamentów w określonych warunkach geotechnicznych. Jest to realizowane poprzez rozwiązywanie wybranych zadań, które w taki czy inny sposób odbiegają od standardowych problemów teorii niezawodności konstrukcji oraz podanie sposobu obliczenia miar niezawodności w postaci wskaźnika niezawodności lub prawdopodobieństwa awarii. Ponadto zamiarem autora jest wskazanie konkretnych wniosków wpływających z analizy niezawodności indywidualnych konstrukcji, które mogą być istotne przy projektowaniu fundamentów. Taki bowiem charakter mają zwykle zastosowania teorii niezawodności konstrukcji. Dodatkowym czynnikiem jest też chęć wniesienia pewnych nowych elementów do metod wypracowanych w ramach samej teorii niezawodności konstrukcji.

W książce ograniczono się do zagadnień związanych ze statyką fundamentów, co z kolei sprzyja podejściu opartemu na analizie niezawodności niezależnej od czasu (*time independent reliability*). Przyjęto założenie, że parametry konstrukcji oraz podłoża gruntowego nie zmieniają się w okresie, którego dotyczy przeprowadzana analiza niezawodności. Przedstawione zastosowania dotyczą „klasycznej” teorii niezawodności konstrukcji, tj. posługującej się „kolmogorowskim” sformułowaniem rachunku prawdopodobieństwa, bez zastosowania teorii zbiorów rozmytych.

Ponadto analizy przeprowadzane są z geotechnicznego punktu widzenia. Ponieważ zbyt duża liczba zmiennych losowych utrudnia często rozwiązanie zadania z zakresu niezawodności, zatem parametry konstrukcji niezwiązane bezpośrednio z podłożem gruntowym są, poza pewnymi wyjątkami, traktowane jako nielosowe. Uwzględniane obciążenia są modelowane jako zmienne losowe, jednak modelowanie odbywa się w sposób możliwie najprostsz.

W pracy dominują zagadnienia dotyczące fundamentów bezpośrednich – problemów nośności granicznej podłoża, a także osiadań. W drugiej części monografii przedstawiono ponadto wybrane zagadnienia dotyczące fundamentów palowych. Przedmiotem opracowania nie są natomiast takie zagadnienia geotechniki, jak stateczność zboczy, zabezpieczenia głębokich wykopów czy ściany oporowe. Dla tych zagadnień istnieje dość obszerna literatura związana z podejściem probabilistycznym. Informacje na temat tej literatury podano na początku rozdziału czwartego.

Analizy poszczególnych zagadnień oparte są na ogół na prostych modelach stosowanych w praktyce inżynierskiej, gdyż analiza niezawodnościowa nie zajmuje się doskonalaniem modelu deterministycznego. Określa jedynie, jakie jest prawdopodobieństwo bezpiecznej pracy (lub awarii) danego fundamentu, przy założeniu, że stosowany model z określonym prawdopodobieństwem imituje rzeczywistą pracę konstrukcji, z ewentualnym uwzględnieniem niepewności (o charakterze losowym) tegoż modelu.

Monografia nie prezentuje konkretnej tezy generalnej, chociaż szczegółowych wniosków jest wiele, gdyż omawiane zadania różnią się pomiędzy sobą niekiedy bardzo znacznie. Łączy je potrzeba obiektywnej oceny bezpieczeństwa, a to właśnie jest istotą stosowania teorii niezawodności.

Ponieważ pojęcie niezawodności i jej miar może być definiowane i rozumiane na wiele różnych sposobów, zatem w celu jednoznacznej interpretacji dalszych rezultatów w drugim rozdziale książki omówiono podstawowe miary niezawodności oraz metody ich szacowania, przede wszystkim te, które stosowane są w dalszych rozdziałach. Rozdział ten ma w większości charakter sprawozdawczy, informujący o technikach obliczeń wcześniej opracowanych przez innych autorów. Element własny autora stanowi propozycja oszacowania szybkości zbieżności przy obliczaniu prawdopodobieństwa techniką Monte Carlo. Podawane w literaturze oszacowania bazują zwykle na nierówności Czebyszewa (Chung 1974), z której wynika, że szybkość zbieżności jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby prób, czyli $N_n^{-\frac{1}{2}}$. Autor zaproponował (Puła 1985) dokładniejsze oszacowanie, wynikające z nierówności Kołmogorowa (Chung 1974). W podrozdziale 2.6.1 zademonstrowano ulepszoną wersję tej propozycji. Innym rezultatem własnym jest propozycja autora oszacowania prawdopodobieństwa awarii w przypadku niejawnych funkcji stanu granicznego opisana w podrozdziale 2.7.5. Zamiast znanych z literatury zastosowań rozwinięć szeregu Grama–Charliera lub Edgworthe’a do aproksymacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa (Sobczyk K. (1973), Crandal (1963)), zasugerowano zastosowanie wielomianów, będących bazami ortonormalnymi w przestrzeniach funkcji całkowalnych z kwadratem. Zasadność tej propozycji polega na spostrzeżeniu, że do przybliżonego obliczania prawdopodobieństw bardziej przydatna jest aproksymacja funkcji gęstości prawdopodobieństwa w normie całkowej, niż aproksymacja zbieżnym punktowo ciągiem sum częściowych rozwinięć typu Grama–Charliera czy Edgworthe’a. Propozycję tę autor przedstawił w referacie podczas konferencji *Computational Stochastic Mechanics* (por. Puła 1995). Za element oryginalny w tym rozdziale można też uznać sposób wykazania, że metoda FORM daje dokładny wynik w przypadku gaussowskiego wektora zmiennych losowych i liniowej funkcji stanu granicznego (wzory (2.23)–(2.31) w podrozdziale 2.4).

Rozdział trzeci dotyczy probabilistycznego opisu cech podłoża gruntowego istotnych z punktu widzenia obliczeń fundamentów. Dominują w nim dwa rodzaje charakterystyki. Pierwszy z nich to opis poszczególnych parametrów podłoża za pomocą zmiennych losowych z ewentualnym uwzględnieniem ich wzajemnej korelacji. Jako że literatura na ten temat jest bardzo bogata, dokonano jej syntetycznego przeglądu z uwzględnieniem zasadniczych kierunków. Uwzględniono też propozycje własne autora opisu podstawowych cech podłoża (parametry wytrzymałościowe, ciężar objętościowy) za pomocą rozkładów wielokątnych (Puła 1984, 1987). Propozycje te, jakkolwiek pochodzące już sprzed kilkunastu lat, mogą być jednak ponownie uznane za

interesujące ze względu na przydatność rozkładów wielokątnych dla przeżywających obecnie renesans metod symulacyjnych. Drugą część tego rozdziału poświęcono opisowi własności podłoża za pomocą pól losowych. Wprowadzenie zawiera znane z literatury fakty, dotyczące ogólnych własności pól losowych, ze szczególnym uwzględnieniem przestrzennych własności korelacyjnych. Zasadniczym elementem są uśrednienia przestrzenne (lokalne) zaproponowane przez Vanmarcke'a (1977a). Stanowią one przejście od punktowych własności pola losowego do własności uśrednionych po pewnym obszarze pola i prowadzą do tzw. funkcji wariancji, których zastosowanie niejednokrotnie pozwala na bardziej realistyczną ocenę miar niezawodności w zagadnieniach nośności granicznej. Informacje na temat uśrednień przedstawiono w podrozdziale 3.3, opierając się przede wszystkim na pracach Vanmarcke'a (1977, 1983), Vanmarcke'a i współautorów (1986) oraz Rackwitz (2000). Stanowią one teoretyczną bazę dla wyprowadzeń wzorów oraz obliczeń przedstawionych w rozdziale czwartym.

Rozdział czwarty, zdaniem autora zawierający najważniejsze nowe rezultaty w całej pracy, poświęcony jest zagadnieniom niezawodności przy obliczeniach nośności granicznej fundamentów bezpośrednich. Po przeglądzie literatury, dotyczącym probabilistycznej analizy bezpieczeństwa fundamentów bezpośrednich w zakresie stanów granicznych nośności, skoncentrowano się na zagadnieniu awarii, polegającej na wypieraniu gruntu spod podstawy fundamentu. Punktem wyjścia był problem zbyt małych wartości miar niezawodności uzyskiwanych dla fundamentów zaprojektowanych zgodnie z przepisami norm i uznawanymi powszechnie za bezpieczne. Problem ten został zasygnalizowany we wcześniejszej pracy autora i K. Dolińskiego (Doliński i Puła 1990). Obecnie przeprowadzono staranną analizę zagadnienia na przykładach fundamentów posadowionych zarówno na podłożu niespoistym, jak i spoistym. Pokazano na przykładach, że probabilistyczne modelowanie parametrów wytrzymałościowych za pomocą pojedynczych zmiennych losowych (tzn. jedna zmienna odpowiadająca kątowni tarcia wewnętrznego, jedna – spójności) może być niewystarczające. Lepsze rezultaty uzyskuje się przez wprowadzenie większej liczby zmiennych wynikających z dyskretyzacji odpowiedniego pola losowego. Przede wszystkim zastosowanie przestrzennych uśrednień Vanmarcke'a pozwala na uzyskanie wartości miar niezawodności bardziej adekwatnych do prawidłowo i bezpiecznie zaprojektowanych fundamentów bezpośrednich. Jednak przy zastosowaniu uśrednień do zagadnień nośności granicznej pojawia się trudny problem, uznawany dotychczas przez innych autorów za marginalny, a mianowicie wpływu rozmiaru obszaru uśrednienia na wartości wskaźników niezawodności. Autor zaproponował, aby uśrednień dokonywać po powierzchniach poślizgu związanych z przyjętym mechanizmem zniszczenia. I co za tym idzie, opracował kompletną procedurę dla mechanizmu Prandtla, zawierającą wyprowadzenie wzorów na wariancje i kowariancje zmiennych losowych otrzymanych przez uśrednienie wzdłuż krzywych (powierzchni) poślizgu występujących w tym mechanizmie oraz odpowiednią funkcję stanu granicznego. Seria przykładów

numerycznych pozwoliła na porównanie różnic wynikających z uwzględnienia jedynie korelacji w kierunku pionowym z przypadkiem uwzględnienia korelacji zarówno w kierunku pionowym, jak i poziomym, a także na szeroką analizę zagadnienia. Zdaniem autora są to nowe i oryginalne rezultaty własne.

Rozdział piąty zawiera wybrane zagadnienia niezawodności związane ze stanami przemieszczeń fundamentów bezpośrednich, zwłaszcza w kontekście zastosowania metody elementów skończonych. Spośród prac z tego zakresu warto wymienić pionierską pracę Baechera i Ingry (1981) oraz stosunkowo nowe prace Paice'a, Griffithsa i Fentona (1996), Fentona i Griffithsa (2002) oraz Noura, Slimaniego i Laouamiego (2002). W literaturze brak jest danych na temat modelowania probabilistycznego parametrów sprężystych podłoża, tj. modułu Younga E i współczynnika Poissona ν (lub im równoważnych w ramach teorii sprężystości) i wpływu ich zmienności losowej na osiadania podłoża. Nieliczne wzmianki dotyczą współczynników zmienności podłoża (Schultze 1972, Favre 1979, Meyerhof 1993, 1995). Jako że są to parametry zazwyczaj wprowadzane do obliczeń osiadań, i to zarówno modeli sprężystych, jak i sprężysto-plastycznych, ważne wydało się zanalizowanie problemu modelowania ich losowej zmienności. Zagadnieniu temu poświęcona była praca autora i M. Wyjadłowskiego (Puła i Wyjadłowski 1999), na której rezultatach bazuje podrozdział 5.1. Zaproponowano w nim procedurę numeryczną, opartą na połączeniu metody warstw skończonych z metodą SORM. Opracowana procedura umożliwiła obliczanie miar niezawodności związanych z osiadaniami fundamentu bezpośredniego posadowionego na liniowo odkształcalnym podłożu sprężystym. Zastosowanie jej, poprzez wykonanie dużej liczby przykładów numerycznych, pozwoliło na ocenę wpływu charakterystyk probabilistycznych parametrów sprężystych, takich jak rozkłady prawdopodobieństwa, współczynniki zmienności czy współczynniki korelacji, na miary niezawodności związane z przekroczeniem przez fundament określonej wielkości osiadań.

Gdy obliczenia osiadań dokonuje się stosując metodę elementów skończonych, wówczas z punktu widzenia niezawodności mamy do czynienia z zadaniem z niejawną funkcją stanu granicznego (por podrozdział 2.7). Dla tych zadań szczególnie obiecujące wydaje się zastosowanie metod powierzchni odpowiedzi (podrozdział 2.7.4), którego zaledwie nieliczne przykłady (Wong 1985, El-Meligy et al. 1997) można znaleźć w literaturze dotyczącej geotechniki. Dlatego najistotniejsza część rozdziału 5, podrozdział 5.4, koncentruje się wokół konstruowania powierzchni odpowiedzi przydatnych do obliczeń miar niezawodności związanych z osiadaniami podłoża. Podrozdział ten opiera się na pracach autora prowadzonych wspólnie z J. Bauerem (Bauer i Puła 1999, 2000a oraz 2000b) w ramach grantu KBN pod tytułem „Niezawodność fundamentów bezpośrednich i palowych” (pod kierownictwem autora). Przedstawiono w nim ogólny algorytm otrzymywania powierzchni odpowiedzi, korzystający z wcześniejszej propozycji Englund i Rackwitz (1992) z modyfikacją polegającą na wprowadzeniu procedury regresji nieliniowej opartej na kompromisie Marquardta (Marquardt 1966). Korzystając z tego algorytmu, skonstruowano i analizowano trzy typy

powierzchni odpowiedzi, które połączono z algorytmami metody SORM. Pierwsza z nich to znana z literatury (Bucher i Bourgund 1990) aproksymacja wielomianem drugiego stopnia. Pozostałe dwie – powierzchnia ze „składnikiem edometrycznym” oraz powierzchnia z aproksymatorem wzorowanym na sieciach neuronowych – są propozycjami oryginalnymi. Porównując rezultaty z przedstawionych przykładów propozycjami obliczeniowych, przeprowadzono obszerną dyskusję własności tych powierzchni oraz możliwości ich zastosowania.

Uzupełnienie rozdziału piątego stanowią trzy wcześniejsze rezultaty, mieszczące się tematycznie w zagadnieniach probabilistycznej analizy przemieszczeń fundamentów. I tak w podrozdziale 5.2 przedstawiono zagadnienie wpływu losowego położenia granicy pomiędzy warstwami geotechnicznymi na osiadania fundamentu. Zadanie to, rozwiązane wspólnie z W. Brząkałą (Brząkała i Puła 1996), stanowi przykład zastosowania metody perturbacyjnej oraz metody rozwinięć Neumanna (por. podrozdziały 2.7.1 i 2.7.2). W podrozdziale 5.3 rozpatrzono zagadnienie efektu losowych obciążeń na osiadania fundamentu posadowionego na uwarstwionym podłożu sprężystym o cechach nielosowych. Stanowi ono przykład zastosowania metody FERM (podrozdział 2.7.3). Podobnie jak poprzednie, zadanie pochodzi z pracy Brząkały i Puły (1996). Do połowy lat dziewięćdziesiątych brak było rezultatów stosujących metody teorii niezawodności konstrukcji w połączeniu z metodą elementów skończonych dla sprężysto-plastycznego modelu podłoża gruntowego. Pierwsze prace w tym zakresie należą do El-Meligiego (1994) oraz El-Meligiego i współautorów (1995), w których stosuje się do celów obliczeń probabilistycznych metodę adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej (por. podrozdział 2.6.4.). W podrozdziale 5.5, opierając się na algorytmie zaproponowanym przez El-Meligiego, podano przykład analizy osiadań ściany oporowej, umiejscowionej w podłożu sprężysto-plastycznym Druckera–Pragera o cechach losowych. Podrozdział ten opracowano na podstawie wspólnej publikacji Brząkały, Puły i El-Meligiego (1995).

W rozdziale szóstym omówiono zagadnienia związane z fundamentami palowymi. Literatura dotycząca probabilistycznej oceny fundamentów palowych jest o wiele skromniejsza niż w przypadku fundamentów bezpośrednich. Za pracę pionierską należy zapewne uznać referat Evangelisty, Pellegrina i Vigogoniego (1975). Z późniejszych opracowań warto wymienić publikacje Quecka i współautorów (1992), Alena i Jendeb’ego (1993), Hettlera (1993), Okahary i współautorów (1993) oraz Phoona i współautorów (2000). Niewątpliwą przeszkodę stanowi fakt, że modelowanie probabilistyczne napotyka tu na szczególnie trudne procedury identyfikacji parametrów, toteż rozsądnym podejściem wydaje się założenie, że zmiennymi losowymi są podatności lub nośności poszczególnych pali, gdyż na tym etapie możliwa jest, poprzez rejestrowanie wyników obciążeń próbnych pali, weryfikacja założeń dotyczących charakterystyk zmiennych losowych. Problem analizowany w rozdziale szóstym nawiązuje do pracy Evangelisty, Pellegrina i Vigogoniego (1975). Autorzy ci, analizując różne przyczyny losowej podatności pali, podjęli próbę oszacowania jej wpływu na

wahania sił wewnętrznych w konstrukcji oczepowej. Jednak oszacowania dokonane przez nich należy uznać za bardzo przybliżone ze względu na założenia dotyczące pracy konstrukcji jako całości, a przede wszystkim użycie zbyt uproszczonego aparatu probabilistycznego. To skłoniło autora do podjęcia próby ponownego rozwiązania zadania oceny losowych momentów zginających w belce fundamentowej, spowodowanych losową zmiennością nośności lub podatności pali zamocowanych w belce, z użyciem bardziej współczesnych metod niezawodności konstrukcji. Ponadto w proponowanym modelu uwzględnia się możliwość „wyjścia” poszczególnych pali poza zakres sprężysty ich pracy. Zaproponowano algorytm rozwiązania w postaci zamkniętej (dla fundamentów o niewielkiej liczbie pali), korzystający z metod FORM i SORM oraz algorytm oszacowania parametrów probabilistycznych momentów zginających oparty na symulacji cyfrowej. Opracowane algorytmy pozwoliły na wykonanie wielu przykładów numerycznych (przy współdziale G. Grada (1998)) i sformułowanie wniosków, dotyczących losowych zmian momentów zginających. Algorytm symulacyjny zastosowano następnie do oceny możliwości przekroczenia wartości dopuszczalnych przez momenty w projektowanym fundamencie, stanowiącym wariant zmiany sposobu posadowienia rzeczywistego obiektu, którym było podtorze suwnicy portalowej (podrozdział 6.6). Podrozdział 6.6 jest rezultatem wspólnej pracy autora i J. Rybaka (Puła i Rybak J. (1999)) w ramach wspomnianego już uprzednio grantu KBN.

W rozdziale siódmym podjęto tematykę rzadziej pojawiającą się w obliczeniach inżynierskich, a mianowicie – obliczenia nośności bocznej sztywnych pali fundamentowych. Autorowi nie są znane wcześniejsze prace w zakresie probabilistycznej analizy tego zagadnienia. Problem z zakresu niezawodności, któremu poświęcony jest ten rozdział, pojawił się w związku z praktycznymi obliczeniami pali fundamentowych pod słupy sieci trakcyjnej (O. Puła i W. Puła, 1995). Stwierdzono wówczas, że nieliniowe związki funkcyjne pomiędzy kątem tarcia wewnętrznego gruntu a granicznym obciążeniem poprzecznym charakteryzują się bardzo dużą wrażliwością wartości siły granicznej na niewielkie nawet zmiany kąta tarcia wewnętrznego. Obliczenie miar niezawodności w tej sytuacji stanowi istotny problem numeryczny. Na bazie wynikającego z teorii stanów granicznych rozwiązania Brinch Hansena (1961b) opracowano program (przy współdziale D. Luźnej (Luźna i Puła 1998)) w systemie *Mathematica*, który dzięki możliwości stosowania przekształceń w formie symbolicznej, pozwolił na zastosowanie metody SORM i dał efektywne narzędzie badania prawdopodobieństwa wypierania gruntu wokół pala pod działaniem losowego obciążenia poprzecznego. Podrozdział 7.5 zawiera przykłady obliczeń z zastosowaniem proponowanego rozwiązania w ośrodku niespoistym oraz wynikające z nich wnioski, dotyczące bezpiecznego projektowania tego typu pali.

Rozdział ósmy stanowi pewien wkład w rozwój metod teorii niezawodności. Pokazano w nim, że w pewnych przypadkach bezpośrednio stosowanie metod FORM i SORM może prowadzić do znajdowania tzw. „falszywych punktów obliczenio-

wych”. Zaproponowano nowy sposób unikania tego problemu poprzez zastosowanie aproksymatorów stosowanych w sztucznych sieciach neuronowych. Przykłady obliczeniowe zawarte w tym rozdziale dotyczą osiadania pojedynczego pała w ośrodku sprężystym.

Rozdział dziewiąty zawiera uwagi końcowe.

2. Miary niezawodności i metody ich obliczania

2.1. Wstępne uwagi i założenia

W rozdziale tym przedstawione zostaną podstawowe miary używane do oceny bezpieczeństwa w ramach teorii niezawodności konstrukcji oraz metody ich wyznaczania. Podany przegląd ograniczono jednak przede wszystkim do zagadnień, które przydatne będą w dalszych rozważaniach oraz do własnej propozycji podanej w podrozdziale 2.7.5.

Jak już wspomniano, teoria niezawodności konstrukcji (*structural reliability theory*), stworzona na potrzeby oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych, stanowi część ogólnej teorii niezawodności (Gnidenko, Bielajew i Sołowiew 1968, Kopociński 1973, Aven i Jensen 1999). Specyfika tej teorii polega na stosowaniu wskaźnikowych miar bezpieczeństwa, wypracowaniu szczegółowych algorytmów obliczania tychże miar oraz przygotowaniu odpowiednich modeli probabilistycznych pracy konstrukcji. Autor nie podejmuje się rozstrzygnięcia, czy teoria niezawodności konstrukcji jest czymś innym aniżeli teoria bezpieczeństwa konstrukcji. Odpowiedź na to pytanie jest tym trudniejsza, że autorzy wielu istniejących w tej dziedzinie opracowań monograficznych różnie interpretują zakres tematyczny teorii niezawodności konstrukcji. Literatura tematu jest niezwykle obszerna, także w zakresie obszernych opracowań książkowych. Zdaniem autora do najcenniejszych monografii z zakresu teorii niezawodności konstrukcji należą (już bez rozstrzygnięcia, które mają bardziej naukowy, a które bardziej podręcznikowy charakter) prace następujących autorów: Ditlevsena (1981), Toft-Christensena i Bakera (1982), Elishakoffa (1983), Madsena, Krenka i Linda (1986), Toft-Christensena i Murotsu (1986), Melchersa (1987), Murzewskiego (1989 i 2001), Tichego (1993), Ditlevsena i Madsena (1996), Ben Haima (1996), praca zbiorowa pod redakcją Sundarajana (1995), Nowaka i Collinsa (2000).

W zakresie dotyczącym rozwoju miar niezawodności i algorytmów ich obliczania za prekursorską uważa się pracę Freudenthala (1954), chociaż, o czym niewiele autorów pamięta, zawarte w niej koncepcje linearyzacyjne pochodzą od Rżanicyna (1949) i Levi'ego (1949). Dalszy istotny postęp w rozwoju zagadnienia należy przypisać Cornellowi (1967, 1969a, 1969b), który wprowadził wskaźnik niezawodności obliczany na podstawie wartości oczekiwanych i wariancji zmiennych losowych oraz

zapropował procedury linearyzacyjne do obliczania tegoż wskaźnika. Idee te rozwinięte zostały następnie w pracy Anga i Cornella (1974). Bardzo ważną publikacją stała się praca Hasofera i Linda (1974), w której autorzy wprowadzili tzw. niezmienny wskaźnik niezawodności oraz podali sposoby jego obliczania, udoskonalone później przez Linda (1977, 1979). Wskaźnik Hasofera–Linda nie wykorzystywał jednak informacji o rozkładach prawdopodobieństwa wektorów losowych użytych do opisu parametrów konstrukcji oraz obciążeń. To z kolei spowodowało zwrot zainteresowania w kierunku prawdopodobieństwa awarii oraz związanego z nim w sposób wzajemnie jednoznaczny wskaźnika niezawodności. Tu jednak należało pokonać trudności numeryczne związane z obliczaniem prawdopodobieństwa awarii. Za pionierskie i fundamentalne prace w tym zakresie należy uznać prace Rackwitza i Fiesslera (1978) oraz Ditlevsena (1979a, 1979b, 1981). Kolejne prace Fiesslera, Neumanna i Rackwitza (1979), Hohenbichlera i Rackwitza (1981), Chena i Linda (1983), Breitunga (1984) oraz Hohenbichlera i współautorów (1987) doprowadziły do powstania metod FORM (*First Order Reliability Method*) oraz SORM (*Second Order Reliability Method*) powszechnie dziś stosowanych w teorii niezawodności konstrukcji. Należy też odnotować podsumowujące i krytyczne prace Dolińskiego (1983), Shinozuki (1983) oraz Schuëllera i Stixa (1987) związane z tymi metodami. Metody FORM i SORM omówione będą szczegółowo w podrozdziale 2.4. Badania nad rozwojem metod służących obliczeniom miar niezawodności są nadal kontynuowane, czego przykładem są prace Hohenbichlera i Rackwitza (1988), Abdo i Rackwitza (1990), czy Sindla, Gollwitzera i Rackwitza (1996).

W ramach zadań teorii niezawodności konstrukcji rozpatruje się *wektor bazowych zmiennych losowych* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, którego współrzędne są zmiennymi losowymi definiującymi te parametry konstrukcji (np. stałe materiałowe, wielkości geometryczne), w danym zagadnieniu przyjęte jako losowe. Składowymi tego wektora są także oddziaływania (obciążenia), jeśli przyjęto założenie o ich losowości. Wektor ten jest argumentem *funkcji stanu granicznego*, którą definiuje się następująco:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \geq 0 & \text{dla stanów bezpiecznych konstrukcji,} \\ < 0 & \text{dla stanów awaryjnych konstrukcji.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Postać tej funkcji zależy od rozpatrywanego zadania i musi być sprecyzowana jako założenie. Hiperpowierzchnia $g(\mathbf{x}) = 0$ nazywa się *powierzchnią stanu granicznego*. Przykłady funkcji oraz powierzchni stanu granicznego pojawią się w kolejnych rozdziałach.

Z probabilistycznego punktu widzenia pełna informacja o wektorze losowym jest znana wtedy, gdy znany jest jego łączny rozkład prawdopodobieństwa, a w przypadku wektora absolutnie ciągłego (por. Feller 1981) łączna gęstość prawdopodobieństwa tego wektora. Spełnienie tego założenia bywa często kłopotliwe w obliczeniach inżynierskich ze względu na niedostateczną liczbę danych statystycznych, czy też braku

adekwatnego modelu probabilistycznego dla danego zagadnienia. Dlatego częściej spotyka się sytuacje, w których znane są jedynie rozkłady poszczególnych zmiennych X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (rozkłady brzegowe wektora \mathbf{X}), lub jedynie dwa pierwsze momenty zmiennych X_i . Mniejsza informacja probabilistyczna o wektorze \mathbf{X} jest istotnym ograniczeniem przy obliczaniu miar niezawodności.

W zagadnieniach dotyczących optymalizacji na podstawie kryteriów niezawodności argumentami funkcji stanu granicznego są zwykle dwa wektory, tj. $g(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, przy czym \mathbf{p} jest wektorem parametrów projektowania, podlegających optymalizacji. W ramach tego opracowania zagadnienia optymalizacji nie będą omawiane, co oznacza, że funkcja stanu granicznego będzie stosowana tylko w postaci (2.1). Należy jednak podkreślić, że zagadnienia optymalizacji stanowią bardzo znaczącą część teorii niezawodności konstrukcji. Przykładowo warto wymienić prace Jendo i Paczkowskiego (1993) oraz zespołu Stocki, Kolanek, Jendo i Kleiber (2001a, 2001b).

2.2. Momentowe miary niezawodności

W tym podrozdziale zostaną zdefiniowane miary niezawodności (bezpieczeństwa), do określenia których wystarcza znajomość jedynie dwóch pierwszych momentów statystycznych wektora losowego \mathbf{X} , nie jest natomiast konieczna znajomość rozkładów prawdopodobieństwa, dlatego nazwano je miarami momentowymi.

Najprostszą miarą niezawodności jest margines (zapas) bezpieczeństwa określany jako

$$M = E\{g(\mathbf{X})\}, \quad (2.2)$$

gdzie $E\{g(\mathbf{X})\}$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej $g(\mathbf{X})$, a g jest funkcją stanu granicznego. Jeśli się przyjmie w (2.2)

$$g = R - S, \quad (2.3)$$

gdzie R jest nośnością, rozumianą jako wypadkowa wszystkich sił (momentów) utrzymujących konstrukcję w równowadze, zaś S oddziaływaniem (obciążeniem), rozumianym jako wypadkowa wszystkich sił (momentów), dążących do utraty stateczności przez konstrukcję, to otrzymuje się często spotykaną postać zapasu

$$M = E\{R\} - E\{S\}. \quad (2.4)$$

Alternatywną formą jest globalny współczynnik bezpieczeństwa

$$F = \frac{E\{R\}}{E\{S\}} \quad (2.5)$$

zwany też centralnym współczynnikiem bezpieczeństwa (Ditlevsen i Madsen 1996). Postać miary (2.5) nie wynika co prawda ze wzoru (2.2), ale bywa on często stosowa-

ny, gdy stosuje się jedynie wartości średnie nośności i oddziaływań. Stosowanie miar (2.2)–(2.5) nie daje możliwości uwzględnienia losowych wahań zarówno parametrów podłoża i konstrukcji, jak i oddziaływań, gdyż miary te nie uwzględniają odchyłek standardowych. Nie daje też w zasadzie możliwości porównywania bezpieczeństwa różnych konstrukcji (miary (2.2)–(2.4)).

Informację o odchyleniach standardowych parametrów losowych uwzględnianych w konkretnym zadaniu zawiera miara zaproponowana przez Cornella (1969a, 1969b), nazywana wskaźnikiem niezawodności Cornella

$$\beta_C = \frac{E\{g(\mathbf{X})\}}{\sqrt{\text{Var}\{g(\mathbf{X})\}}}, \quad (2.6)$$

przy czym $\text{Var}\{\cdot\}$ jest symbolem operatora wariancji. Dla funkcji stanu granicznego o postaci (2.3) oraz przy dodatkowym założeniu, że zmienne R i S są nieskorelowane, wzór (2.6) ma postać

$$\beta_C = \frac{E\{R\} - E\{S\}}{\sqrt{\text{Var}\{R\} + \text{Var}\{S\}}} = \frac{E\{R\} - E\{S\}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}, \quad (2.7)$$

gdzie σ_R oraz σ_S oznaczają odpowiednio odchylenia standardowe zmiennych R i S .

W zagadnieniach geotechniki założenie o braku korelacji zmiennych R i S jest w wielu przypadkach nie do zaakceptowania. Jeśli jednak kowariancja (lub współczynnik korelacji) pomiędzy tymi zmiennymi jest znany, to wówczas wskaźnik β_C można obliczyć ze wzoru (wynikającego bezpośrednio z (2.6))

$$\beta_C = \frac{E\{R\} - E\{S\}}{\sqrt{\text{Var}\{R\} + \text{Var}\{S\} - 2\text{Cov}(R, S)}} = \frac{E\{R\} - E\{S\}}{\sqrt{\text{Var}\{R\} + \text{Var}\{S\} - 2\rho\{R, S\}\sigma_R\sigma_S}}, \quad (2.8)$$

w którym $\text{Cov}(R, S)$ i $\rho\{R, S\}$ oznaczają odpowiednio kowariancję i współczynnik korelacji zmiennych R i S . W ogólnym przypadku funkcja stanu granicznego nie jest liniową funkcją bazowych zmiennych losowych. Wówczas, aby obliczyć wskaźnik (2.6), stosuje się zazwyczaj rozwinięcie Taylora z dokładnością do wyrazu liniowego wokół pewnego punktu $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ w przestrzeni bazowych zmiennych losowych. Procedura ta prowadzi do wskaźnika niezawodności pierwszego rzędu określonego wzorem

$$\beta_{FO} = \frac{g(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)(E\{X_i\} - x_i^0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) E[(X_i - x_i^0)(X_j - x_j^0)]}}. \quad (2.9)$$

Według Cornella punkt rozwinięcia powinien być punktem wartości oczekiwanych (linearyzacja Rżanicyna !), czyli $\mathbf{x}^0 = (E\{X_1\}, E\{X_2\}, \dots, E\{X_n\})$, co sprowadza (2.9) do postaci

$$\beta_{FO} = \frac{g(E\{\mathbf{X}\})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(E\{\mathbf{X}\}) \frac{\partial g}{\partial x_j}(E\{\mathbf{X}\}) \text{Cov}(X_i, X_j)}}. \quad (2.10)$$

Poprzez odchylenia standardowe wskaźnik pierwszego rzędu zawiera już informacje o wielkości losowych wahań poszczególnych zmiennych bazowych i stanowi dobrą miarę do porównywania bezpieczeństwa różnych konstrukcji lub różnych elementów całej konstrukcji.

Przy założeniu $R > 0$ i $S > 0$ można funkcję stanu granicznego przyjąć w postaci

$$g(R, S) = \ln\left(\frac{R}{S}\right) \quad (2.11)$$

i wówczas ze wskaźnika Cornella (2.6) otrzymuje się wskaźnik Rosenblutha i Estevy (1972)

$$\beta_{RE} = \frac{E\left\{\ln\left(\frac{R}{S}\right)\right\}}{\sqrt{\text{Var}\left\{\ln\left(\frac{R}{S}\right)\right\}}} = \frac{E\{\ln(R)\} - E\{\ln(S)\}}{\sqrt{\text{Var}\left\{\ln\left(\frac{R}{S}\right)\right\}}}. \quad (2.12)$$

Po zlinearyzowaniu funkcji (2.11) wokół wartości oczekiwanych $E\{R\}$ i $E\{S\}$, a następnie podstawieniu do wzoru (2.10) otrzymuje się następujący wskaźnik pierwszego rzędu

$$\beta_{FO} = \frac{\ln(E\{R\}) - \ln(E\{S\})}{\sqrt{(\text{cov}\{R\})^2 + (\text{cov}\{S\})^2}}, \quad (2.13)$$

gdzie $\text{cov}\{R\}$ i $\text{cov}\{S\}$ oznaczają współczynniki zmienności R oraz S definiowane jako

$$\text{cov}\{X\} = \frac{\sigma_X}{E\{X\}}. \quad (2.14)$$

Jak łatwo zauważyć, wartości wskaźnika (2.13) oraz wskaźnika (2.7) będą różne, pomimo równoważności funkcji stanu granicznego. Równoważność oznacza tu, że nierówność $g(R, S) \leq 0$ daje ten sam zbiór rozwiązań zarówno w przypadku funkcji stanu granicznego (2.3), jak i (2.11). Ten brak niezmienniczości stanowi istotną wadę wskaźnika Cornella. Jednocześnie można zauważyć, że do osiągnięcia niezmienniczo-

ści konieczne jest, aby punkt, w którym dokonuje się linearyzacji, znajdował się na powierzchni stanu granicznego. Postulat ten spełnia wskaźnik niezawodności zaproponowany przez Hasofera i Linda (1974). Niech C_X będzie macierzą kowariancji wektora zmiennych bazowych X . Wektor X przekształca się przez transformację liniową A na wektor Y w następujący sposób:

$$Y = A(X - E\{X\}), \quad (2.15)$$

tak, aby macierz kowariancji C_Y wektora Y była macierzą jednostkową (oznacza to brak korelacji pomiędzy poszczególnymi składowymi wektora Y). Z (2.15) wynika od razu, że $E\{Y\} = 0$. Istnienie takiej transformacji A wynika z symetrii macierzy kowariancji C_X (macierz rzeczywista jest ortogonalnie diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetryczna – por. np. Jurliewicz i Skoczylas (2000)). Przykładowym algorytmem prowadzącym do takiego rezultatu jest tzw. dekompozycja Choleskiego. W wyniku przekształcenia (2.15) równanie powierzchni stanu granicznego $g(x) = 0$ także się transformuje, przyjmując pewną inną postaci $h(y) = 0$. Wskaźnik Hasofera–Linda określa się jako

$$\beta_{HL} = \min_{y \in \{h(y)=0\}} \sqrt{y^T y}, \quad (2.16)$$

lub alternatywnie w przestrzeni zmiennych x

$$\beta_{HL} = \min_{x \in \{g(x)=0\}} \sqrt{(x - E\{X\})^T C_X^{-1} (x - E\{X\})}, \quad (2.17)$$

przy czym indeks górny T oznacza transpozycję wektora. Punkt y^* realizujący minimum (2.16) lub odpowiadający mu punkt x^* realizujący minimum (2.17) nazywa się *punktem obliczeniowym*. Z definicji widać, że punkt obliczeniowy należy do powierzchni stanu granicznego, a więc wartość wskaźnika β_{HL} zależy jedynie od kształtu tej powierzchni, co daje własność niezmienniczości. Ponadto wskaźnik ten jest niezmienniczy ze względu na transformacje ortogonalne, tak więc np. zmiana kolejności bazowych zmiennych losowych nie wpływa na jego wartość. Przyjęcie minimum we wzorze (2.16) gwarantuje, że całe koło o środku w początku układu współrzędnych i promieniu β_{HL} znajduje się w „obszarze bezpiecznych stanów konstrukcji”, co, przy dużych wartościach β_{HL} , oznacza małe prawdopodobieństwo awarii. Hasofer i Lind (1974) podali także algorytm numerycznego znajdowania punktu obliczeniowego, a co za tym idzie wartości β_{HL} .

W przypadku, gdy funkcja

$$\beta(y) = \sqrt{y^T y} \quad \text{dla } y \in \{h(y)=0\} \quad (2.18)$$

ma kilka lokalnych minimów β_1, \dots, β_k należy przyjąć

$$\beta_{HL} = \min_i \{\beta_1, \dots, \beta_k\}. \quad (2.19)$$

W szczególnym przypadku, kiedy powierzchnia stanu granicznego jest hiperpłaszczyzną, wskaźnik niezawodności Hasofera–Linda β_{HL} jest zgodny ze wskaźnikiem Cornella β_C .

2.3. Prawdopodobieństwo awarii

Opisane powyżej miary niezawodności w postaci wskaźników wykorzystują jedynie informacje w postaci dwóch pierwszych momentów statystycznych bazowych zmiennych losowych. Oznacza to, że poza szczególnymi przypadkami, część istotnej informacji probabilistycznej zawartej w rozkładach prawdopodobieństwa tych zmiennych zostaje zignorowana. Dlatego też z probabilistycznego punktu widzenia za najlepszą miarę należy uznać prawdopodobieństwo niespełnienia warunku granicznego, zwane też prawdopodobieństwem awarii, które przy założeniach sformułowanych w podrozdziale 1.1 ma postać

$$p_F = P\{g(\mathbf{X}) < 0\} = \int_{\{g(\mathbf{x}) < 0\}} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

gdzie $F_{\mathbf{X}}$ oznacza dystrybuantę wektora zmiennych bazowych \mathbf{X} .

W polskiej literaturze stosowane są też inne określenia na prawdopodobieństwo typu (2.20), np. *zawodność*, stosowane przez Murzewskiego (2001), czy *awaryjność* – określenie proponowane przez Biegusa (1999) oraz polskie tłumaczenie normy ISO 2394 (1998). W dalszym ciągu terminy te będą używane zamiennie, w zależności od rodzaju niesprawności konstrukcji wywołanej niespełnieniem warunku stanu granicznego. Wydaje się, że w przypadku stanów granicznych nośności stosowanie terminu prawdopodobieństwo awarii jest uzasadnione. Z matematycznego punktu widzenia pojęcia te mają jednakową ogólną definicję – wzór (2.20), choć w różnych sytuacjach waga i konsekwencje zdarzeń bywają bardzo różne.

Jeśli rozkład wektora \mathbf{X} jest absolutnie ciągły, o łącznej gęstości prawdopodobieństwa $f_{\mathbf{X}}$, to wzór (2.20) można napisać w postaci

$$p_F = \int_{\{g(\mathbf{x}) < 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.21)$$

Oczywiście prawdopodobieństwo niezawodnej pracy konstrukcji jest prawdopodobieństwem zdarzenia przeciwnego, czyli

$$p_S = 1 - p_F. \quad (2.22)$$

Trudność posługiwania się miarami (2.20)–(2.22) polega na tym, że nawet jeśli łączny rozkład prawdopodobieństwa wektora \mathbf{X} jest znany, to dokładne obliczenie całki (2.20) lub (2.21), ze względu na specyficzny obszar całkowania, możliwe jest

w niewielu przypadkach. Całkowanie numeryczne prowadzi do zadowalających rezultatów jedynie w jednowymiarowych przypadkach (wektor \mathbf{X} składa się tylko z jednej zmiennej losowej) lub dwuwymiarowych. Przyczyną jest zwykle bardzo mała wartość prawdopodobieństwa awarii, a więc błąd całkowania numerycznego może w bardzo istotny sposób zniekształcić uzyskiwany wynik. W związku z tym w ramach teorii niezawodności konstrukcji rozwijane są inne metody numerycznego obliczania prawdopodobieństwa p_F , z których najbardziej rozpowszechnione są wspomniane już w punkcie 2.1 metody pierwszego i drugiego rzędu, a także metody symulacyjne. Omówienie tych metod jest przedmiotem kolejnych podrozdziałów.

2.4. Metody FORM i SORM

Metoda pierwszego rzędu FORM (*First Order Reliability Method*) oraz metoda drugiego rzędu SORM (*Second Order Reliability Method*) są niewątpliwie jednymi z najbardziej skutecznych przybliżonych metod obliczania miar niezawodności, a ich opracowanie należy do ważnych osiągnięć w dziedzinie teorii niezawodności konstrukcji. Najważniejsze prace, które doprowadziły do ich rozwoju, zostały już cytowane w podrozdziale 2.1. Sformułowanie tych metod zostanie poprzedzone krótkim wywodem, który, zdaniem autora, pozwoli na lepsze zrozumienie ich istoty oraz odniesienia do dokładnego rezultatu.

Założmy najpierw, że wektor bazowych zmiennych losowych \mathbf{X} jest wektorem gaussowskim o nieskorelowanych współrzędnych X_i , $i = 1, \dots, n$ (w przypadku wektora gaussowskiego jest to równoważne stochastycznej niezależności poszczególnych współrzędnych). Następnie dokonajmy transformacji zwanej standaryzacją, tj.

$$y_i = \frac{x_i - E\{X_i\}}{\sigma_{x_i}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

Jak łatwo zauważyć, transformacja taka zawierała się też w propozycji Hasofera i Linda (1974) zreferowanej w poprzednim podrozdziale. W wyniku tego przekształcenia powierzchnia stanu granicznego $g(\mathbf{x}) = 0$ zostanie przekształcona w powierzchnię

$$G(\mathbf{y}) \equiv g(\mathbf{x}(\mathbf{y})) = 0. \quad (2.24)$$

Jeśli ponadto się założy, że funkcja g jest funkcją liniową, to po przekształceniu (2.23) funkcja G będzie także liniowa, to znaczy będzie miała postać

$$G(\mathbf{y}) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n + a_0, \quad (2.25)$$

a stąd prawdopodobieństwo awarii wyniesie

$$p_F = \int_{\{G(\mathbf{y}) < 0\}} \phi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = P\{a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n + a_0 < 0\}, \quad (2.26)$$

przy czym $\phi_n(\mathbf{y})$ oznacza gęstość n -wymiarowego standardowego rozkładu normalnego.

Jednak kombinacja liniowa niezależnych zmiennych gaussowskich $G(\mathbf{Y}) = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n + a_0$ jest także zmienną gaussowską (por. Feller 1981) o wartości oczekiwanej

$$E\{G(\mathbf{Y})\} = a_1 E\{Y_1\} + a_2 E\{Y_2\} + \dots + a_n E\{Y_n\} + a_0 = a_0 \quad (2.27)$$

oraz odchyleniu standardowym

$$\sigma_{G(\mathbf{Y})} = \sqrt{a_1^2 \sigma_{Y_1}^2 + a_2^2 \sigma_{Y_2}^2 + \dots + a_n^2 \sigma_{Y_n}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (2.28)$$

Wobec tego wzór (2.26) można przekształcić następująco:

$$\begin{aligned} p_F &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}} e^{-\frac{(y-a_0)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi_0\left(-\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}\right) = \Phi_0(-\beta \operatorname{sgn}(a_0)), \end{aligned} \quad (2.29)$$

przy czym Φ_0 oznacza dystrybuantę jednowymiarowego standardowego rozkładu normalnego, zaś

$$\beta = \frac{|a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} \quad (2.30)$$

jest odległością hiperpłaszczyzny $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n + a_0 = 0$ od początku układu współrzędnych. Gdy $a_0 > 0$, co oznacza, że prawdopodobieństwo awarii $p_F < \frac{1}{2}$, otrzymuje się

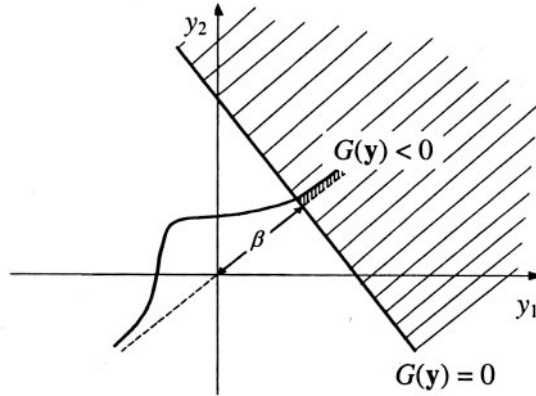
$$p_F = \Phi_0(-\beta). \quad (2.31)$$

Opisany powyżej sposób obliczenia prawdopodobieństwa awarii w przypadku dwuwymiarowym schematycznie zaprezentowano na rysunku 2.1.

W przypadku ogólnym, gdy rozkład wektora \mathbf{X} zmiennych bazowych nie jest wektorem o rozkładzie gaussowskim, stosuje się transformację $\mathbf{T}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, spro-

wadzając ten wektor do gaussowskiego wektora \mathbf{Y} , którego współrzędne są niezależnymi standardowymi zmiennymi normalnymi

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{X}). \quad (2.32)$$



Rys. 2.1. Schematyczna idea znajdowania prawdopodobieństwa awarii

Istnienie tego typu transformacji oraz sposób jej konstruowania pokazał po raz pierwszy Rosenblatt (1952) dla przypadku, gdy współrzędne wektora \mathbf{Y} miały rozkłady jednostajne. Do obliczeń niezawodności adaptowali tę transformację Hohenbichler i Rackwitz (1981). W przypadku, gdy współrzędne wektora zmiennych bazowych są niezależnymi zmiennymi losowymi, transformacja \mathbf{T} ma postać

$$\mathbf{T}: y_i = \Phi_0^{-1}(F_{X_i}(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.33)$$

przy czym F_{X_i} jest dystrybuantą zmiennej losowej X_i . W przypadku wzajemnej korelacji współrzędnych wektora losowego \mathbf{X} transformację \mathbf{T} definiuje się następująco:

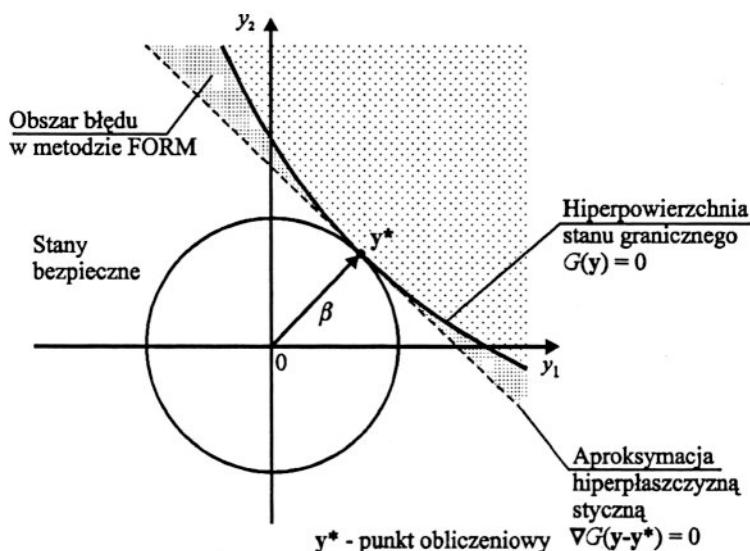
$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_0^{-1}(F_{X_1}(x_1)) \\ y_2 &= \Phi_0^{-1}(F_{X_2|X_1}(x_2|x_1)) \\ y_3 &= \Phi_0^{-1}(F_{X_3|X_1, X_2}(x_3|x_1, x_2)) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \Phi_0^{-1}(F_{X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})), \end{aligned} \quad (2.34)$$

przy czym $F_{X_i|X_1, X_2, \dots, X_{i-1}}$ jest warunkową dystrybuantą zmiennej X_i pod warunkiem X_1, X_2, \dots, X_{i-1} . Transformacja \mathbf{T} nazywa się transformacją probabilistyczną. Oprócz

transformacji Rosenblatta stosowana jest także transformacja Hermite'a (Winterstein 1988) oraz transformacja wynikająca z tzw. modelu Natafa (Nataf 1962, Liu i Der Kiureghian 1986). O modelach Natafa będzie jeszcze mowa w rozdziale 3, przy okazji opisu probabilistycznego modelowania parametrów podłoża. Transformacja \mathbf{T} przeprowadza powierzchnię stanu granicznego $g(\mathbf{x}) = 0$ na inną powierzchnię $G(\mathbf{y}) = g(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})) = 0$. Teraz wzór na prawdopodobieństwo awarii (2.21) ma postać

$$p_F = \int_{\{G(\mathbf{y}) < 0\}} \phi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.35)$$

gdzie ϕ_n oznacza gęstość n -wymiarowego standardowego rozkładu normalnego. Warto zauważyć, że efektywne obliczenie całki (2.35) jest nadal zadaniem skomplikowanym, poza przypadkiem, gdy $G(\mathbf{y}) = 0$ jest hiperpłaszczyzną w przestrzeni \mathbf{R}^n . Jednak dwie istotne własności gęstości standardowego rozkładu normalnego sprawiają, że transformacja (2.34) jest przydatna w obliczaniu prawdopodobieństwa awarii. Pierwszą z tych własności jest obrotowa symetria wokół początku układu współrzędnych. Druga – to eksponencjalne zanikanie tej funkcji wraz z kwadratem odległości od początku układu. Zatem największy „wkład” do prawdopodobieństwa awarii pochodzi z obszaru stanowiącego sąsiedztwo punktu na powierzchni stanu granicznego, którego odległość od początku układu współrzędnych jest najmniejsza. Dlatego w metodzie FORM powierzchnia stanu granicznego $G(\mathbf{y}) = 0$ aproksymowana jest przez hiperpłaszczyznę $\nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) = 0$ styczną do niej w punkcie \mathbf{y}^* najbliższym początkowi układu współrzędnych, co schematycznie w przypadku dwuwymiarowym pokazano na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Schematyczna reprezentacja metody FORM

Prowadzi to do następującego przybliżonego wzoru na prawdopodobieństwo awarii:

$$p_F \approx \int_{\{\nabla G(\mathbf{y}-\mathbf{y}^*) < 0\}} \phi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \Phi_0(-\beta), \quad (2.36)$$

przy czym równość po prawej stronie wynika z zależności (2.26)–(2.31) oraz przyjętego założenia, że początek układu współrzędnych znajduje się poza obszarem awarii (rozpatruje się małe prawdopodobieństwa awarii). Punkt \mathbf{y}^* realizujący minimum odległości nazywa się punktem obliczeniowym, lub rzadziej β -punktem, zaś β nazywa się wskaźnikiem niezawodności. Ponieważ w punkcie tym wartość gęstości rozkładu normalnego jest największa w całym obszarze awarii, więc punkt ten jest punktem największej wiarygodności (Doliński 1983).

Obserwacja rysunku 2.2 prowadzi do wniosku, że dla wypukłych (wypukłych w dół) w przestrzeni \mathbf{Y} obszarów awarii rzeczywiste prawdopodobieństwo awarii jest nie większe niż oszacowanie dane wzorem (2.36). Zatem dla obszarów wypukłych jest to oszacowanie „po stronie bezpiecznej”.

Dokładniejsze oszacowanie prawdopodobieństwa awarii w przypadku nieliniowej funkcji $G(\mathbf{y})$ stało się możliwe dzięki pracy Breitunga (1984), który udowodnił następującą zależność:

$$p_F = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \Phi_0(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 - \beta \kappa_i}, \quad (2.37)$$

w której κ_i oznaczają główne krzywizny powierzchni $G(\mathbf{y}) = 0$ w punkcie obliczeniowym \mathbf{y}^* . Krzywizny te otrzymuje się z macierzy drugich pochodnych (macierz Hessego) poprzez znalezienie wartości własnych. Taka procedura odpowiada aproksymacji powierzchni stanu granicznego $G(\mathbf{y}) = 0$ powierzchnią drugiego stopnia w otoczeniu punktu obliczeniowego \mathbf{y}^* . Zbliżoną formułę asymptotyczną podali Hohenbichler i Rackwitz (1988):

$$p_F \approx \Phi_0(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\phi_0(-\beta)}{\Phi_0(-\beta)} \kappa_i \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.38)$$

przy czym ϕ_0 jest gęstością jednowymiarowego standardowego rozkładu normalnego.

Zarówno wzór (2.37) jak i (2.38) nie dają dobrych oszacowań, gdy $|\beta| \leq 1$, lub gdy $\beta \kappa_i > 1$. Dla małych wartości β i aproksymacji paraboloidą dokładne rozwiązanie podał Tvedt (1983). Metoda SORM polega na pomnożeniu przybliżonej wartości prawdopodobieństwa awarii w postaci (2.36) przez czynnik korekcyjny wynikający ze wzoru (2.37) lub (2.38). Dla wartości $1 \leq \beta \leq 3$ stosuje się zwykle interpolację liniową pomiędzy aproksymacją paraboliczną (rezultat Tvedta) a rozwiązaniem asymptotycznym

(2.37) lub (2.38). Modyfikacja prawdopodobieństwa awarii pociąga za sobą zmianę wskaźnika niezawodności. Nowy wskaźnik niezawodności β_{SORM} określa się jako

$$\beta_{\text{SORM}} = -\Phi_0^{-1}(p_{F \text{ SORM}}), \quad (2.39)$$

tak aby relacja postaci (2.31) pomiędzy prawdopodobieństwem awarii a wskaźnikiem niezawodności była zachowana. Wzory (2.31) oraz (2.39) określają wzajemnie jednoznaczność odpowiedniość pomiędzy prawdopodobieństwem awarii i wskaźnikiem niezawodności.

Dalsze rafinowanie prawdopodobieństwa awarii i wskaźnika niezawodności można uzyskać przez wprowadzenie kolejnego mnożnika wynikającego z tzw. metody symulacji ważonej (*the importance sampling technique*), o czym będzie mowa w kolejnym podrozdziale poświęconym metodom symulacyjnym.

Należy podkreślić, że zarówno w przypadku metody FORM jak i SORM kluczowym zagadnieniem jest znalezienie punktu obliczeniowego \mathbf{y}^* . Zagadnienie to sprowadza się do następującego zadania optymalizacyjnego

$$\text{zminimalizować } \|\mathbf{y}\|, \quad \text{pod warunkiem } G(\mathbf{y})=0, \quad (2.40)$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową. W tym celu opracowano wiele algorytmów. Najwcześniejsze, pochodzące z prac Hasofera i Linda (1974) oraz Rackwitz i Fiesslera (1978), opierają się na procedurach gradientowych. Późniejsze to korzystające z metody sekwencyjnego programowania kwadratowego algorytmy Schittkowskiego (1981, 1983) oraz Arory (1989). Algorytmy te są ciągle udoskonalane pod kątem zastosowań w oprogramowaniu do obliczeń niezawodnościowych. Trudno jest wskazać najlepszy algorytm, zwłaszcza że mogą być stosowane różne kryteria, np. gwarantowana zbieżność czy efektywność – najmniejsza liczba operacji. Zależy to w dużej mierze od wymiaru zadania (liczby zmiennych losowych) oraz postaci funkcji stanu granicznego. W niektórych systemach komputerowych, służących obliczeniom niezawodności, stosuje się kilka algorytmów, które uruchamiane są alternatywnie, w zależności od rodzaju postawionego zadania (por. np. STRUREL 1997). Algorytmy optymalizacyjne nie będą omawiane w ramach tej pracy. Obszerne omówienia algorytmów stosowanych w obliczeniach niezawodności konstrukcji przedstawiono w pracach Arory (1990), Liu i Der Kiureghiana (1991) oraz Puły (1993).

Najczęściej stosowanymi miarami wrażliwości dla metod FORM i SORM są współczynniki wrażliwości α_i wskaźnika niezawodności, które definiuje się w następujący sposób:

$$\alpha_i = \left. \frac{\partial \beta}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.41)$$

Ponieważ β jest odległością od początku układu współrzędnych punktu obliczeniowego \mathbf{y}^* , więc, jak łatwo zauważyć, współczynniki α_i są cosinusami kierunkowymi wektora \mathbf{y}^* . Stąd

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1. \quad (2.42)$$

W przypadku, gdy X_1, X_2, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi współczynniki α_i mogą być rozumiane jako miary wrażliwości β ze względu na poszczególne parametry fizyczne X_1, X_2, \dots, X_n (por. wzór (2.33)). W przypadku występowania korelacji taka interpretacja nie jest już bezpośrednia i zależy w istotnym stopniu od struktury korelacyjnej. Poprzez obliczanie pochodnych cząstkowych wskaźnika niezawodności lub prawdopodobieństwa awarii względem poszczególnych parametrów zadania można uzyskać dalsze miary wrażliwości. Niektóre z nich obszerniej omówiono w pozycji STRUREL (1997).

Należy podkreślić, że istotną cechą metod FORM i SORM jest konieczność znajomości łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego zmiennych bazowych w postaci funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa lub łącznej dystrybuanty. Ponadto zależność funkcji stanu granicznego w postaci jawnej (zamkniętej) zależności od bazowych zmiennych losowych w istotny sposób poprawia efektywność i dokładność obliczeń.

Metody FORM i SORM są niewątpliwie najbardziej rozpowszechnionymi sposobami poszukiwania wskaźnika niezawodności, uwzględniającego rozkłady prawdopodobieństwa cech konstrukcji, ale istnieją także inne propozycje. Warto odnotować oryginalną, alternatywną propozycję Murzewskiego (por. np. Murzewski 2000), zwaną przez autora „teorią kappa”. Teoria ta zakłada niezależność (brak sprzężenia) obciążenia oraz nośności i poszukuje punktu obliczeniowego tak, aby w punkcie tym niezawodność (wzór (2.2)) osiągała maksimum. Wskaźnik niezawodności (zwany przez autora wskaźnikiem bezpieczeństwa) jest obliczany jako kombinacja liniowa dwóch wskaźników – wskaźnika dla obciążenia oraz wskaźnika dla nośności. Jego wartość nie pokrywa się ani z wartością wskaźnika uzyskanego metodą FORM, ani też z wartością wskaźnika uzyskanego metodą SORM.

2.5. Niezawodność systemu

W poprzednich podrozdziałach stan konstrukcji charakteryzowany był przez funkcje stanu granicznego o wartościach skalarnych, co odpowiada pojedynczemu równaniu określającemu bezpieczeństwo konstrukcji. W praktyce jednak konstrukcja niejednokrotnie, aby zadośćuczynić warunkom bezpieczeństwa, musi spełniać kilka różnych, często powiązanych ze sobą kryteriów. Każde z tych kryteriów może generować inną funkcję stanu granicznego. Kiedy indziej należy przyjąć model, w którym konstrukcja stanowi zespół (system) elementów składowych, z których każdy ma odrębne kryteria awarii, charaktery-

zowane przez odrębne funkcje stanu granicznego. Elementy te mogą stanowić system szeregowy – do bezawaryjnej pracy całości potrzebna jest bezawaryjna praca wszystkich elementów, równoległy – do bezawaryjnej pracy wystarcza sprawność jednego z elementów, lub mieszany (kombinacje systemów równoległych i szeregowych). Obliczenie prawdopodobieństwa takiego systemu sprowadza się na ogół do oszacowania prawdopodobieństwa następującego zdarzenia:

$$F_{\text{sys}} = \bigcup_i \bigcap_j \{g_{ij}(\mathbf{X}) \leq 0\}, \quad (2.43)$$

gdzie g_{ij} oznacza funkcję stanu granicznego elementu ij . Istnieje zatem konieczność oszacowania prawdopodobieństwa sumy oraz iloczynu zdarzeń. W sytuacji, gdy rozpatrywane zdarzenia nie są rozłączne, często stosuje się tzw. ograniczenia Ditlevsena (Ditlevsen 1979b)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^q F_i\right) = \begin{cases} \leq \sum_{i=1}^q P(F_i) - \sum_{i=2}^q \max_{j<1} \{P(F_i \cap F_j)\} \leq \sum_{i=1}^q P(F_i) \\ \geq P(F_1) + \sum_{i=2}^q \left[\max \left\{ 0, P(F_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \{P(F_i \cap F_j)\} \right\} \right] \geq \max_{i=1}^q \{P(F_i)\} \geq 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Jeśli suma po prawej stronie górnej nierówności przekracza 1, to górnym ograniczeniem jest oczywiście liczba 1. Jak widać, zastosowanie nierówności (2.44) wymaga obliczenia prawdopodobieństw iloczynów postaci $P(F_i \cap F_j)$. Prawdopodobieństwa te mogą być oszacowane po skorzystaniu z transformacji do przestrzeni standardowych zmiennych normalnych (por. podrozdział 2.4). Można wykazać, że dla dwuwymiarowej dystrybuanty rozkładu normalnego Φ_2 o średniej (0,0) i wariancji (1,1) oraz współczynnika korelacji pomiędzy składowymi ρ prawdziwa jest równość

$$\Phi_2(x, y, \rho) = \Phi_0(x)\Phi_0(y) + \int_0^\rho \phi_2(x, y, t) dt, \quad (2.45)$$

w której ϕ_2 oznacza gęstość odpowiadającą Φ_2 (por. Ditlevsen i Madsen 1996, rozdz. 4.5). Równość ta prowadzi do następującego wzoru przybliżonego:

$$P(F_i \cap F_j) \approx \Phi_0(-\beta_i)\Phi_0(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{ij}} \phi_2(-\beta_i, -\beta_j, t) dt, \quad (2.46)$$

w którym ρ_{ij} oznacza współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi $g_i(\mathbf{X})$ oraz $g_j(\mathbf{X})$, przy czym g_i, g_j są funkcjami stanu granicznego elementów i oraz j , odpowiednio, zaś β_i, β_j odpowiadającymi im wskaźnikami niezawodności według metody FORM (por. podrozdział 2.4).

Zamiast numerycznego obliczania całki we wzorze (2.46) Ditlevsen (1979b) zaproponował następujące oszacowanie prawdopodobieństwa $P(F_i \cap F_j)$

$$P(F_i \cap F_j) \begin{cases} \geq \max\{\Phi_0(-\beta_i)\Phi_0(-\beta_{j|i}), \Phi_0(-\beta_j)\Phi_0(-\beta_{i|j})\} \\ \leq \Phi_0(-\beta_i)\Phi_0(-\beta_{j|i}) + \Phi_0(-\beta_j)\Phi_0(-\beta_{i|j}) \end{cases} \quad (2.47)$$

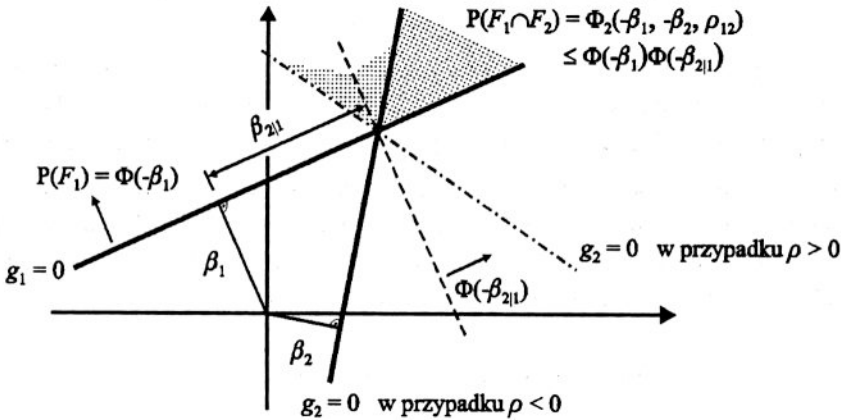
dla $\rho_{ij} > 0$ oraz

$$P(F_i \cap F_j) \leq \min\{\Phi_0(-\beta_i)\Phi_0(-\beta_{j|i}), \Phi_0(-\beta_j)\Phi_0(-\beta_{i|j})\} \quad (2.48)$$

dla $\rho_{ij} < 0$, przy czym tzw. warunkowy wskaźnik niezawodności $\beta_{i|j}$ (lub $\beta_{j|i}$) definiuje się następująco:

$$\beta_{i|j} = \frac{\beta_i - \rho_{ij}\beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}. \quad (2.49)$$

Ideę oszacowań (2.47), (2.48) przedstawiono schematycznie na rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Idea dowodu nierówności (2.48), Ditlevsen i Madsen (1996)

Inne podejście zaproponowali Hohenbichler i współautorzy (1987), którzy do oszacowania prawdopodobieństwa $P\left(\bigcap_{j=1}^m F_j\right)$ korzystają z transformacji zadania do układu standardowych, niezależnych zmiennych normalnych (por. podrozdział 2.4), a następnie poszukują wspólnego β -punktu dla zbioru będącego iloczynem wszystkich zdarzeń F_j , tj. punktu y^* , spełniającego warunek

$$\beta = \min \|\mathbf{y}\| \quad \text{dla} \quad \left\{ \mathbf{y} : \bigcap_{j=1}^m \{G_j(\mathbf{y}) < 0\} \right\}. \quad (2.50)$$

Następnie prawdopodobieństwo awarii szacowane jest zgodnie z następującym wzorem:

$$P(F) = P\left(\bigcap_{j=1}^m F_j\right) \approx \Phi_k(-\boldsymbol{\beta}; \mathbf{R}) C_{\text{SORM}}, \quad (2.51)$$

gdzie Φ_k jest k -wymiarową dystrybuantą rozkładu normalnego

$$\Phi_k(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{\beta}} \phi_k(u) du, \quad (2.52)$$

przy czym

$$\phi_k(u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\mathbf{R})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u^T \mathbf{R}^{-1} u)\right]. \quad (2.53)$$

Współrzędne wektora $\boldsymbol{\beta}$ mają postać

$$\beta_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{y}^*, \quad (2.54)$$

gdzie

$$\mathbf{a}_j = \nabla G_j(\mathbf{y}^*). \quad (2.55)$$

Ponadto \mathbf{R} jest macierzą współczynników korelacji o elementach

$$\mathbf{R} = [\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j]. \quad (2.56)$$

Wymiar k we wzorze (2.51) oznacza ilość „aktywnych” powierzchni stanu granicznego, tj. takich, do których należy wspólny β -punkt \mathbf{y}^* (na ogół $k < m$). Stała C_{SORM} we wzorze (2.51) jest mnożnikiem korekcyjnym, uwzględniającym krzywizny „aktywnych” powierzchni stanu granicznego w β -punkcie \mathbf{y}^* . Ponadto wzór (2.51) jest prawdziwy przy założeniu, że $G_i(0) > 0$ dla przynajmniej jednego i . Aby określić stałą C_{SORM} założmy, że $G_i(\mathbf{y}^*) = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, k$, podczas gdy $G_i(\mathbf{y}^*) > 0$ dla $i = k+1, \dots, m$, wówczas

$$C_{\text{SORM}} = \|\det(\mathbf{D})\|^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.57)$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \left\{ \delta_{ij} - \sum_{s=1}^k \gamma_s \frac{\partial^2 G_s(\mathbf{y}^*)}{\partial y_i \partial y_j}; \quad i, j = k+1, \dots, n \right\}, \quad (2.58)$$

współczynniki zaś γ_s są rozwiązaniem następującego układu równań liniowych

$$\mathbf{y}^* = \sum_{i=1}^k \gamma_i \mathbf{a}_i, \quad (2.59)$$

a δ_{ij} jest deltą Kroneckera. W przypadku $k = 1$, czyli pojedynczej powierzchni stanu granicznego, wzór (2.51) redukuje się do postaci

$$P(F_1) \approx \Phi(-\|\mathbf{y}^*\|) C_{\text{SORM}}, \quad (2.60)$$

przy czym

$$\mathbf{D} = \left\{ \delta_{ij} - \frac{\|\mathbf{y}^*\|}{\|\nabla G(\mathbf{y}u^*)\|} \frac{\partial^2 G_i(\mathbf{y}^*)}{\partial y_i \partial y_j}; \quad i, j = 2, \dots, n \right\}, \quad (2.61)$$

co jest zgodne z rezultatem Breitunga (1984), wyrażonym za pomocą wzoru (2.37).

Dla $m = k = n$ można zastosować wzór zaproponowany przez Rubena (1964)

$$P(F) = P\left(\bigcap_{j=1}^n F_j\right) \approx (\det(\mathbf{R}))^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\varphi_1(y_i^*)}{(-\gamma_i)}, \quad (2.62)$$

gdzie $y_i^* = \beta_i$, przy czym β_i jest określone wzorem (2.54), \mathbf{R} zaś wzorem (2.56). Alternatywą do (2.61) jest propozycja rekurencyjnych obliczeń podana przez Rackwiza i współautorów (Hohenbichler i Rackwitz 1985, Gollwitzer i Rackwitz 1988).

Koncepcja oszacowania prawdopodobieństwa według wzoru (2.51) daje dobre wyniki, ale wymaga stosowania dość skomplikowanych algorytmów numerycznych. Znacznie prostsza obliczeniowo propozycja polega na rezygnacji z poszukiwania wspólnego β -punktu dla wszystkich powierzchni stanu granicznego. Zamiast tego proponuje się znalezienie metodą FORM indywidualnych β -punktów dla poszczególnych powierzchni stanu granicznego oraz oszacowanie prawdopodobieństwa awarii według następującej przybliżonej formuły:

$$P(F) = P\left(\bigcap_{j=1}^m F_j\right) \approx \Phi_m(-\boldsymbol{\beta}', \mathbf{R}). \quad (2.63)$$

We wzorze (2.63) $\boldsymbol{\beta}'$ oznacza wektor złożony z minimalnych odległości poszczególnych aktywnych powierzchni stanu granicznego od początku układu współrzędnych, Φ_m zaś określa wzór (2.52). Zatem wzór (2.63) daje inne oszacowanie aniżeli wzór (2.51). Jednak przybliżenie to można uznać za dobre tylko w przypadku powierzchni stanu granicznego niewiele odbiegających od liniowych.

2.6. Metody symulacyjne

Obliczanie miar niezawodności metodami symulacyjnymi opiera się na zastosowaniu metody Monte Carlo (Zieliński 1970, Rubinstein 1981). W podrozdziale 2.6.1 podano podstawowe informacje na ten temat oraz omówiono kilka wybranych metod redukcji wariancji.

2.6.1. Klasyczna metoda Monte Carlo

Stosując funkcję I indikatora zbioru (zwaną też czasem funkcją charakterystyczną zbioru)

$$I[g(\mathbf{x}) < 0] = \begin{cases} 1 & \text{gdy } g(\mathbf{x}) < 0 \\ 0 & \text{gdy } g(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

prawdopodobieństwo awarii (2.21) można zapisać w postaci

$$p_F = P\{g(\mathbf{X}) < 0\} = E_{\mathbf{X}}\{I[g(\mathbf{X}) < 0]\} = \int_{\mathbf{R}^n} I[g(\mathbf{x}) < 0] f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.65)$$

gdzie $E_{\mathbf{X}}$ oznacza wartość oczekiwaną względem rozkładu wektora losowego \mathbf{X} . Wobec tego nieobciążony estymator tego prawdopodobieństwa, przy liczbie prób N_{rl} , ma postać

$$p_F \approx \frac{1}{N_{rl}} \sum_{j=1}^{N_{rl}} I[g(\mathbf{X}) < 0] = J_1, \quad (2.66)$$

skąd otrzymuje się następujący wzór na jego wariancję:

$$\text{Var}\{J_1\} = \frac{1}{N_{rl}^2} \text{Var}\{I[g(\mathbf{X}) < 0]\} = \frac{1}{N_{rl}^2} p_F(1 - p_F). \quad (2.67)$$

Klasyczna metoda Monte Carlo polega na „próbkowaniu” przez komputer wektorów z rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} za pomocą numerycznego generatora liczb pseudolosowych (Zieliński 1970, Rubinstein 1981), a następnie obliczaniu przybliżonej wartości prawdopodobieństwa awarii według estymatora (2.66). Równoważny temu prawdopodobieństwu wskaźnik niezawodności β uzyskuje się z zależności (2.31). Współczynnik zmienności estymatora J_1 wynosi

$$\text{cov}\{J_1\} = \frac{\sigma\{J_1\}}{E\{J_1\}} = \sqrt{\frac{1 - p_F}{p_F N_{rl}}}, \quad (2.68)$$

co oznacza zbieżność rzędu $N_{rl}^{-\frac{1}{2}}$. W myśl mocnego prawa wielkich liczb Kołmogorowa (Chung 1974) zmienna losowa J_1 jest zbieżna do p_F z prawdopodobieństwem 1. W obliczeniach praktycznych trudno jest jednak określić zbiór o prawdopodobieństwie 1, na którym ta zbieżność ma miejsce. Dlatego też łatwiej jest posługiwać się słabszą formą zbieżności, tj. zbieżnością według prawdopodobieństwa. Oznacza to, że dla dowolnych liczb $\varepsilon > 0$ oraz $\delta > 0$ istnieje taka liczba naturalna N_0 , że dla $N_{rl} > N_0$ prawdziwa jest nierówność

$$P\{|J_1 - p_F| \geq \varepsilon\} < \delta. \quad (2.69)$$

Problem dokładności wyznaczenia prawdopodobieństwa p_F sprowadza się więc do oszacowania liczby N_0 . Można pokazać (Puła 1985), że zastosowanie nierówności Kołmogorowa (Chung 1974) prowadzi do rezultatu: $N_0 = 2^{j_0-1}$, gdzie j_0 jest najmniejszą liczbą spełniającą nierówność

$$\varepsilon^{-2} \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{2^j}{2^{2^j}} < \delta. \quad (2.70)$$

W oparciu zaś o twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego nietrudno pokazać, że

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{2^j}{2^{2^j}} = \frac{8}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^{j_0} (3j_0 + 1). \quad (2.71)$$

Jeśli znane jest oszacowanie od góry prawdopodobieństwa p_F , to oszacowanie liczby N_0 może być jeszcze dokładniejsze (Puła 1985). Na przykład, jeśli $p_F < 0,1$, to dla $\varepsilon = 0,01$ oraz $\delta = 0,03$ potrzebna liczba realizacji wynosi $N_0 = 1024$, zaś dla $\varepsilon = 0,01$ oraz $\delta = 0,0006$ potrzeba $N_0 = 8192$ realizacji. Przy $p_F < 0,01$ oraz $\varepsilon = 0,001$ i $\delta = 0,0016$ niezbędna liczba realizacji wynosi $N_0 = 16384$. Widać zatem, że do oszacowania małych prawdopodobieństw, z którymi mamy do czynienia w zagadnieniach niezawodności, potrzeba bardzo dużej liczby realizacji („prób”), co czyni klasyczną metodę Monte Carlo mało efektywną (choć ten argument jest nieco osłabiony w dobie coraz szybszych komputerów o olbrzymich możliwościach obliczeniowych).

Niewątpliwą zaletą tej metody jest jednak możliwość przybliżonego oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa M (wzór (2.2)), czyli pełnej informacji probabilistycznej o bezpieczeństwie danej konstrukcji. Przykłady wyznaczania takich rozkładów dla różnych rodzajów utraty stateczności przez masywny przyczółek mostowy przedstawiono w pracy Biernatowskiego i Puły (1988).

Lepszą efektywność daje metoda Monte Carlo w zakresie obliczania momentów statystycznych zmiennych losowych. Zwykle już liczba realizacji rzędu 1000 daje dobre oszacowanie wartości oczekiwanej oraz wariancji rozpatrywanej zmiennej lo-

sowej. Stosując zatem tę technikę do wyznaczenia pierwszych dwóch momentów statystycznych zapasu bezpieczeństwa M można otrzymać przybliżoną wartość wskaźnika niezawodności Cornella β_C obliczanego według wzoru (2.6).

2.6.2. Metoda symulacji ważonej

Chcąc uzyskać szybszą zbieżność w metodach symulacyjnych w konkretnych zastosowaniach należy tak zmodyfikować metodę Monte Carlo, aby uzyskać redukcję wariancji estymatora p_F . Jednym ze sposobów redukcji wariancji, przydatnym do obliczania prawdopodobieństwa awarii, jest symulacja ważona (*the importance sampling technique*). Technika ta, zaproponowana przez Kahna i Marshalla (Kahn i Marshall 1953), opiera się na następujących zależnościach (Rubinstein 1981):

$$\begin{aligned} p_F &= E_{\mathbf{X}}\{I[g(\mathbf{X}) < 0]\} = \int_{\mathbf{R}^n} I[g(\mathbf{x}) < 0] f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} I[g(\mathbf{w}) < 0] \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{w})}{k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})} k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} = E_{\mathbf{W}} \left\{ I[g(\mathbf{W}) < 0] \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{W})}{k_{\mathbf{W}}(\mathbf{W})} \right\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

W tych zależnościach wprowadzono nową funkcję gęstości prawdopodobieństwa $k_{\mathbf{W}}$ pewnego innego wektora losowego \mathbf{W} . Wartość oczekiwana po ostatnim znaku równości jest obliczana względem rozkładu wektora \mathbf{W} . Wzór (2.72) daje następujący estymator prawdopodobieństwa p_F :

$$p_F \approx \frac{1}{N_{rl}} \sum_{i=1}^{N_{rl}} I[g(\mathbf{W}_i) < 0] \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{W}_i)}{k_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_i)} = J_2. \quad (2.73)$$

Wariancje estymatora J_2 szacuje się za pomocą wzoru

$$\text{Var}\{J_2\} = \frac{1}{N_{rl}} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left(I[g(\mathbf{w}) < 0] \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{w})}{k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})} \right)^2 k_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} - p_F^2 \right). \quad (2.74)$$

Pomysł metody polega na tym, aby przez odpowiedni dobór gęstości prawdopodobieństwa $k_{\mathbf{W}}$ spowodować redukcję wariancji (2.74) w stosunku do wariancji (2.67). W zastosowaniach do zagadnień niezawodności metoda ta rozpowszechniła się dopiero po opracowaniu metod FORM oraz SORM, gdyż zauważono, że najlepsze efekty można uzyskać dobierając gęstość $k_{\mathbf{W}}$ skoncentrowaną wokół punktu obliczeniowego jako punktu o największej wiarygodności. Pierwsze prace na ten temat pochodziły od Shinozuki (1983) i Harbitza (1983), a kolejne modyfikacje i ulepszenia zamieszczono w pracach Melchersa (1984), Hohenbichlera i Rackwitz (1988), Harbitza (1986) oraz

Fujity i Rackwitza (1988). Melchers (1984) zauważył, że korzystając z metod opisanych w punkcie 2.5 wzór (2.73) można zapisać w postaci

$$p_F \approx \frac{1}{N_H} \sum_{i=1}^{N_H} \mathbb{I}[G(\mathbf{Y}_i) < 0] \frac{\phi_n(\mathbf{Y}_i)}{k_W(\mathbf{Y}_i)} = J_3, \quad (2.75)$$

przy czym n określa liczbę bazowych zmiennych losowych w rozpatrywanym zadaniu, \mathbf{Y} jest standardowym normalnym wektorem losowym o gęstości ϕ_n , zaś G jest postacią funkcji stanu granicznego w przestrzeni standardowych normalnych zmiennych losowych. Następnie przyjął jako k_W n -wymiarową gęstość rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej w punkcie obliczeniowym \mathbf{y}^* i diagonalnej macierzy kowariancji (często przyjmowanej jako macierz jednostkowa).

Propozycja Rackwitza i współautorów (Rackwitz i Hohenbichler 1988, Fujita i Rackwitz 1988) polegała na tym, aby przybliżoną wartość prawdopodobieństwa awarii $P(A)$ obliczoną metodą FORM lub SORM pomnożyć przez odpowiedni czynnik korekcyjny C . Wtedy $p_F = P(A)C$, przy czym

$$C = \frac{1}{N_H} \sum_{i=1}^{N_H} \frac{\Phi_0(-\lambda(\mathbf{y}_i))\phi_{n-1}(\mathbf{y}_i)}{P(A)\psi_{n-1}(\mathbf{y}_i)}. \quad (2.76)$$

W powyższym wzorze ϕ_{n-1} oznacza $(n-1)$ -wymiarową gęstość standardowego rozkładu normalnego. Gęstością „próbkiowania” jest $(n-1)$ -wymiarowa gęstość normalna ψ_{n-1} . W przypadku stosowania metody FORM ψ_{n-1} jest gęstością rozkładu o jednostkowej wariancji i wartości oczekiwanej w punkcie obliczeniowym \mathbf{y}^* . Natomiast w sytuacji stosowania metody SORM odchylenia standardowe są postaci $\sqrt{(1-\beta\kappa_i)}$, gdzie κ_i są krzywiznami głównymi powierzchni stanu granicznego w otoczeniu punktu obliczeniowego \mathbf{y}^* . Dla każdego wygenerowanego z rozkładu o gęstości ψ_{n-1} wektora \mathbf{y}_i znajduje się jego rzut na powierzchnię stanu granicznego w kierunku prostopadłym do hiperpłaszczyzny stycznej (w punkcie obliczeniowym \mathbf{y}^*). Odległość tego rzutu od hiperpłaszczyzny równoległej do stycznej i przechodzącej przez początek układu współrzędnych jest oznaczana przez $\lambda(\mathbf{y}_i)$. Dalsze szczegóły można znaleźć w pracach Hohenbichlera i Rackwitza (1988) oraz Fujity i Rackwitza (1988). Takie podejście wydaje się bardziej efektywne od podejścia Melchersa, gdyż oprócz informacji o położeniu punktu obliczeniowego wykorzystuje informacje o gradientach lub krzywiznach w tym punkcie. Przekonują o tym przykłady obliczeniowe zamieszczone w pracy Fujity i Rackwitza (1988). Obszerniejszy przegląd metod związanych z symulacją ważoną oraz kierunkową podano w pracach Dolińskiego (1988) oraz Puły (1991).

2.6.3. Metoda warunkowej wartości oczekiwanej

Metoda warunkowej wartości oczekiwanej (*the conditional expectation method*), dla której odpowiedniejszą nazwą byłaby być może metoda prawdopodobieństwa warunkowego, została zaproponowana do obliczeń niezawodności konstrukcji przez Ayyuba i współautorów (Ayyub i Haldar 1984, Ayyub i Lai 1991, Ayyub i Chia 1992) oraz Karmachandaniego i Cornella (1991). W metodzie tej wektor bazowych zmiennych losowych $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ rozkłada się na wektor zmiennych generowanych $\mathbf{X}' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_k)$ oraz zmiennych kontrolnych $\mathbf{X}'' = (X''_1, X''_2, \dots, X''_l)$, przy czym $k + l = n$, w taki sposób, że $\mathbf{X} = (\mathbf{X}', \mathbf{X}'') = (X'_1, \dots, X'_k, X''_1, \dots, X''_l)$. Stąd prawdopodobieństwo awarii może być zapisane w postaci

$$p_F = \int \left[\int_{\{x'' : g(\mathbf{x}'x'') < 0\}} f_{\mathbf{X}''|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'}(\mathbf{x}'') d\mathbf{x}'' \right] f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (2.77)$$

$f_{\mathbf{X}''|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'}$ jest gęstością warunkową wektora losowego \mathbf{X}'' pod warunkiem, że $\mathbf{X}' = \mathbf{x}'$. Całka w nawiasie kwadratowym jest prawdopodobieństwem warunkowym, więc wzór (2.77) można napisać w postaci

$$p_F = \int p_{F|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'} f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (2.78)$$

Oznacza to, że nieobciążony estymator prawdopodobieństwa awarii ma postać

$$p_F \approx \frac{1}{N_{rl}} \sum_{i=1}^{N_{rl}} p_{F|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'_i} = J_4, \quad (2.79)$$

gdzie wektory \mathbf{x}' są generowane z rozkładu o gęstości $f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}')$. Prawdopodobieństwo warunkowe $p_{F|\mathbf{X}'=\mathbf{x}'_i}$ musi być oszacowane inną metodą, np. metodami FORM lub SORM. Wybór zbioru kontrolnego zmiennych losowych musi być dokonany w taki sposób, aby uprościć oszacowanie prawdopodobieństwa awarii i jednocześnie istotnie zredukować wymiar problemu.

2.6.4. Metoda adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej (*the adaptive conditional expectation method*)

Karmachandani, Bjerager i Cornell (Karmachandani, Bjerager i Cornell 1989, Karmachandani i Cornell, 1991) zaproponowali efektywną metodę redukcji wariancji, będącą połączeniem techniki warunkowej wartości oczekiwanej z techniką symulacji ważonej. W podejściu tym prawdopodobieństwo awarii przedstawia się w postaci

$$p_F = \int \left[p_{F|X'=x'} \frac{f_{X'}(x')}{k_W(x')} \right] k_W(x') dx', \quad (2.80)$$

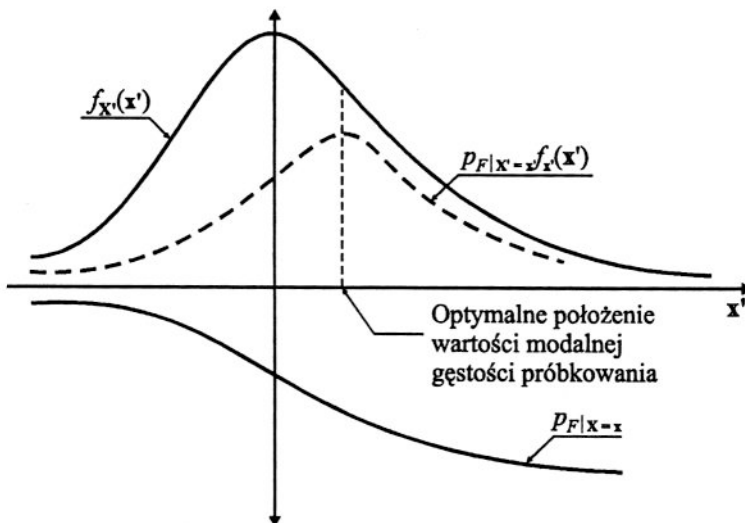
co prowadzi do następującego estymatora prawdopodobieństwa awarii

$$p_F \approx \frac{1}{N_{rl}} \sum_{i=1}^{N_{rl}} p_{F|X'=x'_i} \frac{f_{X'}(x'_i)}{k_W(x'_i)} = J_5. \quad (2.81)$$

Jako gęstość próbkowania Karmachandani i Cornell (1991) zaproponowali gęstość wektora zmiennych generowanych $f_{X'}(x')$ przesuniętą do punktu, w którym wyrażenie $p_{F|X'=x'} f_{X'}(x')$ osiąga maksymalną wartość. Taki sposób postępowania przedstawiono na rysunku 2.4.

Dobór gęstości próbkowania k_W dokonuje się na drodze iteracyjnej w czasie procesu generowania poprzez dostosowywanie (adaptację) tej gęstości co pewną określoną liczbę realizacji procesu symulacyjnego. Dostosowanie to polega na poszukiwaniu punktu, w którym wyrażenie $p_{F|X'=x'} f_{X'}(x')$ osiąga maksimum, jeśli się weźmie pod uwagę wszystkie poprzednie realizacje procesu symulacyjnego, a następnie przesunięciu początkowej gęstości $f_{X'}(x')$ do tego punktu. W tej sytuacji estymator (2.81) przybiera postać

$$p_F \approx \frac{1}{N_{rl}} \sum_{i=1}^M \left[\sum_{j=N_{j-1}+1}^{N_j} p_{F|X'=x'_{ij}} \frac{f_{X'}(x'_{ij})}{k_{X'}^i(x'_{ij})} \right] = J_6, \quad (2.82)$$



Rys. 2.4. Schematyczne przedstawienie doboru gęstości próbkowania w metodzie adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej

gdzie N_{jt} jest całkowitą liczbą realizacji w procesie symulacyjnym, j bieżącym numerem gęstości próbkowania, M całkowitą liczbą adaptacji gęstości próbkowania, i bieżącym numerem realizacji. Oczywiście $N_0 = 0$ oraz $N_M = N_{jt}$. Wariancję estymatora J_6 można oszacować ze wzoru

$$\text{Var}[J_6] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^M \left[\sum_{j=N_{j-1}+1}^{N_j} \left(P_{j|X'=x'_{ij}} \frac{f_{X'}(\mathbf{x}'_{ij})}{k_{X'}^i(\mathbf{x}'_{ij})} - J_6 \right)^2 \right]. \quad (2.83)$$

Wzór (2.83) pozwala śledzić współczynnik zmienności estymatora prawdopodobieństwa awarii podczas procesu symulacyjnego. Inny problem stanowi dobór wariancji zmiennej próbkowania. Karamchandani i współautorzy (1989) sugerują stosowanie dużej wariancji na początku procesu symulacyjnego w celu znacznego „rozrzucenia” symulowanych punktów. Następnie wariancja ta może być stopniowo redukowana. Melchers (1990) sugeruje natomiast, aby ta wariancja przez cały czas była nie mniejsza od wariancji początkowej, proponując nawet zwiększenie jej do dwóch razy. Zaobserwował on także efekt, że zbyt duża lub zbyt mała wariancja może w znacznym stopniu zmniejszyć szybkość zbieżności (rozumianą jako stabilizację współczynnika zmienności estymatora J_6). Mori i Ellingwood wskazali, że optymalna wariancja może być otrzymana iteracyjnie, lecz wymaga to bardzo dużej liczby realizacji w procesie symulacyjnym.

2.6.5. Symulacja kierunkowa

Nieco inny sposób redukcji wariancji w obliczeniach symulacyjnych opiera się na próbkowaniu z rozkładu jednostajnego na n -wymiarowej sferze jednostkowej (Deak 1985). Na potrzeby teorii niezawodności konstrukcji metody te rozwinęli Ditlevsen (1985), Bjerager (1988) oraz Melchers (1991). Metoda ta oparta jest na następujących zależnościach:

$$p_F = \int_{\{G(\mathbf{y}) < 0\}} \phi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{S^n} \int_r^\infty f_{\chi_n^2}(r^2) dr^2 d\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{S^n} \{1 - F_{\chi_n^2}[r^2(\boldsymbol{\alpha})]\} d\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \quad (2.84)$$

gdzie \mathbf{y} jest elementem przestrzeni standardowych normalnych niezależnych zmiennych, $f_{\chi_n^2}$ oraz $F_{\chi_n^2}$ są odpowiednio gęstością prawdopodobieństwa oraz dystrybuantą

rozkładu chi-kwadrat o n stopniach swobody, S^n – sferą jednostkową w przestrzeni

\mathbf{R}^n , $\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ jest jednostajną miarą probabilistyczną skoncentrowaną na S^n , $r(\boldsymbol{\alpha})$ jest odległością od początku układu współrzędnych \mathbf{y} do powierzchni stanu granicznego $G(\mathbf{y}) = 0$ w kierunku jednostkowego wektora $\boldsymbol{\alpha}$. Z relacji (2.84) wynika następująca postać estymatora prawdopodobieństwa w symulacji kierunkowej:

$$J_7 = \frac{1}{N_{rl}} \sum_{i=1}^{N_{rl}} \{1 - F_{\chi_n^2}[r^2(\mathbf{a}_i)]\}, \quad (2.85)$$

przy czym wektory \mathbf{a}_i są próbkowane z rozkładu jednostajnego na sferze jednostkowej S^n . Możliwość dokładnego obliczenia każdego z prawdopodobieństw $\{1 - F_{\chi_n^2}[r^2(\mathbf{a}_i)]\}$ powoduje, że wariancja estymatora J_7 jest mniejsza niż wariancja estymatora J_1 .

Bardzo istotną cechą tej metody jest możliwość obliczania prawdopodobieństw awarii w sytuacji, gdy powierzchnia stanu granicznego $G(\mathbf{y}) = 0$ ma kształt zbliżony do sferycznego (hipersferycznego). W tym bowiem przypadku metody FORM i SORM są trudne do zastosowania.

Istnieje jeszcze kilkanaście metod redukcji wariancji użytecznych podczas stosowania technik symulacyjnych, np. metoda kwadratów łańciskich lub metoda zmiennych antytetycznych czy próbkowania warstwowego. Jednak ich zastosowanie do obliczeń w ramach niezawodności konstrukcji jest bardzo niewielkie, ponadto nie będą one wykorzystywane w metodach i obliczeniach opisanych w dalszych rozdziałach tej książki. Stosunkowo obszerny przegląd klasycznych metod redukcji wariancji można znaleźć w monografii Rubinsteina (1981).

2.7. Metody dla niejawnych funkcji stanu granicznego

Efektywność obliczeń niezawodności konstrukcji zależy w dużym stopniu od złożoności funkcji stanu granicznego (2.1). W wielu przypadkach funkcja ta nie jest dana w postaci jawnej, lecz poprzez skomplikowaną procedurę numeryczną, np. procedurę metody elementów skończonych. Wówczas poszukiwania prawdopodobieństw awarii metodami FORM i SORM, czy choćby wskaźnika niezawodności Hasofer–Linda, mogą być bardzo utrudnione lub wręcz niemożliwe. Z uwagi na bardzo liczne zastosowania metody elementów skończonych czy elementów brzegowych w teorii konstrukcji, metody dla niejawnych zależności funkcji stanu granicznego od bazowych zmiennych losowych stają się bardzo pożądanym narzędziem w teorii niezawodności konstrukcji. W tym podrozdziale przedstawione zostaną wybrane metody tego typu.

2.7.1. Metoda perturbacyjna

Metoda perturbacyjna zaproponowana w pracach Hisady i Nakagiriego (1981, 1985), Liu, Belytschko i Mani (Liu et al. 1986, Liu et al. 1987) oraz Shinozuki (Shinozuka 1987b) do zadań liniowej teorii sprężystości polega na rozwinięciu macierzy

sztynności w szereg potęgowy względem fluktuacji losowych zadanego jej parametru. Rozważmy pewną dyskretyzację jednorodnego ośrodka sprężystego w ramach metody elementów skończonych oraz odpowiadające jej równanie macierzowe dla wektora przemieszczeń węzłowych \mathbf{U}

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (2.86)$$

w którym \mathbf{A} oznacza macierz sztywności, \mathbf{F} zaś jest wektorem zewnętrznych obciążeń węzłowych. Przypuśćmy, że macierz sztywności dla ośrodka liniowo sprężystego podlega losowym fluktuacjom wynikającym z losowego pola modułu Younga $\{E(\mathbf{x})\}$ (zagadnienia pól losowych parametrów podłoża będą omówione w rozdziale 3). Przypuśćmy dalej, że pole losowe modułu Younga zostało zdyskretyzowane tak, że w ramach elementu i moduł jest zmienną losową postaci

$$E_i = E_0 + \Delta e_i, \quad (2.87)$$

przy czym E_0 jest wartością oczekiwaną (średnią) modułu E , stałą dla całego ośrodka ze względu na jego jednorodność, Δe_i zaś zmienną losową o zerowej wartości oczekiwanej (losową fluktuacją modułu E). Stosując wzór Taylora można napisać

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^1 \Delta e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij}^2 \Delta e_i \Delta e_j + \dots, \quad (2.88)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_i^1 = \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Delta e_i} \right|_{\Delta e=0}, \quad \mathbf{A}_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \Delta e_i \partial \Delta e_j} \right|_{\Delta e=0} \quad (2.89)$$

oraz N oznacza liczbę elementów. Analogiczne rozwinięcie dla wektora przemieszczeń \mathbf{U} daje

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^1 \Delta e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^2 \Delta e_i \Delta e_j + \dots \quad (2.90)$$

Po podstawieniu (2.88) oraz (2.90) do (2.86) i porównaniu odpowiednich wyrazów rozwinięcia, otrzymuje się następujący rekurencyjny układ równań:

$$\mathbf{U}^0 = (\mathbf{A}^0)^{-1} \mathbf{F},$$

$$\mathbf{U}_i^1 = -(\mathbf{A}^0)^{-1} (\mathbf{A}_i^1 \mathbf{U}^0), \quad (2.91)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^2 = -(\mathbf{A}^0)^{-1} (\mathbf{A}_i^1 \mathbf{U}_j^1 + \mathbf{A}_j^1 \mathbf{U}_i^1 + \mathbf{A}_{ij}^2 \mathbf{U}^0).$$

.....

Uważa się (Vanmarcke i Grigoriu 1983; Zeitoun et al. 1988), że przybliżenie pierwszego rzędu (perturbacja pierwszego rzędu), tzn. będące wielomianem pierwszego stopnia ze względu na Δe_i , można stosować dla niezbyt dużych fluktuacji, tj. przy współczynniku zmienności nie większym niż ok. 15%. Stanowi to istotne ograniczenie możliwości stosowania tej metody. Uwzględnienie kolejnych wyrazów rozwinięcia w bardzo znaczny sposób zwiększa istotnie i tak znaczny czas obliczeń.

Nietrudno pokazać, że dla perturbacji pierwszego rzędu wartość oczekiwana przemieszczenia jest równa

$$(E\{\mathbf{U}\})^I = \mathbf{U}^0, \quad (2.92)$$

macierz zaś kowariancji $\text{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U})^I$ ma następującą postać:

$$\text{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U})^I = [c_{pq}^u], \quad c_{pq}^u = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ip}^1 c_{ij} u_{jq}^1, \quad (2.93)$$

gdzie

$$c_{ij} = E\{\Delta e_i \Delta e_j\}. \quad (2.94)$$

W przypadku perturbacji drugiego rzędu zachowuje się trzy pierwsze składniki rozwinięcia (2.90), a wyrażenia na wartość oczekiwaną i macierz kowariancji są następujące:

$$(E\{\mathbf{U}\})^{II} = \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij} E\{\Delta e_i \Delta e_j\}, \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U})^{II} = & \text{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U})^I + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^2 (\mathbf{U}_{kl}^2)^T [E\{\Delta e_i \Delta e_l\} E\{\Delta e_j \Delta e_k\} \\ & + E\{\Delta e_i \Delta e_k\} E\{\Delta e_j \Delta e_l\}]. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Macierz kowariancji pola losowych parametrów musi być znana i stanowi jedną z danych wejściowych do obliczeń. Warto zauważyć, że możliwe jest także oszacowanie wyższych momentów statystycznych zmiennej odpowiedzi. Jednak uzyskanie zadowalającej dokładności w ich oszacowaniu wymaga uwzględnienia kolejnych wyrazów rozwinięcia w szereg. W przedstawionym tu opisie, dla uproszczenia, pominięto losowy charakter współczynnika Poissona jako mniej istotny w ośrodku liniowo sprężystym. Zagadnienie wpływu zmienności losowej współczynnika Poissona zostanie szerzej omówione w podrozdziale 5.1. W przypadku, gdy obciążenia F także zmieniają się losowo, rozwinięcie Taylora stosuje się również do prawej strony rów-

niania (2.86), co zmienia postać kolejnych wyrazów rozwinięcia dla przemieszczeń we wzorze (2.91), ale ogólna postać równań (2.92)–(2.96) pozostaje taka sama (por. Przewłócki 1998).

W zasadzie metoda perturbacyjna nie jest przeznaczona do obliczania prawdopodobieństw awarii, a jedynie do uzyskania momentów statystycznych odpowiedzi (w tym przypadku przemieszczeń). Ewentualne obliczanie prawdopodobieństw wymagałoby wprowadzenia do obliczeń rozkładów prawdopodobieństwa parametrów modelu sprężystego, a przede wszystkim oszacowania wyższych momentów statystycznych odpowiedzi, co związane jest z bardzo dużym dodatkowym wzrostem ilości obliczeń.

Zastosowania metody perturbacyjnej do obliczeń metodą elementów skończonych w warunkach losowych parametrów obciążeń przedstawili w obszernej monografii Kleiber i Hien (1992). Zastosowania metody perturbacyjnej w dynamice stochastycznej przedstawił Śniady (2000), aplikacje zaś do stochastycznych równań różniczkowych teorii sprężystości pokazano w książce Przewłóckiego (1998).

W rozdziale 5 pokazane zostanie zastosowanie metody perturbacyjnej do oceny wpływu losowej granicy pomiędzy warstwami geotechnicznymi na osiadania podłoża.

2.7.2. Rozwinięcia Neumanna

Podobnie do metody perturbacyjnej, również stosując rozwinięcie Neumanna uzyskuje się jedynie informacje dotyczące momentów statystycznych zmiennej losowej, będącej odpowiedzią układu. Zastosowanie tego rozwinięcia zostało zaproponowane przez Yamazakiego i współautorów (1988b). W tej metodzie rozwinięciu w szereg podlega macierz odwrotna do macierzy sztywności, a nie wektor przemieszczeń węzłowych, jak to miało miejsce w metodzie perturbacyjnej. Rozważmy, tak jak poprzednio, równanie (2.86). Analogicznie do poprzedniego podrozdziału, analizowany będzie przypadek losowej macierzy sztywności oraz deterministycznego (nielosowego) wektora obciążeń \mathbf{F} .

Założmy, że macierz sztywności \mathbf{A} może być przedstawiona w postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A}, \quad (2.97)$$

gdzie \mathbf{A}_0 jest macierzą deterministyczną, której wyrazami są wartości oczekiwane poszczególnych wyrazów macierzy \mathbf{A} , zaś $\Delta\mathbf{A}$ jest macierzą losowych fluktuacji, których wartości oczekiwane są równe zeru, stąd $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0$. Wartością oczekiwaną rozwiązania \mathbf{U} będzie rozwiązanie zadania deterministycznego, tj.

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{F}. \quad (2.98)$$

Aby otrzymać wariancję (ewentualnie momenty wyższych rzędów), stosuje się reprezentację macierzy \mathbf{A}^{-1} , odwrotnej do \mathbf{A} , przez szereg Neumanna (Stewart i Sun 1990)

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \dots)(\mathbf{A}_0^{-1}), \quad (2.99)$$

gdzie $\mathbf{P} = -\mathbf{A}_0^{-1}\Delta\mathbf{A}$, a indeksy górne oznaczają kolejne potęgi w sensie iloczynu macierzowego. Rozwinięcie to jest szczególnym przypadkiem znanego z teorii operatorów twierdzenia o postaci operatora odwrotnego (por. Żelazko 1968). Po podstawieniu wyrażenia (2.99) do równania (2.86) i uwzględnieniu (2.98) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_0 + \mathbf{P}\mathbf{U}_0 + \mathbf{P}^2\mathbf{U}_0 + \mathbf{P}^3\mathbf{U}_0 + \dots \\ &= \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.100)$$

Wyrazy szeregu (2.100) mogą być otrzymywane według następującej zależności rekurencyjnej:

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{F},$$

$$\mathbf{U}_i = (\mathbf{A}_0)^{-1}\Delta\mathbf{A}\mathbf{U}_{i-1}, \quad i \geq 1. \quad (2.101)$$

Jeśli w szeregu (2.100) zachowa się jedynie wyrazy \mathbf{U}_0 oraz \mathbf{U}_1 , to uzyskane wyniki są identyczne z metodą perturbacyjną pierwszego rzędu.

Warto zauważyć, że formuły rekurencyjne (2.101) dają możliwość efektywnego zastosowania tego rozwinięcia w połączeniu z techniką Monte Carlo, gdyż macierz odwrotną do macierzy sztywności \mathbf{A}_0^{-1} oblicza się tylko raz w całym zadaniu.

Rozwinięcie Neumanna ma jeszcze jedną istotną zaletę – przejrzyste kryteria zbieżności szeregu (2.100). Rozpatrując ciąg równości

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{A}_0^{-1} = [\mathbf{A}_0(\mathbf{I} - (-\mathbf{A}_0^{-1}\Delta\mathbf{A}))]^{-1} = [\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{A}_0^{-1}\Delta\mathbf{A}]^{-1} = (\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})^{-1} \quad (2.102)$$

i biorąc pod uwagę fakt, że macierz \mathbf{A}_0 jako macierz sztywności jest nieosobliwa, łatwo zauważyć, że zbieżność szeregu (2.100) będzie zagwarantowana, o ile będzie istniała macierz odwrotna do macierzy $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$. Na podstawie ogólnych twierdzeń analizy funkcjonalnej (Żelazko 1968) wiadomo, że jeżeli promień spektralny $\sigma(\mathbf{P})$ operatora \mathbf{P} jest mniejszy od 1, to operator $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ jest odwracalny. W przypadku macierzy mamy

$$\sigma(\mathbf{P}) = \max_i |\lambda_i|, \quad (2.103)$$

gdzie λ_i są wartościami własnymi macierzy \mathbf{P} . Oznacza to, że moduły wszystkich wartości własnych macierzy \mathbf{P} powinny być mniejsze od jedności. Aby zapewnić spełnienie tego warunku, można zastosować procedurę zaproponowaną w pracy Yamazakiego i współautorów (1988b), polegającą na przedstawieniu macierzy \mathbf{A} w postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0^* + \Delta \mathbf{A}^*, \quad (2.104)$$

gdzie $\mathbf{A}_0^* = m\mathbf{A}_0$, co daje następujące relacje:

$$\mathbf{U}_0^* = \frac{1}{m} \mathbf{U}_0, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{U}_i^* = \left(\mathbf{A}_0 - \frac{1}{m} \mathbf{A} \right) \mathbf{U}_{i-1}^*, \quad i \geq 1. \quad (2.106)$$

Można udowodnić (Yamazaki et al., 1988b), że dobierając stałą m tak, aby

$$m > \frac{\max(\lambda_k) + 1}{2}, \quad (2.107)$$

gdzie $\max(\lambda_k)$ jest największą dodatnią wartością własną macierzy \mathbf{P} , zapewnia się zbieżność szeregu Neumanna dla dekompozycji (2.104). Oznacza to możliwość stosowania tej metody także w sytuacji, gdy losowe fluktuacje $\Delta \mathbf{A}$ są znaczne. Daje to istotną przewagę tej metodzie nad metodą perturbacyjną, w której poprawność wyników mogła być uzyskana jedynie dla małych fluktuacji losowych (por. Brząkała i Puła 1996).

W rozdziale 5 pokazane zostanie zastosowanie metody rozwinięć Neumanna do oceny wpływu losowej granicy pomiędzy warstwami geotechnicznymi na osiadania podłoża.

2.7.3. Metoda FERM

Metody perturbacyjna oraz rozwinięć Neumanna, w przedstawionej w poprzednich dwóch podrozdziałach formie, służyły do oszacowania dwóch pierwszych momentów statystycznych odpowiedzi, w zasadzie bez możliwości obliczenia prawdopodobieństwa awarii. Stworzenie takiej możliwości wymagałoby obliczania wyższych momentów statystycznych odpowiedzi, co wiąże się w tym przypadku z istotnymi trudnościami numerycznymi. Dlatego Der Kiureghian i współautorzy (Der Kiureghian i Ke 1988, Der Kiureghian i Liu 1989) zaproponowali metodę, pozwalającą na oszacowanie prawdopodobieństwa awarii w sytuacji, gdy obliczenia przemieszczeń konstrukcji wykonywane są z użyciem metody elementów skończonych. Metoda zaproponowana przez nich zawiera w sobie metodę FORM i nosi skrótową nazwę FERM (*finite element reliability method*). Istotny udział w opracowaniu tej metody mają także Arnbjerg-Nielsen i Bjerger (1988). Poniżej przedstawiono skrótowy opis metody FERM.

Niech \mathbf{S} oznacza wektor zmiennych odpowiedzi, które definiują kryterium awarii (funkcję stanu granicznego). Załóżmy, że niejawną zależność wektora odpowiedzi \mathbf{S} od bazowych zmiennych losowych \mathbf{X} opisana jest symbolicznie jako transformacja

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}). \quad (2.108)$$

Transformacja ta jest zwykle zadana w formie algorytmicznej i bywa nazywana transformacją mechaniczną w odróżnieniu od transformacji probabilistycznej określonej w podrozdziale 2.4. Niech $g(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ oznacza funkcję stanu granicznego, gdzie argumenty \mathbf{s} oraz \mathbf{x} oznaczają odpowiednio niejawną i jawną zależność g od bazowych zmiennych losowych. Istotą metody FERM jest podanie odpowiedniego algorytmu dla przybliżonego rozwiązania zadania (2.40) z funkcją stanu granicznego $g(\mathbf{s}, \mathbf{x})$. Zwykle ważną częścią algorytmu są procedury obliczania gradientów. Kilka propozycji takich algorytmów zestawili i porównali Liu i Der Kiureghian (1991). W zarysie przebieg obliczeń przedstawia się następująco:

1. Dla wybranego punktu \mathbf{y} w przestrzeni standardowych niezależnych zmiennych normalnych obliczane są odpowiadające temu punktowi wartości bazowych zmiennych losowych (wektor \mathbf{x}) poprzez odwrócenie transformacji probabilistycznej opisanej w podrozdziale 2.4.

2. Dla określonych wartości bazowych zmiennych losowych deterministyczną metodą elementów skończonych znajduje się wartości zmiennych odpowiedzi $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x})$.

3. Dla punktu \mathbf{y} oblicza się wartość funkcji stanu granicznego jako $G(\mathbf{y}) = g(\mathbf{s}, \mathbf{x})$.

4. Gradient funkcji stanu granicznego w przestrzeni standardowych zmiennych losowych obliczany jest ze wzoru

$$\nabla_{\mathbf{y}} G = [\nabla_{\mathbf{s}} g(\mathbf{s}, \mathbf{x})]_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{s}, \mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{s}, \mathbf{x})]_{\mathbf{s}} \mathbf{J}_{\mathbf{y}, \mathbf{x}}^{-1}, \quad (2.109)$$

przy czym $\mathbf{J}_{\mathbf{s}, \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{J}_{\mathbf{y}, \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$ oznaczają odpowiednio macierz Jacobiego

transformacji mechanicznej oraz macierz Jacobiego transformacji probabilistycznej. Obliczenie pierwszej z nich stanowi najtrudniejszy element zadania, gdyż pochodne $\frac{\partial s_i}{\partial x_j}$ nie są zazwyczaj obliczane w standardowych programach metody elementów

skończonych. Problem ten oraz sposób jego rozwiązania został szeroko omówiony w pracy Der Kiureghiana i Liu (1989). Dla zadania liniowo sprężystego odpowiednie pochodne cząstkowe przemieszczeń węzłowych \mathbf{U} względem bazowych zmiennych losowych \mathbf{X} można obliczyć według wzoru

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{A}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right) \quad (2.110)$$

(oznaczenia jak w podrozdziale 2.7.1). Dla zagadnień sprężystych, lecz geometrycznie nieliniowych, pewne sugestie dotyczące rozwiązania problemu można znaleźć w pracy Liu i Der Kiureghiana (1989).

Szczególnie prosty przypadek ma miejsce wówczas, gdy macierz sztywności \mathbf{A} jest deterministyczna, czyli nie zawiera elementów zależnych od bazowych zmiennych losowych, a losowo zmieniają się tylko obciążenia. Wówczas wzór (2.110) redukuje się do postaci

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}. \quad (2.111)$$

Należy podkreślić, że ze względu na konieczność numerycznego szacowania gradientów na stosunkowo mało licznych zbiorach punktów, metoda FERM może prowadzić do znacznych i trudnych do oszacowania błędów w ocenie prawdopodobieństw awarii, zwłaszcza gdy elementy macierzy sztywności są zmiennymi losowymi o dużych współczynnikach zmienności. Ponadto, jak już wcześniej zauważono, standardowe programy nie zawierają procedur umożliwiających szacowanie niezbędnych w metodzie FERM pochodnych cząstkowych.

Przykład zastosowania metody FERM do zagadnień związanych z osiadaniem fundamentów zostanie zademonstrowany w rozdziale 5.

2.7.4. Metoda powierzchni odpowiedzi *(the response surface method)*

Metoda powierzchni odpowiedzi, stosowana w wielu dziedzinach nauki, doczekała się już wyczerpujących opracowań monograficznych, jak na przykład Myersa (1971), Myersa i Montgomery'ego (1995) czy Boxa i Drapera (1996). Ogólnie mówiąc, polega ona na aproksymowaniu nieznannej funkcji, dla której znana jest jedynie pewna liczba wartości, przez odpowiednio dobraną znaną funkcję. Aproksymacja ta może być dokonana na podstawie wyników badań eksperymentalnych, a także wyników obliczeń numerycznych, np. wyników uzyskanych metodą elementów skończonych. W przypadku obliczeń numerycznych chodzi o określenie relacji pomiędzy parametrami modelu x_1, x_2, \dots, x_n , wprowadzonymi jako dane wejściowe, a wartościami otrzymanymi na „wyjściu” $y = k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Określenie, oczywiście w sposób przybliżony, takiej zależności prowadzi do zastąpienia uciążliwej do zaprogramowania procedury numerycznej przez prostą zależność analityczną, służącą do przewidywania „odpowiedzi” analizowanego modelu na zadane wymuszenia. Na potrzeby analizy niezawodności konstrukcji inżynierskich metodę tę zaadaptowano w latach osiemdziesiątych (Rackwitz 1982, Wong 1985, Faravelli 1989, Schüeller i inni 1989, Bucher i Bourgund 1990). Aby uprościć obliczenia niezawodnościowe, stosuje się możliwie nieskomplikowane funkcje, np. wielomiany drugiego stopnia (Bucher i Bourgund 1990). Uproszczenie może też polegać na uwzględnieniu tylko kilku najważniejszych dla danego problemu bazowych zmiennych losowych (np. takich, które mają największe współczynniki wrażliwości).

Istnieją różne możliwości aproksymowania nieznannej funkcji, np. interpolacja wielomianowa czy metody regresji. Tam, gdzie analizuje się zjawiska losowe, podejście regresyjne, wywodzące się ze statystyki matematycznej, wydaje się metodologicznie najbardziej adekwatne. Poniżej pokazano sposób aproksymowania funkcji stanu granicznego metodami regresji nieliniowej, który zastosowano następnie w rozdziałach 5 oraz 8. Zastosowania te związane będą z osiadaniem fundamentów, co spowodowało, że opis metody przedstawiono na przykładzie funkcji osiadania. Nie ogranicza to jednak ogólności proponowanej metody. Zatem zadanie polega na określeniu funkcji opisującej w sposób jawny osiadanie fundamentów w zależności od zmiennych takich, jak obciążenia, wielkości geometryczne i stałe materiałowe, które mogą być uważane za zmienne losowe. Funkcja ta, oznaczana dalej jako $U(\mathbf{X})$, będzie użyta do zdefiniowania funkcji stanu granicznego w sposób podany w rozdziale 5 (wzór (5.1)). W praktycznych zastosowaniach rzadko jest znana jawna postać funkcji osiadania. Najczęściej, dysponując programem metody elementów skończonych, można wyznaczyć jej wartości dla przyjętych wielkości stałych materiałowych, obciążeń oraz stałych geometrycznych modelu obliczeniowego MES. Przybliżoną postać funkcji $U(\mathbf{X})$ można modelować za pomocą regresji nieliniowej w następującej postaci:

$$E(U) = h(\mathbf{X}, \mathbf{B}) + err, \quad (2.112)$$

gdzie h jest pewną funkcją elementarną, której postać przyjmuje się jako założenie, $E(U)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej U , \mathbf{X} jest wektorem m argumentów, \mathbf{B} jest wektorem k szukanych parametrów modelu regresji, a err jest zmienną losową opisującą błąd estymacji funkcji U . Wyznaczenie wartości wektora parametrów \mathbf{B} dokonuje się poprzez proces minimalizacji sumy kwadratów różnic wielkości danych funkcji U_i (wartości funkcji) i przewidywanych \hat{U}_i

$$\Psi = \sum_i^n (U_i - \hat{U}_i)^2 \quad (2.113)$$

dla zestawu n danych: (U_i, X_{il}) , $i = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, m$. Zmienna losowa err błędnie estymacji ma zerową wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe równe

$$\sigma_{err} = \sqrt{\frac{\Psi_{\min}}{n - k}}. \quad (2.114)$$

Najbardziej rozpowszechnione metody znajdowania minimum funkcji Ψ to metoda linearyzacji oraz metoda najszybszego spadku (Marquardt 1963). Jednak w praktycznych obliczeniach obie wykazują wolną zbieżność ze względu na często spotykany kształt funkcji Ψ w przestrzeni parametrów B_i w postaci wydłużonego, krętego kanionu o stromych ścianach i małym spadku na jego dnie. Dla takich przypadków

kierunki zmian parametrów regresji, jakie podają obie metody, są do siebie prawie prostopadłe. W takich skomplikowanych sytuacjach warto użyć programu NLIN 2 opartego na kompromisie Marquardta (Marquardt 1966), pozwalającego wybrać pośredni, optymalny kierunek przyrostu wektora parametrów znacznie przyspieszający zbieżność procesu iteracyjnego.

Na potrzeby obliczeń prawdopodobieństwa awarii oraz wskaźnika niezawodności, szczególnie dogodna okazuje się aproksymacja wokół punktu obliczeniowego (por. podrozdział 2.4), gdyż otoczenie tego punktu ma największy wpływ na wartość prawdopodobieństwa awarii. Tego typu podejście zaproponowano w pracy Rackwitsza (1982) oraz Engelunda i Rackwitsza (1992). Będzie ono także stosowane w dalszej części niniejszej pracy. W bardziej skomplikowanych przypadkach może okazać się niezbędne poszukiwanie powierzchni odpowiedzi na drodze iteracyjnej, tj. poprzez kolejne rafinowanie wcześniej uzyskanych powierzchni.

2.7.5. Aproksymacja funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi wielomianami ortogonalnymi

Z probabilistycznego punktu widzenia wiedza o zmiennej losowej jest kompletna, gdy znany jest rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej. W przypadku rozkładu absolutnie ciągłego rozkład ten jest w pełni charakteryzowany przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Dla niejawniej funkcji stanu granicznego określenie dokładnej postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej odpowiedzi nie jest możliwe. Można jednak podjąć próbę przybliżonego wyznaczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej odpowiedzi, a następnie znalezienia prawdopodobieństwa awarii poprzez scałkowanie tej funkcji po odpowiednim obszarze. Przykładem takiej aproksymacji jest rozwinięcie Grama–Charliera lub rozwinięcie Edgewortha (Cramer 1999), względem kolejnych pochodnych gęstości standardowego rozkładu normalnego. Można udowodnić, że przy pewnych założeniach szereg Grama–Charliera jest zbieżny punktowo (Cramer 1999). Z drugiej strony, szybkość zbieżności tego szeregu jest niewielka. W konsekwencji dla zmiennych losowych, których rozkłady istotnie odbiegają od normalnego musi być znana bardzo duża liczba momentów statystycznych. Przykłady aproksymacji funkcji odpowiedzi szeregami Grama–Charliera oraz Edgewortha w analizie stateczności fundamentów analizowano we wcześniejszej pracy autora (Puła 1984).

Poniżej podana zostanie inna propozycja, oparta na następującym pomysł. Dla obliczenia prawdopodobieństwa awarii istotne jest, aby przybliżona postać funkcji gęstości odpowiedzi odbiegała w niewielkim stopniu od dokładnej w sensie różnicy całek w „ogonowych częściach rozkładu”. Prawdopodobieństwo awarii jest bowiem całką z odpowiedniej funkcji gęstości (przy założeniu że gęstość ta istnieje). Prowadzi to do wniosku, że naturalnym dla tej sytuacji rodzajem zbieżności nie jest zbieżność

punktowa, jak to ma miejsce w przypadku szeregu Grama–Charliera, ale zbieżność w przestrzeni $L^1(R)$ – funkcji całkowalnych na prostej rzeczywistej.

Założmy najpierw, że pewna funkcja gęstości prawdopodobieństwa f_0 jest skoncentrowana na przedziale $[-1, 1]$ oraz $f_0 \in L^2([-1, 1])$, przy czym $L^2([-1, 1])$ jest przestrzenią funkcji całkowalnych z kwadratem na odcinku $[-1, 1]$. Niech ponadto $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ oznacza dowolną bazę ortonormalną zupełną w $L^2([-1, 1])$ (por. np. Mlak 1972). Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_0 - \sum_{k=0}^n c_k \phi_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left| f_0(x) - \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x) \right|^2 dx = 0, \quad (2.115)$$

gdzie

$$c_k = \int_{-1}^1 f_0 \phi_k(x) dx, \quad (2.116)$$

granica zaś po lewej stronie równości (2.115) jest granicą w sensie normy w przestrzeni $L^2([-1, 1])$. Przypuśćmy, że należy oszacować małe prawdopodobieństwo postaci

$$p = \int_{1-\varepsilon}^1 f_0(x) dx \quad (2.117)$$

($1 > \varepsilon > 0$) przez

$$p_1 = \int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x) dx, \quad (2.118)$$

gdzie f_n jest n -tą sumą częściową uogólnionego szeregu Fouriera względem ortonormalnej bazy $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$. Wówczas

$$|p_0 - p_1| \leq \int_{1-\varepsilon}^1 |f_0 - f_n| dx = \|f_0 - f_n\|_{L^1([1-\varepsilon, 1])}, \quad (2.119)$$

przy czym norma po prawej stronie równania (2.119) jest normą w przestrzeni $L^1([1-\varepsilon, 1])$ funkcji bezwzględnie całkowalnych na przedziale $[1-\varepsilon, 1]$. Zastosowanie nierówności Schwarz'a (por. np. Mlak 1972) do normy z prawej strony (2.119) daje oszacowanie

$$\|f_0 - f_n\|_{L^1([1-\varepsilon, 1])} \leq \sqrt{\varepsilon} \|f_0 - f_n\|_{L^2([1-\varepsilon, 1])}, \quad (2.120)$$

a stąd wobec (2.119)

$$|p_0 - p_1| \leq \sqrt{\varepsilon} \|f_0 - f_n\|_{L^2([1-\varepsilon, 1])} \leq \sqrt{\varepsilon} \|f_0 - f_n\|_{L^2([-1, 1])} \quad (2.121)$$

Nierówność (2.121) pokazuje, że dla oszacowania małych prawdopodobieństw poprzez aproksymowane funkcji gęstości ciągiem innych funkcji, zbieżność w sensie średniokwadratowym ma istotne znaczenie (większe niż zbieżność punktowa ciągu funkcji). Nawet jeśli wyrazy ciągu mają charakter oscylacyjny, jak to ma miejsce w przypadku aproksymacji wielomianami o coraz wyższych stopniach, to i tak oszacowanie prawdopodobieństwa zależy od tego, jak blisko jest funkcja aproksymująca funkcji granicznej w sensie odległości w przestrzeni L^2 (ewentualnie L^1). Prowadzi to do konkluzji, że aproksymacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa można dokonać za pomocą baz ortonormalnych w postaci wielomianów. Eksperymenty numeryczne pokazały, że szczególnie dogodne do tego celu są wielomiany Legendre'a oraz wielomiany Czebyszewa. Układ ortonormalny złożony z wielomianów Legendre'a ma postać

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.122)$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), & n &\geq 1. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Współczynniki Fouriera (2.116) są w tym przypadku następujące:

$$c_n = \left(\sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 x^k f_0(x) dx \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad (2.124)$$

przy czym a_k są współczynnikami n -tego wielomianu Legendre'a i są określane na podstawie równań rekurencyjnych (2.123), np.

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow a_0 = 1; \\ n=1 &\Rightarrow a_0 = 0 \quad \text{i} \quad a_1 = 1; \\ n=2 &\Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2}; \quad a_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_2 = \frac{3}{2}; \\ n=3 &\Rightarrow a_0 = 0; \quad a_1 = -\frac{3}{2}; \quad a_2 = 0 \quad \text{i} \quad a_3 = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

ponadto czynniki postaci

$$\int_{-1}^1 x^k f_0(x) dx \quad (2.125)$$

są momentami statystycznymi względem gęstości prawdopodobieństwa f_0 i mogą być oszacowane metodą Monte Carlo. Można udowodnić, że tak skonstruowany ciąg funkcji ortonormalnych jest zupełny (stanowi bazę) w przestrzeni Hilberta $L^2([-1, 1])$, czyli dla dowolnej funkcji $f_0 \in L^2([-1, 1])$ zachodzi równość

$$f_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k, \quad (2.126)$$

przy czym zbieżność szeregu w (2.126) jest zbieżnością w sensie normy w $L^2([-1, 1])$. Co więcej, szereg ten jest zbieżny także punktowo do funkcji f_0 (por. Churchill 1978) na przedziale otwartym $(-1, 1)$, o ile tylko f_0 jest ciągła i ma pochodne jednostronne na całym przedziale $(-1, 1)$.

Inny układ ortogonalny stanowią wielomiany Czebyszewa. Określa się je z zależności rekurencyjnej

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = 2xT_0(x) - T_{-1}(x); \quad n \geq 1. \quad (2.127)$$

Wielomiany te są ortogonalne na odcinku $(-1, 1)$ względem funkcji wagowej

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2.128)$$

co oznacza, że

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) p(x) dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m. \quad (2.129)$$

Dowodzi się, że układ znormalizowany $\psi_n = \frac{T_n}{\|T_n\|_{L^2((-1, 1), \mu)}}$, $n \geq 0$, tworzy bazę

ortonormalną w przestrzeni $L^2((-1, 1), \mu)$, gdzie μ jest miarą zdefiniowaną jako

$$\mu(E) = \int_E \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.130)$$

dla dowolnego podzbioru borelowskiego E przedziału $(-1, 1)$. A zatem dowolna funkcja $f_0 \in L^2((-1, 1), \mu)$ może być aproksymowana przez uogólniony szereg Fouriera w następujący sposób:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1}^1 \left| f_0(x) - \sum_{k=1}^n d_k \psi_k \right|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 0. \quad (2.131)$$

Kształt funkcji wagowej, która rośnie nieograniczenie na końcach przedziału, pozwala wnioskować, że aproksymacja (2.131) może dawać dobre rezultaty przy szacowaniu prawdopodobieństw „ogonowych” postaci (2.118). Współczynniki d_k wyznacza się według wzoru

$$d_k = \left(\sum_{i=1}^k b_i \int_{-1}^1 \frac{x^i}{\sqrt{1-x^2}} f_0(x) dx \right) \frac{1}{\|T_k\|_{L^2((-1,1), \mu)}}. \quad (2.132)$$

Natomiast współczynniki b_i są współczynnikami wielomianów Czebyszewa, określonymi wzorem (2.127). I tak na przykład

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow b_0=1; \\ n=1 &\Rightarrow b_0=0 \quad \text{i} \quad b_1=1; \\ n=2 &\Rightarrow b_0=-1; \quad b_1=0 \quad \text{i} \quad b_2=2; \\ n=3 &\Rightarrow b_0=0; \quad b_1=-3; \quad b_2=0; \quad b_3=4; \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Aby obliczyć współczynniki d_k , niezbędne jest oszacowanie wartości całek postaci

$$\int_{-1}^1 \frac{x^i}{\sqrt{1-x^2}} f_0(x) dx = E_{f_0} \left\{ \frac{X^i}{\sqrt{1-X^2}} \right\}. \quad (2.133)$$

Podobnie jak w przypadku wielomianów Legendre’a, także i tu wartość oczekiwaną po prawej stronie wzoru (2.133) proponuje się oszacować na drodze symulacyjnej. Warto też odnotować, że wartości normy kolejnych wielomianów Czebyszewa przyjmują tylko dwie wartości, tj.

$$\|T_n\|_{L^2((-1,1), \mu)} = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{dla } n=0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{dla } n>0. \end{cases} \quad (2.134)$$

Do tej pory rozpatrywane były funkcje gęstości prawdopodobieństwa skoncentrowane na przedziale $[-1, 1]$ ($\text{supp } f_0 \subseteq [-1, 1]$). W przypadku, gdy gęstość f_0 ma dowolny nośnik ograniczony, tj. $\text{supp } f_0 \subseteq [\alpha, \beta]$, następująca transformacja liniowa sprowadza problem do przypadku odcinka $[-1, 1]$:

$$Y = \left(\frac{2}{\beta - \alpha} \right) X - \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha}. \quad (2.135)$$

Odpowiednie transformacje dla funkcji gęstości oraz prawdopodobieństwa są następujące:

$$f_Y(x) = \frac{\beta - \alpha}{2} f_X \left(\frac{(\beta - \alpha)x + \beta + \alpha}{2} \right), \quad (2.136)$$

$$P\{X > \gamma\} = P \left\{ Y > \frac{2\gamma}{\beta - \alpha} - \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} \right\}. \quad (2.137)$$

Aby aproksymacja wielomianami Legendre'a i Czebyszewa była możliwa, należy założyć odpowiednio, że $f_Y \in L^2([-1, 1])$ oraz $f_Y \in L^2((-1, 1), \mu)$.

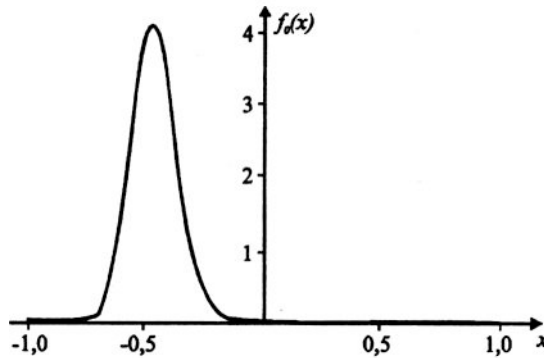
Gdy badana odpowiedź nie ma ograniczonego zbioru wartości, co oznacza, że gęstość prawdopodobieństwa f_0 nie ma ograniczonego nośnika, możliwe jest zwykle obcięcie zbioru wartości do odpowiednio dużego zbioru ograniczonego i sprowadzenia zadania do przypadku $\text{supp } f_0 \subseteq [\alpha, \beta]$. Problem nieograniczonego nośnika może być także rozwiązany po zastosowaniu transformacji typu $Y = \arctg X$, która sprowadza zadanie do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Skuteczność zaproponowanych aproksymacji uwarunkowana jest w znacznej mierze dokładnością obliczeń. Niezbędne jest zazwyczaj obliczenie kilkunastu lub nawet kilkudziesięciu wyrazów uogólnionego szeregu Fouriera. Obliczenia te powinny być przeprowadzone w zamkniętej formie, aby funkcja f_n miała jawną postać. Pozwoli to na dużą dokładność całkowania. Zatem obliczenia powinny być przeprowadzane z użyciem systemu komputerowego, umożliwiającego dokonywanie zaawansowanych obliczeń symbolicznych, jak np. *Mathematica* (2003). Ponadto całkowanie częściowych sum uogólnionych szeregów Fouriera (całkowanie funkcji jednej zmiennej) oraz symulacja momentów statystycznych funkcji odpowiedzi muszą być wykonane z bardzo dużą dokładnością.

Jako przykład rozpatrzmy aproksymację funkcji gęstości rozkładu lognormalnego postaci

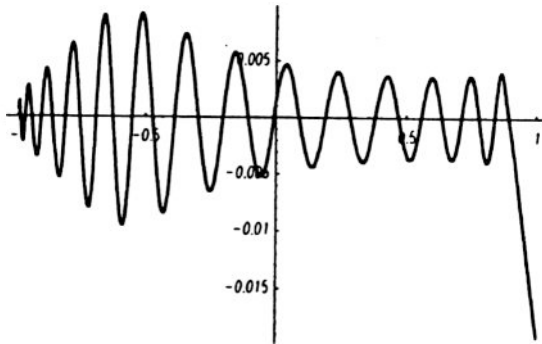
$$f_0(x) = \frac{1}{x\delta\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{x}{\hat{m}}\right)}{\delta} \right)^2 \right], \quad x > 0 \quad (2.138)$$

o momentach $E[X] = 0,05$ i $\sigma_X = 0,009$, co odpowiada parametrom $\hat{m} = 0,049091662$ oraz $\delta = 0,178567043$. Wartość funkcji gęstości (2.138) przy tych parametrach w punkcie $x_0 = 0,18$ jest mniejsza niż $4 \cdot 10^{-11}$, ponadto f_0 jest malejąca dla $x > x_0$, całka zaś z f_0 dla $x > x_0$ wynosi $1,9 \cdot 10^{-13}$. W związku z tym rozpatruje się rozkład obcięty, skoncentrowany na przedziale $[0; 0,18]$. Przez zastosowanie transformacji (2.135) zadanie sprowadza się do odcinka $[-1, 1]$. Rysunek 2.5 przedstawia wykres aproksymowanej gęstości rozkładu lognormalnego wraz z aproksymującymi ją częściowymi sumami uogólnionych szeregów Fouriera rozwinięć względem wielomianów Legendre'a oraz wielomianów Czebyszewa złożonymi (w obu przypadkach) z $n = 31$ wyrazów.

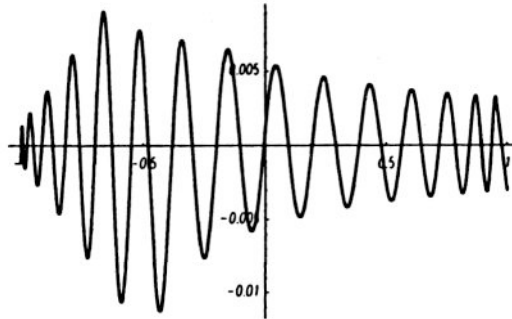


Rys. 2.5. Gęstość rozkładu lognormalnego i jej przybliżenia uzyskane z rozwinięć względem wielomianów Legendre'a i Czebyszewa.
Przybliżenia „optycznie” pokrywają się z aproksymowaną gęstością

Na rysunku 2.5 różnice pomiędzy poszczególnymi wykresami nie są widoczne, co świadczy o dobrej jakości aproksymacji. Różnice te jednak istnieją i mają charakter oscylacyjny, co jest konsekwencją zastosowania wielomianów. Przy odpowiednio dobranej skali pokazano je na kolejnych rysunkach 2.6 oraz 2.7.



Rys. 2.6. Wykres różnic pomiędzy aproksymowaną funkcją gęstości rozkładu lognormalnego a jej przybliżeniem za pomocą wielomianów Legendre'a



Rys. 2.7. Wykres różnic pomiędzy aproksymowaną funkcją gęstości rozkładu lognormalnego a jej przybliżeniem za pomocą wielomianów Czebyszewa

Jednak, zgodnie z argumentacją podaną na początku tego podrozdziału, oscylacje te nie muszą stanowić przeszkody dla dobrego przybliżania „prawdopodobieństw ogonowych”. Dla rozpatrywanego przykładu ilustruje to tabela 2.1.

Tabela 2.1. Wyniki przybliżonego obliczania prawdopodobieństw „ogonowych”

Punkt x_p	$P\{X > x_p\}$	$P\{X > x_p\}$	$P\{X > x_p\}$
	Obliczone numerycznie	Aproksymacja Legendre'a	Aproksymacja Czebyszewa
-0,2	0,01653	0,01635	0,01620
-0,15	0,00674	0,00678	0,00666
-0,1	0,00263	0,00279	0,00270
-0,05	0,00099	0,00094	0,00084
-0,025	0,00060	0,00046	0,00034
0,0	0,00036	0,00022	0,00008
0,05	0,00013	0,00018	0,00006

W drugiej kolumnie tabeli 2.1 umieszczono prawdopodobieństwa uzyskane za pomocą dystrybuanty rozkładu normalnego, które można uznać za praktycznie dokładne i do nich należy odnosić przybliżone wyniki podane w dwóch następnych kolumnach. Zadowolające rezultaty uzyskano dla prawdopodobieństw rzędu 10^{-4} i większych (co odpowiada wartości $\beta \approx 3,72$ i mniejszym), przy czym nieco dokładniejsze okazało się przybliżenie z zastosowaniem wielomianów Legendre'a. Dla mniejszych prawdopodobieństw aproksymacja sumą częściową złożoną z 31 wyrazów może nie być zadowolająca, co sugeruje konieczność obliczenia większej liczby wyrazów uogólnionego szeregu Fouriera. Z drugiej strony, wobec dużych współczynników zmienności parametrów podłoża w zadaniach z zakresu geotechniki te mniejsze prawdopodobieństwa mogą być nie do uzyskania lub mogą być uznane za niewiarygodne.

Opisaną tu metodę zastosowano do obliczeń prawdopodobieństwa przekroczenia wartości dopuszczalnej przez osiadania fundamentu płytowego posadowionego na sprężystym ośrodku uwarstwowym, gdzie obciążenia fundamentu były losowe, cechy

zaś podłoża przyjęto jako deterministyczne (nielosowe). Przykład ten szczegółowo opisano w pracy autora (Puła 1995), w której zaprezentowano tę metodę jako alternatywną wobec metody FERM. W sytuacji liniowego modelu podłoża o nielosowych parametrach metoda ta dobrze zdała egzamin. Jej mankamentem w zastosowaniu do obliczeń metodą elementów skończonych jest duży wysiłek obliczeniowy niezbędny do dokładnego oszacowania (na drodze symulacyjnej) momentów statystycznych poszukiwanej odpowiedzi, potrzebnych do obliczenia dużej liczby współczynników Fouriera. Ponadto typowe systemy realizujące obliczenia metodą elementów skończonych nie zawierają obecnie segmentów wykonujących obliczenia symboliczne, co jak wskazano wcześniej, jest niezbędne przy zastosowaniu przedstawionego tu podejścia. Utrudnia to niewątpliwie praktyczne aplikacje proponowanej procedury.

Ponadto aproksymanty zbudowane z wielomianów ortonormalnych mogą przyjmować wartości ujemne, funkcja zaś gęstości prawdopodobieństwa jest funkcją nieujemną. Jednak jak już wspomniano na początku tego podrozdziału istotą proponowanej metody jest aproksymacja gęstości w normie przestrzeni $L^1(R)$, dlatego przybliżone obliczanie prawdopodobieństw za pomocą tak skonstruowanej aproksymanty może odbywać się z dość dobrą dokładnością, pomimo tej „teoretycznej” wady.

Należy nadmienić, że zamiast wielomianów Legendre’a czy Czebyszewa także inne układy ortonormalne zupełne mogą być zastosowane w analogiczny sposób. Nie ma jednak jednoznacznych kryteriów wyboru takiej czy innej bazy. Z prób przeprowadzonych przez autora z różnymi bazami wynika, że właśnie te dwie stanowią względnie dobre narzędzie aproksymacji.

2.7.6. Uwagi o zastosowaniu metod symulacyjnych

Metody symulacyjne nadają się do bezpośredniego zastosowania, gdyż nie wymagają one przedstawienia funkcji stanu granicznego w jawnej postaci. Zastosowanie klasycznej metody Monte Carlo w połączeniu z metodą elementów skończonych jest jednak na ogół mało efektywne i pochłania olbrzymią ilość czasu pracy komputera, ponieważ należy wykonać dużą liczbę realizacji dla uzyskania wiarygodnych rezultatów. Dlatego też w wielu przypadkach stosowana jest ona jako alternatywna metoda do porównania wyników uzyskanych innymi metodami, np. metodą perturbacyjną, w pracach o charakterze teoretycznym (Hisada i Nakagiri 1981, Hisada i Nakagiri 1985).

Metoda Monte Carlo może być także zastosowana wspólnie z innymi metodami, jak np. rozwinięcia Neumanna (podrozdział 2.7.2), metoda powierzchni odpowiedzi (podrozdział 2.7.4), czy metoda zaproponowana w podrozdziale 2.7.5.

Dobre rezultaty można osiągnąć stosując symulację wspomaganą technikami redukcji wariancji (podrozdziały 2.6.2 do 2.6.5). Przykład zastosowania metody adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej (podrozdział 2.6.4) zostanie zademonstrowany w podrozdziale 5.5.

3. Probabilistyczne sposoby opisu parametrów podłoża gruntowego

Podłoże gruntowe współpracujące z konstrukcją jest materiałem o skomplikowanej strukturze, którego modelowanie matematyczne nastęrcza znaczne trudności. Z tego powodu istnieje obecnie bardzo dużo różnych modeli podłoża i ten dział mechaniki gruntów jest nadal intensywnie rozwijany. Czynnione są próby usystematyzowania istniejących modeli i klasyfikacji kierunków rozwoju. Obszerne omówienie najważniejszych modeli wraz z ich podziałem i analizą krytyczną podał Gryczmański (1994). Zdaniem tego autora generalna linia podziału przebiega pomiędzy modelami analitycznymi a numerycznymi. Modele analityczne powstają w dwojaki sposób. Pierwszym sposobem jest tworzenie modelu analogowego, który nie odzwierciedla ani własności fizycznych materiału, ani rzeczywistych procesów w nim zachodzących, ale symuluje odkształcenia podłoża wywołane przez przyłożone oddziaływania. Do tego typu modeli zalicza się najstarszy i najprostszy model Winklera (1867), jego dwuparametrowe modyfikacje, np. modele Filonienki-Borodicza (1940), Hetényia (1946) czy Pasternaka (1954) oraz inne analogi sprężyste. Ze względu na swoją prostotę modele te są chętnie stosowane w obliczeniach praktycznych służących projektowaniu.

Drugi sposób to potraktowanie podłoża jako półprzestrzeni liniowo sprężystej (ewentualnie lepkosprężystej), przy czym do tej grupy zalicza się tylko takie podejścia, w których funkcja Greena modelu jest dana w analitycznej (zamkniętej) postaci (Gryczmański 1994). W tej klasie mieści się klasyczne rozwiązanie Boussinesqa i Ceruttiego (por. Poulos i Davies 1974), wiele rozwiązań dla fundamentów posadowionych na półprzestrzeni sprężystej (por. Selvadurai 1979), a także sprężystych modeli anizotropowych, np. Bardena (1963) czy Grahama i Houlsby'ego (1983) lub uwzględniający zmiany sztywności podłoża wraz z głębokością model Bookera-Davisa-Balaama (1985). Ponadto mieści się tu też rozwiązanie dotyczące warstwy sprężystej o ograniczonej miąższości (Marguerre 1931) oraz kilka modeli z więzami na przemieszczenia, np. model Własowa (1949) czy Reissnera (1958). Zaletą modeli z tej grupy jest ich ścisła matematyczna postać, a także łatwość w zastosowaniu do obliczeń komputerowych.

W modelach numerycznych zagadnienie relacji pomiędzy przemieszczeniami a oddziaływaniami jest za pomocą odpowiednich procedur (zwykle metody elemen-

tów skończonych lub metody elementów brzegowych) sprowadzane do rozwiązania odpowiedniego układu równań liniowych, co daje przybliżone rozwiązanie problemu. W stosunku do modeli analitycznych mają one jednak tę przewagę, że są w stanie w sposób znacznie bardziej realistyczny odwzorować zachowanie się mas gruntu pod działającym obciążeniem. To z kolei prowadzi do oszacowania ze znaczną precyzją sił wewnętrznych działających w fundamencie. Modele te, zdaniem Gryczmańskiego (1994), można podzielić na liniowo sprężyste (lepkosprężyste) oraz fizycznie nieliniowe (przyrostowe).

Za pomocą modeli z pierwszej grupy rozwiązywane są zazwyczaj zadania z podłożem uwarstwowionym lub o skomplikowanych warunkach brzegowych. Do stosowanych tu procedur należy też metoda warstw skończonych, o której będzie mowa w rozdziale 5, a także metoda pasków skończonych (Cheung 1968).

Do grupy modeli fizycznie nieliniowych zaliczają się modele hyposprężyste (np. model Duncana–Changa (1970), a ostatnio modele hypoplastyczne Kolymbasa (2000)) oraz modele sprężysto-plastyczne (sprężysto-lepkoplastyczne). Wśród tych drugich szerokie zastosowanie znalazły modele *cam-clay*, *modified cam-clay* oraz *cap* (por. Chen i Baladi 1985).

Wzmiankowane powyżej modele podłoża są modelami deterministycznymi, co oznacza, że w ich matematycznym opisie nie pojawiają się żadne funkcje losowe. Z drugiej jednak strony podłoże, w warstwach współpracujących z konstrukcją, charakteryzuje się bardzo dużą niejednorodnością. Niejednorodność ta wynika zarówno z różnorodności procesów geologicznych zachodzących w przeszłości, jak i bardzo różnych warunków sedymentacji i konsolidacji warstw wierzchnich (Wiłun 1976). Poszczególne cząstki gruntu, tworzące jego szkielet, są rozmieszczone w sposób całkowicie przypadkowy, mają przypadkowe rozmiary oraz kształty. Jeśli jeszcze weźmie się pod uwagę przypadkowy udział fazy gazowej pomiędzy cząstkami, to w naturalny sposób dochodzi się do losowego – probabilistycznego – modelowania cech fizycznych i mechanicznych podłoża (Biernatowski 1982, Puła 1984, Przewłócki 1998). Dodatkowym elementem stanowiącym o rozrzucie parametrów jest sposób ich badania, np. na podstawie sondowania, określania cech wiodących lub bezpośredniego oznaczania (także różnymi metodami) danej cechy w laboratorium na podstawie prób pobranych w terenie. Te elementy implikują w konsekwencji istotnie większe wahania własności materiału naturalnego, jakim jest grunt, w stosunku do stworzonych przez człowieka materiałów konstrukcyjnych takich, jak np. stal czy beton.

W zagadnieniach niezawodności do stosowanych w obliczeniach modeli deterministycznych wprowadza się metody rachunku prawdopodobieństwa. Najczęściej odbywa się to poprzez tzw. „randomizację”, czyli przyjęcie, że pewne parametry podłoża, fundamentu czy oddziaływań nie są stałe, lecz podlegają losowym fluktuacjom. Oznacza to założenie, że parametry takie są zmiennymi losowymi, albo – przy bardziej skomplikowanym opisie – polami losowymi (funkcjami losowymi). Randomiza-

cji dokonuje się na takim modelu, jaki jest stosowany do obliczeń w konkretnej sytuacji. Zazwyczaj są więc to stosunkowo proste modele, które najczęściej są stosowane w praktyce do obliczeń fundamentów.

3.1. Parametry gruntu jako zmienne losowe

Najprostszym sposobem probabilistycznego opisu zmienności losowej parametrów podłoża jest założenie, że każdy z tych parametrów jest pewną zmienną losową o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

3.1.1. Rozkłady prawdopodobieństwa i współczynniki zmienności najczęściej stosowane w opisie parametrów podłoża

Za pionierską pracę w dziedzinie probabilistycznego opisu parametrów podłoża uważana jest praca Lumba (1966), której autor weryfikował za pomocą testu chi-kwadrat hipotezy dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa wielu podstawowych cech gruntu. Przedmiotem badań Lumba były specyficzne grunty z okolic Hongkongu – il morski, aluwialny il piaszczysty, piasek pylasty oraz pył ilasty. Własnościom gruntów przypisywano (i testowano) przede wszystkim rozkład normalny, a także lognormalny. Istotną zaletą przeprowadzonych badań były znaczne liczebności prób (od 30 do 120), co istotnie podnosi jakość opracowania statystycznego. Jednak uogólnianie wniosków wynikających z przeprowadzonych testów jest niepewne, gdyż trzeba mieć świadomość, że te same cechy fizyczne lub mechaniczne, traktowane jako zmienne losowe, mogą mieć różne rozkłady statystyczne w zależności od rodzaju gruntu, a nawet jego stanu. Zagadnieniu badania statystycznej zmienności własności gruntu poświęconych jest także kilka kolejnych prac Lumba (Lumb 1970, 1972, 1974, 1975, Lumb i Holt 1968). Spośród innych badań, nad opisem cech podłoża w postaci zmiennych losowych, wnoszących najwięcej do stanu wiedzy, należy wymienić badania Schultzego (1972 i 1975) oraz badania Corotisa, Azzousa i Krizka (1975). Ci ostatni autorzy przeprowadzili badania dla dużej liczby próbek podzielonych na trzy grupy w zależności od gęstości objętościowej szkieletu gruntowego. Parametry statystyczne podano dla każdej z grup z osobna oraz dla wszystkich próbek łącznie. W tabeli 3.1 przytoczono rezultaty uzyskane przez tych autorów. Analiza cech gruntu wykazała, że ich własności statystyczne w istotny sposób zależą od ciężaru szkieletu, a więc i od rodzaju gruntu. Widoczne są także duże wartości współczynników zmienności (wzór (2.14)) poszczególnych cech, przy czym najmniejsze otrzymano dla ciężaru szkieletu. Wyniki wydają się być miarodajne ze względu na duże liczebności prób.

Tabela 3.1. Parametry statystyczne cech gruntowych z badań Corotiza, Azzouza i Krizka (1975).
 Poszczególne symbole w pierwszej i drugiej kolumnie oznaczają: ρ_d – gęstość objętościową szkieletu
 gruntowego, w_L – granicę płynności, w_p – granicę plastyczności, I_p – wskaźnik plastyczności,
 w – wilgotność, e – wskaźnik porowatości, f_i – zawartość frakcji ilowej, c_c – wskaźnik skonsolidowania,
 c_v – współczynnik konsolidacji, P_c – ciśnienie pęcznienia.

Populacja	Cecha gruntu	Liczebność próby	Wartość średnia	Wartość minimalna	Wartość maksymalna	Mediana	Odchyl. stand.	Współcz. zmienności
$\rho_d < 1,5$ [t(m) ⁻³]	w_L [%]	225	54	27	98	53	15	0,28
	w_p [%]	225	26	15	62	25	7	0,27
	I_p [%]	225	27	10	60	27	11	0,40
	w [%]	241	39	9	108	36	13	0,34
	ρ_d [t(m) ⁻³]	239	1,29	0,69	1,49	1,34	0,17	0,13
	e	243	1,105	0,579	2,12	1,02	0,29	0,26
	f_i [%]	198	34	1	100	32	21	0,63
	c_c	241	0,33	0,07	0,98	0,28	0,17	0,52
	c_v [cm ² s ⁻¹]	158	0,00162	0,0001	0,008	0,004	0,00154	0,95
	P_c [kPa]	238	198	19,6	716	157	136	0,69
$1,5 < \rho_d$ < 1,75 [t(m) ⁻³]	w_L [%]	299	39	20	73	35	11	0,28
	w_p [%]	299	19	8	41	18	4	0,27
	I_p [%]	299	20	4	48	17	9	0,45
	w [%]	315	22	8	48	25	5	0,20
	ρ_d [t(m) ⁻³]	315	1,62	1,5	1,74	1,69	0,07	0,05
	e	315	0,658	0,427	1,18	0,723	0,095	0,14
	f_i [%]	244	24	2	80	22	16	0,68
	c_c	314	0,16	0,01	0,43	0,19	0,06	0,39
	c_v [cm ² s ⁻¹]	152	0,00111	0,001	0,008	0,009	0,00129	1,16
	P_c [kPa]	306	246	24,5	942	294	156	0,64
$\rho_d > 1,75$ [t(m) ⁻³]	w_L [%]	154	33	18	60	30	8	0,23
	w_p [%]	154	17	11	24	16	2	0,13
	I_p [%]	154	16	4	36	13	7	0,42
	w [%]	165	16	5	28	16	3	0,22
	ρ_d [t(m) ⁻³]	165	1,86	1,75	2,12	1,83	0,09	0,05
	e	165	0,453	0,276	0,78	0,462	0,076	0,17
	f_i [%]	114	19	2	55	17	12	0,63
	c_c	165	0,09	0,01	0,18	0,08	0,04	0,47
	c_v [cm ² s ⁻¹]	96	0,00232	0,001	0,008	0,002	0,00151	0,65
	P_c [kPa]	163	260	29,4	638	245	1,19	0,46
Wszystkie próbki razem	w_L [%]	678	43	18	98	40	15	0,34
	w_p [%]	678	21	8	62	20	6	0,29
	I_p [%]	678	22	4	60	20	10	0,48
	w [%]	711	26	5	108	23	12	0,47
	ρ_d [t(m) ⁻³]	719	1,57	0,69	2,12	1,6	0,24	0,15
	e	723	0,762	0,276	2,12	0,68	0,316	0,415
	f_i [%]	556	26	1	100	24	18	0,70
	c_c	720	0,2	0,01	0,98	0,16	0,14	0,73
	c_v [cm ² s ⁻¹]	406	0,002	0,0001	0,008	0,001	0,0015	0,75
	P_c [kPa]	707	233	19,6	942	196	143	0,62

Orientacyjne wartości współczynników zmienności parametrów wytrzymałościowych gruntu oraz ciężaru objętościowego, według Biernatowskiego (1982) i Thao (1984), podano w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Orientacyjne wartości współczynników zmienności wybranych parametrów podłoża gruntowego (Biernatowski 1982)

Parametr podłoża	Współczynnik zmienności	
	minimum	maksimum
Kąt tarcia wewnętrznego		
grunt niespoisty	0,05	0,15
grunt spoisty	0,05	0,56
Spójność dla konsystencji:		
$I_L = 0,0-0,25$	0,10	0,51
$I_L = 0,25-0,5$	0,125	0,63
$I_L > 0,5$	0,15	0,25
Ciężar objętościowy	0,01	0,04

Tabela 3.3. Rozkłady prawdopodobieństwa i ich parametry

Nazwa rozkładu	Funkcja gęstości Prawdopodobieństwa	Zależność momentów od parametrów rozkładu	
		Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe
Normalny	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ $-\infty < x < +\infty; \sigma > 0$	$E\{X\} = m$	$\text{VAR}\{X\} = \sigma^2$
Lognormalny	$f(x) = \frac{1}{x\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{\hat{m}}\right)}{\delta}\right)^2\right]$ $0 < x < +\infty; \delta > 0; \hat{m} > 0$	$E\{X\} = \hat{m} \exp\left(\frac{\delta^2}{2}\right)$	$\text{VAR}\{X\} = \hat{m}^2 \exp(\delta^2)(\exp(\delta^2) - 1)$
Beta	$\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{t-1}}{(b-a)B(r,t)}$ $B(r,t) \text{ jest funkcją beta (całką Eulera I rodzaju.)}$ $a \leq x \leq b; a < b; r > 0; t > 0$	$E\{X\} = a + (b-a) \frac{r}{r+t}$	$\text{VAR}\{X\} = (b-a)^2 \left[\frac{rt}{(r+t)^2(r+t+1)} \right]$
Jednostajny (równomierny, prostokątny)	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b; a < b$	$E\{X\} = \frac{a+b}{2}$	$\text{VAR}\{X\} = \frac{(b-a)^2}{12}$

W celu ułatwienia śledzenia informacji podawanych w dalszym ciągu książki w tabeli 3.3. zestawiono podstawowe informacje o jednowymiarowych rozkładach

prawdopodobieństwa najczęściej stosowanych do charakteryzowania zmienności losowej parametrów podłoża i jednocześnie stosowanych w dalszych rozdziałach tej książki.

W kolejnej tabeli – 3.4 – zestawiono informacje o współczynnikach zmienności i rozkładach dla kilku wybranych cech podłoża gruntowego, istotnych z punktu widzenia dalszego ciągu tego opracowania, wraz z odniesieniami do prac autorów, którzy takie wartości (rozkłady) uzyskali z badań lub stosowali.

Tabela 3.4. Wartości współczynników zmienności oraz rozkłady prawdopodobieństwa niektórych parametrów gruntu zbadane lub proponowane przez różnych autorów

Parametr podłoża	Współczynnik zmienności	Źródło literaturowe	Rozkład prawdopodobieństwa	Źródło literaturowe
Kąt tarcia wewnętrznego w gruntach niespoistych	0,05–0,15	Singh (1972), Holtz i Krizek (1972), Schultze (1972, 1975), Ingles (1980), Biernatowski (1981), Kulhawy (1992), Cherubini et al (1993), Meyerhof (1993, 1995), Becker (1996).	Normalny Lognormalny	Lumb (1966) Wu i Kraft (1967) Schultze (1972,1975) Biernatowski (1966a) McAnally (1983)
Tangens kąta tarcia wewnętrznego w gruntach niespoistych	0,07–0,15	Lumb (1966), Schultze (1972, 1975), Alonso(1976), McAnally (1983), Kulhawy et al. (1991).	Normalny Lognormalny	Lumb (1966) Schultze (1972,1975).
Porowatość	0,08–0,19	Schultze (1972)	Normalny	Schultze (1972)
Wskaźnik porowatości	0,13–0,29	Schultze (1972)	Normalny	Schultze (1972) Corotis et al. (1975)
Kąt tarcia wewnętrznego w gruntach spoistych	0,1–0,56	Schultze (1972, 1975), Singh (1972), Biernatowski (1981), Bagheri i Magnan (1983), Kulhawy (1992), Cherubini et al (1993), Meyerhof (1993, 1995), Becker (1996).	Normalny Beta Lognormalny	Lumb (1966, 1970) Lumb (1970) Biernatowski (1966a, 1972) Wu i Kraft (1967)
Tangens kąta tarcia wewnętrznego w gruntach spoistych	0,15	Lumb (1966),	Normalny Beta Lognormalny Jednostajny	Lumb (1966, 1970) Lumb (1970) Oboni i Bourdeau (1983) Biernatowski (1966a) Förster i Weber (1982)
Wilgotność naturalna	0,13–0,47	Schultze (1972), Corotis et al. (1975), Kulhawy (1992), Phoon et al (1993).	Normalny Lognormalny	Corotis et el. (1975) Corotis et el. (1975)

Spójność	0,05–0,85	Lumb (1966), Biernatowski (1966), Fredlund i Dahlman (1972), Grolimund i Recordon (1972), Schultze (1975), Alonso (1976), Bagheri i Magnan (1983), Ingles (1980), Biernatowski (1981), Kulhawy et al. (1991), Kulhawy (1992), Cherubini et al (1993), Meyerhof (1993, 1995), Becker (1996)	Normalny Lognormalny Beta Jednostajny	Lumb (1966) Biernatowski (1966a, 1972) Wu i Kraft (1967) Lumb (1970) Oboni i Bourdeau (1983) Förster i Weber (1982)
Granica plynności	0,22–0,34	Schultze (1972), Corotis et al. (1975), Kulhawy (1992), Phoon et al (1993).	Normalny Lognormalny Beta	Lumb (1966) Schultze (1972) Corotis et al. (1975) Corotis et al. (1975) Corotis et al. (1975)
Granica plastyczności	0,13–0,29	Schultze (1972), Corotis et al. (1975), Kulhawy (1992), Phoon et al (1993).	Normalny Lognormalny	Lumb (1966) Corotis et al. (1975) Corotis et al. (1975)
Wskaźnik skonsolidowania	0,17–0,73	Corotis et al. (1975), Lumb (1966), Kulhawy (1992), Cherubini et al (1993), Meyerhof (1993, 1995),	Normalny Lognormalny Beta	Corotis et al. (1975) Corotis et al. (1975) Corotis et al. (1975)
Ciężar objętościowy	0,01–0,16	Corotis et al. (1975), Evangelista et al. (1975), Ingles (1980), Biernatowski (1981), Bagheri i Magnan (1983), Freudund i Krahn (1983), Kulhawy (1992), Cherubini et al (1993), Przewłócki (1998).	Normalny Beta Lognormalny	Evangelista et al.(1975) McAnally (1983) Schultze (1972) Bagheri i Magnan (1983) Evangelista et al. (1975) Bagheri i Magnan (1983) Biernatowski (1966b) Evangelista et al. (1975)
Ciężar właściwy szkieletu	0,01	Schultze (1972)	Normalny	Schultze (1972)
Moduł Younga	0,04–0,5	Schultze (1972), Meyerhof (1993, 1995).		
Współczynnik Poissona	0,15	Cherubini (1998)		
Edometryczny moduł ścisłości	0,2–0,4	Meyerhof (1993, 1995), Przewłócki (1998)		

Niektórzy badacze (Kulhawy et al. 1991, Cherubini 1992) zwracają uwagę na fakt, że w przypadku parametrów wytrzymałościowych należałoby wprowadzić zróżnicowanie współczynników zmienności w zależności od wartości średnich tych parametrów. Sugestie tych autorów podano w tabeli 3.5.

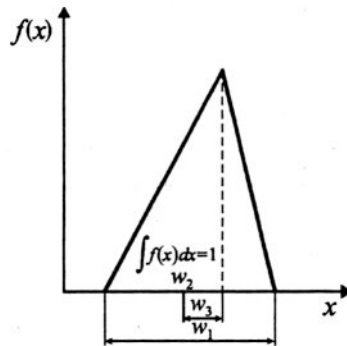
Tabela 3.5. Współczynniki zmienności kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności wg Kulhawego, Rotha i Grigoriu (1991) oraz Cherubiniego (1992)

Parametr podłoża	Wartość średnia	Współczynnik zmienności
Spójność	< 50 kPa	0,26–0,82
	50–150 kPa	0,19–0,66
	150–300 kPa	0,19–0,53
	> 300 kPa	0,13–0,41
Kąt tarcia wewnętrznego	< 30°	0,03–0,15
	30–40°	0,10–0,22

Cytowane badania pokazują, że współczynniki zmienności poszczególnych parametrów podłoża mogą osiągać bardzo duże wartości, co może być przyczyną małych wartości wskaźników niezawodności dla konstrukcji współpracujących z gruntem. Z drugiej strony trzeba pamiętać, że na uzyskiwane wartości współczynników zmienności ma bardzo duży wpływ wielkość obszaru, z którego pobierane są próby. Nawet w podłożu, które można uznać za jednorodną warstwę gruntową, obserwuje się zmiany własności parametrów, zwłaszcza ze wzrostem głębokości. Przewłócki (1998) wskazuje na tendencję do wzrostu wariancji w sytuacji, gdy poszczególne próby pobrane są w znacznym oddaleniu od siebie.

Przypisanie poszczególnym parametrom podłoża określonych rozkładów prawdopodobieństwa jest zadaniem wymagającym pobrania bardzo znacznej liczby prób gruntu, co w praktyce na ogół nie jest możliwe. Nie jest także możliwe określenie takiego rozkładu jako konsekwencji określonego modelu podłoża. Jak wynika z zestawienia zaprezentowanego w tabeli 3.4 propozycje badaczy skupiają się zaledwie wokół kilku rozkładów, przy czym stosowanie rozkładu normalnego wynika głównie z jego „dobrych własności statystycznych” i łatwości przeprowadzania obliczeń. Często przytaczany argument, że o uprzywilejowanej roli rozkładu normalnego stanowi centralne twierdzenie graniczne (por. np. Feller 1981), nie wydaje się właściwy, gdyż poszczególne cechy materiałowe mogą wykazywać nawet znaczne rozbieżności z rozkładem normalnym. Dla parametrów podłoża, w sytuacji gdy charakteryzują się one znacznymi współczynnikami zmienności, stosowanie rozkładu normalnego może okazać się niewłaściwe ze względu na możliwość przyjmowania wartości ujemnych. Na negatywne konsekwencje stosowania rozkładu normalnego do charakteryzowania wytrzymałości gruntów zwałowych wskazano w pracy Puły i Traczyka (1988). Z tego punktu widzenia właściwsze wydają się rozkłady skoncentrowane na półprostej dodatniej, jak rozkład lognormalny, lub rozkłady o nośnikach ograniczonych. Rozkłady beta wydają się szczególnie użyteczne ze względu na różnorodność kształtów funkcji gęstości prawdopodobieństwa, dające dobre możliwości aproksymacji histogramów empirycznych. Autor zaproponował stosowanie rozkładów wielokątnych (Puła 1984, Puła 1987), tj. takich, których funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma wykres o kształcie łamanej. Rozkłady te dobrze opisywały losową zmienność parametrów

podłoża o ograniczonych zakresach zmienności, a ponadto okazały się bardzo przydatne w obliczeniach symulacyjnych, ze względu na efektywne generatory liczb pseudolosowych uzyskiwane metodą odwracania dystrybuanty. Typowym reprezentantem tej rodziny jest rozkład trójkątny, którego wykres gęstości prawdopodobieństwa pokazano na rysunku 3.1 (wzór otrzymuje się przez napisanie równań ramion trójkąta).



Rys. 3.1. Trójkątny rozkład prawdopodobieństwa i jego parametry
(w_2 – odcięta środka podstawy)

Relację pomiędzy momentami centralnymi tego rozkładu a jego parametrami (w postaci podanej na rysunku) opisują następujące wzory:

$$E\{X\} = \frac{1}{3}w_3 + w_2, \quad (3.1)$$

$$\text{VAR}\{X\} = \frac{w_3^2}{18} + \frac{w_1^2}{24}, \quad (3.2)$$

$$E\{(X - E\{X\})^3\} = \frac{w_3^3}{135} - \frac{w_3w_1^2}{60}. \quad (3.3)$$

Relacje te mogą służyć do estymacji rozkładu empirycznego. Szczególnie prosty przypadek stanowi symetryczny rozkład trójkątny, dla którego $w_3 = 0$, a pozostałe dwa parametry otrzymuje się z pary równań (3.1) i (3.2). Analizy przeprowadzone przez autora (Puła 1984, 1987, Biernatowski i Puła 1984) pokazały jednak, że lepszym sposobem estymacji rozkładu, zwłaszcza gdy dysponuje się próbą o znacznej liczebności, jest dopasowanie dystrybuanty rozkładu wielokątnego do dystrybuanty empirycznej (uzyskanej z próby) metodą najmniejszych kwadratów. We wzmiankowanych pracach pokazano przykłady estymacji rozkładów empirycznych otrzymanych w wyniku badania laboratoryjnego prób gruntu rozkładami wielokątnymi dla parametrów wytrzymałościowych podłoża (kąta tarcia wewnętrznego i spójność) oraz ciężaru objętościowego.

wego. Pokazano także zastosowanie tych rozkładów do oceny prawdopodobieństwa awarii fundamentów masywnych metodą symulacyjną (Puła 1984, Biernatowski i Puła 1988). Przydatność rozkładów wielokątnych do obliczeń symulacyjnych w dzisiejszych czasach nabiera nowego waloru. Ze względu bowiem na niezwykle szybki rozwój elektroniki komputerowej i osiąganie coraz większych szybkości obliczeń zastosowanie metody Monte Carlo, znacznie prostszej od innych wyrafinowanych metod opisanych w rozdziale 2, zaczyna ponownie „wracać do łask”. Tak więc być może i ta propozycja doczeka się szerszych zastosowań.

Najprostszy przypadek rozkładu wielokątnego stanowi rozkład jednostajny (równomierny, prostokątny – por. tab. 3.3), dla którego wykresem funkcji gęstości jest odcinek równoległy do osi odciętych. Taki rozkład nadaje się do opisu zmienności, gdy można uznać, że wartość danego parametru może pojawić się w każdym miejscu pewnego przedziału z jednakowym prawdopodobieństwem (Förster i Weber 1982). Będzie on także stosowany w przykładach w dalszej części książki.

W zastosowaniach do obliczeń niezawodności użyteczne są też tzw. złożone rozkłady prawdopodobieństwa, tj. takie, w których co najmniej jeden z parametrów rozkładu jest zmienną losową. Na przykład wartość średnią położenia zwierciadła wody gruntowej pod fundamentem można uznać za losowo zmienną. Jeśli więc położenie było przyjęte jako zmienna losowa, to mamy do czynienia jakby z podwójną zmiennością losową. Rozkłady złożone są dobrze opisane w literaturze probabilistycznej (np. Benjamin i Cornell (1977)). Przykładowo jeśli X jest zmienną losową o dystrybuancie $F_X(x)$, która zależy od parametru θ , czyli ma postać $F_X(x; \theta)$, a parametr θ jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa $f_\theta(\theta)$, to dystrybuanta tak powstałej nowej zmiennej losowej Y ma postać

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(y, \theta) f_\theta(\theta) d\theta. \quad (3.4)$$

Jeśli natomiast $m_X^{(n)}(\theta)$ oznacza n -ty moment statystyczny zmiennej X , to dla zmiennej Y otrzymuje się

$$E\{Y^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} m_X^{(n)}(\theta) f_\theta(\theta) d\theta. \quad (3.5)$$

3.1.2. Korelacja wzajemna pomiędzy parametrami podłoża

Parametry geotechniczne podłoża są na ogół ze sobą skorelowane. Znajomość wzajemnej korelacji (macierzy kowariancji wektora losowego) może okazać się istotna dla obliczeń wykonywanych w ramach teorii niezawodności, co będzie jeszcze dyskutowane w dalszych rozdziałach tej pracy. Zagadnienie wzajemnej korelacji pa-

rametrów było przedmiotem studiów kilku badaczy, np. Lumba (1966), Holza i Krizka (1972), Yücemena i Tanga (1972), Thao (1984). Przykładowe oceny współczynników korelacji (liniowej) dla gliny, według badań Holza i Krizka (1972), pokazano w tabeli 3.6.

Tabela 3.6. Współczynniki korelacji. Poszczególne symbole – jak w tabeli 3.1, ponadto f_p – zawartość frakcji piaskowej, γ_s – ciężar właściwy szkieletu gruntowego, γ_d – ciężar objętościowy szkieletu gruntowego, w_{opt} – wilgotność optymalna, S_r – stopień wilgotności, c – spójność gruntu, φ – kąt tarcia wewnętrznego

Parametr	f_i	f_p	w_L	w_p	γ_s	w_{opt}	γ_d	S_r	c	φ
f_i	1,00	-0,84	0,13	-0,61	0,91	-0,58	0,73	-0,19	-0,13	0,44
f_p		1,00	-0,22	0,22	-0,62	0,31	-0,54	0,33	0,40	-0,55
w_L			1,00	0,57	-0,15	0,63	-0,51	-0,66	-0,13	-0,47
w_p				1,00	-0,85	0,93	-0,89	-0,38	-0,22	-0,41
γ_s					1,00	-0,83	0,90	0,02	0,07	0,39
w_{opt}						1,00	-0,96	-0,33	-0,13	-0,47
γ_d							1,00	0,21	0,00	0,58
S_r								1,00	0,67	0,13
c									1,00	-0,49
φ										1,00

Dla dalszych rozważań w tej pracy szczególnie istotna jest korelacja parametrów wytrzymałościowych, tj. kąta tarcia wewnętrznego i spójności. Jak widać w tabeli 3.6, Holz i Krizek zaobserwowali dość silną ujemną korelację pomiędzy tymi cechami. Fakt ten potwierdzają także inni badacze, np. Lumb (1966), Yücemen i Tang (1972), Athanasiou-Grivas i Harrop-Wiliams (1979).

Aby uwzględnić w obliczeniach rozkłady prawdopodobieństwa poszczególnych cech podłoża oraz korelacje pomiędzy nimi, należy określić łączny rozkład prawdopodobieństwa tych cech. Lumb (1966) testował dwuwymiarowy rozkład normalny jako łączny rozkład wskaźnika plastyczności i granicy płynności. Za interesującą należy uznać propozycję Athanasiou-Grivasa i współautorów (Athanasiou-Grivas i Harr (1979) oraz Athanasiou-Grivas i Harrop-Wiliams (1979)), którzy zasugerowali, aby jako łączny rozkład kąta tarcia wewnętrznego φ i spójności c przyjąć dwuwymiarowy rozkład Dirichleta, tj. rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} x^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} (1-x-y)^{\alpha_3-1}, & x, y \geq 0, \quad 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych,} \end{cases} \quad (3.6)$$

gdzie

$$x = \frac{c - c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}}, \quad y = \frac{\varphi - \varphi_{\min}}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}, \quad (3.7)$$

przy czym c_{\max} , c_{\min} , φ_{\max} , φ_{\min} oznaczają maksymalne i minimalne wartości spójności i kąta tarcia wewnętrznego, odpowiednio, Γ jest funkcją gamma Eulera, zaś α_1 , α_2 , α_3 parametrami rozkładu. Parametry α_1 , α_2 , α_3 mogą być określone z relacji pomiędzy nimi a momentami statystycznymi (odpowiednie zależności można znaleźć w książce Wilksa (1962) oraz w pracach Athanasiou-Grivasa i Harrop-Wiliamsa lub Puły i Stilger-Szydło (1990)). Jest to o tyle interesująca propozycja, że rozkładami brzegowymi tego rozkładu są rozkłady beta, a więc rozkłady o nośnikach ograniczonych (skoncentrowanych na przedziałach $[c_{\min}, c_{\max}]$ oraz $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$) co koresponduje ze stosunkowo wąskimi przedziałami zmienności tych parametrów, a także propozycjami kilku autorów odnośnie do rozkładów jednowymiarowych (por. tabela 3.4). Ponadto współczynnik korelacji rozkładów brzegowych dwuwymiarowego rozkładu Dirichleta jest równy

$$\rho_{c,\varphi} = \rho_{x,y} = -\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)}} \quad (3.8)$$

i ma wartość ujemną, co jest zgodne z wcześniej podanymi uwagami na temat korelacji pomiędzy φ i c . Propozycja Athanasiou-Grivasa i współautorów została zastosowana w pracy autora i Stilger-Szydło (Puła i Stilger-Szydło 1990) do probabilistycznej analizy kształtu uwarstwionej skarpy w stanie równowagi granicznej. W pracy tej, w celu zastosowania techniki symulacji cyfrowej, autorzy przedstawili po raz pierwszy oryginalny algorytm generowania liczb losowych o rozkładzie Dirichleta, skonstruowany z ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie gamma. Wadą rozkładu Dirichleta jest jednak to, że, jak to łatwo zauważyć we wzorze (3.6), jest on skoncentrowany na obszarze trójkątnym, co daje zerowe prawdopodobieństwo jednoczesnego otrzymania dużych wartości (bliskich wartościom maksymalnym) kąta tarcia wewnętrznego i spójności.

W przypadku wektorów losowych o wymiarze większym niż dwa opis probabilistyczny na ogół mocno się komplikuje. Rzadko bowiem, zwłaszcza w geotechnice, dysponuje się tak liczebną próbą, aby estymować rozkład wielowymiarowy. Znacznie częściej znane są jednowymiarowe rozkłady poszczególnych cech (rozkłady brzegowe) oraz współczynniki korelacji pomiędzy poszczególnymi cechami. Przyjęcie założenia, że rozkład łączny jest rozkładem normalnym, możliwe jest tylko wtedy, gdy poszczególne rozkłady brzegowe są normalne. W innych przypadkach określenie dokładne rozkładu łącznego można zastąpić zastosowaniem tzw. rozkładów Natafa (Nataf 1962). Konstrukcja Natafa polega na utworzeniu wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa, tak aby miał on z góry zadane i określone rozkłady brzegowe oraz współczynniki korelacji pomiędzy nimi. Przypuśćmy, że X_1, X_2, \dots, X_n są zmien-

nyimi losowymi o znanych dystrybuantach F_{X_i} oraz odpowiadających im gęstościach f_{X_i} , a współczynniki korelacji ρ_{ij} pomiędzy tymi zmiennymi są także znane. N -wymiarowy rozkład Natafa definiuje się jako rozkład o funkcji gęstości

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \dots, f_{X_n}(x_n) \frac{\phi_n(y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbf{R}')}{\phi_0(y_1) \phi_0(y_2), \dots, \phi_0(y_n)}, \quad (3.9)$$

przy czym $y_i = \Phi_0^{-1}(F_{X_i}(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$ jest transformacją układu współrzędnych, taką jak (2.33), ϕ_0 jest gęstością standardowego jednowymiarowego rozkładu normalnego, a ϕ_n jest n -wymiarową gęstością rozkładu normalnego o średniej zero, jednostkowych wariancjach i macierzy korelacji \mathbf{R}' , której elementy ρ'_{ij} są zdefiniowane przez współczynniki korelacji ρ_{ij} według zależności

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - E\{X_i\}}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - E\{X_j\}}{\sigma_j} \right) f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j) \frac{\phi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij})}{\phi_0(y_i) \phi_0(y_j)} dx_i dx_j \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{F_{X_i}^{-1}(\Phi_0(y_i)) - E\{X_i\}}{\sigma_i} \right) \left(\frac{F_{X_j}^{-1}(\Phi_0(y_j)) - E\{X_j\}}{\sigma_j} \right) \phi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij}) dy_i dy_j. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Rozkład Natafa może być skonstruowany, o ile transformacja (2.33) jest wzajemnie jednoznaczna (wystarczy, aby dystrybuanty F_{X_i} były ciągłe i ściśle rosnące) oraz o ile macierz \mathbf{R}' okaże się dodatnio określona. Przykłady praktycznych zastosowań pokazują, że to drugie założenie nie jest zbyt restrykcyjne.

Pewną trudnością w zastosowaniu rozkładu Natafa jest konieczność rozwiązania równania (3.10) ze względu na ρ'_{ij} , co musi być zrobione na drodze numerycznej. Istnieje jednak możliwość zastosowania uproszczonych formuł przybliżonych do wyznaczenia ρ'_{ij} , na co wskazali Liu i Der Kiureghian (1986).

Alternatywnym podejściem wobec konstrukcji Natafa może być rozkład łączny zaproponowany przez Morgensterna (1956). Jednak konstrukcja Morgensterna możliwa jest tylko dla niewielkich wartości współczynników korelacji, nie przekraczających dla większości popularnych rozkładów wartości $\rho = 0,35$, co w istotnym stopniu ogranicza jej stosowanie. W monografii Johnsona i Kotza (1976) można znaleźć dalsze przykłady konstruowania rozkładów łącznych o zadanych rozkładach brzegowych, dotyczą one jednak tylko przypadków dwuwymiarowych. Tak więc w obliczeniach niezawodności konstrukcji z uwzględnieniem korelacji zmiennych konstrukcja Natafa stała się bardzo rozpowszechniona.

3.1.3. Uwagi do opisu parametrów podłoża za pomocą zmiennych losowych

Omówienia dokonane w tym podrozdziale prowadzą do wniosku, że określenie rozkładu prawdopodobieństwa dla danej cechy podłoża w sposób jednoznaczny nie jest możliwe, gdyż na ogół zależy on od rodzaju podłoża i jego przeszłości geologicznej. Przystępując do probabilistycznej analizy stateczności konstrukcji współpracującej z gruntem na ogół nie dysponuje się dostateczną liczbą prób pobranych z podłoża, aby rozkłady te estymować. Wydaje się więc celowe, aby przyjmować rozkłady określonych cech podłoża na drodze umownej. Konsekwencja w przypisywaniu określonym cechom podłoża gruntowego określonych typów rozkładów prawdopodobieństwa doprowadziłaby wówczas do pełnej porównywalności obliczanych wskaźników niezawodności. Takie podejście wydaje się możliwe, tym bardziej, że w dalszych rozdziałach autor będzie starał się wykazać, że rodzaj rozkładu prawdopodobieństwa danej cechy podłoża ma daleko mniejszy wpływ na obliczane miary niezawodności, aniżeli współczynnik zmienności tej cechy. I tak np. dość powszechna staje się opinia (Rackwitz 2000, 2001, Cherubini 2000, Ditlevsen i inni 2000), że cechy wytrzymałościowe podłoża powinno się opisywać rozkładami lognormalnymi.

W kolejnym podrozdziale przedstawiony będzie opis parametrów podłoża za pomocą teorii pól losowych. Choć z teoretycznego punktu widzenia jest to opis niewątpliwie doskonalszy, to jednak opis za pomocą zmiennych losowych jest bardzo istotnym komponentem probabilistycznej analizy konstrukcji współpracujących z gruntem. W wielu bowiem zadaniach jest on całkowicie wystarczający, a jednocześnie dużo prostszy i umożliwiający w znacznym stopniu klarowną weryfikację statystyczną stawianych hipotez. Należy też pamiętać, że charakterystyka wynikająca z opisu za pomocą pól losowych po zastosowaniu odpowiednich procedur dyskretyzacyjnych sprowadza się najczęściej do analizy zmiennych lub wektorów losowych.

3.2. Parametry podłoża gruntowego jako pola losowe

W podrozdziale 3.1 pokazano najprostszy i najczęściej stosowany opis losowej zmienności parametrów podłoża za pomocą zmiennych losowych lub wektorów losowych. Wskazano, że opis tego typu może być dobrze zweryfikowany za pomocą badań laboratoryjnych, a ponadto prowadzi do prostych i efektywnych modeli niezawodnościowych. Wiadomo jednak, że o bezpieczeństwie fundamentów decydują najczęściej duże obszary gruntu współpracujące z tymi fundamentami. Niejednokrotnie może to oznaczać, że charakterystyka zmienności losowej danego parametru gruntu w całym obszarze za pomocą pojedynczej zmiennej losowej jest zbyt uboga. Wówczas istotnie lepszym podejściem jest przyjęcie założenia, że w każdym punkcie

rozpatrywanego obszaru dana cecha podłoża jest odrębną zmienną losową, zmienne te zaś w całym obszarze powiązane są odpowiednią strukturą korelacyjną. Taka charakterystyka prowadzi do pojęcia pola losowego rozpatrywanego parametru podłoża. Z matematycznego punktu widzenia pole losowe jest funkcją losową wielu zmiennych (Gikhman i Skorohod 1977, Wentzel 1980, Adler 1981, Yardenko 1983, Vanmarcke 1983) i stanowi rozszerzenie pojęcia procesu stochastycznego na większą niż jeden liczbę wymiarów. Tego typu podejście stosunkowo wcześniej pojawiło się w geologii złożowej, gdzie stanowiło wyjątkowo adekwatne, choć skomplikowane narzędzie do planowania eksploatacji złóż naturalnych. Wielkie znaczenie mają prace Krige (np. Krige 1951, Krige 1962), który, w oparciu o teorię funkcji losowych, opracował metodę szacowania intensywności występowania eksploatowanego minerału w danym obszarze. Badania Krige'go związane były z eksploatacją złota w Południowej Afryce, jednak opracowana przez niego metoda zwana krigingiem jest ciągle udoskonalana i stanowi jedno z ważniejszych narzędzi geostatystyki (Matheron 1963), rozwijanej także w Polsce (np. w pracach Namysłowskiej-Wilczyńskiej 1993). W Polsce za pionierskie w dziedzinie zastosowań teorii pól losowych w geologii należy uznać prace wrocławskiego matematyka Stefana Zubrzyckiego (1957), które powstały w związku z eksploatacją rud cynku na Górnym Śląsku. W geotechnice pierwsze prace, w których zastosowano aparat funkcji losowych powstały w połowie lat siedemdziesiątych. Do pionierskich należą tu prace Lumba (1974, 1975), Alonso i Krizka (1975), Alonso (1976), w których badano trendy zmian parametrów z głębokością. Późniejsze prace – Vanmarcke'a (1977a, 1977b) oraz Wildego (1977) przyniosły istotny postęp w technikach obliczeniowych związanych z zastosowaniem teorii pól losowych. Z nieco późniejszych prac opublikowanych w Polsce należy wymienić ważną z punktu widzenia zastosowań monografię Wildego (1981), poświęconą metodom dyskretyzacji pól losowych, oraz pracę Brząkały (1981), w której badano własności funkcji korelacyjnych, mogących służyć do stochastycznego opisu parametrów podłoża wraz z doświadczalną identyfikacją parametrów tych funkcji. Pewne modele gruntoznawcze, modele wytrzymałości oraz modele gleboznawcze analizował Szczepankiewicz (1985). Kalibrowanie funkcji korelacyjnych poparte obszernymi badaniami doświadczalnymi przeprowadził Przewłócki (1998). Współczesne podejście do modelowania parametrów podłoża za pomocą pól losowych sformułowane zostało w pracy Raczkwitza (2000).

Stosując opis za pomocą pola losowego zakłada się, że parametr X podłoża ma następującą reprezentację:

$$X(x, y, z) = E\{X(x, y, z)\} + \sigma_X(x, y, z)U(x, y, z), \quad (3.11)$$

gdzie wartość oczekiwana $E\{X(x, y, z)\}$ oraz odchylenie standardowe $\sigma_X(x, y, z)$ zależą w ogólnym przypadku od współrzędnych (x, y, z) położenia w przestrzeni. Najczęściej jednak zakłada się, że wartość oczekiwana $E\{X(x, y, z)\}$ zmienia się liniowo

z głębokością (zależy liniowo od współrzędnej z), albo pozostaje stała w ramach jednej warstwy geotechnicznej; $U(x, y, z)$ jest polem losowym o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Przyjmuje się najczęściej, że jest to pole normalne (gaussowskie) lub lognormalne, co oznacza, że skończenie wymiarowe rozkłady pola U są normalne lub lognormalne.

Normalne lub lognormalne pole losowe U jest jednoznacznie charakteryzowane przez funkcję kowariancji

$$R(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = E\{U(x_2, y_2, z_2)U(x_1, y_1, z_1)\}. \quad (3.12)$$

W przypadku opisu własności fizycznych powszechnie akceptowane jest założenie stacjonarności pola (w sensie szerszym), które oznacza, że wartość oczekiwana jest stała w każdym punkcie pola, a funkcja kowariancji pola zależy jedynie od różnic poszczególnych współrzędnych, a więc funkcja R staje się funkcją trzech zmiennych

$$R(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = R(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = R(\Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (3.13)$$

Jak łatwo zauważyć, własność (3.13) implikuje, że wariancja stacjonarnego pola losowego jest stała w każdym punkcie tego pola.

Jako alternatywną charakterystykę stacjonarnej funkcji losowej stosuje się transformatę Fouriera S funkcji kowariancji, która nazywana bywa gęstością widmową funkcji losowej (Gikhman i Skorohod 1977, Papoulis 1972, Wentzel 1980, Śniady 2000). Transformata Fouriera oraz transformata do niej odwrotna dają następujące zależności pomiędzy funkcją kowariancji a jej gęstością widmową:

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \iiint_{\mathbf{R}^3} S(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \exp(i(\kappa_1 \Delta x + \kappa_2 \Delta y + \kappa_3 \Delta z)) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (3.14)$$

$$S(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbf{R}^3} R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \exp(-i(\kappa_1 \Delta x + \kappa_2 \Delta y + \kappa_3 \Delta z)) d\Delta x d\Delta y d\Delta z. \quad (3.15)$$

Wzory (3.14) oraz (3.15) znane są w literaturze (Yardenko 1983) jako relacje Wienera–Chinczyna. Gęstości spektralne są bardzo istotnym narzędziem stosowanym w zagadnieniach dynamiki stochastycznej (Śniady 2000). W dalszej części tej monografii używane będą jedynie funkcje kowariancji lub korelacji pola bez odwoływania się do ich transformat Fouriera.

Stacjonarne pole losowe nazywa się separowalnym, jeśli jego funkcja korelacji jest funkcją o rozdzielnych zmiennych

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = R_1(\Delta x)R_2(\Delta y)R_3(\Delta z). \quad (3.16)$$

Własność separowalności pozwala na analizę struktury korelacyjnej pola w każdym kierunku z osobna za pomocą trzech funkcji jednej zmiennej.

Specjalną klasę stacjonarnych pól losowych stanowią pola izotropowe. Są to pola w których funkcja korelacji zależy jedynie od odległości punktów w przestrzeni, a więc jest funkcją jednej zmiennej

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = R(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}). \quad (3.17)$$

Zgodnie z twierdzeniem Bochnera (Wentzel 1980) na to, aby funkcja była funkcją korelacji stacjonarnego pola losowego, potrzeba i wystarcza, aby była nieujemnie określona, co oznacza, że dla dowolnych liczb zespolonych c_j oraz dowolnych wektorów $\mathbf{t}_j = (x_j, y_j, z_j)$ spełniony jest warunek

$$\sum_{i,j} c_j \bar{c}_i R(\mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i) \geq 0, \quad (3.18)$$

gdzie kreska u góry oznacza sprzężenie zespolone. Ponadto prawdziwy jest fakt, że dla dowolnego pola (procesu stochastycznego) o skończonych drugich momentach funkcja korelacji jest nieujemnie określona.

Poniżej podano przykłady dodatkowo określonych funkcji jednej zmiennej, najczęściej stosowanych jako funkcje kowariancji.

$$R(\Delta x) = \sigma^2 \exp(-a |\Delta x|), \quad (3.19)$$

$$R(\Delta x) = \sigma^2 \exp(-a |\Delta x|) \cos(b \Delta x), \quad (3.20)$$

$$R(\Delta x) = \sigma^2 \exp(-a |\Delta x|) J_0(b \Delta x), \quad (3.21)$$

$$R(\Delta x) = \sigma^2 \exp(-a(\Delta x)^2), \quad (3.22)$$

$$R(\Delta x) = \sigma^2 \frac{(a \Delta x)^b K_b(a \Delta x)}{2^{b-1} \Gamma(b)}, \quad (3.23)$$

$$R(\Delta x) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{|\Delta x|}{a}\right) & \text{dla } |\Delta x| \leq a \\ 0 & \text{dla } |\Delta x| > a \end{cases}, \quad (3.24)$$

$$R(\Delta x) = \sigma^2 \exp(-a |\Delta x|) [1 + a |\Delta x|]. \quad (3.25)$$

W powyższych wzorach a i b są parametrami pola, J_0 oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0, K_b jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju rzędu b , Γ zaś jest funkcją gamma Eulera. Odpowiadające funkcjom (3.19)–(3.25) gęstości spektralne można znaleźć w pracy Rackwitz (2000).

Przykładowo, funkcje postaci (3.19) stosowali Alonso i Krizek (1975) do badania zmienności cech podłoża wraz z głębokością. Niektóre ich wyniki zamieszczono

w tabeli 3.7. Warto zwrócić uwagę na stosunkowo nieduże różnice pomiędzy wartościami parametru a dla pięciu wskazanych własności gruntu. Można by postawić hipotezę, że funkcje autokorelacyjne badanych własności tego samego gruntu są jednakowe, zaś występujące różnice są konsekwencją błędów pomiarowych lub małej liczebności próby.

Tabela 3.7. Współczynniki autokorelacji wybranych własności gliny pylastej miękkoplastycznej według Alonso i Krizka (1975). Δz oznacza zmiany współrzędnej pionowej, zaś parametr a jest parametrem funkcji (3.19)

Własność	Parametr a	Współczynnik autokorelacji $\rho = \exp(-a \Delta z)$		
		$\Delta z = 1 \text{ m}$	$\Delta z = 2 \text{ m}$	$\Delta z = 3 \text{ m}$
Zawartość frakcji piaskowej	0,231	0,7937	0,6300	0,5001
Zawartość frakcji pylastej	0,310	0,7334	0,5379	0,3946
Ciężar objętościowy	0,253	0,7765	0,6029	0,4681
Wskaźnik porowatości	0,191	0,8261	0,6825	0,5638
Granica płynności	0,230	0,7945	0,6312	0,5016

W przypadku trójwymiarowym proponuje się zastosowanie funkcji

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sigma^2 \exp(-(a_1 |\Delta x| + a_2 |\Delta y| + a_3 |\Delta z|)) \quad (3.26)$$

lub

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sigma^2 \exp(-(a_1 (\Delta x)^2 + a_2 (\Delta y)^2 + a_3 (\Delta z)^2)). \quad (3.27)$$

Funkcja (3.27) bywa nazywana gaussowską funkcją korelacji, a jej jednowymiarowym odpowiednikiem jest funkcja (3.22). W przypadku, gdy $a_1 = a_2 = a_3$, funkcja (3.26) jest funkcją korelacji pola izotropowego.

Miarą szybkości zmienności pola losowego jest promień korelacyjny, zwany też skalą fluktuacji (Vanmarcke 1977), odległością korelacyjną lub długością korelacyjną. Określa się go jako całkę z funkcji korelacji. W przypadku jednowymiarowym mamy

$$\delta = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} R(\Delta z) d\Delta z = 2 \int_0^{\infty} \rho(\Delta z) d\Delta z = \frac{1}{\sigma^2} \pi S(0), \quad (3.28)$$

gdzie

$$\rho(\Delta z) = \frac{R(\Delta z)}{\sigma^2} \quad (3.29)$$

jest funkcją korelacji pola, zaś S jego gęstością spektralną.

W przypadku dwuwymiarowym przy założeniu separowalności mamy

$$\delta = \frac{4}{\sigma^2} \int_0^\infty R_1(\Delta x) d\Delta x \int_0^\infty R_2(\Delta z) \Delta z = \frac{1}{\sigma^2} \pi^2 S(0,0). \quad (3.30)$$

Dla wielu często używanych w zastosowaniach funkcji kowariancji skalę fluktuacji można interpretować jako miarę obszaru (długość, pole, objętość), w którym własności fizyczne są silnie skorelowane. Dla funkcji kowariancji danych wzorami (3.19)–(3.25) skalę fluktuacji wynoszą odpowiednio

$$\delta_{19} = \frac{2}{a}, \quad \delta_{20} = \frac{2a}{a^2 + b^2}, \quad \delta_{21} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{8a}\right) I_0\left(\frac{b^2}{8a}\right), \quad \delta_{22} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (3.31)$$

$$\delta_{23} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{a\Gamma(b)}, \quad \delta_{24} = a, \quad \delta_{25} = \frac{4}{a}.$$

(I_0 jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0.)

Łatwo zauważyć, na podstawie wzoru (3.22) oraz postaci δ_{22} , że skala fluktuacji dla trójwymiarowej gaussowskiej funkcji korelacji (3.27) jest równa

$$\delta_{15} = \pi \sqrt{\frac{\pi}{a_1 a_2 a_3}}. \quad (3.32)$$

Oczywiście pełna informacja probabilistyczna o funkcji losowej znana jest wówczas, gdy sprecyzowane są wszystkie rozkłady skończenie wymiarowe tej funkcji. Z punktu widzenia rachunkowej prostoty opisu najdogodniejsze są rozkłady normalne. Jak już jednak wspomniano w podrozdziale 3.1, w przypadku dużych wariacji nie powinny być one stosowane do opisu parametrów podłoża. Z tego punktu widzenia dogodniejsze są pola lognormalne, które mogą być w prosty sposób generowane z pól normalnych poprzez zastosowanie transformacji

$$X(\xi) = \exp[U(\xi)\tilde{\delta}_X + \eta_X], \quad (3.33)$$

gdzie $\tilde{\delta}_X^2 = \ln(1 + V_X^2)$, $\eta_X = \ln(m_X) - \frac{1}{2}\tilde{\delta}_X^2$, $V_X = \frac{\sigma_X}{m_X}$ i $U(\xi)$ jest normalnym polem losowym o zerowej średniej i jednostkowej wariancji. Wówczas zależności pomiędzy funkcjami korelacji pól X oraz U są następujące:

$$\rho_X(\Delta x) = \frac{(1 + V_X^2)^{\rho_U(\Delta x)} - 1}{V_X^2}, \quad (3.34)$$

$$\rho_U(\Delta x) = \frac{\ln(\rho_X(\Delta x)V_X^2 + 1)}{\ln(V_X^2 + 1)}. \quad (3.35)$$

Inne niegaussowskie pola mogą być za pomocą transformacji Natafa (Nataf 1962; por. także podrozdział 3.1) sprowadzone do standardowych zmiennych gaussowskich. Wówczas funkcja korelacji transformowanego pola spełnia następujący warunek (analogiczny do warunku (3.10)):

$$\rho_X(\Delta \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{F_X^{-1}(\Phi_0(u_1)) - m_X}{\sigma_X} \right] \left[\frac{F_X^{-1}(\Phi_0(u_2)) - m_X}{\sigma_X} \right] \varphi_2(u_1, u_2, \rho_U(\Delta \xi)) du_1 du_2, \quad (3.36)$$

gdzie $\varphi_2(u_1, u_2, \rho_U)$ jest dwuwymiarową standardową gęstością gaussowską o współczynniku korelacji ρ_U . Równanie (3.36) musi być rozwiązane (najczęściej drogą numeryczną) ze względu na poszukiwane wartości funkcji $\rho_U(\Delta \xi)$ przy znanej funkcji $\rho_X(\Delta \xi)$. Oczywiście funkcja $\rho_U(\Delta \xi)$ musi być dodatnio określona, co nakłada istotne ograniczenia na funkcję $\rho_X(\Delta x)$. To zaś oznacza, że transformacja Natafa nie zawsze może być zastosowana.

3.3. Uśrednienia lokalne (uśrednienia przestrzenne)

3.3.1. Koncepcja lokalnych uśrednień i podstawowe zależności

Jakkolwiek opis zaproponowany w poprzednim podrozdziale jest poprawny z matematycznego punktu widzenia, to jednak jest dość trudny do zastosowania w obliczeniach praktycznych. Aby umożliwić efektywne obliczenia miar niezawodności, należy uciec się do dyskretyzacji pola losowego (zamiany na skończony ciąg zmiennych losowych) lub zastosowania technik symulacji cyfrowej. Z drugiej strony, w mechanizmach zniszczenia rozpatrywanych w geotechnice są uwzględniane własności podłoża w obszarach o dość znacznych rozmiarach. Nasuwa to myśl, że do obliczeń należałoby przyjmować parametry będące uśrednionymi wartościami z pewnych większych obszarów charakterystycznych dla rozpatrywanego mechanizmu zniszczenia. Możliwe wydaje się na przykład zastosowanie procedur wypracowanych w ramach teorii homogenizacji (Strzelecki et al. 1996). Tu jednak uwaga będzie skoncentrowana na tzw. uśrednieniach przestrzennych, zwanych też – być może słuszniej – lokalnymi uśrednieniami, a zaproponowanymi i opracowanymi przez Vanmarcke'a (Vanmarcke 1977, 1983, Vanmarcke et al. 1986). Poniżej przedstawiono krótki zarys teorii Vanmarcke'a, gdyż będzie ona podstawą analiz omówionych w następnym rozdziale.

Założmy, że parametr gruntu X opisany jest przez stacjonarne (w szerszym sensie), ciągłe w sensie średniej kwadratowej (por. np. Wentzel 1980) pole losowe $X(x, y, z)$, o funkcji kowariancji $R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sigma_x^2 \rho(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, gdzie σ_x^2 jest wariancją pola X , zaś ρ_x jego funkcją korelacji. Niech $V \subset \mathbf{R}^3$ oznacza obszar, zaś $|V|$ jego miarę (objętość). Lokalne (przestrzenne) uśrednienie, zastosowane przez Vanmarcke'a (Vanmarcke 1977), polega na wprowadzeniu nowego pola (tzw. pola o ruchomej średniej (Box i Jenkins 1983)) określonego jako

$$X_V = \frac{1}{|V|} \iiint_V X(x, y, z) dx dy dz \quad (3.37)$$

(całka we wzorze (3.37) jest rozumiana jako całka w sensie średniej kwadratowej (por. np. Wenzel 1980)). Warto zwrócić uwagę, że średnie postaci (3.37) były już wcześniej stosowane przez Alonso (1976) do probabilistycznej analizy stateczności zboczy. Jak łatwo zauważyć, X_V jest zmienną losową określającą pewną średnią pola X w obszarze V . Nowa rodzina zmiennych losowych (proces o ruchomej średniej) indeksowana jest rodziną rozpatrywanych obszarów $\{V\}$. Dzięki własności stacjonarności pole losowe X_V ma taką samą wartość oczekiwaną jak X , ale zmienia się jego wariancja, którą można zapisać w postaci

$$\text{VAR}[X_V] = \sigma_V^2 = \gamma(V) \sigma_x^2. \quad (3.38)$$

Wzór (3.38) definiuje funkcję $\gamma(V)$, tzw. funkcję wariancji (zwaną też funkcją redukcji wariancji), określającą zmiany wariancji punktowej σ_x^2 po zastosowaniu lokalnego uśrednienia przestrzennego. Aby znaleźć funkcję wariancji, należy obliczyć wariancję $\text{VAR}[X_V]$. Z definicji kowariancji oraz ogólnych zależności dotyczących całek stochastycznych (Wentzel 1980) wynika, że

$$\text{Cov}(X_{V_1}, X_{V_2}) = \frac{1}{|V_1| |V_2|} \int_{V_1} \int_{V_2} R(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) dV_1(x_1, y_1, z_1) dV_2(x_2, y_2, z_2). \quad (3.39)$$

Całka we wzorze (3.39) jest całką po obszarach V_1 i V_2 , może być całką powierzchniową, krzywoliniową lub całką wielokrotną w zależności od postaci obszarów V_1 i V_2 . W szczególnym przypadku, gdy $V_1 = V_2$, wzór (3.39) określa wariancję $\text{VAR}[X_V]$. Dla pola stacjonarnego, gdy obszar V jest prostopadłością, tj. $V = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$, wariancja $\text{VAR}[X_V]$ obliczona wg (3.39) ma postać

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_V] &= \frac{1}{(L_1 L_2 L_3)^2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} R(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 \\ &= \frac{\sigma^2 2^3}{L_1 L_2 L_3} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \left(1 - \frac{\Delta x}{L_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta y}{L_2}\right) \left(1 - \frac{\Delta z}{L_3}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y, \Delta z) d\Delta x d\Delta y d\Delta z. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Druą równość we wzorze (3.40) wynika z następującej zamiany zmiennych:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1, & \Delta x' &= x_1, \\ \Delta y &= y_2 - y_1, & \Delta y' &= y_1, \\ \Delta z &= z_2 - z_1, & \Delta z' &= z_1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

oraz z faktu, że funkcja korelacji jest symetryczna ze względu na zmianę znaku na każdej z trzech współrzędnych.

Ze wzoru (3.40) wynika następujące oszacowanie dla funkcji wariancji w przypadku prostopadłościanu oraz dowolnej nieujemnej funkcji korelacji pola (por. także (3.28)):

$$\begin{aligned} \gamma(L_1, L_2, L_3) &= \frac{2^3}{L_1 L_2 L_3} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \left(1 - \frac{\Delta x}{L_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta y}{L_2}\right) \left(1 - \frac{\Delta z}{L_3}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y, \Delta z) d\Delta x d\Delta y d\Delta z \\ &\leq \frac{2^3}{L_1 L_2 L_3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta x}{L_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta y}{L_2}\right) \left(1 - \frac{\Delta z}{L_3}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y, \Delta z) d\Delta x d\Delta y d\Delta z \\ &= \frac{\delta_3}{L_1 L_2 L_3}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

gdzie δ_3 oznacza trójwymiarową skalę fluktuacji. Na podstawie powyższego oszacowania można zaproponować funkcję wariancji w postaci

$$\gamma(V) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |V| \leq \delta_3 \\ \frac{\delta_3}{|V|} & \text{dla } |V| > \delta_3 \end{cases} \quad (3.43)$$

W dalszym ciągu tego podrozdziału rozpatrywane będą pola separowalne, w których, jak to wskazano w podrozdziale 3.2, badanie własności korelacyjnych sprowadza się do zadań jednowymiarowych. Dla pól separowalnych i obszaru V będącego prostopadłościanem funkcja redukcji wariancji jest funkcją o rozdzielonych zmiennych, tj.

$$\gamma(L_1, L_2, L_3) = \gamma(L_1) \gamma(L_2) \gamma(L_3). \quad (3.44)$$

W przypadku jednowymiarowym pierwsza równość we wzorze (3.42) ma postać

$$\gamma(L) = \frac{2}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{\Delta z}{L}\right) \rho(\Delta z) d\Delta z. \quad (3.45)$$

Porównując wzory (3.28) i (3.45) łatwo zauważyć, że

$$\delta = \lim_{L \rightarrow \infty} L\gamma(L), \quad (3.46)$$

o ile granica z prawej strony równości (3.46) istnieje. Funkcja (3.43) była zaproponowana przez Vanmarcke'a (1977a) jako najprostsza do zastosowań. Odpowiadająca jej według pierwszej równości we wzorze (3.42) jednowymiarowa funkcja korelacyjna ma postać

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\xi| \leq \delta \\ 0 & \text{dla } |\xi| > \delta \end{cases}. \quad (3.47)$$

Jednak w przypadku takiej funkcji korelacyjnej nie jest spełniona zależność (3.28), gdyż całka z funkcji (3.47) jest równa 2δ . Aby zadośćuczynić zależności (3.28), należy funkcję (3.47) zmodyfikować do postaci

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\xi| \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{dla } |\xi| > \frac{\delta}{2} \end{cases}, \quad (3.48)$$

co z kolei implikuje funkcję wariancji postaci

$$\gamma(L) = \begin{cases} 1 & \text{dla } L \leq \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{L} \left(1 - \frac{\delta}{4L}\right) & \text{dla } L > \frac{\delta}{2} \end{cases}, \quad (3.49)$$

Inny prosty model to trójkątna funkcja korelacji

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{|\xi|}{\delta} & \text{dla } |\xi| \leq \delta \\ 0 & \text{dla } |\xi| > \delta \end{cases} \quad (3.50)$$

oraz odpowiadająca jej funkcja wariancji

$$\gamma(L) = \begin{cases} 1 - \frac{L}{3\delta} & \text{dla } L \leq \delta \\ \frac{\delta}{L} \left(1 - \frac{\delta}{3L}\right) & \text{dla } L > \delta \end{cases} \quad (3.51)$$

Inne jednowymiarowe funkcje kowariancji podane w podrozdziale 3.2 wzorami (3.19) i (3.20) oraz (3.22) i (3.24) implikują odpowiednio następujące postaci funkcji redukcji wariancji (Vanmarcke 1977a, Rackwitz 2000):

$$\gamma_{19}(L) = \frac{2(aL - 1 + \exp(-aL))}{(aL)^2}, \quad (3.52)$$

$$\gamma_{20}(L) = 2 \frac{(a^3L + aLb - a^2 + b^2) + \exp(-aL)[a^2 \cos(Lb) - b^2 \cos(Lb) - 2ab \sin(Lb)]}{(a^2 + b^2)^2 L^2}, \quad (3.53)$$

$$\gamma_{22}(L) = \frac{\sqrt{\pi a} L \operatorname{erf}(\sqrt{a}L) - 1 + \exp(-aL^2)}{aL^2}, \quad (3.54)$$

$$\gamma_{24}(L) = \begin{cases} 1 - \frac{L}{3a} & \text{dla } L \leq a \\ \left(\frac{a}{L}\right) \left(1 - \frac{a}{3L}\right) & \text{dla } L > a \end{cases}, \quad (3.55)$$

przy czym

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-x^2) dx. \quad (3.56)$$

Funkcje γ_{21} , γ_{23} nie mają reprezentacji analitycznej, gdyż całka (3.45) nie daje się rozwiązać w postaci zamkniętej (możliwe jest jedynie rozwiązanie numeryczne).

Przedstawione w następnym podrozdziale koncepcje dają duże możliwości praktycznego zastosowania teorii pól losowych do probabilistycznej oceny bezpieczeństwa konstrukcji współpracujących z gruntem. Do wykonania obliczeń niezbędna jest znajomość skali fluktuacji pola (czasem w postaci trzech liczb, charakteryzujących fluktuacje w trzech kierunkach). W kolejnym podrozdziale podana zostanie propozycja oceny skali fluktuacji na podstawie badań podłoża oraz przykładowe wartości uzyskane przez kilku badaczy.

3.3.2. Wyznaczanie skali fluktuacji i jej wartości

Vanmarcke (1977a) zaproponował następujący sposób badania skali fluktuacji na podstawie terenowych badań podłoża, na przykładzie badania oporu stożka sondy CPT. Podstawę estymacji stanowi przybliżona równość

$$\gamma(\Delta L) \approx \frac{\delta}{\Delta L}, \quad (3.57)$$

dla dostatecznie dużych ΔL (co najmniej $\Delta L > \delta$), będąca konsekwencją (3.42) – por. także (3.43).

- Wartości danego parametru podłoża są próbkowane w jednakowych odstępach ΔL_0 .

- Oszacowane zostają wartość średnia i „punktowe” odchylenie standardowe σ z całości próby.

- Sąsiednie wyniki są uśredniane parami i odpowiednie odchylenie standardowe uśrednienia wynosi

$$\sigma\sqrt{\gamma(2)}.$$

- Procedurę kontynuuje się dla $n = 3, 4, \dots, n$, wykonując wykres otrzymywanych wartości $\sqrt{\gamma(n)}$ jako funkcję n , co pokazano linią przerywaną na rysunku 3.2b zaczerpniętym z pracy Vanmarcke’a (1977a).

- Wraz ze wzrostem n wartości $\sqrt{\gamma(n)}$ zbliżają się do wartości teoretycznej, wynikającej z zależności (3.57), przedstawionej za pomocą linii ciągłej na rysunku 3.2b, przy czym linia ciągła opisuje zależność postaci

$$\sqrt{\gamma(\Delta L)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \Delta L \leq \delta \\ \sqrt{\frac{\delta}{\Delta L}} & \text{dla } \Delta L > \delta \end{cases} \quad (3.58)$$

($\Delta L = n\Delta L_0$).

Oznacza to, że dla dużych wartości n powinna być spełniona przybliżona równość

$$\sqrt{\gamma(n)} = \sqrt{\frac{\delta}{n\Delta L_0}}. \quad (3.59)$$

- Ostatnim krokiem jest dopasowanie *krzywej teoretycznej* (linia ciągła (3.58)) do zaobserwowanej (linia przerywana) w końcowym fragmencie ich przebiegu. Jako że jedynym parametrem krzywej (3.58) jest δ , więc dopasowanie to doprowadzi do oznaczenia wartości skali fluktuacji δ .

Dopasowanie może być dokonane np. metodą najmniejszych kwadratów w końcowym fragmencie krzywych. Vanmarcke (1977a) proponuje ustalenie pewnej końcowej wartości n , na podstawie której można obliczyć skalę fluktuacji według zależności

$$\delta = n\gamma(n)\Delta L_0 = n^* \Delta L_0. \quad (3.60)$$

Zależność (3.60) definiuje ponadto wartość n^* , która podaje zasięg odcinka prostoliniowego *krzywej teoretycznej* na wykresie zależności $\sqrt{\gamma(n)}$ od n . W przykładzie pokazanym na rysunku 3.2b, dotyczącym danych oporu stożka sondy pokazanych na rysunku 3.2a, przyjęto jako końcową wartość $n = 15$, co doprowadziło do wartości skali fluktuacji $\delta = 1,2$ m (por. obliczenia na rysunku 3.2).

W przypadku, gdy n^* jest bliskie jedności, wówczas ostatni wzór daje istotnie zawyżoną wartość skali fluktuacji. Gdy bowiem $n^* = 1$, to poszczególne „obserwacje” są nieskorelowane, skala fluktuacji zaś jest mniejsza niż przedział próbkowania ΔL_0 .

Pewną modyfikację przedstawionej powyżej metody Vanmarcke’a podali Wicker-
mesinghe i Campanella (1993), którzy zauważyli, że zgodnie z zależnością (3.57) iloczyn $\gamma(\Delta L)\Delta L$ powinien być stały dla dostatecznie dużych ΔL . W procedurze Vanmarcke’a można więc sporządzić wykres $\gamma(n\Delta L_0)n\Delta L_0$ w zależności od $n\Delta L_0$. Po ustabilizowaniu się wykresu na poziomie stałej wartości, można przyjąć tę stałą wartość jako wartość skali fluktuacji δ . Autorzy ci pokazali na przykładach z badań, że ta modyfikacja, ich zdaniem prostsza w zastosowaniu od metody oryginalnej, prowadzi do bardzo zbliżonych oszacowań skali fluktuacji w zestawieniu z metodą Vanmarcke’a.

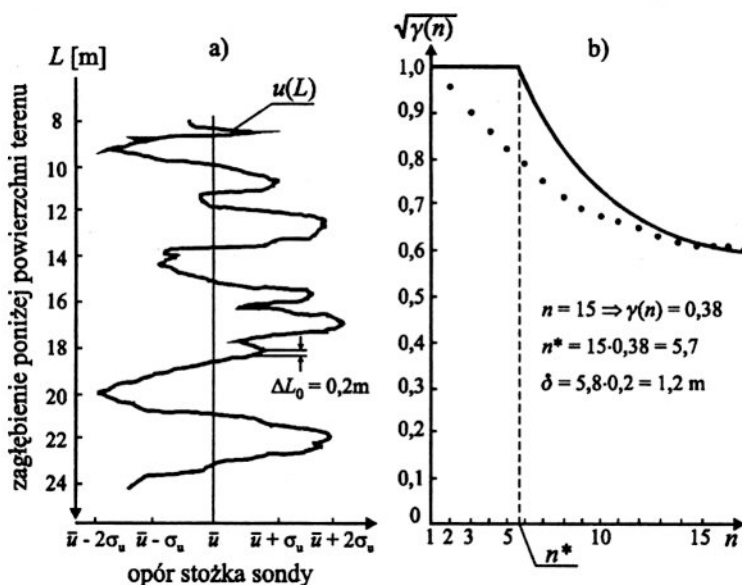
Inny sposób estymacji skali δ , także zaproponowany przez Vanmarcke’a (1977a), jest możliwy pod warunkiem wykonania dużej liczby pomiarów. Polega on na zastosowaniu relacji pomiędzy skalą fluktuacji δ a średnią odległością \bar{d} pomiędzy przekroczeniami przez fluktuujący parametr $u(z)$ jego wartości średniej \bar{u} . Jeżeli przyjmie się założenie, że funkcja kowariancji pola ma postać (3.22), to średnia odległość pomiędzy przekroczeniami średniej wynosi w przybliżeniu

$$\bar{d} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta \approx 1,25\delta. \quad (3.61)$$

Wzór (3.61) jest konsekwencją znanego wzoru Rice’a (Rice 1944), według którego średnia częstotliwość przekroczeń wartości średniej przez funkcję losową, w przybliżeniu równa $\frac{1}{\bar{d}}$, wynosi

$$\frac{1}{\bar{d}} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\left| \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z^2} \right|_{z=0}}, \quad (3.62)$$

gdzie ρ jest funkcją korelacji rozpatrywanej funkcji losowej. Uwzględniając wzory (3.22) oraz (3.29) i obliczając wartość wyrażenia po prawej stronie przybliżonej równości (3.62), a następnie biorąc pod uwagę zależność dla δ_{22} we wzorach (3.31), otrzymuje się wzór (3.61). Wielkość \bar{d} może być oszacowana na podstawie wykresu jak na rysunku 3.2a. W rozpatrywanym tu przykładzie uzyskano wartość $\delta = 1,3$ m, a więc zblizoną do wyniku z poprzedniej metody.



Rys. 3.2. Idea wyznaczania skali fluktuacji na podstawie badań (Vanmarcke 1977a):

a) zmienność oporu stożka u z głębokością L , ($\bar{u} = E(u)$),

b) wyznaczanie skali fluktuacji (objaśnienia w tekście)

Informacje na temat wartości skali fluktuacji można uzyskać z prac badaczy, którzy estymowali ją bezpośrednio, jak na przykład Vanmarcke (1977a), Keaveny et al. (1989), Wickermesinghe i Campanella (1993), Gao i Li (1993), lub też z wcześniejszych prac, np. Wu (1974), Alonso i Krizek (1975), Matsuo i Asaoka (1977), którzy poszukiwali funkcji korelacyjnych pola parametrów, a następnie wyznaczyć δ z zależności (3.28).

Z badań tych autorów wynika, że stosunkowo niewielkie wartości δ (krótkie promienie korelacji – Vanmarcke 1977a) uzyskuje się dla kierunku pionowego zmian pola parametrów, natomiast w poziomie wartości te nie zależą już od wyboru kierunku (symetria względem osi pionowej) i są dużo większe. Oznacza to możliwość ograniczenia się do podawania jedynie dwóch skali fluktuacji – pionowej oraz poziomej. Przykładowe wartości skali fluktuacji w poziomie zestawiono w tabeli 3.8, w pionie zaś – w tabeli 3.9.

Tabela 3.8. Wartości skali fluktuacji dla poziomej zmienności parametrów (za Cherubinim 1997)

Własność	Autorzy	δ_h (m)
Opór stożka sondy (na głębokości 7 m)	Keaveny et al. (1989)	24,62
Opór stożka sondy (na głębokości 9 m)	Keaveny et al. (1989)	66,49
Wskaźnik skonsolidowania C_c	Vanmarcke (1977)	54,86
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Vanmarcke (1977)	46,00
Ciśnienie porowe	Vickremesinghe & Campbella (1993)	17,75

Tabela 3.9. Wartości skali fluktuacji dla pionowej zmienności parametrów (wg Cherubiniego 1997)

Własność	Autorzy	δ_y (m)
Wilgotność (%)	Vanmarcke (1977)	1,2
Wskaźnik porowatości e	Vanmarcke (1977)	3,05
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Vanmarcke (1977)	5,00
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Wu (1974)*	0,79
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Matsuo & Asaoka (1977)*	1,25
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Matsuo & Asaoka (1977)*	2,50
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Matsuo & Asaoka (1977)*	1,82
Opór stożka sondy (w piasku)	Alonso & Krizek (1975)	2,20
Opór stożka sondy (głina)	Alonso & Krizek (1975)	1,00
Opór stożka sondy (głina pylasta – <i>silty clay</i>)	Gao & Li (1993)**	0,40–0,80
Opór stożka sondy (głina błotnista – <i>muddy clay</i>)	Gao & Li (1993)**	1,00–1,50
Opór stożka sondy (głina szarawa – <i>greyish clay</i>)	Gao & Li (1993)**	0,60–1,20
Opór stożka sondy (ciemnozielona glina – <i>dark green clay</i>)	Gao & Li (1993)**	0,50–0,80
Opór stożka sondy (piasek drobny)	Gao & Li (1993)**	0,25–0,60
* Z pracy Quek et al. (1992)		
** Grunty z Szanghaju		

Obecnie coraz częściej spotyka się pogląd (Cherubini 2000, Rackwitz 2000), że wartości skali fluktuacji pionowej lub poziomej zależą nie tyle od tego jaki parametr podłoża jest rozpatrywany, ile od rodzaju gruntu stanowiącego to podłoże. Oznacza to, że można założyć, iż w danym rodzaju podłoża wszystkie parametry fizyczne mają w przybliżeniu równe promienie korelacyjne. Hipotezę tę zdają się potwierdzać wyniki pokazane w tabeli 3.7, wskazujące na bardzo zbliżone do siebie parametry funkcji autokorelacyjnych różnych cech jednakowego podłoża. Jednakowe funkcje autokorelacji implikują oczywiście takie same promienie korelacyjne.

Efektywne posługiwanie się polami losowymi jest możliwe albo przez wyznaczenie wartości oczekiwanej i wariancji (dla pola stacjonarnego), a następnie określenie parametrów funkcji korelacji, albo też zamiast estymowania parametrów funkcji autokorelacji – estymowanie skali fluktuacji i korzystanie z relacji podanych w poprzednim podrozdziale.

Jak to będzie pokazane w następnym rozdziale, zastosowanie uśrednień lokalnych i wynikających z nich redukcji wariancji do określonych zadań niezawodności związanych z geotechniką może być bardzo celowe. Tu z kolei znajomość skali fluktuacji jest konieczna, a więc efektywne metody jej wyznaczania nabierają dużego znaczenia. Jest jednak jeszcze jeden problem, a mianowicie – wielkość obszaru uśredniania. W niektórych zastosowaniach wielkość tego obszaru pojawia się w sposób naturalny, jak np. w metodzie elementów skończonych, gdzie obszarem uśredniania mogą być poszczególne elementy, co obszernie przedstawiono w pracy Knabego i współautorów (Knabe et al. 1998). Jednak w innych zagadnieniach wielkość tego obszaru może nie być już całkiem oczywista lub uśrednienie wiąże się z dość skomplikowanymi obliczeniami wariancji oraz kowariancji otrzymanych uśrednień. Te zagadnienia będą szeroko omawiane w następnym rozdziale.

Warto jeszcze nadmienić, że podobnie do innych sposobów zastosowania pól losowych, także stosowanie uśrednień lokalnych prowadzi do zamiany tego pola na określony ciąg skorelowanych ze sobą zmiennych losowych (opisujących jeden, wybrany parametr podłoża), czyli dyskretyzację. Do tak uzyskanego wektora losowego można już stosować metody teorii niezawodności konstrukcji opisane w rozdziale 2.

3.4. Uwagi

Opisane w poprzednim podrozdziale uśrednienia lokalne nie są jedynym możliwym sposobem stosowania teorii pól losowych do probabilistycznych analiz zagadnień geotechniki. Poświęcono im tu wiele uwagi, ze względu na ich przydatność oraz zastosowania w kolejnym rozdziale.

Inną propozycją o bardzo istotnym dla rozwoju zastosowań metod probabilistycznych znaczeniu jest metoda tzw. rozwinięć kanonicznych, której podstawą jest twierdzenie Karhunen–Loeva (por. np. Gardner 1986). Jeśli $X(\mathbf{t})$ jest polem losowym, przy czym $\mathbf{t} = (x, y, z)$, to $X(\mathbf{t})$ przedstawia się w postaci kombinacji liniowej pewnych deterministycznych, ortonormalnych funkcji $\{\phi_n(\mathbf{t})\}$, zwanych współrzędnymi, których współczynnikami są standardowe, wzajemnie nieskorelowane zmienne losowe V_n

$$X(\mathbf{t}) = E\{X(\mathbf{t})\} + \sum_{n=1}^{N \leq \infty} V_n \sigma_n \phi_n(\mathbf{t}), \quad (3.63)$$

gdzie

$$E\{V_n\} = 0, \quad E\{V_n V_m\} = \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.64)$$

ponadto δ_{mn} oznacza deltę Kroneckera. Funkcja kowariancji procesu $X(\mathbf{t})$ ma postać

$$R(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \phi_n(\mathbf{t}_1) \overline{\phi_n(\mathbf{t}_2)}, \quad (3.65)$$

przy czym kreska u góry oznacza sprzężenie zespolone. Zagadnienie sprowadza się do znalezienia zbioru funkcji $\{\phi_n(\mathbf{t})\}$ takich, aby współczynniki V_n były ortogonalne (w sensie warunku (3.64)). Oznacza to, że funkcje $\{\phi_n(\mathbf{t})\}$ muszą spełniać następujące równanie całkowe:

$$\int_P R(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \phi_n(\mathbf{t}_2) d\mathbf{t}_2 = \lambda_n \phi_n(\mathbf{t}_1) \quad (3.66)$$

dla pewnych wartości λ_n , takich że

$$\sigma_n^2 = \lambda_n. \quad (3.67)$$

Poszukiwane funkcje $\{\phi_n(\mathbf{t})\}$ są zatem funkcjami własnymi operatora całkowego z jądrem w postaci funkcji kowariancji. Tego typu rozwinięcia były stosowane w zagadnieniach geotechniki przez Przewłockiego (1995).

Innego typu rozwinięcia, bazujące na twierdzeniu Camerona–Martina (1947), zastosowali Ghanem i Spanos (1991), opracowując metodę nazwaną przez nich chaosem wielomianowym, stosowaną w ramach stochastycznej metody elementów skończonych. To podejście zastosowali Brząkała i Ghanem (1994) do analizy wpływu losowego położenia granicy pomiędzy warstwami gruntowymi na przemieszczenia w ośrodku liniowo sprężystym.

Osobnym zagadnieniem jest natomiast symulacja pól losowych parametrów, w szczególności parametrów podłoża. W tym celu najczęściej korzysta się z teorii stacjonarnych funkcji losowych (Wentzel 1980, Gardner 1986), rozpatrując ich spektralne reprezentacje w postaci transformat Fouriera funkcji kowariancji. Najbardziej rozpowszechnione są numeryczne generatory realizacji gaussowskich procesów i pól stacjonarnych zaproponowane przez Shinozukę i współautorów (Shinozuka 1972, Shinozuka i Jan 1972, Shinozuka 1977, Shinozuka 1987). Dla pól niegaussowskich generatory zostały skonstruowane przez Yamazakiego i Shinozukę (1988a). Dla zastosowań w geotechnice ważne było opracowanie przez Fentona (1990) metody symulacji pól losowych z uwzględnieniem lokalnych uśrednień, opisanych w podrozdziale 3.3, służącej do obliczeń metodą elementów skończonych. Połączenie zastosowania teorii pól losowych z metodą elementów skończonych bywa czasem nazywane metodą SFEM (Stochastic Finite Element Method). Przykładem zastosowań tego typu metody są prace Fentona i współautorów, (Fenton et al. 1996) oraz Fentona i Griffithsa (2202) dotyczące osiadań fundamentów.

4. Niektóre aspekty obliczeń miar niezawodności w przypadku stanów granicznych nośności fundamentów bezpośrednich

4.1. Wprowadzenie

4.1.1. Informacje na temat wcześniejszych prac z tego zakresu

Stany graniczne nośności fundamentów bezpośrednich w zakresie probabilistycznej analizy bezpieczeństwa są zagadnieniem stosunkowo dobrze zbadanym i opisanym. Dostępne w literaturze rezultaty dotyczą przede wszystkim takich tematów jak: oszacowanie bezpieczeństwa fundamentu z zastosowaniem teorii niezawodności konstrukcji, ocena wrażliwości na losową zmienność parametrów podłoża, obciążeń, geometrii itp., obliczanie (kalibracja) cząstkowych współczynników bezpieczeństwa parametrów podłoża na potrzeby normowania lub obliczeń inżynierskich według metody stanów granicznych, czasem też, choć stosunkowo rzadko, oceny bezpieczeństwa istniejących fundamentów w kontekście ich naprawy lub wymiany.

Za pionierską pracę w zakresie probabilistycznej oceny bezpieczeństwa fundamentów uważa się wzmiankowaną już (podrozdział 1.3) pracę Wu i Krafta (1967), chociaż wcześniejsze opracowania pochodzą od Biernatowskiego (1966a, 1966b, 1968a), lecz są mniej znane ze względu na opublikowanie ich w języku polskim. Podobnie jak w praktyce projektowej rodzaje stanu granicznego nośności poddawane analizie probabilistycznej zależą od rodzaju fundamentu oraz od sposobu jego obciążenia. Najczęściej analizowane rodzaje to wypieranie gruntu spod podstawy fundamentu, przesunięcie fundamentu, utrata stateczności ogólnej, czyli powstanie osuwiska gruntu niszczącego fundament, obroty fundamentu wokół krawędzi podstawy lub powierzchni cylindrycznych pod podstawą fundamentu.

Zagadnienia stateczności ogólnej mieszczą się w zadaniach związanych ze statecznością zbczy. Probabilistyczna analiza stateczności zbczy jest dziedziną bardzo obszernie opisaną w literaturze, najprawdopodobniej reprezentowaną przez największą liczbę publikacji spośród zagadnień geotechnicznych (Tang 1993). Pionierskie prace w tym dziale to prace Langejana (1965) i Biernatowskiego (1968b), inne zaś

ważniejsze wymieniono w podrozdziale 1.3. Zagadnienia te nie są jednak przedmiotem niniejszego opracowania i nie będą dalej komentowane.

Kolejne postępy i osiągnięcia dotyczące bezpieczeństwa fundamentów bezpośrednich pojawiały się wraz z udoskonalaniem metod teorii niezawodności konstrukcji. Cele prac pozostawały ciągle podobne, tzn. obiektywna ocena miarami wynikającymi z teorii bezpieczeństwa, kalibrowanie cząstkowych współczynników bezpieczeństwa na potrzeby obliczeń inżynierskich według stanów granicznych, ocena bezpieczeństwa istniejących konstrukcji.

Za jedną z pierwszych prób obliczania prawdopodobieństw awarii w przypadku wypierania gruntu spod ław fundamentowych posadowionych na piaskach można uznać pracę McAnally'ego (1983). Zbadał on wrażliwość obliczanego prawdopodobieństwa na zmienność losową parametrów podłoża oraz parametrów geometrycznych. Jednak prawdopodobieństwa były szacowane przy założeniu, że nośność jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, co przy mocno nieliniowych zależnościach od kąta tarcia wewnętrznego jest założeniem niezbyt realnym (Puła 1984). Ponadto zastosowanie przybliżonej punktowej estymacji Rosenblutha (1972) do oszacowania wariancji nośności zmniejsza dokładność obliczeń.

Kalibrowaniu współczynników bezpieczeństwa z użyciem wskaźnika niezawodności Hasofer–Linda (por. rozdział 3) dla stóp fundamentowych w kontekście obliczeń nośności w normach niemieckich, poświęcone są prace Genskego i Walza (Genske i Walz 1987) oraz Brząkały, Puły i Stoofa (Brząkała et al. 1991). Zastosowanie metody FORM i SORM do oszacowania prawdopodobieństw awarii ław fundamentowych projektowanych według polskiej normy (PN-81/B-03020, 1981) przedstawiono w pracach Dolińskiego i Puły (Doliński i Puła 1989, Doliński i Puła 1990). W pierwszej z nich podjęto próbę określenia cząstkowych współczynników bezpieczeństwa dla parametrów wytrzymałościowych podłoża (ϕ i c) odpowiednich dla przyjętego, w postaci wskaźnika niezawodności lub prawdopodobieństwa awarii, poziomu bezpieczeństwa. W drugiej pracy porównywano cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa kalibrowane na podstawie metod teorii niezawodności konstrukcji z tymi, które proponuje norma PN-81/B-03020. Ponadto pokazano, że uwzględnienie w obliczeniach ujemnej korelacji pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi prowadzi do wzrostu wartości wskaźnika niezawodności. Zasygnalizowano też problem, omawiany szerzej w kolejnej pracy autora (Puła 1993), że fundamenty zaprojektowane zgodnie z normą charakteryzują się niskimi wartościami wskaźnika niezawodności β . Obszerne analizy, zawierające aplikacje metod teorii niezawodności do projektowania fundamentów w kontekście rozwoju kanadyjskich przepisów normatywnych, dotyczących projektowania fundamentów, zaprezentowano w pracach Meyerhofa (1995) oraz Becker (Becker 1996). Wskaźniki niezawodności dla stóp fundamentowych posadowionych bezpośrednio, badając wypieranie gruntu spod podstawy fundamentu, przedstawili Honjo, Suzuki i Matsuo (Honjo et al. 2000). Fundamenty były projektowane zgodnie z przepisami japońskimi. Szczególną uwagę zwrócono na obciążenia sejs-

smiczne, które oszacowano na podstawie danych dotyczących regionu Tokio, zaś wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz jego zmienność losową szacowano na podstawie badań sondą SPT. Uzyskano wskaźniki β w zakresie od 2 do 3,5, co uznano za odpowiednie dla terenów sejsmicznych. Jednak analizie poddano tylko fundamenty płytkie na gruncie niespoistym, pomijając efekty wynikające z uwzględnienia zagłębienia fundamentu. W obliczeniach posłużono się metodą FORM.

Ważną grupę zagadnień stanowią różnego rodzaju ściany oporowe. Zagadnieniem losowych zmian współczynników parcia i oporu gruntu zajmował się Singh (1972). Różne warianty utraty stateczności przez ściany oporowe analizowali, stosując analizę probabilistyczną na poziomie wskaźnika Cornella, Bielski i Tejchman (1985). Probabilistyczną analizę zagłębionych w gruncie ścianek wspornikowych przedstawił Smith (1985), a nieco inne ujęcie tego samego zagadnienia zaproponował Ramachandran (1988). Z nowszych prac na szczególną uwagę zasługuje praca Cherubiniego (2000). W pracy Cherubiniego (2000) dokonano ponadto obszernego przeglądu wraz z bardzo bogatym wykazem literatury przedmiotu. Interesujące podejście do oceny bezpieczeństwa ścianek podpierających wykopy przedstawił J. Rybak (2002), który zaproponował pewną modyfikację propozycji Duncana (Duncan 2000, por. także podrozdział 1.3), przez co oszacowanie miar niezawodności stało się prostym elementem, które bez dużego wysiłku można zastosować w obliczeniach inżynierskich.

Pokrewną tematykę stanowią falochrony, dla których sposób analizy niezawodności podali Sorensen i Burcharth (2000). Autorzy ci analizują możliwość przesunięcia falochronu wzdłuż różnych linii poślizgu. Funkcje stanu granicznego są wyznaczone zgodnie z twierdzeniem o górnym ograniczeniu teorii plastyczności, przy założeniu kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia. Obliczenia niezawodności opierają się na metodzie FORM, przy czym zdarzenie awarii jest sumą (w sensie teorii mnogości) zdarzeń odpowiadających poszczególnym mechanizmom zniszczenia, co prowadzi do oszacowania prawdopodobieństwa awarii dla systemu (por. podrozdział 2.5). Opracowaną procedurę zastosowano do obliczeń niezawodności konstrukcji istniejącej – falochronu Niigata West w Japonii.

Do zbliżonych tematycznie można też zaliczyć pracę poświęconą probabilistycznej analizie stateczności jazu (Puła i Rędownicz 1993), w której badano wskaźniki niezawodności związane z różnymi możliwościami przesunięcia się jazu sektorowego, zwracając uwagę na gwałtowny wzrost prawdopodobieństwa awarii w sytuacji częściowego lub całkowitego zakolmatowania się filtru drenującego pod podstawą jazu. Na uwagę zasługuje fakt, że obliczenia wykonane zostały dla istniejącej w rzeczywistości konstrukcji, zbudowanej na środkowej Odrze w ramach modernizacji stopni wodnych.

Podobnie jednak jak w przypadku stateczności zboczy zagadnienia ścian oporowych, falochronów oraz jazów wykraczają poza zakres niniejszego opracowania.

Inną grupę tematyczną stanowią podpory mostowe. Kompletną metodykę oceny prawdopodobieństw awarii masywnych przyczółków mostowych metodą standardowej symulacji Monte Carlo przedstawiono w pracach Biernatowskiego i Puły (Biernatowski

i Puła 1986, Biernatowski i Puła 1988). Rozpatrywano pięć rodzajów stanu granicznego nośności: przesunięcie, wypieranie gruntu spod podstawy fundamentu, wystąpienie osuwiska, obrót wokół dolnej krawędzi podstawy oraz obrót wokół powierzchni cylindrycznej w otoczeniu podstawy fundamentu. Do opisu zmienności losowej parametrów podłoża użyto rozkładów wielokątnych opisanych w podrozdziale 3.1.

Propozycję doboru częściowych współczynników na podstawie teorii niezawodności konstrukcji dla podpór mostów wznoszonych techniką nawisową podał Casas (1997). Natomiast metody oszacowania wskaźników niezawodności dla tymczasowych podpór mostów wznoszonych techniką nawisową podano w pracach Puły i Hildebranda (1999, 2000). Najważniejszym problemem stawianym w dwóch ostatnich pracach było oszacowanie wielkości wpływu losowej asymetrii ciężaru kolejnych segmentów dźwigara (oszacowanej na podstawie pomiarów rzeczywistego obiektu), a także losowych obciążeń technologicznych segmentów na możliwość awarii podpory tymczasowej. Obliczenia wykonane na poziomie drugim (bez uwzględnienia rozkładów prawdopodobieństwa) oraz na poziomie trzecim (metodą SORM) wykazały istotną wrażliwość miar niezawodności na losowe odchyłki ciężaru segmentów. Pokazały też jednak, że podpory wznoszone według obowiązujących obecnie norm charakteryzują się wysokimi wskaźnikami niezawodności – rzędu $\beta = 4,4$.

Na zakończenie tego krótkiego przeglądu warto podkreślić, że sposób wyznaczania cząstkowych współczynników bezpieczeństwa według zasad teorii niezawodności konstrukcji nie znalazł niestety zastosowania w projektach Eurokodu 7 (ENV 1997-1; ENV 1997-2; ENV 1997-3;), dotyczącego zagadnień geotechniki. Zgodnie z Eurokodem 7 losowa zmienność parametrów podłoża uwzględniana jest poprzez analizę statystyczną na poziomie przyjęcia parametrów charakterystycznych, natomiast cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa, prowadzące do wartości obliczeniowych, są zadane przez Eurokod w sposób arbitralny. Obszerną dyskusję na temat wartości charakterystycznych i obliczeniowych przedstawił Orr (Orr 1999) w monografii poświęconej zasadom projektowania według Eurokodu 7 oraz w pracy (Orr 2000).

4.1.2. Cel i zakres rozdziału

W dalszych częściach tego rozdziału uwaga będzie skupiona wokół awarii polegającej na wypieraniu gruntu spod podstawy fundamentu. Na początku zostanie pokazane jak się mają do siebie obliczenia wykonane zgodnie z metodyką teorii niezawodności oraz obliczenia wykonane w zgodności z aktualnie obowiązującą w tym zakresie polską normą (PN-81/B-03020). Następnie do obliczeń wprowadzone zostaną koncepcje wynikające z teorii uśrednień Vanmarcke'a, których celem będzie uzyskanie w obliczeniach miar niezawodności bardziej adekwatnych do obliczeń inżynierskich wskaźników niezawodności. Najważniejszą częścią rozdziału jest wyprowadzenie i zastosowanie w obliczeniach wzorów wynikających z zastosowania uśrednień do mechanizmu Prandtla jako jednego z możliwych mechanizmów kinematycznie do-

puszczalnych opisujących zjawisko wypierania gruntu spod podstawy fundamentu. Ponadto przeprowadzona zostanie analiza porównująca wyniki dla modelu jednowymiarowego oraz dwuwymiarowego.

4.2. Prawdopodobieństwo wyparcia gruntu spod podstawy fundamentu

W tym podrozdziale przedyskutowany zostanie problem małych wartości wskaźników niezawodności otrzymywanych dla fundamentów spełniających warunek stanu granicznego nośności ze względu na wypieranie gruntu spod podstawy fundamentu zgodnie z wymaganiami określonymi przez normatywy. Obliczenia fundamentów w tym zakresie dokonuje się zwykle w ramach teorii stanów granicznych z zastosowaniem modelu sztywno-plastycznego. W wielu istniejących w różnych krajach przepisach normatywnych obliczenia opierają się na wzorze Terzagiego (lub Terzagiego–Schultzeego, por. Wiłun 1974) z różnymi jego modyfikacjami dotyczącymi mimośrodowego i nachylonego obciążenia oraz współczynników kształtu. Obliczenie prawdopodobieństwa awarii polega w tym wypadku na znalezieniu prawdopodobieństwa, że nośność obliczona według wzoru Terzagiego (lub odpowiedniej jego modyfikacji) jest mniejsza od przyłożonego obciążenia. Pomimo nieliniowej zależności nośności od kąta tarcia wewnętrznego podłoża, zadanie obliczenia tego prawdopodobieństwa, np. przy zastosowaniu metod FORM lub SORM, jest stosunkowo proste, pod warunkiem, że wszystkie współczynniki we wzorze określającym nośność dane są w zamkniętej postaci, explicite wyrażającej ich zależność od poszczególnych parametrów zadania. Istotnym problemem, który tu się pojawia, jest adekwatność obliczanych wskaźników niezawodności do rzeczywistego bezpieczeństwa fundamentów. Oznacza to, że fundamenty projektowane według norm powszechnie uważanych za bezpieczne powinny odznaczać się odpowiednio dużymi wartościami wskaźników niezawodności, tak jak to ma miejsce w przypadku konstrukcji betonowych czy metalowych. Wówczas możliwe byłoby stosowanie obiektywnych miar wypracowanych przez teorię niezawodności konstrukcji do całości budowli, wraz z jej fundamentami.

4.2.1. Przykładowe obliczenia wskaźników niezawodności dla łań fundamentowych zaprojektowanych zgodnie z zasadami normowymi

Rozpatrywany będzie fundament łańowy o poziomej podstawie, szerokości B i nieskończonej długości. Przyjmuje się następujące założenia:

1. Podłoże traktuje się jako jednorodne, zgodnie z zasadami normy PN-81/B-03020, tj. do głębokości większej lub równej dwukrotnej szerokości fundamentu.

2. Za awarię uważa się utratę nośności podłoża z powodu wypierania gruntu spod podstawy.

3. Opór graniczny podłoża gruntowego na 1 m bieżący długości ławy obliczany jest według następującej modyfikacji wzoru Terzaghiego, stosowanej przez normę PN-81/B-03020 (ze względu na nieskończoną długość ławy L , przyjęto, że współczynniki kształtu są równe jedności)

$$Q_{fnB} = \bar{B} [N_c i_c + N_D \gamma_D i_D D_{\min} + N_B \gamma_B i_B \bar{B}], \quad (4.1)$$

w którym:

$$N_D = \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad (4.2)$$

$$N_c = (N_D - 1) \operatorname{ctg} \varphi, \quad (4.3)$$

$$N_B = 0,75 (N_D - 1) \operatorname{tg} \varphi \quad (4.4)$$

są współczynnikami nośności, ponadto φ oznacza kąt tarcia wewnętrznego gruntu pod podstawą fundamentu, c – jego spójność, γ_B – ciężar objętościowy gruntu pod podstawą fundamentu, który oblicza się, zgodnie z zaleceniami normy, jako średnią ważoną ciężarów γ oraz γ' do głębokości B

$$\gamma_B = \begin{cases} \frac{\gamma h + \gamma'(h - B)}{B} & \text{dla } 0 \leq h \leq B \\ \gamma & \text{dla } h > B \end{cases}, \quad (4.5)$$

przy czym γ jest ciężarem objętościowym podłoża, γ' ciężarem objętościowym z uwzględnieniem siły wyporu, h poziomem zwierciadła wody gruntowej, mierzonym od poziomu podstawy fundamentu (rys. 4.1), γ_D jest średnią ważoną ciężarów objętościowych materiałów zalegających obok podstawy fundamentu aż do głębokości posadowienia (np. ciężar posadzki i ciężar zasypki), D_{\min} minimalnym zagłębieniem fundamentu, \bar{B} jest zredukowaną szerokością fundamentu, przyjętą zgodnie z tzw. hipotezą Meyerhofa (Meyerhof 1953) jako

$$\bar{B} = B - 2e_B, \quad (4.6)$$

przy czym e_B jest mimośrodem obciążenia wzdłuż szerokości ławy. Ponadto i_c , i_D , i_B są współczynnikami wpływu nachylenia wypadkowej obciążenia względem normalnej do podstawy fundamentu.

Ponieważ współczynniki nachylenia podane w normie PN-81/B-03020 nie mają reprezentacji analitycznej, przeto, dla usprawnienia obliczeń niezawodnościowych,

przyjęto tu współczynniki nachylenia identyczne według normy DIN 4017 (1979), będące pewną modyfikacją propozycji Brinch Hansena (1970)

$$i_D = \left[1 - \frac{T}{N + \overline{B} c \operatorname{ctg} \varphi} \right]^{m_1}, \quad (4.7)$$

$$i_B = \left[1 - \frac{T}{N + \overline{B} c \operatorname{ctg} \varphi} \right]^{m_1+1}, \quad (4.8)$$

$$i_c = i_D - \frac{1 - i_D}{N_c \operatorname{tg} \varphi}, \quad (4.9)$$

gdzie N i T są składowymi obciążeniami, odpowiednio – normalną oraz styczną do podstawy. Wykładnik m_1 określony jest wzorem

$$m_1 = \frac{\left[2 + \left(\frac{\overline{B}}{\overline{L}} \right) \right]}{\left[1 + \left(\frac{\overline{B}}{\overline{L}} \right) \right]}, \quad (4.10)$$

przy czym $\overline{L} = L - 2e_L$, gdzie e_L jest mimośrodem obciążenia wzdłuż długości ławy. Jeżeli siła T działa równoległe do boku L , to w ułamku $\overline{B}/\overline{L}$ zamienia się licznik z mianownikiem. Dla wersji fundamentu długiego, dla którego $L \gg B$, przyjmuje się $m_1 = 2$. Orr i Farrel (1999) zauważyli, że wzory określające współczynniki nachylenia zastosowane w Eurokodzie 7 (ENV 1997-1) są niepoprawne, dlatego ich zdaniem właśnie wzory (4.7)–(4.10) powinny być stosowane w obliczeniach. Zastosowanie współczynników nachylenia w postaci (4.7)–(4.9) w miejsce podawanych przez polską normę (w postaci nomogramów) nie wprowadza istotnych różnic do obliczeń nośności.

Dla rozważanego zadania funkcja stanu granicznego ma postać

$$g = mQ_{fnB} - N \quad (4.11)$$

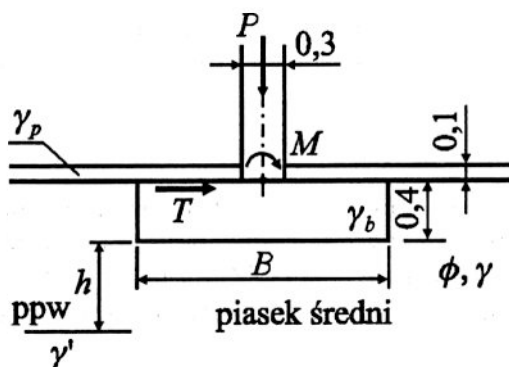
(N – jak wyżej),

przy czym m jest współczynnikiem niepewności modelu, zwanym przez normę współczynnikiem korekcyjnym.

Pierwszy przykład obliczeniowy stanowi ława na podłożu niespoistym.

4.2.1.1. Ława na podłożu niespoistym

Rozpatruje się nieskończenie długą ławę jak na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Schemat do obliczeń ławy na podłożu niespoistym

Tabela 4.1. Charakterystyki probabilistyczne parametrów losowych w zadaniu o ławie na podłożu niespoistym

Parametr	Wartość średnia	Współcz. zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości α (wg wzoru (2.41)) przy $B = 2,3$ m
Ciężar objętościowy gruntu γ	18,2 kN/m ³	0,06	Normalny	0,080
Kąt tarcia wewnętrzne ϕ	32°	0,15	Lognormalny	0,973
Pionowa siła zewnętrzna obciążająca fundament P	300,0 kN/m	0,15	Lognormalny	-0,205
Poziom wody gruntowej h	1,00 m	0,06	Jednostajny	0,021
Ciężar objętościowy gruntu przy całkowitym nasyceniu wodą porów γ_{sr}	19,6 kN/m ³	0,06	Normalny	0,024
Ciężar betonu γ_b (materiał ławy)	24,0 kN/m ³	0,04	Normalny	-0,005
Ciężar posadzki γ_p	23,00 kN/m ³	0,06	Normalny	0,001
Składowa obciążenia styczna do podstawy T	20,0 kN/m	0,15	Lognormalny	-0,055
Moment M	15,0 kNm/m	0,15	Lognormalny	-0,012

Podstawowe założenia dotyczące rozpatrywanych parametrów losowych wraz z ich charakterystykami probabilistycznymi podano w tabeli 4.1. Rozkłady te, a także współczynniki zmienności, zgodne są z omówieniami i sugestiami zawartymi w rozdziale 3. Wymiary fundamentu oraz pozostałe wielkości geometryczne przyjmuje się jako nielosowe, przy czym obliczenia wykonuje się dla zmiennej szerokości funda-

mentu. Ciężar gruntu z uwzględnieniem siły wyporu obliczano według stosowanego w praktyce uproszczonego wzoru dla gruntów niespoistych (Rybak 2000)

$$\gamma' = \frac{\gamma_{sr}}{2}. \quad (4.12)$$

Współczynnik niepewności modelu $m = 0,9$ przyjęto jako nielosowy.

Obliczenia prawdopodobieństw awarii oraz wskaźników niezawodności wykonano metodą SORM z zastosowaniem systemu COMREL (STRUREL 1997). Uzyskane z obliczeń wskaźniki, w zależności od przyjętej szerokości fundamentu, zestawiono w tabeli 4.2.

Tabela 4.2. Wskaźnik niezawodności ławy jako funkcja jej szerokości

Szerokość fundamentu B [m]	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
Prawdopodobieństwo awarii p_F	0,46736	0,33790	0,23450	0,15720	0,10240	0,06514
Wskaźnik niezawodności β	0,08	0,42	0,72	1,01	1,27	1,51
Szerokość fundamentu B [m]	2,3	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
Prawdopodobieństwo awarii p_F	0,05147	0,04049	0,02477	0,01493	0,00887	0,00523
Wskaźnik niezawodności β	1,63	1,75	1,96	2,17	2,37	2,56
Szerokość fundamentu B [m]	3,4	3,6	3,8	4,0		
Prawdopodobieństwo awarii p_F	0,00304	0,00176	0,00101	0,00058		
Wskaźnik niezawodności β	2,74	2,92	3,09	3,25		

Widoczne są niewielkie wartości wskaźnika β nawet przy dużych szerokościach ławy. Interesujące jest porównanie tych rezultatów z obliczeniami wykonanymi według normy PN-81/B-03020. Należy podkreślić, że zgodnie z zasadami obliczeń według stanów granicznych obliczenia według normy przeprowadza się stosując wartości obliczeniowe parametrów geotechnicznych, przy czym zależność pomiędzy wartością charakterystyczną $x^{(n)}$, przyjmowaną w normie PN-81/B-03020 jako średnia arytmetyczna wyników pomiarów parametru (w przypadku tzw. metody A oznaczania parametrów), a wartością obliczeniową $x^{(r)}$ jest następująca:

$$x^{(r)} = \gamma_m x^{(n)}, \quad (4.13)$$

przy czym γ_m jest współczynnikiem materiałowym obliczanym według wzoru

$$\gamma_m = 1 \pm \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x^{(n)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{x^{(n)}} = 1 \pm \text{cov}\{x\}, \quad (4.14)$$

a stąd i z (4.13) wynika, że

$$x^{(r)} = x^{(n)} \pm \sigma_x. \quad (4.15)$$

Norma PN-81/B-03020 wprowadza jeszcze dodatkowe ograniczenia na współczynniki materiałowe, mianowicie

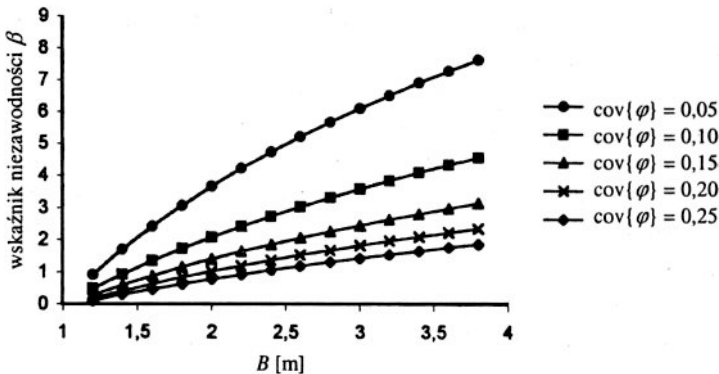
$$0,8 \leq \gamma_m \leq 0,9 \quad \text{lub} \quad 1,1 \leq \gamma_m \leq 1,25. \quad (4.16)$$

Z opisanej tu procedury normowej wynika, że stosując podane w tabeli 4.1 wartości oczekiwane jako wartości charakterystyczne parametrów oraz używając podanych tam współczynników zmienności do wyznaczenia wartości obliczeniowych według wzorów (4.15) oraz (4.16) można wykonać zgodne z normą obliczenia nośności łąwy „na tym samym poziomie losowości” parametrów podłoża. Obliczenia takie pokazały, że wystarczającą, z punktu widzenia normy PN-81/B-03020, szerokością łąwy w rozpatrywanej sytuacji geotechnicznej i obciążeniowej jest $B = 2,3$ m (z tolerancją zmiany wymiaru co 5 cm). Dla takiej szerokości łąwy wskaźnik niezawodności wyniósł zaledwie $\beta = 1,63$ ($p_F = 0,05147$). Warto odnotować, że norma ISO 2394 (1998) – *Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych* – podaje dla stanów granicznych nośności trzy wartości wskaźnika niezawodności $\beta = 3,1$, $\beta = 3,8$, $\beta = 4,3$ odpowiednio, dla odczuwalnych, umiarkowanych i wielkich skutków zniszczenia. Chcąc, w rozpatrywanym przykładzie, otrzymać wskaźnik niezawodności rzędu $\beta = 3,0$, należałoby zaprojektować fundament o paradoksalnie dużej szerokości $B = 3,8$ m, co z kolei nie ma sensu z inżynierskiego punktu widzenia. Z wieloletniej praktyki stosowania normy PN-81/B-03020 wynika, że obliczane zgodnie z jej zasadami fundamenty są bezpieczne. Co więcej, ekspertyzy dotyczące fundamentów obiektów zbudowanych przed wprowadzeniem tej normy (np. poniemieckie budynki na terenie Wrocławia) pokazują, że niektóre fundamenty mają szerokość mniejszą, aniżeli wynikałoby to z obliczeń normowych. Panuje zatem opinia, że norma PN-81/B-03020 daje raczej konserwatywne oszacowania nośności granicznej fundamentów, zwłaszcza posadowionych na gruntach niespoistych (Puła i Rybak 2000). Z tego wynika, że wartości otrzymanych wskaźników niezawodności nie mogą być porównywane z tymi, które są uważane za bezpieczne dla konstrukcji betonowych czy stalowych. Małe wartości wskaźników niezawodności dla fundamentów projektowanych według PN-81/B-03020 odnotowano już we wcześniejszych pracach (Doliński i Puła 1989, Doliński i Puła 1990, Puła 1993). Do zbliżonych wniosków prowadzą także obliczenia wykonane zgodnie z Eurokodem ENV 1997-1 (1997).

Z probabilistycznego punktu widzenia przyczyną małych wartości wskaźników niezawodności są duże wartości współczynników zmienności poszczególnych parametrów zadania. Z drugiej strony wiadomo, że takie parametry jak parametry wytrzymałościowe gruntu wykazują w badaniach bardzo znaczne wartości tychże współczynników (por. podrozdział 3.1). Jednak duże wartości dotyczą tzw. wariacji punktowych, tj. związanych z określonym miejscem w podłożu, podczas gdy przy rozpatrywaniu zjawisk typu wypieranie gruntu spod podstawy fundamentu istotne są

parametry w obszarach podłoża o znacznej wielkości. Wydaje się więc, że koncepcja uśrednienia pola parametrów, zaproponowana przez Vanmarcke'a (Vanmarcke 1977a), omówiona w podrozdziale 3.3, mogłaby okazać się pomocna. Obliczenia według koncepcji Vanmarcke'a będą przedyskutowane w podrozdziale 4.3.2.

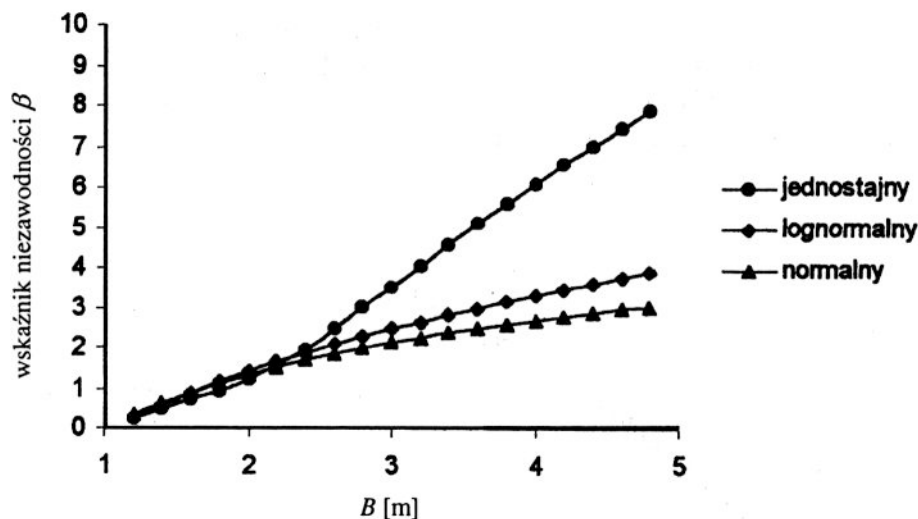
W dalszej części obliczeń niezawodnościowych związanych z rozpatrywanym przykładem analizuje się wpływ poszczególnych czynników na otrzymywane rezultaty. I tak w ostatniej kolumnie tabeli 4.1 umieszczono otrzymane w obliczeniach metodą SORM współczynniki wrażliwości α (przy szerokości fundamentu $B = 2,3$ m) dla poszczególnych parametrów losowych (por. wzór (2.41)). Jak widać, najistotniejszy wpływ na wartość wskaźnika niezawodności i prawdopodobieństwa awarii ma zmienność losowa kąta tarcia wewnętrznego podłoża. Dla głębszej analizy tego efektu zbadano, jak zmienia się wskaźnik niezawodności wraz ze zmianami współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego. Rezultaty obliczeń pokazano na rysunku 4.2. Należy odnotować, że wpływ wartości współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego na wskaźnik niezawodności jest bardzo istotny. Wpływ ten jest duży zwłaszcza w zakresie wzrostu współczynnika $\text{cov}\{\phi\}$ od wartości 0,05 do wartości 0,15. Później spadek wskaźnika β jest już wolniejszy.



Rys. 4.2. Wpływ współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego na wskaźnik niezawodności β . Kąt tarcia wewnętrznego ma rozkład lognormalny o wartości oczekiwanej $E\{\phi\} = 32^\circ$

Następnie zbadano wpływ rozkładu prawdopodobieństwa na obliczany wskaźnik niezawodności. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie wykresów na rysunku 4.3. We wszystkich trzech przypadkach wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe były jednakowe i takie jak podano w tabeli 4.1. W przypadku rozkładu jednostajnego wartość oczekiwana $E\{\phi\} = 32^\circ$ oraz współczynnik zmienności $\text{cov}\{\phi\} = 0,15$ dają przedział zmienności kąta $[23,69^\circ, 40,31^\circ]$. Można zauważyć, że dla wymiarów fundamentu istotnych z inżynierskiego punktu widzenia (do szerokości $B = 2,7$ m) wpływ

rodzaju rozkładu jest bardzo niewielki, a w każdym razie dużo mniejszy niż wpływ współczynnika zmienności. Dla większych szerokości fundamentu rozkład jednostajny daje istotnie szybszy wzrost wskaźnika niezawodności w stosunku do rozkładów lognormalnego czy normalnego, co można by tłumaczyć ograniczonym nośnikiem rozkładu jednostajnego.

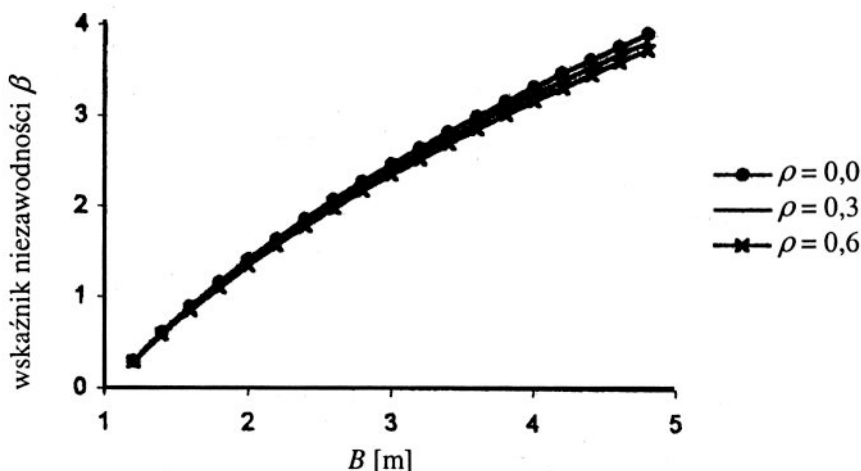


Rys. 4.3. Porównanie wskaźnika niezawodności β uzyskanego dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa kąta tarcia wewnętrzznego. Współczynnik zmienności kąta tarcia we wszystkich trzech przypadkach wynosi $\text{cov}\{\varphi\} = 0,15$, zaś wartość oczekiwana $E\{\varphi\} = 32^\circ$

Niewielki wpływ kształtu rozkładu prawdopodobieństwa na wartości wskaźnika β , a co za tym idzie na prawdopodobieństwo awarii, otrzymany dla „realistycznych” wymiarów fundamentu, jest istotny dla obliczeń niezawodności fundamentów, gdyż, jak już wzmiankowano w rozdziale 3, oszacowanie rodzaju rozkładu prawdopodobieństwa danego parametru podłoża nie jest jednoznaczne. Zademonstrowany wyżej efekt pokazuje, że niedokładność spowodowana arbitralnym wyborem rozkładu prawdopodobieństwa kąta tarcia wewnętrzznego, czyli parametru, którego losowy charakter jest najważniejszy dla bezpieczeństwa fundamentu, nie powinna mieć istotnego wpływu na wartość wskaźnika niezawodności w przypadku rozpatrywania możliwości utraty stateczności przez fundament bezpośredni poprzez wypieranie gruntu spod podstawy.

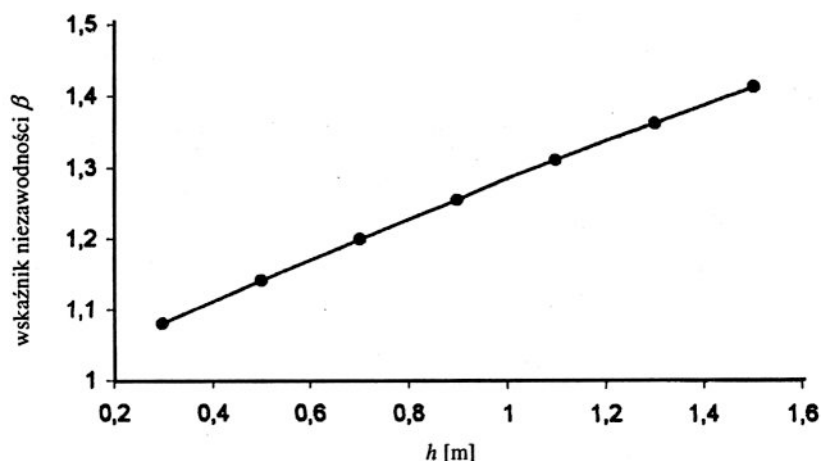
Kolejnym analizowanym czynnikiem było zagadnienie, czy wskazywana w literaturze (por. 3.1) obecność dodatkowej korelacji pomiędzy kątem tarcia wewnętrzznego a ciężarem objętościowym podłoża zalegającego pod podstawą fundamentu ma istotny wpływ na obliczany wskaźnik niezawodności fundamentu. Wyniki obliczeń dla trzech różnych wartości współczynnika korelacji ρ zilustrowano na rysunku 4.4.

Jak widać, wpływ współczynnika korelacji na wartość wskaźnika niezawodności jest znikomy, przy czym im „silniejsza dodatnia korelacja”, tym mniejsza wartość wskaźnika niezawodności. Można jednak przyjąć, że w przypadku, gdy dokładna wartość współczynnika korelacji nie jest znana, do oszacowania bezpieczeństwa w praktyce można tę korelację pominąć (przyjąć $\rho = 0$). Niewielki wpływ korelacji nie może stanowić zaskoczenia, jeżeli weźmie się pod uwagę niewielki wpływ losowych zmian ciężaru objętościowego γ na wskaźnik niezawodności (por. współczynniki wrażliwości α w tabeli 4.1). Wpływ korelacji mógłby okazać się istotniejszy, gdyby, co jest mało prawdopodobne, w podłożu zalegającym pod podstawą fundamentu stwierdzono większe wahania losowe ciężaru objętościowego γ .



Rys. 4.4. Zależność wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu dla trzech różnych wartości współczynnika korelacji pomiędzy kątem tarcia wewnętrznego i ciężarem objętościowym

Podczas projektowania fundamentów bardzo istotnym zagadnieniem jest uwzględnienie położenia zwierciadła wody gruntowej. Obecność wody powoduje, że na grunt pod podstawą fundamentu działa siła wyporu, a więc wartość ciężaru objętościowego γ_B – obliczanego wg wzoru (4.5) – maleje. Zwierciadło wody, które zależy od wpływów atmosferycznych, zmienia się w czasie w sposób, który można uznać za losowy. W związku z tym w przedstawionym przykładzie przyjęto, że poziom wody gruntowej (mierzony w odniesieniu do poziomu posadowienia) jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,895; 1,105]$, co odpowiada współczynnikowi zmienności 0,06. Ten niewielki zakres zmienności spowodował, że wpływ losowych wahań zwierciadła na wskaźnik β okazał się mały (współczynnik wrażliwości $\alpha = 0,021$). W dłuższym okresie zwierciadło wody gruntowej może zmieniać się w większym zakresie. Dlatego rozważono sytuację, gdy średnie położenie (wartość oczekiwana) zwierciadła wody zmienia się



Rys. 4.5. Wykres zależności wskaźnika niezawodności β dla fundamentu o szerokości $B = 1,9$ m, od średniego poziomu położenia zwierciadła wody gruntowej, mierzonego względem poziomu posadowienia

w zakresie od 0,3 m do 1,6 m w stosunku do poziomu posadowienia. Dla poszczególnych wartości średnich z tego zakresu przyjmowano, że poziom wody jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym i przydziale zmienności 0,2 m (co odpowiada stałemu odchyleniu standardowemu $\sigma_h = 0,058$ m). Obliczenia wykonano dla szerokości ławy $B = 1,9$ m. Uzyskane rezultaty, pokazane na rysunku 4.5, wskazują, że znaczna zmiana położenia zwierciadła wody w gruncie niespoistym powoduje istotną zmianę wskaźnika niezawodności. Potwierdza to ważność uwzględnienia długoterminowych wahań w projektowaniu. Można jedna zauważyć, że zależność β od głębokości h jest niemal liniowa, co może ułatwić przybliżoną ocenę bezpieczeństwa.

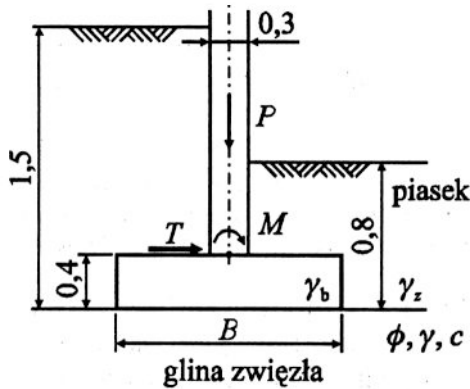
4.2.1.2. Ława na podłożu spoistym

W tym podrozdziale będą zbadane wrażliwości wskaźnika niezawodności na dwa parametry wytrzymałościowe, charakteryzujące ośrodek spoisty – kąt tarcia wewnętrznego oraz spójność i efekty wywołane wzajemnym skorelowaniem tych parametrów.

Do analizy numerycznej wybrano schemat przedstawiony na rysunku 4.6. Założenia probabilistyczne dotyczące poszczególnych parametrów zestawiono w tabeli 4.3. Otrzymane z obliczeń wskaźniki niezawodności oraz prawdopodobieństwa awarii obliczane metodą SORM przy początkowo przyjętym założeniu braku korelacji pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi ($\rho\{\varphi, c\} = 0$) zestawiono w tabeli 4.4. W tym przypadku współczynnik niepewności modelu przyjęto jako parametr nielosowy o wartości $m = 0,81$.

Z przeprowadzonych obliczeń zgodnie z normą PN-81/B-03020 wynika, że minimalną szerokością fundamentu, spełniającą warunki te samej normy, jest $B = 2,55$ m. Równocześnie wskaźnik niezawodności odpowiadający tej szerokości wynosi $\beta = 2,76$

($p_F = 0,00289$). Jak widać, wskaźnik ten jest już jednak istotnie większy niż to miało miejsce w przypadku gruntu niespoistego. W tym przypadku wskaźnik niezawodności wzrasta szybciej wraz ze wzrostem szerokości fundamentu, co jest związane z obecnością, w wyrażeniu określającym nośność, składnika uwzględniającego spójność podłoża. Przy gruntach o dużej spójności powoduje on szybki wzrost nośności wraz ze wzrostem szerokości fundamentu. Jednak ciągle jest to wartość mniejsza niż wartości sugerowane przez wspomnianą wcześniej normę ISO 2394 (1988). Dopiero szerokości fundamentu $B = 2,75$ m oraz $B = 3,1$ m pozwalają osiągnąć satysfakcjonujące poziomy wskaźników, odpowiednio $\beta = 3,16$ oraz $\beta = 3,79$.



Rys. 4.6. Schemat ławy na podłożu spoistym

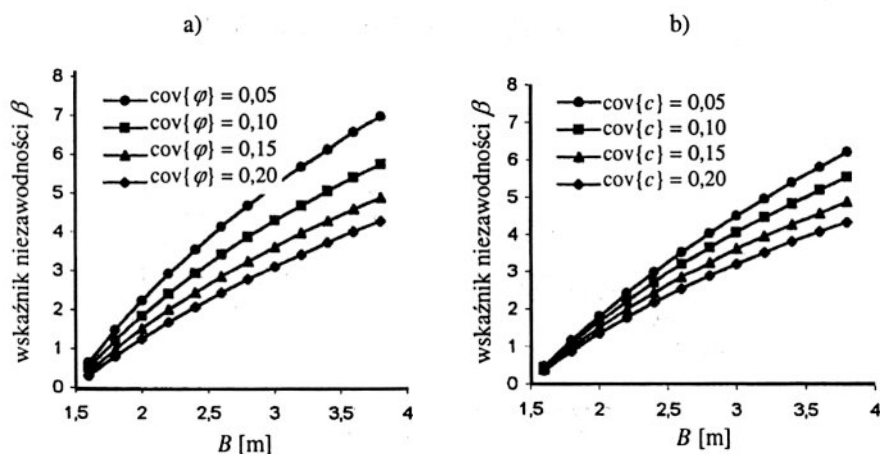
Tabela 4.3. Charakterystyki probabilistyczne parametrów zadania

Parametr	Wartość średnia	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa	α Przy $B = 2,55$ m
Ciężar objętościowy zasypki γ_z	19,0 kN/m ³	0,10	Normalny	0,063
Kąt tarcia wewnętrznego ϕ	18°	0,15	Lognormalny	0,698
Pionowa siła zewnętrzna obciążająca fundament P	500,0 kN/m	0,10	Lognormalny	-0,421
Ciężar objętościowy gruntu pod fundamentem γ	21,0 kN/m ³	0,05	Normalny	0,017
Ciężar betonu γ_b (materiał ławy)	24,0 kN/m ³	0,05	Normalny	-0,007
Spójność c	31,0 kPa	0,15	Lognormalny	0,547
Siła pozioma T	50,0 kN/m	0,10	Lognormalny	-0,026
Moment M	20,0 kNm/m	0,10	Lognormalny	-0,014

Tabela 4.4. Wskaźnik niezawodności ławy jako funkcja jej szerokości (podłoże spoiste)

Szerokość fundamentu B	1,6	1,8	1,95	2,0	2,2	2,4
Prawdopodobieństwo awarii p_F	0,34517	0,16340	0,08343	0,06552	0,02297	0,00724
Wskaźnik niezawodności β	0,40	0,98	1,38	1,51	2,00	2,44
Szerokość fundamentu B	2,55	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
Prawdopodobieństwo awarii p_F	0,002886	0,00210	0,00058	0,00015	$3,7 \times 10^{-5}$	$9,1 \times 10^{-6}$
Wskaźnik niezawodności β	2,76	2,86	3,25	3,62	3,96	4,29
Szerokość fundamentu B	3,6	3,8	4,0			
Prawdopodobieństwo awarii p_F	$2,1 \times 10^{-6}$	$5,2 \times 10^{-7}$	$1,7 \times 10^{-7}$			
Wskaźnik niezawodności β	4,59	4,89	5,17			

Zamieszczone w ostatniej kolumnie tabeli 4.3 współczynniki wrażliwości α (uzyskane przy $B = 2,55$ m) wskazują, że analogicznie do przykładu z gruntem niespoistym najistotniejsze znaczenie ma losowa zmienność kąta tarcia wewnętrznego. Jednak spójność charakteryzuje się współczynnikiem wrażliwości niewiele mniejszym niż kąt tarcia wewnętrznego. Praktycznie można więc stwierdzić, że zmienność losowa obu parametrów wytrzymałościowych gruntu decyduje o wartości prawdopodobieństwa awarii, gdy za awarię uważa się wypieranie gruntu spod podstawy fundamentu. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale zbadano wielkość wpływu współczynnika zmienności parametrów wytrzymałościowych na wartość wskaźnika niezawodności. Wyniki obliczeń zilustrowano na rysunku 4.7. Rezultaty wskazują na istotny wpływ współczynnika zmienności na wskaźnik niezawodności i to zarówno w przypadku kąta tarcia wewnętrznego, jak i dla spójności. Efekt jest tym większy, im większa szerokość fundamentu.

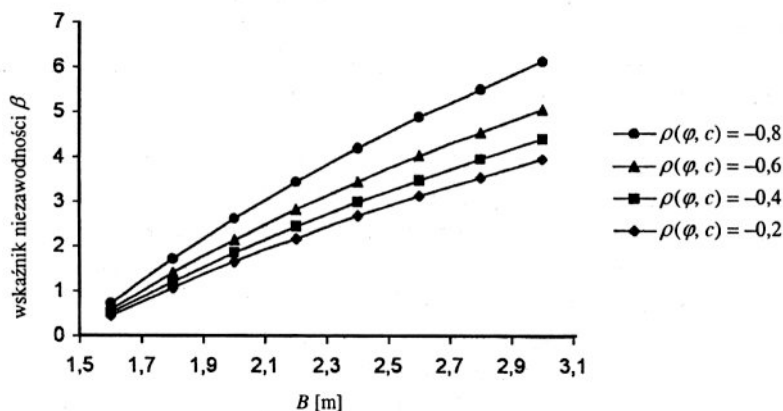


Rys. 4.7. Wpływ współczynnika zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża na wskaźnik niezawodności β . a – zmienny współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego, zaś pozostałe parametry jak w tabeli 4.3. b – zmienny współczynnik zmienności spójności, pozostałe parametry jak w tabeli 4.3

Następnie zbadano, jak zmienia się wskaźnik niezawodności w zależności od współczynników korelacji pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi podłoża oraz jego ciężarem objętościowym. Uzyskane wyniki przedstawiono poniżej jako trzy różne przypadki.

Przypadek 1. Przyjęto następujące założenia dotyczące współczynników korelacji:

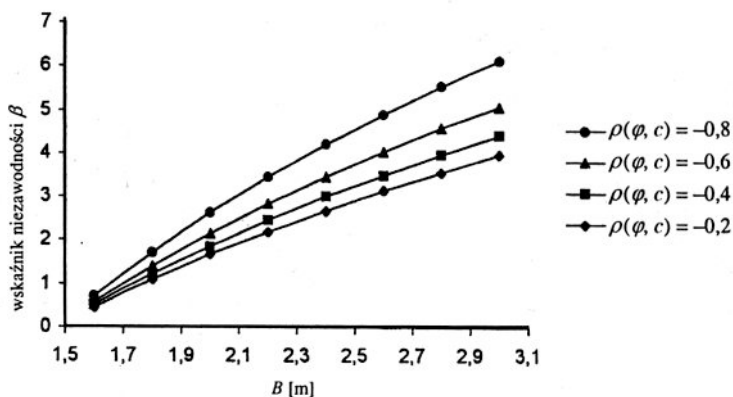
$$\rho(\varphi, \gamma) = 0,0; \quad \rho(c, \gamma) = 0,0; \quad \rho(\varphi, c) = \{-0,2; -0,4; -0,6; -0,8\}.$$



Rys. 4.8. Zależność wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu dla wartości współczynników korelacji przyjętych w przypadku 1

Przypadek 2.

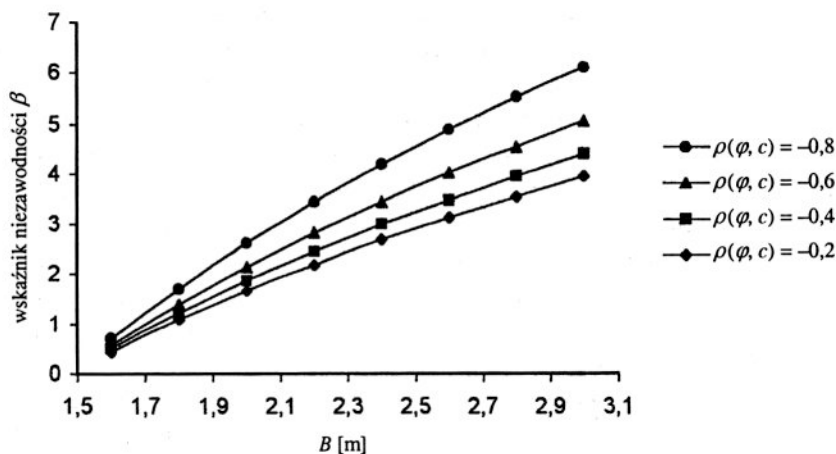
$$\rho(\varphi, \gamma) = 0,3; \quad \rho(c, \gamma) = -0,3; \quad \rho(\varphi, c) = \{-0,2; -0,4; -0,6; -0,8\}.$$



Rys. 4.9. Zależność wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu dla wartości współczynników korelacji przyjętych w przypadku 2

Przypadek 3.

$$\rho(\varphi, \gamma) = 0,6; \quad \rho(c, \gamma) = -0,6; \quad \rho(\varphi, c) = \{-0,2; -0,4; -0,6; -0,8\}.$$



Rys. 4.10. Zależność wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu dla wartości współczynników korelacji przyjętych w przypadku 3

Zgodnie z sugestiami literaturowymi podanymi w rozdziale 3, przyjęto ujemną korelację pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi podłoża. Ciężar objętościowy γ pozostawał dodatnio skorelowany z kątem tarcia wewnętrznego φ oraz ujemnie skorelowany ze spójnością gruntu c . Jak widać, wykresy na trzech kolejnych rysunkach są niemal identyczne, co świadczy o bardzo nieznacznym wpływie skorelowania pomiędzy ciężarem a parametrami wytrzymałościowymi. Istotna jest natomiast negatywna korelacja pomiędzy φ oraz c , przy czym efekt tej korelacji wzrasta wraz z szerokością fundamentu. Najmniejszą wartość wskaźnika niezawodności uzyskuje się dla braku korelacji (wyniki w tabeli 4.4), wzrost zaś wartości bezwzględnej współczynnika korelacji implikuje wzrost wskaźnika β , tym większy, im większa szerokość fundamentu. Widać więc, że pominięcie efektu korelacji daje oszacowania bardziej konserwatywne. Przy poprawnej z punktu widzenia normy szerokości fundamentu $B = 2,35$ m wzrost wartości bezwzględnej współczynnika korelacji powoduje już bardzo istotne zmiany wartości wskaźnika β . Efekt korelacji wzajemnej należy zatem uznać za ważny.

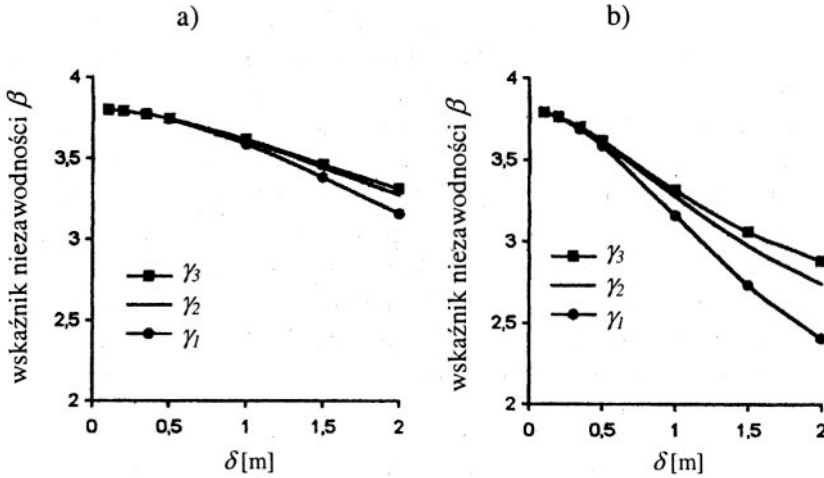
4.2.2. Przykłady obliczeń z zastosowaniem lokalnych uśrednień

W tym podrozdziale zostanie pokazane na przykładach, że uwzględnienie w modelowaniu probabilistycznym przestrzennych uśrednień opisanych w podrozdziale 3.3 może doprowadzić do sytuacji, w której prawidłowo zaprojektowane fundamenty (zgodnie z zasadami normy) będą charakteryzować się wartościami wskaźnika niezawodności

wodności β znacznie przekraczającymi 3. Wprowadzenie zmiennych losowych reprezentujących lokalne uśrednienia pola losowego rozpatrywanego parametru zamiast pojedynczej zmiennej losowej bez uśrednienia opisującej ten parametr wydaje się naturalne, gdyż w mechanizmie towarzyszącym wypieraniu gruntu spod podstawy fundamentu uczestniczą znaczne masy gruntowe (Szczepiński 1974, Izbicki i Mróz 1976), zaś decydujące znaczenie mają parametry wytrzymałościowe wzdłuż całej długości linii poślizgu. Na istotność uśrednień przestrzennych w obliczeniach niezawodności stosowanych w geotechnice zwracali uwagę tacy autorzy, jak Mostyn i Li (1993) czy Cherubini (1997, 2000).

Podstawą obliczeń przeprowadzonych w tym podrozdziale są przykłady ław fundamentowych rozpatrywane w punktach 4.2.1.1 oraz 4.2.1.2. Obecnie jednak modelowanie probabilistyczne oparto na zmiennych losowych uwzględniających uśrednienia przestrzenne. Zastosowanie uśrednienia wymaga przyjęcia trzech dodatkowych założeń, tj. określenia postaci funkcji kowariancji pola losowego, sprecyzowania wartości skali fluktuacji (promienia korelacji) δ oraz sprecyzowania rozmiaru obszaru uśrednienia V . Przyjęcie postaci funkcji kowariancji oraz wielkości skali fluktuacji pozwoli, zgodnie ze wzorami (3.28) i (3.42), na określenie funkcji redukcji wariancji $\gamma(V)$, której argumentem jest rozmiar obszaru uśrednienia V . Sprecyzowanie rozmiaru V umożliwi określenie wariancji zmiennych losowych objętych uśrednieniem przestrzennym i wprowadzenie tych zmiennych do obliczeń niezawodnościowych. W podrozdziale 3.3 zwrócono uwagę, że odpowiedni dla rozpatrywanego zadania dobór tego obszaru jest niezwykle istotnym fragmentem modelowania probabilistycznego na potrzeby obliczeń niezawodności.

W rezultacie obliczeń dokonanych w poprzednim podrozdziale, gdzie wskazano na decydujący wpływ parametrów wytrzymałościowych podłoża na wskaźnik niezawodności, obecnie założono, że uśrednieniu podlegają jedynie parametry wytrzymałościowe. Przyjęto jednowymiarowe stacjonarne pole losowe dla kąta tarcia wewnętrznego oraz analogiczne dla pola spójności. Oba pola zmieniają się wraz z głębokością prostopadle do podstawy fundamentu. Przyjmując, w tym przypadku arbitralnie, rozmiar obszaru uśrednienia kierowano się obserwacją, że linie poślizgu w przypadku wypierania gruntu spod podstawy fundamentu mieszczą się w zasadzie w obszarze do głębokości równej lub nieco większej niż szerokość fundamentu B (Szczepiński 1974, Izbicki i Mróz 1976, por. także podrozdział 4.3.5.1). Z drugiej strony, autorzy normy PN-81/B-03020 uznają za istotny w zagadnieniach nośności obszar gruntu o miąższości $2B$ pod jego podstawą. Poniżej pokazano na przykładzie, jak przyjęcie rozmiaru $V = L = B$ lub $V = L = 2B$ (uwaga: tu L oznacza jednowymiarowy obszar uśrednienia i nie ma nic wspólnego z długością fundamentu) wpływa na wartości wskaźnika niezawodności. Wyniki (rys. 4.11) dotyczą podłoża spoiowego opisanego w poprzednim podrozdziale oraz funkcji redukcji wariancji γ_1 , γ_2 oraz γ_3 według wzorów (3.43), (3.49), (3.51) odpowiednio.



Rys. 4.11. Zależność wskaźnika niezawodności od wielkości skali fluktuacji dla dwóch różnych rozmiarów obszaru uśrednienia:
a) $L = 2B = 3,9$ m; b) $L = B = 1,95$ m

Tabela 4.5. Wartości funkcji wariancji (3.54) oraz (3.51) dla wybranych rozmiarów obszaru uśrednienia L

Wielkość obszaru uśrednienia L [m]	$\delta = 0,8$ m		$\delta = 1,0$ m	
	Wartości funkcji wariancji		Wartości funkcji wariancji	
	(3.54)	(3.51)	(3.54)	(3.51)
1,0	0,5964	0,5867	0,6833	0,6667
1,2	0,5252	0,5185	0,6125	0,6019
1,4	0,4675	0,4626	0,5519	0,5442
1,6	0,4204	0,4167	0,5007	0,4948
1,8	0,3816	0,3786	0,4573	0,4527
2,0	0,3490	0,3467	0,4204	0,4167
2,2	0,3215	0,3196	0,3888	0,3857
2,4	0,2980	0,2963	0,3614	0,3588
2,6	0,2776	0,2761	0,3375	0,3353
2,8	0,2597	0,2585	0,3165	0,3146
3,0	0,2440	0,2430	0,2980	0,2963

Jak łatwo zauważyć, dla skali fluktuacji $\delta > 0,25$ m przyjęcie do obliczeń rozmiaru uśrednienia B zamiast $2B$ ma istotne znaczenie dla wartości wskaźnika niezawodności. W dalszych obliczeniach w ramach tego podrozdziału przyjmowano wartość $V = L = 2B$, w przypadku podłoża niespoistego oraz $V = L = B$ w gruncie spoistym. Do obliczeń wybrano funkcję kowariancji postaci (3.22), która według Rackwitz (Rackwitz 2000) dobrze nadaje się do opisu pól losowych różnych cech materiałowych. Funkcji tej odpowiada funkcja redukcji wariancji dana wzorem (3.54), a skala fluktuacji δ związana jest

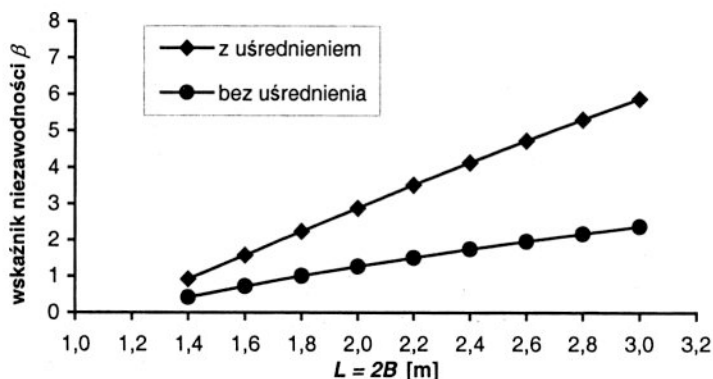
z parametrem funkcji kowariancji a zależnością (3.31) – δ_{22} . Po analizie danych z literatury omówionych w podrozdziale 3.3 przyjęto do obliczeń wartość skali fluktuacji $\delta = 0,8$ m dla gruntu niespoistego oraz $\delta = 1,0$ m dla podłoża spoistego. W tabeli 4.5 podano wartości funkcji wariancji (3.54) dla wybranych rozmiarów obszarów uśredniania L , przy skalach fluktuacji $\delta = 0,8$ m oraz $\delta = 1,0$ m, oraz porównano je z wartościami innej często stosowanej funkcji wariancji postaci (3.51), związanej z trójkątną funkcją korelacji (3.50).

Warto odnotować, że dla podanych w pierwszej kolumnie wielkości obszarów uśredniania wartości obu rozpatrywanych funkcji wariancji różnią się niewiele.

Wyniki obliczeń wskaźników niezawodności dla podłoża niespoistego, przy pozostałych założeniach identycznych jak w podrozdziale 4.2.1.1 wykonanych metodą SORM, w zależności od szerokości fundamentu, zestawiono w tabeli 4.6, a ponadto zilustrowano na rysunku 4.12.

Tabela 4.6. Wpływ lokalnego uśrednienia na wskaźniki niezawodności dla podłoża niespoistego ($L = 2B$)

B [m]	Wskaźnik β z lokalnym uśrednieniem	Wskaźnik β bez uśrednienia lokalnego
1,4	0,92	0,44
1,6	1,58	0,72
1,8	2,24	1,01
2,0	2,88	1,27
2,2	3,51	1,51
2,4	4,13	1,75
2,6	4,73	1,96
2,8	5,31	2,17
3,0	5,88	2,37



Rys. 4.12. Graficzna prezentacja wpływu lokalnego uśrednienia na wskaźniki niezawodności w podłożu niespoistym

Widoczny jest bardzo duży wpływ lokalnego uśrednienia na wartość wskaźnika niezawodności, tym większy, im większa jest szerokość fundamentu, co wynika z faktu, że większa szerokość pociąga za sobą wzrost obszaru uśredniania ($L = 2B$), a więc, przy stałej wartości skali fluktuacji, mniejsze wartości funkcji redukcji wariancji – por. także wzór (3.54). Warto odnotować, że dla szerokości fundamentu $B = 2,3$ m, która jest optymalna według zaleceń normy, wskaźnik β wzrósł od wartości $\beta = 1,63$ przy braku uśrednienia, do wartości $\beta = 3,83$ przy zastosowaniu uśrednienia.

Podobną analizę przeprowadzono dla przykładu podłoża spoistego na podstawie przykładu z podrozdziału 4.2.1.2. Teraz jednak przyjęto dwa pola losowe – pole losowe kąta tarcia wewnętrznego oraz pole losowe spójności, obydwie z funkcją kowariancji postaci (3.22). Dla obu pól przyjęto, na podstawie informacji literaturowych (por. podrozdział 3.3), jednakową pionową skalę fluktuacji $\delta = 1,0$ m. Koreponduje to ze sformułowaną w podrozdziale 3.3 hipotezą, że skala fluktuacji jest jednakowa dla różnych parametrów tego samego podłoża. Wielkość obszaru uśrednienia przyjęto jako $L = B$. Ponadto zbadano efekt wzajemnej korelacji pól losowych parametrów wytrzymałościowych na stałym poziomie $\rho = -0,6$. Otrzymane wyniki, uzyskane metodą SORM, zestawiono w tabeli 4.7 oraz zilustrowano graficznie na rysunku 4.13.

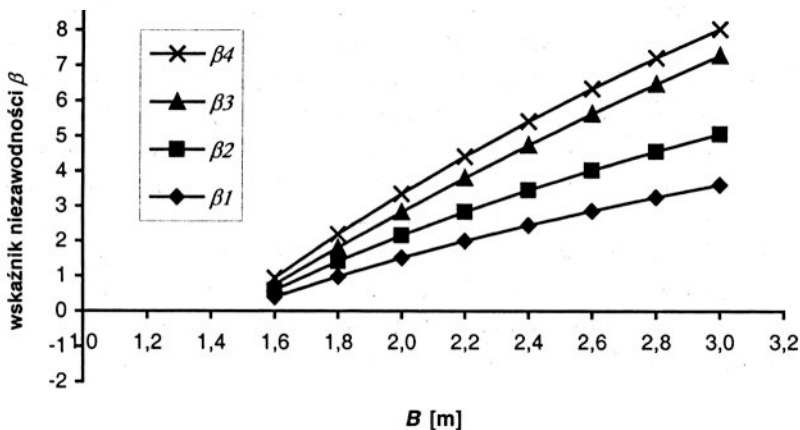
Tabela 4.7. Wartości wskaźników niezawodności:

β_1 – bez uwzględnienia korelacji, ani uśrednienia; β_2 – uwzględniono korelację $\rho = -0,6$, nie uwzględniono uśrednienia; β_3 – nie uwzględniono korelacji, uwzględniono uśrednienie ze skalą fluktuacji $\delta = 1,0$ m; β_4 – uwzględniono korelację $\rho = -0,6$, uwzględniono uśrednienie ze skalą fluktuacji $\delta = 1,0$ m

$L = B$ [m]	β_1	β_2	β_3	β_4
1,6	0,40	0,59	0,75	0,94
1,8	0,98	1,41	1,80	2,19
2	1,51	2,15	2,82	3,35
2,2	2,00	2,83	3,80	4,42
2,4	2,45	3,45	4,74	5,42
2,6	2,86	4,03	5,63	6,35
2,8	3,25	4,56	6,47	7,22
3	3,62	5,06	7,28	8,03

Podobnie jak w przypadku podłoża niespoistego, efekt uśrednienia jest bardzo widoczny. Dla fundamentu o szerokości $B = 2,35$ m, optymalnego z sensie normy PN-81/B-03020 (z tolerancją 0,05 m), wartość wskaźnika niezawodności wzrosła od $\beta_1 = 2,35$ (przy założeniu braku korelacji pomiędzy φ oraz c) do wartości $\beta_3 = 4,51$ (też przy założeniu braku korelacji pomiędzy φ oraz c). Przyrost wartości wskaźnika niezawodności jest już nieco mniejszy niż w przypadku gruntu niespoistego. Szczególnie

duży wzrost daje jednocześnie uwzględnienie uśrednienia przestrzennego oraz korelacji wzajemnej pomiędzy polami parametrów wytrzymałościowych. Warto odnotować, że uwzględnienie uśrednienia daje większy wzrost wskaźnika niezawodności β w porównaniu z uwzględnieniem korelacji negatywnej pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi.

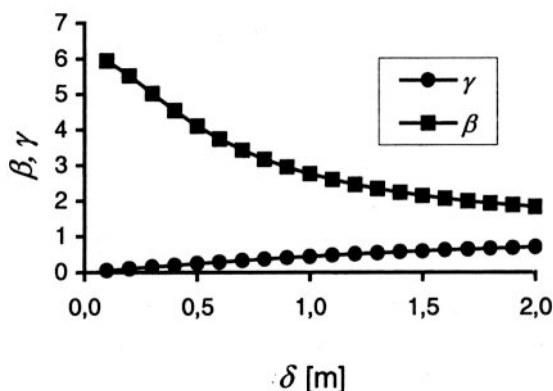


Rys. 4.13. Zależność wskaźnika niezawodności β od szerokości fundamentu w czterech różnych przykładach obliczeniowych:

β_1 – bez uwzględnienia korelacji, ani uśrednienia; β_2 – uwzględniono korelację $\rho = -0,6$, nie uwzględniono uśrednienia; β_3 – nie uwzględniono korelacji, uwzględniono uśrednienie ze skalą fluktuacji $\delta = 1,0$ m; β_4 – uwzględniono korelację $\rho = -0,6$, uwzględniono uśrednienie ze skalą fluktuacji $\delta = 1,0$ m

Warto jeszcze powrócić do wpływu wielkości skali fluktuacji, przy zadanej funkcji redukcji wariancji oraz stałej wielkości obszaru uśrednienia. Wpływ ten uwidoczniono już na rysunku 4.11. Poniżej (rys. 4.14) pokazano wykres zależności funkcji wariancji postaci (3.54) od wielkości skali fluktuacji. Równocześnie uwidocznione są zmiany wskaźnika niezawodności, dotyczącego analizowanego tu przykładu fundamentu posadowionego na gruncie niespoistym.

Jak widać, wartość wskaźnika niezawodności szybko spada wraz ze wzrostem skali fluktuacji. Jeśli jednak weźmie się pod uwagę hipotezę, że dla danego rodzaju podłoża skala fluktuacji jest w przybliżeniu wartością stałą, to pokazana zmienność nie musi stanowić problemu przy obliczaniu wskaźnika niezawodności, pod warunkiem precyzyjnego oznaczenia skali fluktuacji na podstawie badań pola. Należy też odnotować, że dla małych δ wariancja punktowa jest bardzo silnie zredukowana, co implikuje duże wartości wskaźnika β .



Rys. 4.14. Zależność funkcji wariancji γ o postaci (3.54) oraz wskaźnika niezawodności β od wielkości skali fluktuacji δ . Długość przedziału uśrednienia $L = B = 1,9$ m

Przedstawione w tym podrozdziale wyniki obliczeń potwierdzają bardzo istotny wpływ lokalnego uśrednienia na wartości wskaźników niezawodności. Zastosowanie uśrednienia wymusiło wzrost wskaźnika niezawodności dla dobrze zaprojektowanych fundamentów do wartości znacznie przekraczających trzy. Daje to możliwość analizy całej konstrukcji budowlanej, wraz z jej fundamentem, według jednakowych kryteriów oceny niezawodności.

W podłożu spoistym ważne okazało się też uwzględnienie negatywnej korelacji pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi, chociaż wpływ tej korelacji wydaje się być mniejszy od wpływu lokalnego uśrednienia.

Trzeba jednak odnotować, że skala fluktuacji stanowi dodatkowy parametr, który należy wyznaczyć poprzez badania podłoża. Istotne z punktu praktycznych zastosowań byłoby potwierdzenie intuicyjnej hipotezy, że skala fluktuacji jest właściwością charakterystyczną dla danego materiału i nie zmienia się istotnie w zależności od badanego parametru, gdyż zmniejsza to w sposób zasadniczy ilość materiału statystycznego niezbędnego do przeprowadzenia obliczeń niezawodności fundamentów z zastosowaniem uśrednień lokalnych.

Podstawą dalszych rozważań w tym rozdziale jest wykazany na początku tego podrozdziału duży wpływ wielkości obszaru uśrednienia na otrzymywane wyniki. Aby otrzymać miarodajne rezultaty, należy dokładnie sprecyzować w założeniach zadania ten obszar. Wydaje się istotne, aby wiązał się on bezpośrednio z analizowanym mechanizmem (zjawiskiem) powodującym rozpatrywaną awarię.

4.3. Lokalne uśrednienia dla mechanizmu Prandtla

W podrozdziale 4.2.3 wskazano, że obszar, względem którego dokonuje się lokalnego uśrednienia ma istotny wpływ na wyniki obliczeń prawdopodobieństw awarii

oraz wskaźników niezawodności. Chcąc doprowadzić do możliwie obiektywnej oceny miar niezawodności, należy dokonywać lokalnych uśrednień w obszarach podłoża biorących udział w mechanizmie powstawania awarii, zwłaszcza wzdłuż potencjalnych powierzchni (linii) poślizgu. W przypadku mechanizmu wypierania gruntu spod podstawy fundamentu rozwiązywanym w ramach teorii stanów granicznych, szczególnie przydatne mogą się tu okazać mechanizmy kinematycznie dopuszczalne. Zgodnie z twierdzeniami teorii stanów granicznych (Szczepiński 1974, Izbicki i Mróz 1976) mechanizmy te prowadzą do oszacowań nośności „od góry”, jednak zakładane w tych mechanizmach linie poślizgu mogą posłużyć jako obszary uśrednienia dla poszczególnych problemów brzegowych. Celem tego podrozdziału jest uzyskanie wzorów pozwalających na obliczenie redukcji wariancji wynikających z uśrednienia pól losowych parametrów wytrzymałościowych gruntu względem linii poślizgu dla mechanizmu Prandtla (Prandtl 1920). Mechanizm Prandtla jest jednym z najwcześniej stosowanych w stanach granicznych podłoża gruntowego, a występujące w nim linie, oddzielające przemieszczające się bryły, mogą być traktowane jako przybliżone linie poślizgu w modelowaniu rzeczywistego zjawiska wypierania gruntu spod podstawy fundamentu.

Zastosowanie uśrednień lokalnych po potencjalnych liniach poślizgu na potrzeby probabilistycznej analizy nośności ma jedynie niewielką reprezentację w literaturze. Z nielicznych prac na uwagę zasługują praca Griffithsa i Fentona (2001) oraz praca Przewłóckiego i Dardzińskiej (2001).

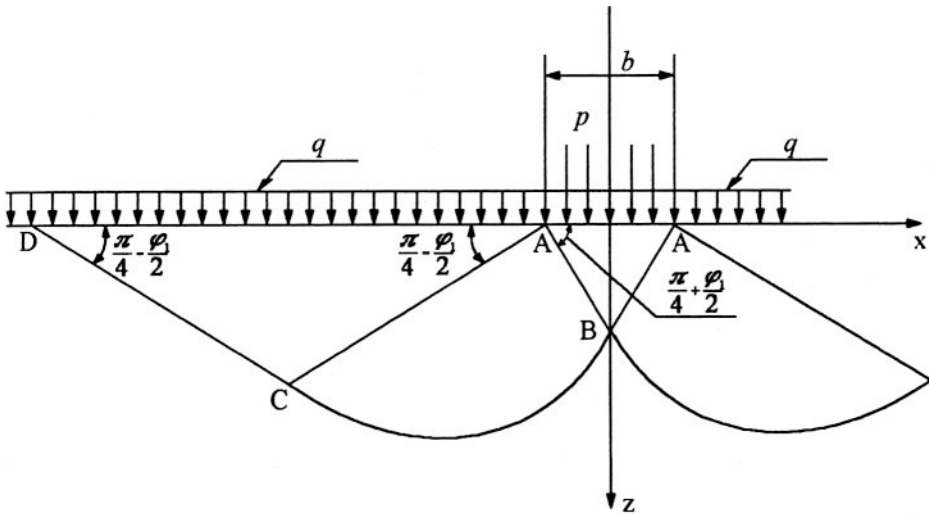
Prezentowane poniżej podejście stanowi nowe rozwiązanie.

4.3.1. Lokalne uśrednienia wzdłuż linii poślizgu oraz ich kowariancje

Schemat mechanizmu Prandtla wraz z liniami poślizgu pokazano na rysunku 4.15, przy czym szerokość fundamentu oznaczono tu wyjątkowo przez b (aby uniknąć koincydencji z punktem B). Stosując wzór (3.37) dokonuje się uśrednienia kolejno wzdłuż odcinków: prostoliniowego AB, odcinka spirali logarytmicznej BC oraz odcinka prostoliniowego CD. Uśrednienia dotyczą, podobnie jak w punkcie 4.2, pól losowych kąta tarcia wewnętrznego oraz pola spójności. Zadanie traktuje się jako płaskie. Załóżmy, że odcinki krzywoliniowe (lub prostoliniowe) są sparametryzowane w postaci

$$\begin{aligned}
 & x = x(t_i), \quad z = z(t_i) \\
 l_i: & \quad \text{dla } t_i \in [a_i, b_i],
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

przy czym i oznacza numer odcinka ($l_1 = AB$, $l_2 = BC$, $l_3 = CD$). Wówczas kowariancję zmiennych losowych uzyskanych poprzez uśrednienie pola na odcinkach l_i , l_j oblicza się z zależności (3.39), która w tym przypadku przyjmuje postać



Rys. 4.15. Linie poślizgu w mechanizmie Prandtla (grunt jednorodny)

$$\text{Cov}(X_{l_i}, X_{l_j}) = \frac{1}{|l_i||l_j|} \int_{l_i} \int_{l_j} R(x_1, z_1, x_2, z_2) dl_i dl_j = \frac{1}{|l_i||l_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} R(x(t_i), z(t_i), x(t_j), z(t_j))$$

$$\times \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_i}\right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_j}\right]^2} dt_i dt_j.$$

(4.18)

Gdy $i = j$, to wzór (4.18) określa wariancję zmiennej losowej X_{l_i} . Jako funkcję kowariancji pól przyjęto gaussowską funkcję kowariancji, określoną równaniem (3.27).

4.3.2. Uśrednienie jednowymiarowe

Na wstępie rozpatruje się przypadek jednowymiarowego uśrednienia wraz z głębokością z . Jest to szczególnie istotny przypadek, gdyż własności podłoża na ogół znacznie szybciej zmieniają się wraz z głębokością aniżeli w płaszczyznach poziomych. Z danych zgromadzonych w pracach Cherubiniego (1997) oraz Wickremesinghe'a i Campanelli (1993) wynika, że wartości promienia korelacji są dużo mniejsze w kierunku pionowym niż w kierunku poziomym (por. podrozdział 3.3). Przy założeniu jednowymiarowego, stacjonarnego pola losowego funkcja kowariancji typu (3.27) przyjmuje postać (3.22), wzór zaś (4.17) redukuje się do postaci

$$\text{Cov}(X_{l_i}, X_{l_j}) = \frac{\sigma_X^2}{|l_i||l_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} \exp\left(-\left(\frac{z(t_i) - z(t_j)}{\omega}\right)^2\right) \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_i}\right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_j}\right]^2} dt_i dt_j, \quad (4.19)$$

przy czym σ_X^2 jest wariancją punktową stacjonarnego pola losowego X , zależność zaś pomiędzy skalą fluktuacji a parametrem funkcji kowariancji jest następująca (por. wzór (3.22) i (3.31):

$$\delta = \omega\sqrt{\pi}, \quad (4.20)$$

przy czym ω odpowiada parametrowi a we wzorze (3.22).

A zatem zadanie sprowadza się do obliczenia całek postaci (4.19) dla odcinków AB, BC oraz CD. Kąt tarcia wewnętrznego φ_1 będzie, dla uproszczenia zapisu, oznaczany przez φ .

Wariancja X_{AB} . Przy założeniach jak na rysunku 4.15 oraz parametryzacji odcinka AB

$$x(t) = \frac{b}{2} - t \frac{b}{2}; \quad z(t) = t \frac{b}{2} \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right); \quad t \in [0,1] \quad (4.21)$$

wzór (4.19) ma postać

$$\begin{aligned} \text{Var}\{X_{AB}\} &= \sigma_X^2 \frac{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{b^2} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2 a^2}{4\omega^2} (t_1 - t_2)^2\right) \frac{b^2}{4} (1 + a^2) dt_1 dt_2 \\ &= \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2 a^2}{4\omega^2} (t_1 - t_2)^2\right) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

gdzie $a = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$. Zamiana zmiennych w ostatniej całce: $\xi = t_1 - t_2$ oraz $\eta = t_1$ prowadzi do następującej redukcji wyrażenia (4.22):

$$\begin{aligned} \text{Var}\{X_{AB}\} &= 2\sigma_X^2 \int_0^1 \exp\left(-\frac{a^2 b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\xi - 2\sigma_X^2 \int_0^1 \xi \exp\left(-\frac{a^2 b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\xi \\ &= 2\sigma_X^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}\omega}{ab} \text{erf}\left(\frac{ab}{2\omega}\right) + \frac{2\omega^2}{a^2 b^2} \exp\left(-\frac{a^2 b^2}{4\omega^2}\right) - \frac{2\omega^2}{a^2 b^2} \right) \\ &= \frac{\sigma_X^2}{h_B} \left(\omega\sqrt{\pi} \text{erf}\left(\frac{h_B}{\omega}\right) + \frac{\omega^2}{h_B} \exp\left(-\frac{h_B^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega^2}{h_B} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdzie $h_B = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$. Jak łatwo zauważyć, h_B jest pionową współrzędną punktu B.

Oznacza to, że uśrednienie wzdłuż odcinka AB jest takie samo jak po pionowym odcinku do głębokości wyznaczonej przez rzędną punktu B. Rezultat ten jest konsekwencją faktu, że przyjęte tu uśrednienie jest jednowymiarowe i odbywa się zgodnie ze współrzędną pionową. Wzór (4.23) daje następującą postać funkcji redukcji wariacji:

$$\gamma(h) = \frac{\omega h \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{h}{\omega} \right) + \omega^2 \exp \left(-\frac{h^2}{\omega^2} \right) - \omega^2}{h^2}, \quad (4.24)$$

w której h jest długością rzutu odcinka AB na kierunek pionowy. Rezultat ten jest identyczny z rezultatem podanym przez Vanmarcke'a dla pola jednowymiarowego (Vanmarcke 1977a, Rackwitz 2000) – jeśli się przyjmie, że $\frac{1}{\omega^2} = a$ oraz $h = L$ wzór (4.24) jest identyczny jak wzór (3.54).

Wariancja X_{CD} . Uzyskany wyżej rezultat, wyrażony wzorem (4.24) wskazuje, że redukcja wariacji może być obliczona z (4.24), jeśli się przyjmie $h = h_C$, gdzie h_C jest pionową współrzędną punktu C (zagłębieniem punktu C względem powierzchni terenu). Współrzędna ta wyraża się wzorem

$$h_C = \frac{b}{2} \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right). \quad (4.25)$$

Wariancja X_{BC} . Przy układzie współrzędnych jak na rysunku 4.15 wprowadza się współrzędne biegunowe według zależności

$$x(r, \theta) = -r \cos \theta + \frac{b}{2}; \quad z(r, \theta) = r \sin \theta. \quad (4.26)$$

W tych współrzędnych równanie odcinka spirali logarytmicznej BC ma postać

$$r(\theta) = r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi); \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}; \frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2} \right], \quad (4.27)$$

przy czym

$$r_0 = \frac{b}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi \right]. \quad (4.28)$$

Jak łatwo zauważyć, dla $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$,

$$x\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 0; \quad z\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{b}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

otrzymuje się współrzędne punktu B, zaś dla $\theta = \frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}$

$$x\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{b}{2} \left(\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{b}{2};$$

$$z\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) = r_0 \left(\exp\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

otrzymuje się współrzędne punktu C. Długość odcinka BC spirali wynosi

$$\begin{aligned} |l| &= \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}} r_0 \frac{\exp(\theta \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \varphi} d\theta = \frac{b}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi} \left(\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Po podstawieniu zależności (4.26)–(4.29) do wzoru (4.19) otrzymuje się następującą zależność na wariancję X_{BC} :

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}[X_{BC}] &= \sigma_x^2 \alpha_0 \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2} [(\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi) - (\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi)]^2\right] \right\} \\ &\times \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

w której

$$\alpha_0 = \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)(\operatorname{tg} \varphi)\right]}{\left[\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) - 1\right]^2}. \quad (4.31)$$

Całka w równaniu (4.30) nie może być przedstawiona w postaci zamkniętej, zatem w celu obliczenia wariancji zmiennej X_{BC} należy ją oszacować numerycznie.

Kowariancja X_{AB} i X_{CD} . Jeśli się przyjmie parametryzację odcinka AB zgodną ze wzorami (4.21) oraz następującą parametryzację odcinka CD

$$x(t) = \frac{b}{2} \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} (1+t) + \frac{b}{2}; \quad z(t) = \frac{b}{2} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) (1-t); \quad t \in [0, 1], \quad (4.32)$$

to wzór (4.19) redukuje się do postaci

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}[X_{AB}, X_{CD}] &= \\ &= \sigma_x^2 \frac{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{b^2 d} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega^2} (at_1 + dt_2 - d)^2\right] \frac{b}{2} ad \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} \frac{b}{2} \sqrt{1+a^2} dt_1 dt_2} \quad (4.33) \\ &= \sigma_x^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega^2} (at_1 + dt_2 - d)^2\right] dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

w której $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ oraz $d = \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)$.

Po wprowadzeniu nowych współrzędnych

$$\begin{aligned} \xi &= at_1 + dt_2 - d, \\ \eta &= t_1, \end{aligned} \quad (4.34)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega^2} (at_1 + dt_2 - d)^2\right] dt_1 dt_2 &= \frac{1}{d} \int_{-d}^{a-d} \left[\int_0^{\frac{1}{a}\xi + \frac{d}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\eta \right] d\xi \\ &+ \frac{1}{d} \int_{a-d}^0 \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\eta \right] d\xi + \frac{1}{d} \int_0^{\frac{1}{a}} \left[\int_{\frac{1}{a}\xi}^a \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\eta \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Obliczenia występujących we wzorze (4.35) całek prowadzą do następujących rezultatów:

$$\int_{-d}^{a-d} \left[\int_0^{\frac{1}{a}\xi + \frac{d}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\eta \right] d\xi = \frac{1}{a} \left[-\frac{2\omega^2}{b^2} \exp\left(\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) \right]_{-d}^{a-d} + \frac{d}{a} \int_{-d}^{a-d} \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\xi = \frac{2\omega^2}{ab^2} \left[\exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}d^2\right) - \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}(a-d)^2\right) \right] \quad (4.36)$$

$$+ \frac{d}{a} \frac{\omega\sqrt{\pi}}{b} \left[-\operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{db}{2\omega}\right) \right],$$

$$\int_{a-d}^0 \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\eta \right] d\xi = \frac{\omega\sqrt{\pi}}{b} \operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right), \quad (4.37)$$

$$\int_0^a \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\eta \right] d\xi = \int_0^a \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\xi - \frac{1}{a} \int_0^a \left[\exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) \right] d\xi \quad (4.38)$$

$$= \frac{\omega\sqrt{\pi}}{b} \operatorname{erf}\left(\frac{ab}{2\omega}\right) - \frac{1}{a} \left[\frac{2\omega^2}{b^2} - \frac{2\omega^2}{b^2} \exp\left(-\frac{b^2 a^2}{4\omega^2}\right) \right].$$

Ostatecznie wzory (4.33) oraz (4.35)–(4.38) prowadzą do rezultatu w postaci

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}[X_{AB}, X_{CD}] &= \sigma_x^2 \frac{2\omega^2}{ab^2 d} \left[\exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}d^2\right) - \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}(a-d)^2\right) - 1 + \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}a^2\right) \right] \\ &+ \sigma_x^2 \frac{\omega\sqrt{\pi}}{bd} \left[\frac{d}{a} \operatorname{erf}\left(\frac{bd}{2\omega}\right) - \frac{d}{a} \operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{ab}{2\omega}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Kowariancja X_{AB} i X_{BC} . Dla odcinka AB przyjmuje się parametryzację w postaci (4.21), zaś dla odcinka spirali logarytmicznej BC, po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych (4.26), parametryzację (4.27). Korzystając ze wzoru (4.19), otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) \\ &= \frac{\sigma_X^2}{|AB||BC|} \int_0^1 \left\{ \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\omega^2} \left[\frac{b \operatorname{tg} \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right)}{2} t - r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) \sin \theta \right]^2 \right\} \frac{r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \varphi} d\theta \right. \\ & \quad \left. \times \frac{b}{2 \cos \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right)} dt, \right. \end{aligned} \quad (4.40)$$

gdzie r_0 określone jest wzorem (4.28). Po wprowadzeniu we wzorze (4.40) długości odcinka AB i długość łuku BC (wzór (4.29)) oraz po wykonaniu redukcji wyrażeń otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) = \sigma_X^2 \alpha_1 \\ & \times \int_0^1 \left\{ \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}\right)} \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega^2} \left(a(1-t) - \frac{\sin \theta}{\cos \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right)} \exp \left(\left(\theta - \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right) \operatorname{tg} \varphi \right) \right) \right)^2 \right] \right\} \\ & \quad \times \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) d\theta dt, \end{aligned} \quad (4.41)$$

przy czym

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\left[\exp \left(\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi \right) - \exp \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi \right) \right]}. \quad (4.42)$$

oraz a jak we wzorze (4.22).

Kowariancja X_{BC} i X_{CD} . Dokonując takich przekształceń jak w poprzednim przypadku, można pokazać, że kowariancję zmiennych losowych X_{BC} oraz X_{CD} wyznacza się według wzoru (4.41), po zastąpieniu w nim stałej a przez stałą $d = \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right)$ (identyczną jak we wzorze (4.33)).

4.3.3. Uśrednienie dwuwymiarowe

W poprzednim podrozdziale wprowadzone zostały wzory na wariancję i kowariancję parametrów uśrednionych wzdłuż linii poślizgu, przy założeniu, że funkcja

kowariancji pola losowego była funkcją jednej zmiennej – oznaczającej zmiany z głębokością. Obecnie wyniki te zostaną uogólnione dla przypadku zmian pola w kierunku zarówno pionowym, jak i poziomym. Funkcja kowariancji będzie zatem funkcją dwóch zmiennych. Uogólnienie wyników na przypadek dwuwymiarowy pozwoli na zanalizowanie problemu na ile zmiany pola w kierunku poziomym są istotne przy obliczeniach niezawodności z założeniem mechanizmu Prandtla. Podobnie jak poprzednio przyjęto gaussowską funkcję kowariancji, która w przypadku dwuwymiarowym ma postać

$$R(\Delta x, \Delta z) = \sigma_x^2 \exp \left\{ - \left[\left(\frac{\Delta z}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{\omega_2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.43)$$

ω_1 oraz ω_2 są parametrami związanymi ze skalami fluktuacji (pionową i poziomą – odpowiednio) zależnością postaci (4.20), zaś oznaczenia osi współrzędnych pozostają takie jak na rysunku 4.14. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale, kąt tarcia wewnętrznego φ_1 będzie oznaczany przez φ . Tak jak poprzednio rozpatruje się uśrednienia na poszczególnych odcinkach i oblicza wariancje oraz kowariancje uzyskanych w ten sposób zmiennych losowych. Przy założeniu dwuwymiarowego, stacjonarnego pola losowego oraz funkcji kowariancji postaci (4.43) wzór (4.18) redukuje się do postaci

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) \\ &= \frac{\sigma_x^2}{|l_i||l_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} \exp \left(- \left(\frac{z(t_i) - z(t_j)}{\omega_1} \right)^2 \right) \exp \left(- \left(\frac{x(t_i) - x(t_j)}{\omega_2} \right)^2 \right) \\ & \quad \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i} \right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_i} \right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j} \right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_j} \right]^2} dt_i dt_j. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Wariancja X_{AB} . Stosując parametryzację identyczną jak w przypadku jednowymiarowym (wzory (4.21)), z wyrażenia (4.44) uzyskuje się następujący wzór na wariancję:

$$\text{Var}\{X_{AB}\} = \frac{\sigma_x^2}{|AB|^2} \int_0^1 \int_0^1 \exp \left(- \frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} (t_1 - t_2)^2 \right) \exp \left(- \frac{b^2}{4\omega_2^2} (t_1 - t_2)^2 \right) \frac{b^2}{4} (1 + a^2) dt_1 dt_2, \quad (4.45)$$

w którym $a = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$, zaś $|AB|$ jest długością odcinka AB. Taka sama jak w przypadku całki (4.22) zamiana zmiennych prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned}
\text{Var}\{X_{AB}\} &= \frac{\sigma_X^2 b^2 (1+a^2) 2}{|AB|^2 4} \int_0^1 [1-\xi] \exp\left(-\left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right) \xi^2\right) d\xi \\
&= 2\sigma_X^2 \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{b} \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2}} \operatorname{erf}\left[\sqrt{\frac{a^2 \omega_2^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}} \frac{b}{2}\right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\omega_1^2 \omega_2^2}{b^2 (a^2 \omega_2^2 + \omega_1^2)} \int_0^1 \left(-2\xi \left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right)\right) \exp\left(-\left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right) \xi^2\right) d\xi \right\}, \tag{4.46}
\end{aligned}$$

a stąd, po obliczeniu ostatniej całki,

$$\text{Var}\{X_{AB}\} = \frac{2\sigma_X^2}{b} \left\{ \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2}} \operatorname{erf}\left[\sqrt{\frac{a^2 \omega_2^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}} \frac{b}{2}\right] + \frac{2\omega_1^2 \omega_2^2}{b(\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2)} \left[\exp\left(-\left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right)\right) - 1 \right] \right\}, \tag{4.47}$$

Łatwo zauważyć, że wzorowi (4.47) można nadać postać analogiczną do (4.23). Mianowicie po wprowadzeniu (jak w (4.23)) współrzędnej pionowej punktu B, tj. $h_B = \frac{b}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, uwzględnieniu, że $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ oraz po wprowadzeniu oznaczenia

$$\omega_{0B} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 a^2}{\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2}} \tag{4.48}$$

wzór (4.47) zapisuje się jako

$$\text{Var}\{X_{AB}\} = \frac{\sigma_X^2}{h_B} \left(\omega_{0B} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{h_B}{\omega_{0B}}\right) + \frac{\omega_{0B}^2}{h_B} \exp\left(-\frac{h_B^2}{\omega_{0B}^2}\right) - \frac{\omega_{0B}^2}{h_B} \right). \tag{4.49}$$

Wzór (4.49) różni się od (4.23) jedynie stałą ω_{0B} , którą można by traktować (po pomnożeniu przez $\sqrt{\pi}$) jako zhomogenizowaną skalę fluktuacji, sprowadzającą zadanie dwuwymiarowe do jednowymiarowego. Ponadto łatwo zauważyć, że

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} \omega_{0B} = \omega_1, \tag{4.50}$$

daje w rezultacie przypadek jednowymiarowy.

Wariancja X_{CD} . Przy założeniach jak na rysunku 4.14 oraz parametryzacji odcinka CD

$$x(t) = \frac{b}{2} \left(t \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} + 1 \right); \quad z(t) = (1-t) \frac{b}{2} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right); \quad t \in [0, 1] \quad (4.51)$$

wariancja zmiennej X_{CD} wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\{X_{CD}\} &= \frac{\sigma_X^2}{|\operatorname{CD}|^2} \frac{b^2}{4} (d^2 a^2 + d^2) \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2 d^2}{4\omega_1^2} (t_1 - t_2)^2\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega_2^2} (t_1 - t_2)^2\right) \frac{b^2}{4} (1 + a^2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Po dokonaniu przekształceń takich jak w przypadku obliczania wariancji zmiennej X_{AB} oraz biorąc pod uwagę fakt, że długość odcinka CD wyraża się wzorem

$$|\operatorname{CD}| = \frac{b \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}, \quad (4.53)$$

wzór (4.52) sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\{X_{CD}\} &= \frac{2\sigma_X^2}{\frac{b}{2}d} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \frac{1}{a^2}}{\frac{\omega_2^2}{a^2} + \omega_1^2}} \operatorname{erf} \left[\frac{b}{2} \sqrt{\frac{d^2 + d^2}{\frac{\omega_1^2}{a^2} + \frac{\omega_2^2}{a^2}}} \right] \right. \\ &\left. + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \frac{1}{a^2}}{bd \left(\frac{\omega_2^2}{a^2} + \omega_1^2\right)} \left[\exp\left(-\left(\frac{b^2 d^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2 d^2}{4\frac{\omega_2^2}{a^2}}\right)\right) - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

gdzie $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, zaś $d = \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)$.

Wprowadzając, analogicznie do przypadku jednowymiarowego, pionową współrzędną h_C punktu C, która dana jest wzorem (4.25), otrzymuje się

$$\operatorname{Var}\{X_{CD}\} = \frac{\sigma_X^2}{h_C} \left(\omega_{0C} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{h_C}{\omega_{0C}}\right) + \frac{\omega_{0C}^2}{h_C} \exp\left(-\frac{h_C^2}{\omega_{0C}^2}\right) - \frac{\omega_{0C}^2}{h_C} \right), \quad (4.55)$$

przy czym ω_{0C} , analogiczna do ω_{0B} , dana jest wzorem

$$\omega_{0C} = \sqrt{\frac{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{a^2}}{\frac{\omega_2^2}{a^2} + \omega_1^2}} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 + a^2 \omega_1^2}}. \quad (4.56)$$

Zatem wzory (4.49) i (4.55) różnią się nie tylko współrzędnymi pionowymi h_B i h_C , lecz także stałymi typu ω . Podobnie jak poprzednio

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} \omega_{0C} = \omega_1, \quad (4.57)$$

a więc przy dużych wartościach ω_2 wariancja powinna być zbliżona do tej otrzymanej z przypadku jednowymiarowego.

Wariancja X_{BC} . Wprowadza się współrzędne biegunowe zgodnie ze wzorami (4.26), co daje parametryczną reprezentację odcinka w postaci (4.27) i (4.28). W tym przypadku wzór (4.44) daje następującą formułę na wariancję zmiennej X_{BC} :

$$\begin{aligned} \text{Var}\{X_{BC}\} &= \frac{\sigma_X^2}{|BC|^2} \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_1^2} [(\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi) - (\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi)]^2\right] \right\} \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_2^2} [(\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi) - (\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi)]^2\right] \right\} r_0^2 \frac{\exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \varphi} \frac{\exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \varphi} d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Długość odcinka spirali BC została obliczona w podrozdziale 4.3.2 i wyraża się wzorem (4.29). Po uwzględnieniu (4.29) oraz wydobyciu stałych przed znak całki i dokonaniu redukcji wyrażeń otrzymuje się

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_{BC}] &= \sigma_X^2 \alpha_0 \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_1^2} [(\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi) - (\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi)]^2\right] \right. \\ &\left. - \frac{r_0^2}{\omega_2^2} [(\cos \theta_1) \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi) - (\cos \theta_2) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi)]^2 \right\} \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned} \quad (4.59)$$

gdzie

$$\alpha_0 = \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\exp\left[-(\operatorname{tg} \varphi)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]}{\left[\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) - 1\right]^2} \quad (4.60)$$

oraz

$$r_0 = \frac{b}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi\right]. \quad (4.61)$$

Całka we wzorze (4.59) nie ma reprezentacji w postaci zamkniętej i musi być oszacowana numerycznie.

W dalszej części podane zostaną kowariancje zmiennych losowych uzyskanych przez uśrednienia wzdłuż trzech odcinków linii poślizgu.

Kowariancja X_{AB} i X_{CD} . Odcinki AB i CD parametryzuje się według wzorów (4.21) i (4.51), odpowiednio. Po podstawieniu do wzoru (4.44) oraz prostych przekształceniach otrzymuje się wzór

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cov}(X_{AB}, X_{CD}) \\ &= \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega_1^2}(-dt_2 + d - at_1)^2\right] \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega_2^2}(adt_2 + t_1 + ad)^2\right] dx dy, \quad (4.62) \end{aligned}$$

w którym $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ oraz $d = \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)$, tak jak we wzorze (4.5).

W przypadku dwuwymiarowym całka po prawej stronie równości (4.62) nie ma reprezentacji w postaci zamkniętej (jak to miało miejsce w przypadku jednowymiarowym – por. wzór (4.39)) i musi być oszacowana numerycznie.

Kowariancja X_{AB} i X_{BC} . Stosując dla odcinka AB parametryzację postaci (4.21) oraz postaci (4.27) i (4.28) dla odcinka spirali BC po podstawieniu do wzoru (4.44), a także po wstawieniu do (4.44) długości odcinka AB oraz długości łuku BC (wzór (4.29)) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) \\
&= \sigma_X^2 \alpha_1 \int_0^1 \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_1^2} \left[ay - \frac{\sin \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right]^2 \right] \right\} \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_2^2} \left[1 - y - \frac{\cos \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right]^2 \right] \right\} \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) d\theta_1 dy,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{\text{tg } \varphi}{\left[\exp \left(\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \text{tg } \varphi \right) - \exp \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \text{tg } \varphi \right) \right]}. \tag{4.64}$$

Kowariancja X_{BC} i X_{CD} . Analogicznie do poprzedniego przypadku, parametryzując łuk spirali BC według zależności (4.27) i (4.28), zaś odcinek CD według (4.51) oraz uwzględniając długość łuku BC zgodnie z (4.29) oraz długość odcinka CD otrzymuje się następujący wzór określający żadaną kowariancję

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(X_{BC}, X_{CD}) \\
&= \sigma_X^2 \alpha_1 \int_0^1 \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_1^2} \left[d(1-y) - \frac{\sin \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right]^2 \right] \right\} \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_2^2} \left[da(1+y) + 1 - \frac{\cos \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right]^2 \right] \right\} \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) d\theta_1 dy,
\end{aligned} \tag{4.65}$$

przy czym a i d są identyczne jak we wzorze (4.62), zaś α_1 dane jest równaniem (4.64). Oczywiście, zarówno w przypadku wzoru (4.64), jak i wzoru (4.65) całki należy oszacować numerycznie.

W ten sposób wzory na wariancje zmiennych uśrednionych oraz kowariancje pomiędzy nimi zostały uogólnione z przypadku jednowymiarowego opisanego w podrozdziale 4.3.2 na przypadek dwuwymiarowy.

4.3.4. Funkcja stanu granicznego

W wyniku uśrednień parametrów wytrzymałościowych opisanych w poprzednich podrozdziałach otrzymuje się sześć zmiennych losowych $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przy czym φ_1, c_1 wynikają z uśrednienia wzdłuż linii AB, φ_2, c_2 – wzdłuż BC, zaś φ_3, c_3 – wzdłuż CD (rys. 4.15). Wariancje i kowariancje tych zmiennych wynikają z rezultatów uzyskanych w podrozdziałach 4.3.2 i 4.3.3. Do określenia funkcji stanu granicznego potrzebne jest teraz określenie obciążenia granicznego \bar{p}_g dla fundamentu pasmowego, wynikającego z kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu Prandtla. W związku z tym, że na każdym z odcinków AB, BC i CD występują inne wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności, zadanie różni się nieco od klasycznego. Przyjęto tu założenie, że geometria (wielkości linii) trzech obszarów (rys. 4.15) jest zdeterminowana wartością kąta φ_1 . Następnie wyprowadzono wzór na nośność graniczną, stosując procedurę podaną w monografii Izbickiego i Mroza (1976) oraz dokonując niezbędnych adaptacji związanych z wystąpieniem różnych zmiennych losowych φ_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) wzdłuż poszczególnych linii poślizgu AB, BC, i CD. Zasadnicze elementy prowadzące do wzoru na nośność podane są poniżej.

Rozważa się najpierw nieważki ośrodek spoisty, w którym przez porównanie mocy obciążeń zewnętrznych z mocą dyssypacji wewnętrznej otrzymuje się następujące równanie (uwaga: jak już wspomniano, w całym podrozdziale 4.3 szerokość fundamentu oznaczana jest przez b):

$$\begin{aligned} \bar{p}_g b v_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) &= c_1 b v_0 \frac{\cos \varphi_1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + c_2 b v_0 [\exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) - 1] \frac{\operatorname{ctg} \varphi_2}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \\ &+ c_3 b v_0 \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{\cos \varphi_3}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

w którym:

$$v_0 = \frac{v_F}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}, \quad (4.67)$$

przy czym v_F jest prędkością przesuwania się sztywnego klina ABA pionowo w dół. Kolejne wyrazy po prawej stronie wzoru (4.66) określają moc dysypowaną na linii AB, w obszarze ABC wraz z linią BC oraz na linii CD. Dla ważkiego ośrodka Coulomba do lewej strony równania (4.66) należy dodać moce sił ciężkości, według następujących zależności

$$L_{ABE} = \frac{1}{4} \gamma b^2 v_0 \cos\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (4.68)$$

$$L_{ABC} = -\frac{1}{2(1+9 \operatorname{tg}^2 \varphi_2)} \gamma v_0 \left(\frac{b}{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \right)^2 \times \left\{ \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \right. \quad (4.69)$$

$$\left. \times \exp\left(\frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2\right) + \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \right\}$$

$$L_{ACD} = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{b}{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \right)^2 v_0 \cos \varphi_3 \exp\left(\frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right) \quad (4.70)$$

W przypadku obciążenia q na naziomie obok fundamentu oraz zagłębienia fundamentu na głębokość D_{\min} i ciężarze objętościowym zasympki γ_1 do lewej strony wzoru (4.66) dodaje się jeszcze moc rozwijaną przez nacisk obok fundamentu (q oraz $D_{\min} \gamma_1$), mianowicie:

$$L_q = -(q + \gamma_1 D_{\min}) b v_0 \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \cos\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right)}{\sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \quad (4.71)$$

Uwzględniając teraz, zgodnie ze sformułowanymi wyżej sugestiami, zależności (4.68)–(4.71) we wzorze (4.66) oraz przyjmując oznaczenie $Q_f = \bar{p}_g b$, a następnie dokonując redukcji wyrażeń, otrzymuje się następujące wyrażenie na nośność graniczną:

$$Q_f = \frac{b Q'_f}{\sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \quad (4.72)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
Q'_f = & c_1 \frac{\cos \varphi_1}{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + c_2 [\exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) - 1] \\
& \times \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi_2} + c_3 \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{\cos \varphi_3}{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \\
& + (q + \gamma_1 D_{\min}) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + b \left[-\frac{1}{4} \gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \\
& + \frac{b\gamma}{2(1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi_2) 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \times \left\{ \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \exp\left(\frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2\right) \right. \\
& \left. + \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \right\} + b \frac{\gamma \cos \varphi_3 \exp\left(\frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right)}{8 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Podobnie jak we wzorze Terzagiego (por. podrozdział 4.2.1), także i we wzorze (4.73) można wyróżnić składniki związane z wpływem spójności – pierwsze trzy składniki z prawej strony wzoru (4.73), wpływem zagłębienia fundamentu – czwarty składnik, oraz składniki związane z efektem ciężaru gruntu pod fundamentem – pozostałe składniki występujące w tym wzorze.

We wzorze (4.73) nie jest uwzględniony wpływ mimośrodowość obciążenia oraz nachylenia wypadkowej w stosunku do normalnej do podstawy fundamentu.

Funkcja stanu granicznego stosowana w obliczeniach wskaźników niezawodności w następnym podrozdziale ma postać (4.11), przy czym zamiast Q_{fnb} wprowadza się Q_f według wzoru (4.72).

4.3.5. Analizy numeryczne

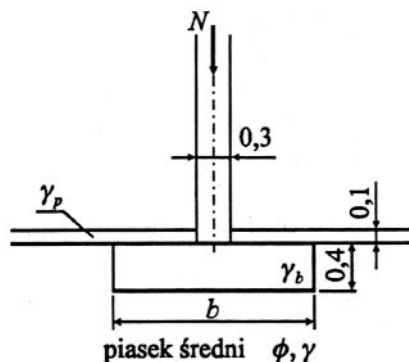
W podrozdziale tym przyjęto dwa zasadnicze cele. Pierwszy – pokazać, jak istotny jest wpływ lokalnych uśrednień na wskaźniki niezawodności przy obliczaniu nośności według oszacowania wynikającego z mechanizmu Prandtla. Drugi – porównanie wyników otrzymanych z zastosowaniem uśrednień jednowymiarowych z wynikami obliczeń uwzględniających uśrednienia dwuwymiarowe. Podobnie jak w podrozdziale 4.2, rozpatrzone zostaną dwa przypadki – ława na podłożu niespoistym oraz ława na podłożu spoistym.

Dane dotyczące charakterystyk podłoża oraz obciążeń są w zasadzie identyczne jak w podrozdziale 4.2, z wyjątkiem (wynikających z przyczyn wzmiankowanych pod koniec podrozdziału 4.3.4) przyjęcia obciążenia osiowego (bez mimośrodów) normalnego do podstawy (zerowa składowa styczna obciążenia). Nośność podłoża była obliczana na podstawie zależności uzyskanych w podrozdziale 4.3.4 z pewną modyfikacją, polegającą na tym, że sumę składników we wzorze (4.73) związanych z efektem ciężaru gruntu pod fundamentem podzielono przez dwa. Taka procedura związana jest z opinią, że efekt ciężaru w rozwiązaniu Prandtla wydaje się być nieco zawyżony. Panuje opinia (Izbicki i Mróz 1976), że bliższe rzeczywistości, a przynajmniej częściej stosowane (w przypadku tego efektu), jest przybliżone rozwiązanie Sokołowskiego (1958). Współczynniki N_γ w rozwiązaniu Sokołowskiego są odpowiednikami współczynników N_B ze wzoru (4.4) i mają zbliżone do nich wartości. Jednocześnie podzielenie sumy składników we wzorze (4.73) związanych z efektem ciężaru gruntu przez dwa zbliża jej wartości do wartości współczynników N_γ według Sokołowskiego (por. Izbicki i Mróz 1976). Tak więc zastosowanie opisanej redukcji miało na celu zbliżenie wyników obliczeń do tych, które mogłyby być uzyskane przy dokonaniu obliczeń według procedur opisanych w podrozdziale 4.2.1. Współczynnik niepewności modelu m przyjęto jako równy jedności.

Jak nadmieniono w podrozdziale 4.3.4, przyjęte zostało założenie, że geometria obszarów jest zdeterminowana przez wartość kąta ϕ_1 . Tu przyjmuje się kolejne założenie upraszczające, polegające na tym, że uśrednienia dokonywane są na podstawie wartości oczekiwanej kąta tarcia wewnętrznego, która jest stała ze względu na stacjonarność pola. W konsekwencji zredukowane wartości odchyłek standardowych oraz kowariancji zmieniają się wraz z szerokością fundamentu. Ponadto zależą tylko od wartości oczekiwanej kąta ϕ_1 i nie ulegają zmianie wraz z losowymi fluktuacjami tegoż kąta.

4.3.5.1. Ława na podłożu niespoistym

Schemat zadania pokazano na rysunku 4.16, a założenia związane z obliczeniami probabilistycznymi podano w tabeli 4.8.



Rys. 4.16. Schemat ławy na podłożu niespoistym

Tabela 4.8. Charakterystyki probabilistyczne parametrów zadania

Parametr	Wartość średnia	Wspólcz. zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Ciężar objętościowy gruntu γ	18,2 kN/m ³	0,06	normalny
Kąt tarcia wewnętrznego φ	32°	0,15	lognormalny
Siła pionowa N	300 kN	0,15	lognormalny
Ciężar objętościowy betonu γ_b	24,0 kN/m ³	–	nielosowy
Ciężar objętościowy posadzki γ_p	23,0 kN/m ³	–	nielosowy

Przyjęto lognormalne pole losowe z funkcją kowariancji postaci (3.22) – w przypadku jednowymiarowym oraz (4.43) – w przypadku dwuwymiarowym. Zależności pomiędzy skalami fluktuacji oraz parametrami funkcji kowariancji są następujące (por. także (4.20)):

$$\delta_v = \omega_1 \sqrt{\pi}, \quad \delta_h = \omega_2 \sqrt{\pi}, \quad (4.74)$$

gdzie δ_v oznacza skalę fluktuacji w kierunku pionowym, zaś δ_h w kierunku poziomym. Do przykładów przyjęto (podobnie jak w poprzednich podrozdziałach w przypadku podłoża niespoistego) $\delta_v = 0,8$ m, natomiast skala w kierunku poziomym przyjmowała trzy różne wartości, mianowicie $\delta_h = 3\delta_v \sqrt{\pi}$, $\delta_h = 10\delta_v \sqrt{\pi}$ oraz $\delta_h = 30\delta_v \sqrt{\pi}$. Takie przyjęcie poziomej skali fluktuacji wiąże się z komentowanym już w podrozdziale 3.3 faktem, że w kierunku poziomym obserwuje się dużo większe wartości skali fluktuacji (wolniejsze zmiany pola) aniżeli w kierunku pionowym.

Na wstępie zbadano jak zmieniały się odchylenia kąta tarcia wewnętrznego w wyniku uśrednień w zależności od szerokości fundamentu. Wariancje uśrednionych zmiennych losowych obliczano stosując wzory (4.23), (4.30) dla uśrednień jednowymiarowych oraz (4.49), (4.55) i (4.59) dla uśrednień dwuwymiarowych. Wyniki tych obliczeń zestawiono w kolejnych tabelach 4.9, 4.10, 4.11 i 4.12.

Następnie obliczone zostały kowariancje według wzorów (4.39) i (4.41) w przypadku jednowymiarowym oraz według wzorów (4.62), (4.63) i (4.65) w przypadku dwuwymiarowym. Poniżej w kolejnych tabelach (tab. 4.13 i tab. 4.14) przedstawiono wyniki obliczeń w postaci współczynników korelacji, czyli kowariancji podzielonej przez iloczyn odchyień standardowych.

Wyniki dotyczące odchyień standardowych wskazują na istotną redukcję na wszystkich trzech rozpatrywanych odcinkach. Redukcja ta rośnie wraz ze wzrostem szerokości fundamentu, który powoduje wzrost długości poszczególnych odcinków linii poślizgu. Fakt ten jest konsekwencją ogólnych własności funkcji redukcji wariancji. Spośród trzech fragmentów linii poślizgu największą redukcję obserwuje się na odcinku CD. W przypadku jednowymiarowym decyduje o tym maksymalna różnica

Tabela 4.9. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego w zadaniu jednowymiarowym

Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe dla kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe dla kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,8	3,610	4,014	3,111
1,4	4,8	3,415	3,869	2,916
1,6	4,8	3,243	3,737	2,756
1,8	4,8	3,094	3,617	2,618
2,0	4,8	2,962	3,507	2,498
2,2	4,8	2,842	3,407	2,395
2,4	4,8	2,739	3,314	2,303
2,6	4,8	2,647	3,229	2,217
2,8	4,8	2,561	3,151	2,143
3,0	4,8	2,481	3,078	2,074
3,2	4,8	2,412	3,011	2,011
3,4	4,8	2,349	2,948	1,960
3,6	4,8	2,292	2,889	1,908
3,8	4,8	2,229	2,835	1,856

Tabela 4.10. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego w zadaniu dwuwymiarowym ($\omega_2 = 3\omega_1$)

$\omega_2 = 3\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe dla kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe dla kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,8	3,587	3,959	2,917
1,4	4,8	3,391	3,812	2,731
1,6	4,8	3,220	3,678	2,576
1,8	4,8	3,071	3,556	2,444
2,0	4,8	2,940	3,446	2,330
2,2	4,8	2,824	3,345	2,230
2,4	4,8	2,720	3,253	2,142
2,6	4,8	2,626	3,168	2,064
2,8	4,8	2,541	3,090	1,994
3,0	4,8	2,464	3,018	1,930
3,2	4,8	2,393	2,951	1,872
3,4	4,8	2,328	2,889	1,819
3,6	4,8	2,268	2,831	1,770
3,8	4,8	2,213	2,777	1,725

Tabela 4.11. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego w zadaniu dwuwymiarowym dla przypadku $\omega_2 = 30\omega_1$

$\omega_2 = 10\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe dla kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe dla kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,8	3,605	4,003	3,089
1,4	4,8	3,410	3,858	2,898
1,6	4,8	3,240	3,726	2,736
1,8	4,8	3,090	3,606	2,599
2,0	4,8	2,959	3,496	2,480
2,2	4,8	2,842	3,396	2,376
2,4	4,8	2,738	3,303	2,283
2,6	4,8	2,644	3,218	2,201
2,8	4,8	2,558	3,140	2,127
3,0	4,8	2,481	3,067	2,059
3,2	4,8	2,410	3,000	1,998
3,4	4,8	2,345	2,938	1,942
3,6	4,8	2,284	2,879	1,890
3,8	4,8	2,228	2,824	1,843

Tabela 4.12. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego w zadaniu gdy $\omega_2 = 10\omega_1$

$\omega_2 = 30\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe dla kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe dla kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,8	3,607	4,007	3,107
1,4	4,8	3,412	3,862	2,915
1,6	4,8	3,241	3,730	2,753
1,8	4,8	3,092	3,610	2,615
2,0	4,8	2,960	3,501	2,496
2,2	4,8	2,844	3,400	2,391
2,4	4,8	2,739	3,308	2,298
2,6	4,8	2,645	3,223	2,215
2,8	4,8	2,560	3,145	2,141
3,0	4,8	2,482	3,072	2,073
3,2	4,8	2,411	3,005	2,012
3,4	4,8	2,346	2,942	1,956
3,6	4,8	2,286	2,884	1,903
3,8	4,8	2,230	2,829	1,855

Tabela 4.13. Współczynniki korelacji w zadaniu jednowymiarowym i dwuwymiarowym ($\omega_2 = 3\omega_1$)

Szerokość fundamentu b [m]	Współczynnik korelacji kąta φ [°]					
	Przypadek jednowymiarowy			Przypadek dwuwymiarowy $\omega_2 = 3\omega_1$		
	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$
1,2	5,534 E-02	0,365	0,896	4,779 E-02	4,308 E-05	3,747 E-05
1,4	4,133 E-02	0,337	0,887	3,585 E-02	2,836 E-06	1,431 E-06
1,6	3,289 E-02	0,314	0,878	2,784 E-02	1,300 E-07	3,664 E-08
1,8	2,738 E-02	0,296	0,871	2,205 E-02	4,117 E-09	6,244 E-10
2,0	2,351 E-02	0,282	0,866	1,766 E-02	8,979 E-11	7,029 E-12
2,2	2,070 E-02	0,269	0,862	1,423 E-02	1,347 E-12	5,202 E-14
2,4	1,843 E-02	0,259	0,857	1,150 E-02	1,387 E-14	2,520 E-16
2,6	1,659 E-02	0,251	0,855	9,293 E-03	9,814 E-17	7,966 E-19
2,8	1,509 E-02	0,243	0,852	7,960 E-03	4,767 E-19	1,640 E-21
3,0	1,384 E-02	0,238	0,851	6,026 E-03	1,590 E-21	2,194 E-24
3,2	1,276 E-02	0,232	0,849	4,824 E-03	3,640 E-24	1,904 E-27
3,4	1,182 E-02	0,227	0,845	3,841 E-03	5,721 E-27	1,071 E-30
3,6	1,100 E-02	0,224	0,842	3,041 E-03	6,175 E-30	3,897 E-34
3,8	1,033 E-02	0,221	0,844	2,391 E-03	4,578 E-33	9,172 E-38

Tabela 4.14. Współczynniki korelacji w zadaniu dwuwymiarowym ($\omega_2 = 10\omega_1$, $\omega_2 = 30\omega_1$)

Szerokość fundamentu b [m]	Współczynnik korelacji kąta φ [°]					
	Przypadek dwuwymiarowy $\omega_2 = 10\omega_1$			Przypadek dwuwymiarowy $\omega_2 = 30\omega_1$		
	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$
1,2	5,381 E-02	0,113	0,275	5,536 E-02	0,317	0,785
1,4	4,033 E-02	7,483 E-02	0,176	4,131 E-02	0,279	0,737
1,6	3,225 E-02	4,898 E-02	0,106	3,296 E-02	0,247	0,689
1,8	2,687 E-02	3,147 E-02	0,061	2,748 E-02	0,220	0,640
2,0	2,299 E-02	1,976 E-02	0,033	2,359 E-02	0,196	0,590
2,2	2,003 E-02	1,207 E-02	0,017	2,068 E-02	0,175	0,541
2,4	1,769 E-02	7,139 E-03	7,988 E-03	1,839 E-02	0,157	0,493
2,6	1,579 E-02	4,080 E-03	3,665 E-03	1,655 E-02	0,141	0,446
2,8	1,420 E-02	2,249 E-03	1,600 E-03	1,504 E-02	0,126	0,401
3,0	1,286 E-02	1,194 E-03	6,657 E-04	1,376 E-02	0,113	0,357
3,2	1,171 E-02	6,104 E-04	2,641 E-04	1,268 E-02	0,101	0,316
3,4	1,071 E-02	3,002 E-04	9,997 E-05	1,174 E-02	0,090	0,277
3,6	9,835 E-03	1,420 E-04	3,610 E-05	1,092 E-02	0,080	0,242
3,8	9,061 E-03	6,466 E-05	1,244 E-05	1,021 E-02	0,071	0,210

rzędnych (współrzędnych pionowych) pomiędzy punktami danego fragmentu linii. W rozpatrywanym tu zadaniu maksymalne rzędne wynoszą przykładowo:

Dla $b = 1,2$ m; odcinek AB $z_{\max} = 1,082$ m (w punkcie B); odcinek BC $z_{\max} = 2,036$ m; odcinek CD $z_{\max} = 1,601$ m (w punkcie C).

Dla $b = 3,8$ m; odcinek AB $z_{\max} = 3,428$ m (w punkcie B); odcinek BC $z_{\max} = 6,446$ m; odcinek CD $z_{\max} = 5,07$ m (w punkcie C).

Daje to następujące maksymalne różnice w rzędnych:

Dla $b = 1,2$ m; odcinek AB: 1,082 m; odcinek BC: 0,954 m; odcinek CD: 1,601 m.

Dla $b = 3,8$ m; odcinek AB: 3,482 m; odcinek BC: 2,964 m; odcinek CD: 5,07 m.

Te wyniki tłumaczą fakt, że największa redukcja występuje na odcinku CD, następnie na AB, najmniejsza zaś na łuku BC.

W przypadku dwuwymiarowym opisana wyżej tendencja redukcji wariancji zostaje zachowana, co wynika z faktu, że poziome skale fluktuacji są istotnie większe od pionowych.

Generalnie jednak różnice pomiędzy zredukowanymi odchyleniami standardowymi, przy ustalonej szerokości fundamentu, występujące kolejno w tabelach 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 są niewielkie. Co więcej, wartości w tabeli 4.12 są już prawie identyczne jak w tablicy 4.9. Jak wskazano w podrozdziale 4.3.3, dla odcinków prostoliniowych wariancje w przypadku dwuwymiarowym są zbieżne do odpowiednich wariancji z przypadku jednowymiarowego, gdy parametr ω_2 rośnie do nieskończoności (wzory (4.50) i (4.57)). Są to więc rezultaty zgodne z oczekiwaniami. Ponadto widoczna jest też zbieżność wariancji na krzywoliniowym segmencie spirali logarytmicznej BC. Widać też, że szybkość zbieżności jest duża.

Przechodząc do współczynników korelacji należy od razu odnotować, że w przypadku stosunkowo niedużej poziomej skali fluktuacji ($\omega_2 = 3\omega_1$) korelacje pomiędzy uśrednionymi zmiennymi są niewielkie (wręcz pomijalne). Jest to konsekwencja szybkiego spadku korelacji ze wzrostem odległości pomiędzy środkami ciężkości poszczególnych fragmentów linii poślizgu. Natomiast w przypadku jednowymiarowym, a także dwuwymiarowym przy dużej wartości parametru ω_2 , warto zwrócić uwagę na znaczne wartości współczynników korelacji pomiędzy kątami tarcia na odcinkach AB i CD. Współczynniki te są istotnie większe od pozostałych, zwłaszcza od współczynników na odcinkach AB i BC. Ten na pozór paradoksalny rezultat staje się jasny, gdy zdamy sobie sprawę, że w przypadku jednowymiarowym o korelacji decyduje nie tyle ich wzajemna odległość, ile wzajemne położenie rzędnych. Łatwo zauważyć (por. rys. 4.15, a także podane wyżej wartości rzędnych), że rzędne środków ciężkości odcinków AB oraz CD są do siebie najbardziej zbliżone i stąd ich mocne skorelowanie. Dla niewielkich wartości parametru ω_2 ($\omega_2 = 3\omega_1$ w tabeli 4.13) współczynniki korelacji kątów na odcinkach AB i CD są mniejsze od pozostałych. Sytuacja zmienia się wraz ze wzrostem wartości ω_2 , gdyż podobnie jak w przypadku wariancji także i tu obserwuje się zbieżność do przypadku jednowymiarowego. Dlatego dla $\omega_2 = 30\omega_1$ tendencja jest już taka sama jak w przypadku jednowymiarowym. Widać też, że zbieżność nie jest już tak szybka jak dla odchyłeń standardowych, przy czym najszybciej zbiegają współczynniki korelacji pomiędzy kątami na odcinkach AB i BC, w dalszej kolejności na odcinkach BC i CD, a najwolniej na odcinkach AB i CD. Ponadto zbieżność jest tym szybsza, im mniejsza szerokość fundamentu b .

Po wstępnej części obliczeń dotyczącej wartości zredukowanych odchyłeń standardowych i współczynników korelacji wykonano serie obliczeń wskaźników niezawodności. Obliczenia wykonano metodą SORM z korektą wynikającą z symulacji

kierunkowej (por. rozdział 2). W tym celu skorzystano z systemu komputerowego COMREL (por. STRUREL (1997)). W obliczeniach przyjęto wcześniej obliczone zredukowane odchylenia standardowe i współczynniki korelacji.

Najpierw wykonane zostały obliczenia w przypadku jednowymiarowym dla czterech różnych opcji charakterystyki kąta tarcia wewnętrznego:

- kąt tarcia wewnętrznego jako pojedyncza zmienna losowa w całym obszarze pod fundamentem, bez dokonania uśrednienia przestrzennego;
- trzy niezależne zmienne losowe, przyporządkowane kolejno każdej linii poślizgu, bez uśrednienia przestrzennego;
- trzy niezależne zmienne losowe, przyporządkowane kolejno każdej linii poślizgu, z uśrednieniem przestrzennym i wynikającymi z niego redukcjami wariancji według wzorów uzyskanych w podrozdziale 4.3.2;
- trzy skorelowane zmienne losowe, przyporządkowane kolejno każdej linii poślizgu, z uśrednieniem przestrzennym i wynikającymi z niego redukcjami wariancji oraz kowariancjami według wzorów uzyskanych w podrozdziale 4.3.2.

Wyniki tych obliczeń zamieszczono w tabeli 4.15 oraz przedstawiono w postaci wykresów na rysunku 4.17.

Tabela 4.15. Wartości wskaźników niezawodności. Podłoże niespoiste. Przypadek jednowymiarowy.

β_5 – jedna zmienna losowa – kąt tarcia wewnętrznego, bez uśrednienia;

β_6 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ bez uśrednienia;

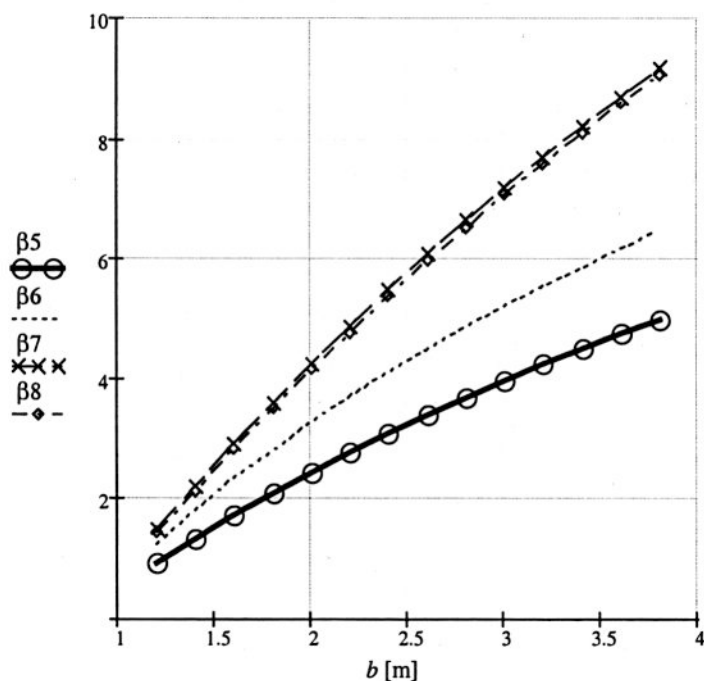
β_7 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ z uśrednieniem lokalnym $\delta_v = 0,8$;

β_8 – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ z uśrednieniem lokalnym $\delta_v = 0,8$

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_5	β_6	β_7	β_8
1,2	0,91	1,25	1,49	1,43
1,4	1,33	1,81	2,21	2,13
1,6	1,72	2,33	2,91	2,83
1,8	2,09	2,81	3,59	3,50
2,0	2,44	3,27	4,25	4,15
2,2	2,77	3,70	4,88	4,77
2,4	3,09	4,10	5,49	5,38
2,6	3,40	4,49	6,08	5,97
2,8	3,69	4,86	6,65	6,53
3,0	3,97	5,21	7,19	7,08
3,2	4,24	5,55	7,72	7,61
3,4	4,50	5,88	8,23	8,12
3,6	4,75	6,19	8,72	8,61
3,8	5,00	6,49	9,20	9,09

Uzyskane wyniki pokazują, że zastosowanie uśrednień bardzo istotnie podnosi wartości wskaźników. Wzrostu wskaźnika niezawodności można było już oczekiwać po obserwacji zredukowanych odchyżeń standardowych (tabela 4.13). Jest tym więk-

szy, im większa jest szerokość fundamentu. Niemniej już samo założenie trzech różnych zmiennych charakteryzujących kąt tarcia na trzech poszczególnych odcinkach linii poślizgu zwiększa ich wartości (wskaźnik β_6). Widać zatem, że charakteryzowanie kąta tarcia wewnętrznego podłoża poprzez pojedynczą zmienną losową jest zbyt dalekim uproszczeniem. Natomiast porównanie wskaźnika β_7 ze wskaźnikiem β_8 wskazuje, że efekt korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 , φ_2 , φ_3 jest niewielki, mimo istnienia silnej korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 , oraz φ_3 (tabela 4.14 – kolumna 4). Tę sytuację można tłumaczyć faktem, że decydujący wpływ na wskaźnik niezawodności ma losowy charakter kąta φ_1 , zaś efekt losowości kąta φ_3 jest znacznie mniejszy.



Rys. 4.17. Wpływ lokalnego uśrednienia na wskaźnik niezawodności w gruncie niespoistym.
Oznaczenia poszczególnych wskaźników jak w tabeli 4.16

Drugi etap obliczeń wskaźników niezawodności miał na celu zbadanie efektu zastąpienia uśrednień jednowymiarowych przez bardziej adekwatne uśrednienia dwuwymiarowe. W tabeli 4.16 podano wskaźniki niezawodności uzyskane przy pominięciu korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 , φ_2 , φ_3 , natomiast w tabeli 4.17 – z uwzględnieniem korelacji. Zastosowano wcześniej obliczone zredukowane odchylenia standardowe i współczynniki korelacji. Na rysunkach 4.18 (a i b) wskaźniki niezawodności przedstawiono jako funkcje szerokości fundamentu. Wyniki, tak jak wcześniej w przypadku obliczeń zredukowanych odchylenia standardowych i kowariancji, dotyczą trzech różnych

wartości skali fluktuacji poziomej $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$ oraz $\omega_2 = 30\omega_1$. Dodatkowo, aby ułatwić porównanie rezultatów, w obu tabelach i na obu rysunkach zamieszczono wyniki obliczeń w przypadku jednowymiarowym.

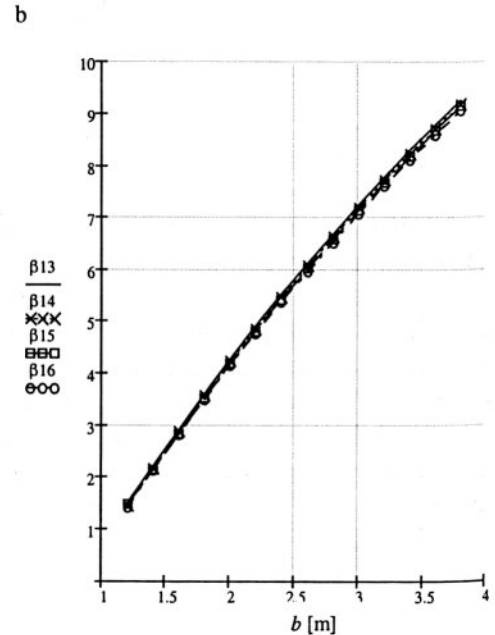
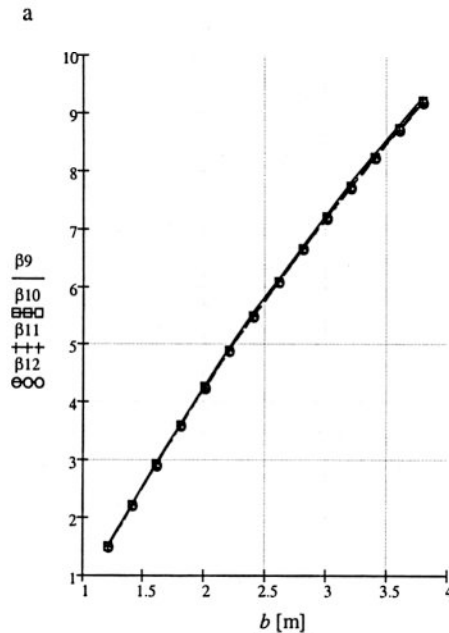
Tabela 4.16. Wskaźnik niezawodności. β_9 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 3\omega_1$); β_{10} – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 10\omega_1$); β_{11} – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 30\omega_1$); β_{12} – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne jednowymiarowe ($\beta_{12} = \beta_7$). We wszystkich przypadkach przyjmowano $\delta_v = 0,8$

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}
1,2	1,50	1,50	1,49	1,49
1,4	2,24	2,22	2,22	2,21
1,6	2,95	2,92	2,92	2,91
1,8	3,63	3,60	3,60	3,59
2,0	4,29	4,26	4,25	4,25
2,2	4,93	4,89	4,88	4,88
2,4	5,55	5,50	5,49	5,49
2,6	6,14	6,09	6,08	6,08
2,8	6,71	6,66	6,65	6,65
3,0	7,26	7,21	7,20	7,19
3,2	7,80	7,74	7,73	7,72
3,4	8,31	8,25	8,24	8,23
3,6	8,81	8,74	8,73	8,72
3,8	9,29	9,22	9,21	9,20

Jak łatwo zauważyć, wartości wskaźników niezawodności przy uśrednieniu dwuwymiarowym bardzo niewiele odbiegają od tych z uśrednienia jednowymiarowego. Zwłaszcza w przypadku pominięcia korelacji są one niemal identyczne, nawet dla stosunkowo niewielkiej poziomej skali fluktuacji ($\omega_2 = 3\omega_1$), przy czym różnice wzrastają nieco ze wzrostem szerokości fundamentu. Wyniki te nie są zaskakujące w zestawieniu z wcześniej obliczonymi zredukowanymi odchyleniami standardowymi (tabele 4.9–4.12), gdyż odchylenia te w niewielkim stopniu odbiegały od przypadku jednowymiarowego dla wszystkich trzech wartości poziomej skali fluktuacji. To właśnie rzutuje na uzyskanie bardzo zbliżonych wartości prawdopodobieństw awarii. Na wykresie 4.18a wszystkie krzywe niemal się pokrywają. W przypadku uwzględnienia korelacji pomiędzy zmiennymi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ różnice są nieco większe, ale w przypadku $\omega_2 = 30\omega_1$ wartości wskaźników bardzo zbliżają się do przypadku jednowymiarowego. Potwierdza to stosunkowo szybką zbieżność wskaźników (prawdopodobieństw awarii) uzyskanych w zadaniu dwuwymiarowym do wartości wskaźników z zadania jednowymiarowego, wraz ze wzrostem wartości poziomej skali fluktuacji.

Tabela 4.17. Wskaźnik niezawodności. β_{13} – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 3\omega_1$); β_{14} – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 10\omega_1$); β_{15} – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 30\omega_1$); β_{16} – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne jednowymiarowe ($\beta_{16} = \beta_8$). We wszystkich przypadkach przyjmowano $\delta_v = 0,8$

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}
1,2	1,49	1,46	1,44	1,43
1,4	2,22	2,18	2,15	2,13
1,6	2,92	2,89	2,84	2,83
1,8	3,61	3,57	3,52	3,50
2,0	4,27	4,23	4,18	4,15
2,2	4,91	4,86	4,81	4,77
2,4	5,53	5,47	5,42	5,38
2,6	6,13	6,07	6,02	5,97
2,8	6,70	6,64	6,59	6,53
3,0	7,26	7,19	7,14	7,08
3,2	7,79	7,72	7,68	7,61
3,4	8,30	8,23	8,19	8,12
3,6	8,80	8,72	8,69	8,61
3,8	9,28	9,20	9,17	9,09



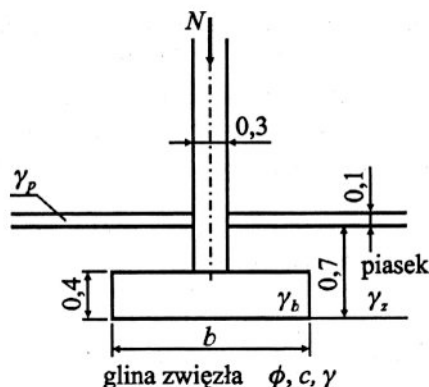
Rys. 4. 18. Wykresy wskaźników niezawodności z uwzględnieniem lokalnego uśrednienia w gruncie niespoistym, gdy a – zmienne niezależne, b – zmienne skorelowane.

Oznaczenia wskaźników – jak w tabelach 4.16 i 4.17

Bezpośrednie porównanie przypadku bez korelacji z przypadkiem uwzględniającym tę korelację (tabele 4.16 i 4.17 oraz rysunek 4.18) pokazuje, że wpływ korelacji pomiędzy zmiennymi ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 na wartości wskaźników niezawodności jest niewielki. Podobnie jak w zadaniu jednowymiarowym przy uwzględnieniu korelacji uzyskuje się nieco mniejszą wartość wskaźnika niezawodności. Pomimo dużych różnic pomiędzy współczynnikami korelacji dla poszczególnych przypadków: $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$ oraz $\omega_2 = 30\omega_1$, różnice pomiędzy odpowiadającymi im wskaźnikami niezawodności (przy ustalonej szerokości fundamentu b) są nieomal pomijalne. Zbieżność wyników do rezultatów z przypadku jednowymiarowego jest w przypadku uwzględnienia korelacji nieco wolniejsza niż w przypadku zmiennych niezależnych.

4.3.5.2. Ława na podłożu spoistym

Schemat zadania podano na rysunku 4.19, a założenia związane z obliczeniami probabilistycznymi zamieszczono w tabeli 4.18.



Rys. 4.19. Schemat ławy na podłożu spoistym

Tabela 4.18. Charakterystyki probabilistyczne zadania (grunt spoisty)

Parametr	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Rozkład
Kąt tarcia wewnętrznego ϕ	18°	2,7°	lognormalny
Spójność c	31 kN/m ²	4,65 kN/m ²	lognormalny
Ciężar objętościowy γ	19,0 kN/m ³	1,9 kN/m ³	normalny
Siła osiowa N	500 kN/m	50 kN/m	lognormalny
Ciężar zasypki γ_z	18,2 N/m ³	1,092 kN/m ³	normalny
Ciężar betonu γ_b	24,0 kN/m ³	–	nielosowy
Ciężar posadzki γ_p	23,0 kN/m ³	–	nielosowy

W tym zadaniu rozpatruje się dwa stacjonarne wzajemnie nieskorelowane, lognormalne pola losowe parametrów wytrzymałościowych podłoża – pole kąta tarcia wewnętrznego oraz pole spójności. Oba pola charakteryzuje funkcja kowariancji po-

staci (3.22) w przypadku jednowymiarowym oraz (4.43) – w przypadku dwuwymiarowym. Zależności pomiędzy skalami fluktuacji a parametrami funkcji kowariancji są, jak poprzednio, dane wzorem (4.74). W tym jednak przypadku, na podstawie danych z literatury (por. podrozdział 3.3) przyjęto, dla obu pól jednakową, reprezentatywną dla gruntów spoistych skalę fluktuacji $\delta_v = 1,0$ m. Identycznie jak w poprzednim podrozdziale założono, że skala w kierunku poziomym przyjmuje trzy różne wartości zależne od skali w kierunku pionowym, mianowicie $\delta_h = 3\delta_v\sqrt{\pi}$, $\delta_h = 10\delta_v\sqrt{\pi}$ oraz $\delta_h = 30\delta_v\sqrt{\pi}$. Obliczenia realizowano według takiego samego harmonogramu jak w poprzednim podrozdziale. Wyniki obliczeń zredukowanych wartości kąta tarcia wewnętrznego i spójności zamieszczono w tabelach 4.19–4.26.

Przedstawione w tych tabelach wyniki wskazują, że prawidłowości (trendy) redukcji odchyłeń standardowych są jednakowe zarówno dla kąta tarcia wewnętrznego jak i dla spójności. Wynika to z faktu, że zredukowaną wariancję otrzymuje się poprzez pomnożenie wariancji punktowej przez funkcje redukcji wariancji (wzór (3.38)). Jeśli więc skale fluktuacji dla obu parametrów są jednakowe, to funkcja redukcji wariancji jest dla obu pól jednakowa. Tak więc wnioski dotyczące uzyskanych redukcji są dla obu parametrów φ oraz c jednakowe. Wnioski te zresztą pokrywają się z uzyskanymi w podrozdziale 4.3.5.1 dla gruntu niespoistego i można je streścić następująco:

- Redukcja rośnie wraz ze wzrostem szerokości fundamentu.

Tabela 4.19. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia φ w przypadku jednowymiarowym

Przypadek jednowymiarowy				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	2,7	2,343	2,573	2,235
1,4	2,7	2,257	2,534	2,131
1,6	2,7	2,172	2,493	2,040
1,8	2,7	2,091	2,450	1,960
2,0	2,7	2,017	2,407	1,879
2,2	2,7	1,948	2,364	1,811
2,4	2,7	1,891	2,321	1,753
2,6	2,7	1,828	2,279	1,696
2,8	2,7	1,776	2,238	1,644
3,0	2,7	1,730	2,199	1,599
3,2	2,7	1,684	2,161	1,553
3,4	2,7	1,639	2,125	1,546
3,6	2,7	1,610	2,090	1,473
3,8	2,7	1,564	2,056	1,438

Tabela 4.20. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia φ
w przypadku dwuwymiarowym ($\omega_2 = 3\omega_1$)

$\omega_2 = 3\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	2,7	2,327	2,470	2,171
1,4	2,7	2,237	2,406	2,067
1,6	2,7	2,152	2,342	1,973
1,8	2,7	2,072	2,277	1,889
2,0	2,7	1,998	2,214	1,813
2,2	2,7	1,930	2,154	1,745
2,4	2,7	1,867	2,095	1,684
2,6	2,7	1,810	2,040	1,628
2,8	2,7	1,757	1,986	1,578
3,0	2,7	1,708	1,935	1,531
3,2	2,7	1,663	1,887	1,489
3,4	2,7	1,621	1,841	1,450
3,6	2,7	1,582	1,797	1,413
3,8	2,7	1,546	1,755	1,379

Tabela 4.21. Zredukowane odchylenia standardowe tarcia φ
w przypadku dwuwymiarowym ($\omega_2 = 10\omega_1$)

$\omega_2 = 10\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe dla kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	2,7	2,341	2,564	2,226
1,4	2,7	2,253	2,522	2,126
1,6	2,7	2,169	2,478	2,034
1,8	2,7	2,090	2,432	1,950
2,0	2,7	2,016	2,386	1,875
2,2	2,7	1,948	2,340	1,806
2,4	2,7	1,886	2,294	1,744
2,6	2,7	1,828	2,250	1,688
2,8	2,7	1,775	2,207	1,637
3,0	2,7	1,726	2,165	1,589
3,2	2,7	1,681	2,125	1,546
3,4	2,7	1,639	2,086	1,506
3,6	2,7	1,600	2,049	1,468
3,8	2,7	1,563	2,013	1,433

Tabela 4.22. Zredukowane odchylenia standardowe tarcia φ
w przypadku dwuwymiarowym ($\omega_2 = 30\omega_1$)

$\omega_2 = 30\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe kąta φ [°]	Zredukowane odchylenie standardowe kąta φ [°]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	2,7	2,342	2,573	2,232
1,4	2,7	2,254	2,533	2,132
1,6	2,7	2,170	2,492	2,040
1,8	2,7	2,091	2,449	1,956
2,0	2,7	2,018	2,405	1,881
2,2	2,7	1,950	2,361	1,812
2,4	2,7	1,887	2,318	1,750
2,6	2,7	1,830	2,276	1,694
2,8	2,7	1,777	2,235	1,642
3,0	2,7	1,723	2,195	1,595
3,2	2,7	1,683	2,157	1,551
3,4	2,7	1,640	2,121	1,511
3,6	2,7	1,601	2,085	1,474
3,8	2,7	1,564	2,052	1,439

Tabela 4.23. Zredukowane odchylenia standardowe spójności c
w przypadku jednowymiarowym

Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe spójności c [kPa]	Zredukowane odchylenie standardowe spójności c [kPa]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,65	4,033	4,431	3,844
1,4	4,65	3,883	4,364	3,673
1,6	4,65	3,738	4,293	3,515
1,8	4,65	3,602	4,220	3,371
2,0	4,65	3,476	4,145	3,241
2,2	4,65	3,359	4,071	3,123
2,4	4,65	3,251	3,997	3,016
2,6	4,65	3,152	3,925	2,919
2,8	4,65	3,061	3,855	2,830
3,0	4,65	2,977	3,787	2,748
3,2	4,65	2,898	3,722	2,673
3,4	4,65	2,826	3,659	2,662
3,6	4,65	2,773	3,599	2,539
3,8	4,65	2,695	3,541	2,479

Tabela 4.24. Zredukowane odchylenia standardowe spójności c
w zadaniu dwuwymiarowym gdy $\omega_2 = 3\omega_1$

$\omega_2 = 3\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe spójności c [kPa]	Zredukowane odchylenie standardowe spójności c [kPa]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,65	4,007	4,254	3,740
1,4	4,65	3,853	4,144	3,560
1,6	4,65	3,706	4,033	3,398
1,8	4,65	3,568	3,922	3,253
2,0	4,65	3,440	3,814	3,123
2,2	4,65	3,323	3,709	3,006
2,4	4,65	3,216	3,609	2,900
2,6	4,65	3,117	3,513	2,804
2,8	4,65	3,026	3,421	2,717
3,0	4,65	2,942	3,333	2,637
3,2	4,65	2,864	3,250	2,564
3,4	4,65	2,792	3,170	2,496
3,6	4,65	2,724	3,095	2,435
3,8	4,65	2,662	3,023	2,376

Tabela 4.25. Zredukowane odchylenia standardowe spójności c
w zadaniu dwuwymiarowym gdy $\omega_2 = 10\omega_1$

$\omega_2 = 10\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe spójności c [kPa]	Zredukowane odchylenie standardowe spójności c [kPa]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,65	4,031	4,415	3,834
1,4	4,65	3,880	4,343	3,662
1,6	4,65	3,735	4,267	3,503
1,8	4,65	3,599	4,188	3,359
2,0	4,65	3,472	4,109	3,229
2,2	4,65	3,355	4,030	3,111
2,4	4,65	3,248	3,951	3,004
2,6	4,65	3,149	3,875	2,907
2,8	4,65	3,057	3,800	2,819
3,0	4,65	2,973	3,729	2,737
3,2	4,65	2,895	3,659	2,662
3,4	4,65	2,822	3,592	2,593
3,6	4,65	2,755	3,528	2,529
3,8	4,65	2,692	3,467	2,469

Tabela 4.26. Zredukowane odchylenia standardowe spójności c w zadaniu dwuwymiarowym gdy $\omega_2 = 30\omega_1$

$\omega_2 = 30\omega_1$				
Szerokość fundamentu b [m]	Odchylenie standardowe spójności c [kPa]	Zredukowane odchylenie standardowe spójności c [kPa]		
		Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	4,65	4,033	4,431	3,843
1,4	4,65	3,882	4,363	3,672
1,6	4,65	3,738	4,292	3,513
1,8	4,65	3,601	4,217	3,369
2,0	4,65	3,475	4,142	3,239
2,2	4,65	3,358	4,067	3,121
2,4	4,65	3,250	3,993	3,015
2,6	4,65	3,151	3,920	2,917
2,8	4,65	3,060	3,849	2,828
3,0	4,65	2,976	3,781	2,746
3,2	4,65	2,898	3,715	2,672
3,4	4,65	2,825	3,652	2,602
3,6	4,65	2,758	3,591	2,538
3,8	4,65	2,694	3,533	2,478

- W przypadku jednowymiarowym decydująca o wielkości redukcji jest różnica rzędnych pionowych.

- Ze wzrostem wartości poziomej skali fluktuacji obserwuje się szybką zbieżność zredukowanych odchyłeń standardowych do odchyłeń uzyskanych w przypadku jednowymiarowym. Już dla parametru $\omega_2 = 10\omega_1$ wyniki uzyskane z zadania jednowymiarowego i zadania dwuwymiarowego są do siebie bardzo zbliżone. Niewielkie różnice obserwuje się jedynie na odcinku BC.

- Należy odnotować, że w przypadku gruntu spoistego redukcje odchyłeń standardowych są mniejsze (procentowo w stosunku do wartości początkowej) niż w przypadku gruntu niespoistego. Wynika to z faktu, że funkcja wariancji w rozpatrywanych zadaniach zależy od średniej wartości kąta tarcia wewnętrznego, która determinuje geometrię krzywych poślizgu.

W kolejnych tabelach, 4.27 i 4.28, zamieszczono wyniki obliczeń współczynników korelacji między zmiennymi φ_{AB} , φ_{BC} i φ_{CD} oraz c_{AB} , c_{BC} i c_{CD} , powstałymi w wyniku zastosowania uśrednienia, przy czym ograniczono się jedynie do zamieszczenia tabel dla kątów tarcia wewnętrznego, gdyż odpowiednie współczynniki korelacji dla spójności są takie same, co wynika z zastosowania jednakowej skali fluktuacji dla pola spójności oraz pola kąta tarcia wewnętrznego. Ze wzorów na kowariancje podanych w podrozdziałach 4.3.2 i 4.3.3 oraz definicji współczynnika korelacji wynika od razu, że punktowe wariancje poszczególnych zmiennych redukują się i w ten sposób współczynniki korelacji pomiędzy parametrami dwóch określonych odcinków linii poślizgu

zależą jedynie od wartości skali fluktuacji, wartości oczekiwanej kąta tarcia wewnętrzznego φ_1 oraz szerokości fundamentu, które to parametry są w przypadku rozpatrywanych tu dwóch pól losowych jednakowe.

Tabela 4.27. Współczynniki korelacji w zadaniu jedno i dwuwymiarowym ($\omega_2 = 3\omega_1$)

Szerokość fundamentu b [m]	Współczynniki korelacji kąta φ [°]					
	Przypadek jednowymiarowy			Przypadek dwuwymiarowy $\omega_2 = 3\omega_1$		
	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$
1,2	0,288	0,419	0,984	0,250	0,064	0,1512
1,4	0,220	0,358	0,981	0,184	0,037	7,790 E-02
1,6	0,171	0,310	0,979	0,138	0,021	3,679 E-02
1,8	0,135	0,273	0,975	0,105	0,012	1,590 E-02
2,0	0,109	0,244	0,975	0,082	7,156 E-03	6,312 E-03
2,2	0,089	0,220	0,974	0,065	4,038 E-03	2,306 E-03
2,4	0,074	0,200	0,966	0,052	2,224 E-03	7,772 E-04
2,6	0,063	0,183	0,967	0,042	1,191 E-03	2,421 E-04
2,8	0,054	0,170	0,964	0,035	6,189 E-04	6,986 E-05
3,0	0,047	0,158	0,959	0,029	3,113 E-04	1,868 E-05
3,2	0,041	0,149	0,959	0,025	1,513 E-04	4,635 E-06
3,4	0,037	0,138	0,938	0,021	7,102 E-05	1,067 E-06
3,6	0,033	0,134	0,952	0,018	3,215 E-05	2,280 E-07
3,8	0,030	0,128	0,956	0,015	1,403 E-05	4,518 E-08

Tabela 4.28. Współczynniki korelacji w zadaniu dwuwymiarowym ($\omega_2 = 10\omega_1$, $\omega_2 = 30\omega_1$)

Szerokość fundamentu b [m]	Współczynniki korelacji kąta φ [°]					
	Przypadek dwuwymiarowy $\omega_2 = 10\omega_1$			Przypadek dwuwymiarowy $\omega_2 = 30\omega_1$		
	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$
1,2	0,284	0,336	0,821	0,288	0,409	0,965
1,4	0,216	0,270	0,766	0,220	0,346	0,955
1,6	0,167	0,219	0,706	0,170	0,298	0,944
1,8	0,131	0,179	0,645	0,135	0,260	0,932
2,0	0,104	0,149	0,583	0,108	0,229	0,919
2,2	0,085	0,124	0,521	0,088	0,205	0,906
2,4	0,070	0,105	0,462	0,074	0,184	0,891
2,6	0,059	0,090	0,405	0,062	0,167	0,876
2,8	0,050	0,077	0,351	0,053	0,153	0,860
3,0	0,044	0,067	0,301	0,047	0,141	0,844
3,2	0,038	0,058	0,256	0,041	0,131	0,827
3,4	0,034	0,051	0,216	0,037	0,122	0,809
3,6	0,030	0,045	0,180	0,033	0,115	0,791
3,8	0,028	0,040	0,149	0,029	0,108	0,773

Obliczone tu współczynniki korelacji są większe aniżeli w przypadku podłoża niespoistego. Wynika to przede wszystkim z przyjęcia większych wartości skali fluktuacji w ośrodku spoistym. Generalne tendencje zmian są jednak identyczne jak dla fundamentu posadowionego na gruncie niespoistym. W przypadku stosunkowo niedużej poziomej skali fluktuacji ($\omega_2 = 3\omega_1$) korelacje pomiędzy uśrednionymi zmiennymi są nadal niewielkie, aczkolwiek istotnie większe niż w ośrodku niespoistym. Podobnie jak w podłożu niespoistym (i z tej samej przyczyny) obserwuje się efekt bardzo silnej korelacji pomiędzy uśrednionymi kątami tarcia na odcinkach AB i CD w przypadku jednowymiarowym. Taka sama (jak w gruncie niespoistym) jest też tendencja zmian tej korelacji wraz ze zmianami skali fluktuacji w kierunku poziomym. Szybkość zbieżności wartości współczynników korelacji do współczynników z zadania jednowymiarowego, przy wzrastającej wartości poziomej skali fluktuacji, jest większa niż w przykładzie rozpatrywanym w poprzednim podrozdziale, przy czym najszybciej zbiegają współczynniki korelacji pomiędzy kątami na odcinkach AB i BC, w dalszej kolejności na odcinkach BC i CD, a najwolniej na odcinkach AB i CD. Zbieżność jest tym szybsza, im mniejsza szerokość fundamentu b .

Kolejnym etapem było wyznaczenie metodą SORM miar niezawodności w postaci prawdopodobieństw awarii oraz odpowiadających im w sposób wzajemnie jednoznaczny wskaźników niezawodności. Dla większej przejrzystości, podobnie jak w poprzednim podrozdziale, poniżej podane są jedynie wskaźniki niezawodności.

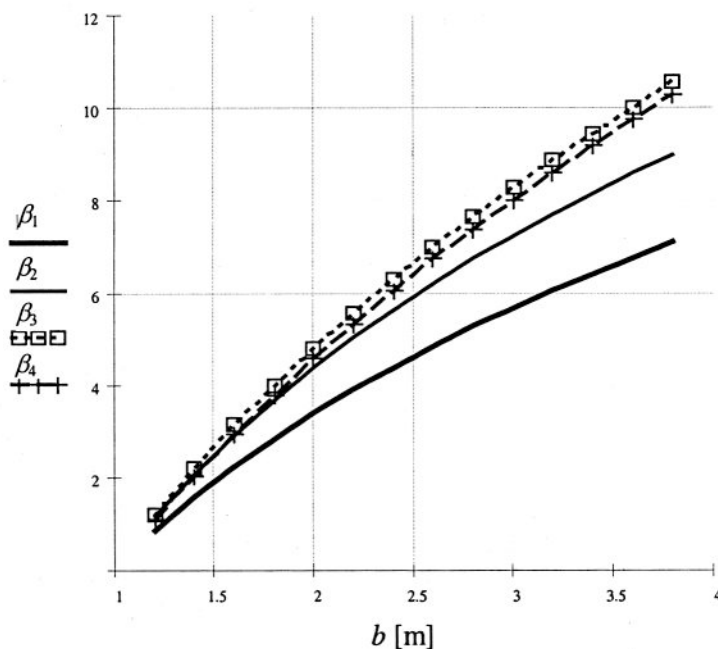
W przypadku jednowymiarowym przeprowadzono obliczenia dla czterech różnych charakterystyk parametrów wytrzymałościowych podłoża:

- dwie niezależne zmienne losowe – kąt tarcia wewnętrznego i spójność, opisujące zmienność losową parametrów wytrzymałościowych w całym obszarze pod fundamentem, bez zastosowania uśrednienia przestrzennego (wskaźnik niezawodności β_1);
- sześć niezależnych zmiennych losowych $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przyporządkowanych parami poszczególnym odcinkom linii poślizgu, odpowiednio AB, BC i CD, bez zastosowania uśrednienia przestrzennego (wskaźnik niezawodności β_2);
- sześć niezależnych zmiennych losowych $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przyporządkowanych parami poszczególnym odcinkom linii poślizgu, odpowiednio AB, BC i CD, z zastosowaniem uśrednienia przestrzennego z pionową skalą fluktuacji $\delta_v = 1,0$ m (wskaźnik niezawodności β_3);
- sześć skorelowanych zmiennych losowych $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przyporządkowanych jak wyżej, z zastosowaniem uśrednienia przestrzennego z pionową skalą fluktuacji $\delta_v = 1,0$ m oraz wynikającymi z niego kowariancjami według wzorów uzyskanych w podrozdziale 4.3.2 (wskaźnik niezawodności β_4).

Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 4.29 oraz – w formie graficznej – na rysunku 4.20.

Tabela 4.29. Wskaźniki niezawodności. Fundament na podłożu spoistym.
Przypadek jednowymiarowy. Oznaczenia wskaźników zgodnie z opisem w tekście

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_1	β_2	β_3	β_4
1,2	0,88	1,17	1,23	1,11
1,4	1,60	2,10	2,23	2,05
1,6	2,27	2,94	3,16	2,95
1,8	2,87	3,70	4,02	3,79
2,0	3,42	4,40	4,83	4,59
2,2	3,93	5,05	5,59	5,35
2,4	4,41	5,65	6,31	6,06
2,6	4,86	6,22	7,00	6,75
2,8	5,29	6,75	7,66	7,41
3,0	5,69	7,25	8,29	8,03
3,2	6,07	7,72	8,89	8,63
3,4	6,43	8,17	9,46	9,21
3,6	6,78	8,60	10,02	9,76
3,8	7,11	9,01	10,56	10,3



Rys. 4.20. Zależność wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu.
Fundament na podłożu spoistym. Przypadek jednowymiarowy.
Oznaczenia wskaźników zgodnie z opisem w tekście

Przedstawione rezultaty pokazują, że zastosowanie pojedynczych zmiennych losowych (jednej charakteryzującej kąt tarcia wewnętrznego, drugiej – spójność) do opisu losowej zmienności parametrów wytrzymałościowych w całym obszarze pod fundamentem daje mniejsze wartości wskaźników niezawodności (wskaźniki β_1) niż w przypadku modelowania większą liczbą zmiennych losowych. Największe wartości wskaźników β otrzymano po zastosowaniu uśrednień przestrzennych z pominięciem autokorelacji pola (wskaźniki β_3). Po uwzględnieniu autokorelacji (wskaźniki β_4) wartości wskaźników nieco się zmniejszyły, osiągając nawet, dla małych szerokości fundamentu, poziomy niższe niż wskaźniki β_2 . Jednak dla rozsądnych z punktu widzenia projektanta szerokości (2–2,5 m) wskaźniki β_4 są większe od wskaźników β_2 . Widać więc, że modelowanie parametrów wytrzymałościowych za pomocą zdyskretyzowanego pola losowego stanowi istotny element rozpatrywanego zadania. Warto też zwrócić uwagę, że różnice pomiędzy wskaźnikami uwzględniającymi autokorelację (wskaźniki β_4) a wskaźnikami nie uwzględniającymi autokorelacji (wskaźniki β_3) są już zauważalne, w przeciwieństwie do przypadku z podłożem niespoistym, gdzie pozostawały one na granicy błędu obliczeń.

Następnym etapem analiz numerycznych było wykonanie obliczeń dla zadania dwuwymiarowego, przy zmiennych wartościach poziomej skali fluktuacji, i porównanie rezultatów z wynikami zadania jednowymiarowego. Tak jak poprzednio (w przypadku podłoża niespoistego), obliczenia wykonano dla trzech różnych wartości poziomej skali fluktuacji, przyjmując parametr funkcji kowariancji pola na poziomach $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$ oraz $\omega_2 = 30\omega_1$, i jednocześnie utrzymując stałą wartość pionowej skali fluktuacji $\delta_v = 1,0$ m. Pominięto korelację wzajemną pomiędzy polami φ oraz c . Analogicznie też do przypadku podłoża niespoistego wykonano obliczenia z pominięciem autokorelacji w polach parametrów wytrzymałościowych – wyniki zamieszczono w tabeli 4.30, oraz z uwzględnieniem tychże autokorelacji – wyniki w tabeli 4.31.

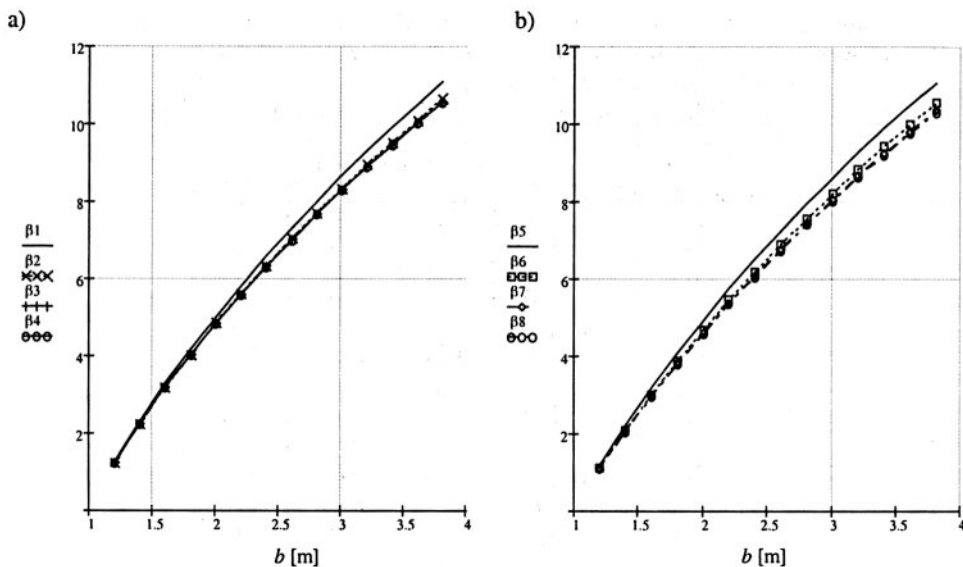
Dla ułatwienia oceny otrzymanych wyników na rysunku 4.21 zestawiono obok siebie wykresy zależności wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu dla przypadku pominięcia autokorelacji pól (rys. 4.21a) oraz z uwzględnieniem autokorelacji (rysunek 4.21b). Analizując wyniki należy stwierdzić, że podobnie jak w przypadku podłoża niespoistego wartości wskaźników uzyskanych przy zastosowaniu uśrednienia dwuwymiarowego niewiele różnią się od wartości otrzymanych z zastosowaniem uśrednienia jednowymiarowego. Różnice te jednak są nieco większe niż w przypadku podłoża niespoistego, a zbieżność do rezultatów z zadania jednowymiarowego (wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji) nieco wolniejsza, zwłaszcza dla większych szerokości fundamentu. Takie wyniki są zgodne z wcześniej zaobserwowaną tendencją w zachowaniu się zredukowanych odchyłeń standardowych (tabele 4.19–4.26). Przyjęcie mniejszej wartości poziomej skali fluktuacji daje większe wartości wskaźników niezawodności, gdyż wariancje są silniej redukowane.

Tabela 4.30. Wskaźniki niezawodności z pominięciem autokorelacji w polach:
 β_1 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 3\omega_1$; β_2 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe:
 $\omega_2 = 10\omega_1$; β_3 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 30\omega_1$,
 β_4 – uśrednienie lokalne jednowymiarowe (jak przedostatnia kolumna w tabeli 4.29)

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_1	β_2	β_3	β_4
1,2	1,26	1,24	1,23	1,23
1,4	2,29	2,24	2,23	2,23
1,6	3,26	3,17	3,16	3,16
1,8	4,16	4,03	4,02	4,02
2,0	5,0	4,85	4,83	4,83
2,2	5,81	5,62	5,59	5,59
2,4	6,57	6,34	6,32	6,31
2,6	7,3	7,04	7,01	7,00
2,8	7,99	7,70	7,66	7,66
3,0	8,66	8,33	8,29	8,29
3,2	9,29	8,94	8,89	8,89
3,4	9,91	9,52	9,47	9,46
3,6	10,50	10,09	10,03	10,02
3,8	11,07	10,63	10,56	10,56

Tabela 4.31. Wskaźniki niezawodności z uwzględnieniem autokorelacji w polach:
 β_5 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 3\omega_1$; β_6 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe:
 $\omega_2 = 10\omega_1$; β_7 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 30\omega_1$,
 β_8 – uśrednienie lokalne jednowymiarowe (jak przedostatnia kolumna w tabeli 4.29)

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_5	β_6	β_7	β_8
1,2	1,18	1,12	1,11	1,11
1,4	2,20	2,08	2,06	2,05
1,6	3,16	2,99	2,96	2,95
1,8	4,07	3,85	3,80	3,79
2,0	4,93	4,67	4,60	4,59
2,2	5,74	5,44	5,36	5,35
2,4	6,52	6,18	6,08	6,06
2,6	7,25	6,88	6,77	6,75
2,8	7,95	7,56	7,43	7,41
3,0	8,62	8,21	8,06	8,03
3,2	9,27	8,83	8,67	8,63
3,4	9,88	9,42	9,25	9,21
3,6	10,48	9,99	9,81	9,76
3,8	11,05	10,54	10,35	10,3



Rys. 4.21. Wykresy zależności wskaźników niezawodności od szerokości fundamentu dla podłoża spoiowego. Oznaczenia jak w tabelach 4.31 oraz 4.32:
a) zmienne niezależne, b) zmienne skorelowane

Uwzględnienie autokorelacji w polach parametrów wytrzymałościowych prowadzi do spadku wartości wskaźników, lecz spadki te nie są duże. Jest to zgodne z tendencją zaobserwowaną w przypadku jednowymiarowym. Pomimo dużych różnic pomiędzy współczynnikami korelacji dla poszczególnych przypadków: $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$ oraz $\omega_2 = 30\omega_1$, różnice pomiędzy odpowiadającymi im wskaźnikami niezawodności (przy ustalonej szerokości fundamentu b) są niewielkie. Zbieżność wyników do rezultatów z przypadku jednowymiarowego jest w przypadku uwzględnienia korelacji nieco wolniejsza niż w przypadku zmiennych nieskorelowanych.

4.4. Uwagi końcowe

W rozdziale tym pokazano procedury umożliwiające obliczenia miar niezawodności w przypadku analizy nośności granicznej fundamentów bezpośrednich o dużej długości. Bardzo istotnym elementem było wykazanie, że w celu uzyskania wartości wskaźników niezawodności dla fundamentu, umożliwiających porównywanie ich ze wskaźnikami niezawodności innych elementów konstrukcji, modelowanie parametrów wytrzymałościowych podłoża za pomocą pojedynczej zmiennej losowej jest niewystarczające. Wprowadzenie większej liczby zmiennych (wektora losowego) poprawia rezultaty. Posłużenie się teorią pól losowych, a zwłaszcza zastosowanie uśrednień

przestrzennych, prowadzi do nowych zmiennych losowych o zredukowanej wariancji. Zastosowanie uśrednień pozwoliło na wyjaśnienie zjawiska, że poprawnie zaprojektowane i bezpieczne z inżynierskiego punktu widzenia fundamenty w obliczeniach niezawodności, przy kryterium zniszczenia w postaci przekroczenia nośności granicznej, wykazywały bardzo małe wartości wskaźników niezawodności (Puła 1993a).

W związku ze stosowaniem uśrednień pojawia się istotny problem rozmiarów obszarów uśrednienia. Wielkość tego obszaru istotnie wpływa na wartości wskaźników niezawodności. Zdaniem autora konieczne jest zatem dokonywanie uśrednienia wzdłuż powierzchni występujących w mechanizmie zniszczenia, występującego w podłożu. W tym rozdziale pokazano to na przykładzie mechanizmu Prandtla. Bardzo istotny element tego rozdziału stanowi wyprowadzenie zależności opisujących wariancje i kowariancje zmiennych losowych wynikających z zastosowania przestrzennych uśrednień związanych z powierzchniami poślizgu występującymi w mechanizmie Prandtla. Wprowadzenie osobno pionowej i poziomej skali fluktuacji pozwoliło na rezygnację z krępującego założenia o izotropii pól parametrów wytrzymałościowych. Zastosowany tu typ pola można uznać za horyzontalnie izotropowy, lecz taki właśnie wydaje się bliski praktycznym zastosowaniom i stosunkowo prosty do identyfikacji za pomocą badań polowych (por. podrozdział 3.3.2).

Wyprowadzone wzory mają charakter ogólny, dotyczą bowiem dowolnej linii prostej i dowolnego odcinka spirali logarytmicznej. Tak więc uogólnienie na mechanizmy zawierające takie linie, np. mechanizm Hilla czy Terzaghiego (por. Izbicki i Mróz 1976), jest nietrudne, ale wymaga oczywiście modyfikacji funkcji stanu granicznego opisaną w podrozdziale 4.3.4. Ponadto wzory wyprowadzono przy założeniu gausowskiej funkcji kowariancji pól. Jednak, zdaniem autora, funkcja ta bardzo dobrze nadaje się do opisu autokorelacji, a ponadto przeprowadzone w podrozdziale 4.2.2 porównanie (tabela 4.6) pokazało, że implikuje ona bardzo zbliżone wartości funkcji wariancji do trójkątnej funkcji kowariancji – również często używanej w zastosowaniach.

Z wyników przeprowadzonych obliczeń, oprócz wielu szczegółowych wniosków sformułowanych w poprzednich podrozdziałach, na szczególną uwagę zasługuje fakt, że wskaźniki niezawodności uzyskane w podejściu dwuwymiarowym niewiele się różnią od uzyskanych z zadania jednowymiarowego. Przy realistycznych wartościach poziomej skali fluktuacji (nie mniejszych niż 10-krotna wartość skali pionowej) oraz istotnych z punktu widzenia projektowego szerokości fundamentu, różnice te są na ogół do pominięcia. Jest to istotne z praktycznego punktu widzenia. Jeśli bowiem można ograniczyć się do jednowymiarowego uśrednienia, uwzględniającego jedyne pionową skalę fluktuacji pola losowego, to znika problem określania skali fluktuacji w kierunku poziomym. Oczywiście wniosek ten dotyczy analizowanych fundamentów bezpośrednich (nie został jeszcze zweryfikowany dla stóp, ale wydaje się że efekt powinien być zbliżony), gdyż np. w probabilistycznej analizie stateczności zbcocy pozioma skala fluktuacji odgrywa istotną rolę (Hicks i Samy 2002).

Zdaniem autora, spośród kwestii do dalszego zbadania trzy wydają się szczególnie istotne. Pierwsza z nich to trójwymiarowy opis zjawiska, który pozwoliłby na analogiczną analizę stóp fundamentowych. Druga – to odpowiednia adaptacja teorii dla podłoża uwarstwionego, najczęściej spotykanego w zagadnieniach praktycznych. Trzecią zaś stanowi problem losowej geometrii powierzchni poślizgu, która teoretycznie rzecz ujmując powinna zmieniać się losowo wraz z losowymi fluktuacjami kąta tarcia wewnętrznego. Jak już wcześniej wspomniano, w tym rozdziale przyjęto, że geometria jest stała i zdeterminowana przez wartość oczekiwaną kąta tarcia wewnętrznego. Przy zmiennej geometrii pojawia się problem rozkładów złożonych, gdyż wyprowadzone tu wzory na kowariancje zależą explicite od kąta tarcia wewnętrznego. Jeśli chodzi natomiast o kwestię dostosowania podanych tu obliczeń do obliczeń zalecanych przez normatywy, to wydaje się, że cel ten można osiągnąć przez odpowiednie skalowanie składników we wzorze określających nośność fundamentu. Tu podjęto tego typu próbę dzieląc składnik związany z ciężarem gruntu pod fundamentem przez dwa, aby zbliżyć rozwiązanie Prandtla do rozwiązania Sokołowskiego (por. podrozdział 4.3.4).

5. Zadania związane z przemieszczeniami fundamentów

We współczesnym budownictwie stany przemieszczeń podłoża decydują w wielu przypadkach o bezpieczeństwie fundamentów. Nadmierne przemieszczenia, a zwłaszcza nierównomierne osiadania fundamentów poszczególnych fragmentów całej budowli mogą prowadzić do trwałych uszkodzeń obiektu lub do jego zniszczenia. Także odwrotnie, stany graniczne elementów konstrukcji mogą powodować nierównomierność osiadań obiektu budowlanego. Z drugiej strony nierównomierne (lub nadmierne) osiadania fundamentów prowadzą do trudności w eksploataowaniu obiektu. Te z kolei zjawiska są przedmiotem obliczeń stanów granicznych użyteczności.

W niniejszym rozdziale podjęto próbę rozwiązania kilku problemów, związanych z przemieszczeniami podłoża, ważnych z punktu widzenia oszacowania niezawodności fundamentów bezpośrednich. We wszystkich rozpatrywanych w tym rozdziale zagadnieniach za awarię uważa się przekroczenie przez określony punkt (lub określone punkty) fundamentu (ewentualnie punkt lub punkty pod fundamentem) pewnej zadanej na początku wartości progowej osiadania (dopuszczalnej wartości osiadania, ewentualnie maksymalnej wartości osiadania), oznaczanej dalej przez u_{\max} . Wartość u_{\max} może wynikać albo z warunków nośności, albo z warunków użyteczności. Takie podejście zgodne jest z zaleceniami *Eurocode 7* (ENV 1997-1 (1997)), aczkolwiek stanowi uproszczenie, gdyż stany te są wzajemnie powiązane. Przy powyższych założeniach funkcja stanu granicznego ma postać

$$g(\mathbf{x}) = u_{\max} - U(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (5.1)$$

gdzie $U(X_1, \dots, X_n)$ oznacza funkcję osiadania danego punktu fundamentu, która zależy od parametrów X_1, \dots, X_n , przyjętych jako losowe lub nielosowe w rozpatrywanym zadaniu. Natomiast prawdopodobieństwo awarii ma postać (2.20) z uwzględnieniem funkcji (5.1). W przypadku, gdy u_{\max} wynika z warunków eksploatacji określenie „prawdopodobieństwo awarii” wydaje się mniej adekwatne niż w sytuacji utraty nośności granicznej. Przekroczenie pewnego progu osiadań nie skutkuje wówczas na ogół konsekwencjami groźnymi dla całej konstrukcji. Uwagę dotyczącą tej

terminologii podano już w podrozdziale 2.3. W takiej sytuacji właściwsze od określenia prawdopodobieństwo awarii wydaje się określenie prawdopodobieństwo przekroczenia albo zawodność. Jak już jednak wspomniano w podrozdziale 2.3 określenia te mają jednakowe sformułowanie matematyczne w postaci wzoru (2.20).

Omawiane dalej zagadnienia dotyczą probabilistycznej oceny osiadań fundamentów (przede wszystkim bezpośrednich). I tak w pierwszym podrozdziale przedyskutowano problem modelowania losowej zmienności parametrów sprężystych podłoża, tj. modułu Younga E oraz współczynnika Poissona ν , które to parametry są zazwyczaj wprowadzane do obliczeń osiadań, i to zarówno modeli sprężystych, jak i sprężysto-plastycznych. W kolejnym omówiono zagadnienie losowego położenia granicy pomiędzy poszczególnymi warstwami podłoża gruntowego i jego wpływu na losową zmienność osiadań fundamentu płytowego, a następnie badano zagadnienie osiadań fundamentu poddanego działaniu losowych obciążeń. Obszerną część stanowi opracowanie odpowiednich wersji metody powierzchni odpowiedzi, służącej obliczaniu prawdopodobieństwa przekroczenia określonych poziomów osiadań przez wybrane punkty fundamentu. Wreszcie w ostatnim podrozdziale pokazano próbę zastosowania zaawansowanej metody symulacyjnej – metody adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej do obliczania prawdopodobieństwa przekroczenia dopuszczalnych osiadań przez fundament w sąsiedztwie ściany oporowej, posadowiony na podłożu o cechach nieliniowych – typu Druckera–Pragera.

Zasadniczy nacisk położony został na wypracowanie adekwatnych metod i algorytmów obliczeniowych, nie zaś na analizę konkretnych konstrukcji, czy na analizę określonych wartości wskaźnika niezawodności. W związku z tym nie stosowano tutaj uśrednień przestrzennych, które obszernie dyskutowano w dwóch poprzednich rozdziałach.

5.1. O modelowaniu probabilistycznym parametrów sprężystych gruntu na potrzeby analizy niezawodności

Sprężysto-plastyczne modele ośrodka gruntowego, służące do przewidywania jego osiadań, wymagają znajomości parametrów fizycznych ośrodka, a przede wszystkim modułu Younga E i współczynnika Poissona ν (lub im równoważnych w ramach teorii sprężystości). Parametry te (zwane dalej parametrami sprężystymi) najczęściej pojawiają się w obliczeniach numerycznych z zastosowaniem metody elementów skończonych. Ich laboratoryjne oznaczanie jest jednak skomplikowane i kosztowne. W geotechnice znacznie częściej dokonuje się pomiarów modułów edometrycznych M_{ed} , które są zwykle używane do scharakteryzowania ściśliwości gruntów. Te jednak na ogół nie mogą być bezpośrednio używane w obliczeniach MES.

W przypadku obliczeń osiadań na potrzeby analizy niezawodności z uwzględnieniem losowych parametrów podłoża niezbędna jest znajomość rozkładów prawdopodobieństwa tych parametrów lub przynajmniej znajomość ich dwóch pierwszych momentów statystycznych. Wiedza o statystycznych charakterystykach parametrów E i ν jest jednak uboga. W literaturze praktycznie brak jest danych na temat rozkładów prawdopodobieństwa E oraz ν dla gruntów, a wzmianki o wartościach współczynników zmienności są nieliczne (Schultze 1972, Favre 1979, Meyerhof 1993, 1995). Komplikuje to w istotny sposób ewentualne obliczenia miar niezawodności. Warto zatem zbadać wpływ zmienności losowej E , ν oraz ich wzajemnej korelacji na wahania osiadań fundamentów posadowionych na podłożu sprężystym za pomocą analiz numerycznych. Wyniki takich analiz mogą służyć przyjęciu właściwych założeń probabilistycznych przy obliczeniach wskaźników niezawodności towarzyszących szacowaniu osiadań.

W podrozdziale tym przedstawiono pewną grupę wyników takich analiz oraz zaserwowano propozycje dotyczące ich wykorzystania. W obliczeniach zastosowano specjalnie opracowaną procedurę numeryczną (Puła i Wyjadłowski 1999) złożoną z dwóch segmentów. W pierwszym segmencie, dotyczącym obliczania osiadań, zastosowano metodę warstw skończonych. Zaletą metody warstw skończonych jest możliwość otrzymania rozwiązań w zamkniętej, analitycznej postaci, co znacznie ułatwia obliczenia niezawodnościowe i poprawia ich dokładność (możliwość bezpośredniego zastosowania metod FORM i SORM). W drugim segmencie realizowano obliczenia miar niezawodności, którymi były prawdopodobieństwo awarii oraz wskaźnik niezawodności β (odpowiadający temu prawdopodobieństwu według wzoru (2.31)). Algorytmy obliczeń prawdopodobieństwa awarii oraz wskaźnika niezawodności bazowały na metodach FORM i SORM.

5.1.1. Założenia dotyczące metody rozwiązania

Metoda warstw skończonych wywodzi się z teorii dźwigarów powierzchniowych i teorii grubych płyt Krieger–Woinowsky'ego (1933). Korzystając z aparatu matematycznego szeregów Fouriera, stanowi ważne narzędzie rozwiązywania zagadnień równowagi wielowarstwowej półprzestrzeni sprężystej (por. np. Girkmann 1956). W zagadnieniach geotechnicznych była stosowana na przykład w pracach Sovinca (1961), Sapiana (1963) i Gryczmańskiego (1969, 1978). Przybliżony charakter tej metody polega na zastąpieniu nieskończonego szeregu Fouriera przez jego sumę częściową, zatem zwiększenie dokładności związane jest z dużym wzrostem pracochłonności obliczeń. Zastosowanie techniki komputerowej (por. np. prace Bookera i Smalla (1983, 1985)) zdecydowanie usprawniło obliczenia i zwiększyło dokładność uzyskiwanych wyników. W ostatnim dziesięcioleciu pojawiły się też prace proponujące wariant metody warstw skończonych z uwzględnieniem losowej zmienności parametrów

(Brząkała 1995, Wyjadłowski 1997). Przy powszechnym dziś użyciu metody elementów skończonych, metoda warstw skończonych nie jest często stosowana (ewentualnie jest traktowana jako specjalny wariant MES). Ma jednak kilka istotnych zalet, które predestynują ją jako wygodne narzędzie dla potrzeb oszacowań miar niezawodności, przy założeniu stosowania modeli sprężystych (ograniczeniem jest zasada superpozycji). Przede wszystkim metoda ta daje rozwiązania w zamkniętej, analitycznej postaci, co bardzo ułatwia zastosowanie przybliżonych metod teorii niezawodności, takich jak FORM i SORM. Ponadto krótki czas obliczeń daje możliwość wielokrotnego ich powtarzania, co z kolei umożliwi dokonanie wielu analiz, a także efektywne prowadzenie obliczeń metodą symulacyjną Monte Carlo. Poprawia się także w istotny sposób dokładność obliczeń i unika się błędów związanych z dyskretyzacją obszaru. Należy też podkreślić, że metoda ta może być zastosowana także do zagadnień trójwymiarowych. Obszerne mówienie metody warstw skończonych można znaleźć w pracy Wyjadłowskiego (1997), a także w pracach Gryczmańskiego (1969, 1994), Brząkały (1995) czy Puły i Wyjadłowskiego (1999).

W zastosowanym poniżej wariancie przyjęto następujące założenia:

- jako model obliczeniowy przyjmuje się wielowarstwową płytę;
- każda z warstw jest izotropowym, liniowo-odkształcalnym ośrodkiem sprężystym i ma niezmienną grubość w dowolnym przekroju;
- każda z warstw jest charakteryzowana jednoznacznie przez trzy parametry: moduł Younga, współczynnik Poissona oraz miąższość (grubość warstwy);
- styki między warstwami są doskonale szorstkie;
- rozpatrywane podłoże gruntowe opiera się na szorstkiej i nieodkształcalnej warstwie skalnej, przyjmuje się zatem, że wszystkie składowe przemieszczenia zerują się na spągu najniższej warstwy.

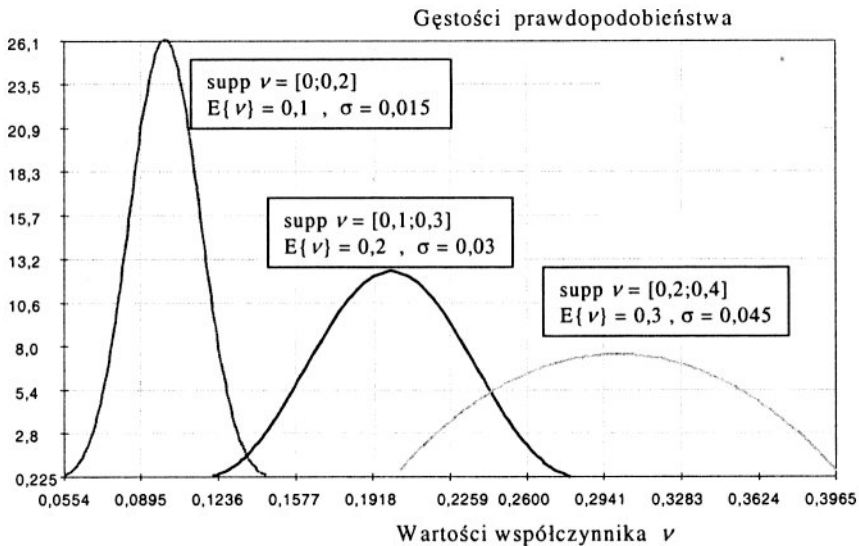
5.1.2. Założenia probabilistyczne

Jak już wspomniano na wstępie tego rozdziału, dla obliczeń miar niezawodności związanych ze stanem granicznym eksploatacji konieczne jest zazwyczaj obliczenie prawdopodobieństwa, że osiadania U pewnego punktu znajdującego się pod fundamentem przekroczą określoną wartość u_{\max} , czyli

$$p_F = P(U(X_1, X_2, \dots, X_n) > u_{\max}), \quad (5.2)$$

co odpowiada funkcji stanu granicznego postaci (5.1). Do obliczenia prawdopodobieństwa (5.2) konieczna jest znajomość łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego (X_1, X_2, \dots, X_n) . Załóżmy obecnie, że jego komponentami są parametry sprężyste E oraz ν . Niestety wiedza na temat statystycznych rozkładów wartości parametrów E oraz ν jest bardzo uboga. Trudności w laboratoryjnym określaniu tych parametrów dla gruntów powodują, że nader rzadko oznacza się próby o większej liczbeno-

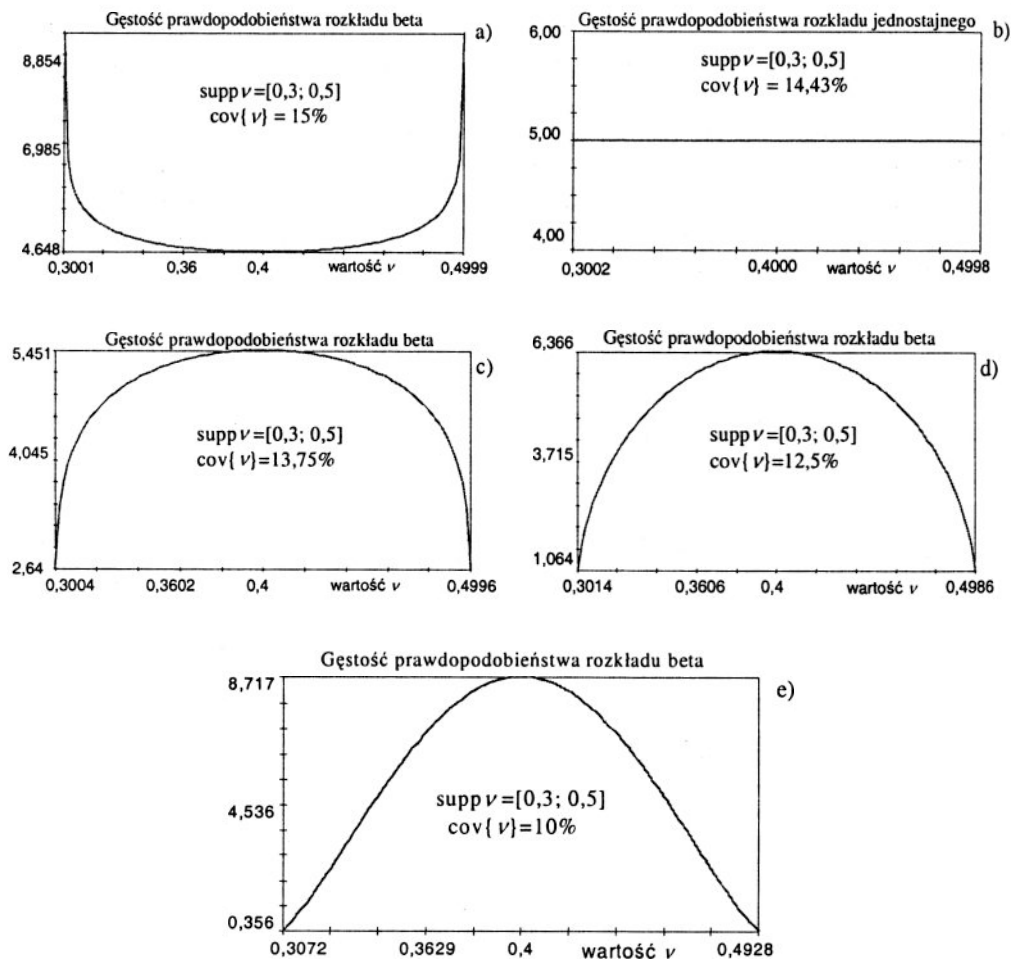
ści, które mogłyby stanowić podstawę do określenia rozkładu prawdopodobieństwa, czy choćby do estymowania momentów statystycznych. Znacznie częściej oznaczane są edometryczne moduły ściśliwości M , których współczynniki zmienności szacowane są w granicach 15–25% (Przewłócki 1998) lub nawet 20–30% (Favre 1979). Podawane w literaturze (Meyerhoff 1993, 1995) oszacowania współczynnika zmienności modułu Younga E wskazują na jeszcze szerszy przedział: 10–40%. Wydaje się jednak prawdopodobne, że bardzo duże wartości tych współczynników mogą być konsekwencją błędów pomiarowych (Przewłócki 1998). Dla modułu Younga rozsądnym wyborem zdaje się być lognormalny rozkład prawdopodobieństwa (por. tabela 3.3), który nie dopuszcza ujemnych wartości E nawet przy niewielkich wartościach oczekiwanych i dużych wariancjach oraz charakteryzuje się dodatnią asymetrią.



Rys. 5.1. Wykresy gęstości prawdopodobieństwa typu beta dla współczynnika Poissona ν

Praktycznie brak jest informacji na temat zmienności losowej współczynnika Poissona w gruncie. Warto jedynie zauważyć, że wahania losowe tego parametru powinny mieścić się w stosunkowo wąskich przedziałach wartości. Niektórzy badacze (Cherubini 1998) wyrażają pogląd, że współczynnik zmienności może w tym przypadku wynosić ok. 13–15%. W tej sytuacji jako rozkłady prawdopodobieństwa można zaproponować rozkłady o nośnikach ograniczonych, takie jak rozkład beta, rozkład jednostajny czy rozkład trójkątny. Charakterystyki tych rozkładów podane są w podrozdziale 3.1. W przypadku niewielkich współczynników zmienności (do ok. 10%) można użyć rozkładu normalnego, pamiętając aby prawdopodobieństwo przyjmowania wartości poza dopuszczalnym z fizycznego punktu widzenia przedziałem było pomijalnie małe (to może zależeć od rozpatrywanego zadania). Przykładowo na rys. 5.1

pokazano wykresy gęstości prawdopodobieństwa typu beta dla współczynnika Poissona przy trzech różnych wartościach oczekiwanych.



Rys. 5.2. Modelowanie gęstości prawdopodobieństwa współczynnika Poissona o wartości oczekiwanej $E\{\nu\} = 0,4$

We wszystkich przypadkach pokazanych na rysunku 5.1 współczynnik zmienności wynosił 15%. Warto zwrócić uwagę na trudności, które mogą pojawić się przy doborze odpowiedniego rozkładu typu beta dla większych wartości oczekiwanych współczynnika ν . W przypadku wartości oczekiwanej $\bar{\nu} = 0,4$, przy założeniu przedziału zmienności $[0,3; 0,5]$ oraz 15% współczynnika zmienności wykres gęstości zmienił kształt, co pokazano na rysunku 5.2. Kształt pokazany na rys. 5.2a nie może być zaakceptowany, gdyż daje zwiększone wartości prawdopodobieństw na końcach przed-

działów zmienności. Zmniejszanie współczynnika zmienności rozkładu przy zachowaniu tych samych granic przedziału zmienności upodabniało rozkład do rozkładu jednostajnego (por. rys. 5.2b). Dalsze zmniejszanie współczynnika zmienności prowadzi do przybrania przez wykres „dzwonowatego” kształtu podobnego nieco do kształtu wykresu gęstości rozkładu normalnego (por. kolejne wykresy na rysunku 5.2). Z przedstawionego przykładu widać jednak, że chcąc zachować wahania losowe współczynnika Poissona w rozsądnym z fizycznego punktu widzenia przedziale wartości, należy przyjąć, że współczynnik zmienności nie przekracza 15%.

W praktycznych obliczeniach często się zdarza, że wartość współczynnika Poissona przyjmowana jest arbitralnie lub po prostu jako $\nu = 0,3$. W sytuacji „niepewnej średniej” wartość oczekiwaną zmiennej losowej ν należy także uznać za zmienną losowo. Prowadzi to do złożonych rozkładów prawdopodobieństwa, o których wspomniano już w podrozdziale 3.1.

Niewiele wiadomo także na temat korelacji wzajemnej pomiędzy E' oraz ν . W tabelach 5.1 i 5.2 podano za Litwinowem (1951) i Cytowiczem (1963) wartości współczynnika Poissona dla różnych rodzajów gruntów. Zbliżone propozycje podaje także

Tabela 5.1. Wartości współczynnika Poissona dla gruntów wg Litwinowa (1951)

Rodzaj gruntu	Zakres wartości ν	Zalecane wartości ν
Żwir	0,12–0,17	0,15
Piasek	0,17–0,29	0,20
Piasek gliniasty	0,21–0,29	0,25
Gлина piaszczysta	0,30–0,37	0,30–0,35
Gлина	0,36–0,39	0,35–0,37
İł	0,4	0,4

Tabela 5.2. Wartości współczynnika Poissona dla gruntów wg Cytowicza (1973)

Rodzaj gruntu	wartości ν
Piaski zagęszczone	0,25
Piaski luźne	0,30
Piaski gliniaste i pyły	0,30
Gliny twardoplastyczne i plastyczne	0,35
İły twardoplastyczne i plastyczne	0,40
Gliny i İły półzwarte	0,4

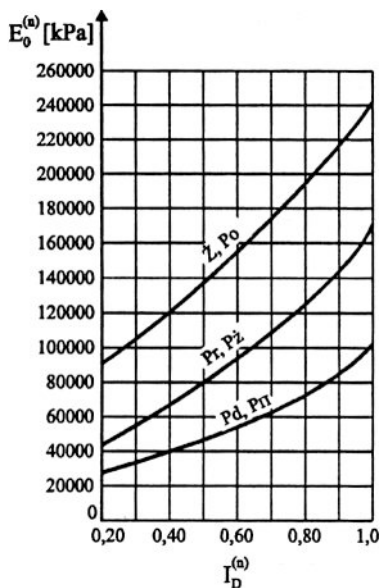
polska norma PN-81/B-03020, co zamieszczono w tabeli 5.3. Na rysunkach 5.3 oraz 5.4 pokazano wartości modułów Younga dla różnych rodzajów oraz stanów gruntów według PN-81/B-03020. Można zauważyć, że dla ustalonego stanu gruntu (stopnia zagęszczenia lub stopnia plastyczności) grunty o większych wartościach modułu E mają mniejsze wartości współczynnika ν . Taka sytuacja ma miejsce zarówno dla

gruntów spoiстых, jak i niespoistych. Na tej podstawie można by postawić hipotezę, że dla gruntów korelacja pomiędzy modułem Younga i współczynnikiem Poissona jest ujemna, tzn. statystycznemu wzrostowi modułu Younga w gruntach odpowiada statystyczne zmniejszenie się wartości współczynnika Poissona.

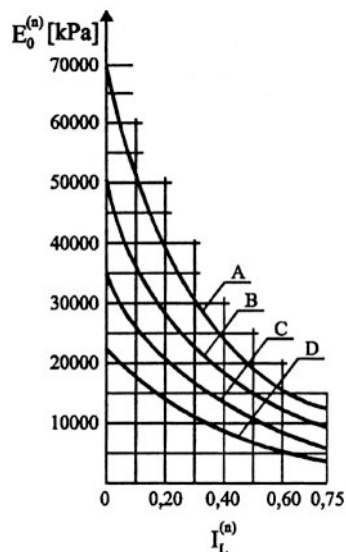
Tabela 5.3. Wartości współczynnika Poissona dla gruntów według PN-81/B-03020 (oznaczenia wg PN-81/B-03020)

Rodzaj gruntu	Grнты niespoiste			Grнты spoiste			
	$\zeta, P\sigma$	P_r, P_s	$P_d, P\pi$	A	B	C	D
δ	0,90	0,83	0,74	0,83	0,76	0,70	0,565
β	1,00	0,90	0,80	0,90	0,75	0,60	0,80
ν	0,20	0,25	0,30	0,25	0,29	0,32	0,37

ν – współczynnik Poissona,
 β – wskaźnik skonsolidowanego gruntu,
A – grнты spoiste morenowe skonsolidowane,
B – grнты spoiste morenowe nieskonsolidowane i inne grнты skonsolidowane
C – inne grнты spoiste nieskonsolidowane,
D – ility, niezależnie od genezy,
 $\delta = \frac{E_o}{M_o} = \frac{E}{M}, \beta = \frac{E_o}{E} = \frac{M_o}{M}$



Rys. 5.3. Wartości modułów Younga dla gruntów niespoistych w zależności od stopnia zagęszczenia (za PN-81/B-0020)



Rys. 5.4. Wartości modułów Younga dla gruntów spoiстых w zależności od stopnia plastyczności (za PN-81/B-0020)

5.1.3. Założenie przyjęte do analiz numerycznych

Analizy numeryczne przeprowadzono na przykładzie jednorodnego podłoża liniowo sprężystego. Przyjęto płaski stan odkształcenia. Model podłoża i fundamentu pokazano na rysunku 5.5. Składa się on z 9 warstw o identycznych parametrach E oraz ν . Założono, że 12 metrów poniżej poziomu posadowienia zalega warstwa nieodkształcalna. Na powierzchni terenu działa równomiernie rozłożone obciążenie o intensywności $q = 400$ kPa. Dla zrealizowania obliczeń zbudowano program komputerowy, który powstał z połączenia programu obliczeń osiadań metodami warstw skończonych (tę część programu zaczerpnięto z pracy Wyjadłowskiego (1997) – tam też znajduje się jego szczegółowy opis) z odpowiednimi segmentami programu COMREL w wersji źródłowej (STRUREL 1995).

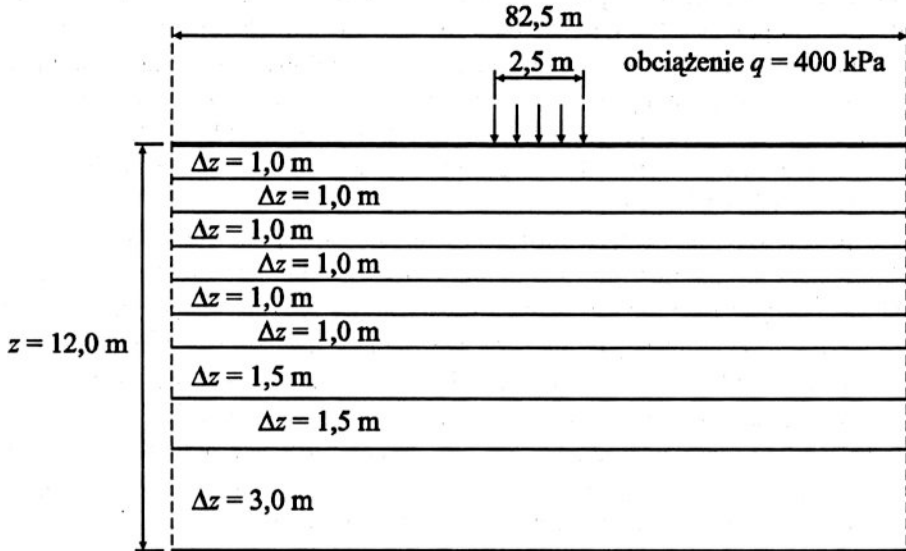
W celu zobrazowania wpływu losowej zmienności współczynnika Poissona ν oraz jego korelacji z modułem Younga E na uzyskiwane w analizie osiadań wskaźniki niezawodności przyjęto, że moduł Younga jest zmienną losową o rozkładzie lognormalnym o wartości oczekiwanej $E\{E\} = 20$ MPa oraz odchyleniu standardowym $\sigma_E = 2$ MPa ($\text{cov}\{E\} = 10\%$). Zastosowanie „małego” modułu sprężystości wynika z faktu, że tego typu grunty wykazują większą zmienność losową cech ściśliwości. Ponadto osiadania takiego podłoża są duże, mogą się wręcz wydawać przesadnie duże w stosunku do występujących w praktyce. Takie jednak podejście umożliwia lepszą analizę efektów związanych ze zmiennością losową parametrów sprężystych.

5.1.4. Wyniki analiz numerycznych

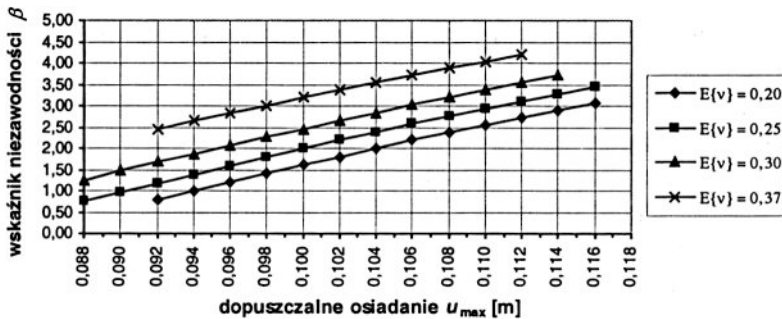
Początkowo przyjęto, że współczynnik Poissona jest zmienną losową o rozkładzie normalnym i współczynniku zmienności $\text{cov}\{\nu\} = 10\%$. Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości progu osiadania u_{\max} (zwanego też dalej osiadaniem dopuszczalnym). Na rysunku 5.6 przedstawiono graficznie zależność wskaźnika niezawodności β od osiadania dopuszczalnego u_{\max} przy różnych wartościach średnich współczynnika Poissona, przy założeniu, że zmienne losowe E oraz ν są nieskorelowane. Wskaźniki niezawodności rosną wraz ze wzrostem wartości oczekiwanej ν . Wynika to z ogólnych zależności teorii sprężystości dla płaskiego stanu odkształcenia, gdzie przy stałej wartości modułu Younga większym wartościom współczynnika Poissona odpowiadają mniejsze osiadania podłoża. Warto też zwrócić uwagę na niemal liniowy charakter zależności wskaźnika β od osiadania dopuszczalnego u_{\max} . Co więcej, wykresy są do siebie prawie równoległe. Te własności pozwalają na łatwą interpolację wartości β .

Wyniki pokazujące wpływ ujemnej korelacji parametrów sprężystych E oraz ν przy różnych wartościach oczekiwanych współczynnika Poissona zamieszczono w tabelach od Z.1.1 do Z.1.7, które ze względu na ich znaczną objętość umieszczono w załączniku nr 1, następującym po rozdziale 9. Obliczenia wykonywano przy założeniu, że zmienne

losowe E oraz ν mają łączny rozkład Natafa (por. podrozdział 3.1.2). W tabelach tych kolumny oznaczone przez $\rho = 0,0$ zawierają wyniki uzyskane przy mocniejszym założeniu aniżeli brak korelacji, mianowicie – dla stochastycznej niezależności między E i ν . W drugich kolumnach wymienionych tabel podano wskaźniki niezawodności otrzymane przy założeniu nielosowej (stałej) wartości współczynnika Poissona.



Rys. 5.5. Schemat podłoża zastosowany w obliczeniach numerycznych

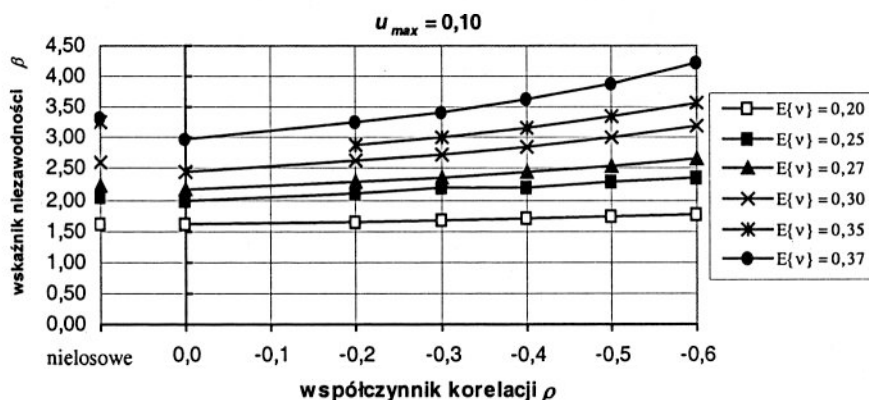


Rys. 5.6. Zależność wskaźnika niezawodności β od osiadania dopuszczalnego u_{max}

Przedstawione wyniki, obejmujące większość obszaru istotnych w geotechnice wartości współczynnika Poissona, pokazują, że wskaźnik niezawodności β jest funkcją rosnącą bezwzględnej wartości współczynnika korelacji (w przypadku ujemnych jego wartości). Ponadto wzrost wartości β jest tym szybszy, im większa jest wartość oczekiwana współczynnika ν . Taką konkluzję można wysnuć z przedstawionych tu

obliczeń dla ujemnej korelacji pomiędzy parametrami sprężystymi E oraz ν . Stąd wniosek, że w sytuacji gdy dokładna wartość współczynnika korelacji nie jest znana, najbezpieczniej jest przyjąć stochastyczną niezależność pomiędzy E oraz ν . Jak już wcześniej wspomniano, można oczekiwać, że korelacja ta nie jest dodatnia. Gdyby jednak w badaniach podłoża stwierdzono dodatnią korelację, to sytuacja przedstawiałaby się daleko gorzej. Z przeprowadzonych, ale tutaj nieprezentowanych, obliczeń (przykłady będą podane w podrozdziale 5.4) wynika bowiem, że wskaźnik niezawodności maleje wraz ze wzrostem dodatniej wartości współczynnika korelacji parametrów sprężystych. W tej sytuacji przyjęcie stochastycznej niezależności pomiędzy tymi parametrami nie byłoby bezpieczne.

Wpływ współczynnika korelacji $\rho(E, \nu)$ na wartość wskaźnika niezawodności β dla ustalonej wartości osiadania dopuszczalnego pokazano na rysunku 5.7. Można zauważyć, że wpływ ten jest pomijalny dla małych wartości oczekiwanych współczynnika Poissona, takich jak $E\{\nu\} = 0,2$ lub $E\{\nu\} = 0,25$.



Rys. 5.7. Zależność wskaźnika niezawodności β od współczynnika korelacji $\rho(E, \nu)$ oraz wartości oczekiwanej współczynnika Poissona ν . Przyjęto rozkłady prawdopodobieństwa takie jak w przypadku wyników zademonstrowanych na rysunku 5.6

Porównanie kolumn drugiej i trzeciej z tabel Z.1.1–Z.1.3 pokazuje, że różnice pomiędzy wskaźnikami niezawodności dla przypadku zerowej korelacji oraz przypadku przyjęcia braku losowej zmienności współczynnika Poissona są praktycznie pomijalne dla wartości oczekiwanych $E\{\nu\} < 0,3$. Nawet dla wartości $E\{\nu\} = 0,3$, która najczęściej spotykana jest przy obliczeniach osiadań gruntów, różnice sięgają zaledwie 0,1, podczas gdy różnica spowodowana zmianą osiadania dopuszczalnego u_{\max} o 1 mm powoduje zmianę wskaźnika niezawodności o około 0,2. Wpływ losowości współczynnika Poissona staje się natomiast istotny dla wartości oczekiwanych $E\{\nu\} > 0,3$. Niewielki wpływ losowości współczynnika Poissona na wskaźnik niezawodności β potwierdzają też współczynniki wrażliwości α_ν (por. wzór (2.41)) podane w tabelach

5.4 i 5.5. Zarówno dla $E\{\nu\} = 0,2$, jak i dla $E\{\nu\} = 0,3$ są one dużo mniejsze od analogicznych współczynników modułu Younga (α_E). Widać jednak istotny wzrost wpływu losowych wahań współczynnika Poissona wraz ze wzrostem jego wartości oczekiwanej. Na podstawie poprzednich wyników oraz podanych wyżej współczynników wrażliwości można przyjąć, że dla wartości oczekiwanych $E\{\nu\} < 0,27$ zmienność losowa współczynnika ν może być pominięta.

Tabela 5.4. Wartości obliczeniowe i współczynniki wrażliwości dla $u_{\max} = 0,096$ m.
 E – rozkład lognormalny, $E\{E\} = 20$ MPa, $\sigma_E = 2$ MPa; ν – rozkład normalny $E\{\nu\} = 0,2$, $\sigma_\nu = 0,02$

Współczynnik korelacji	Współrzędne punktu obliczeniowego		Współczynniki wrażliwości	
	E	ν	α_E	α_ν
$\rho = 0,0$	17,6797	0,1966	0,990	0,140
$\rho = -0,2$	17,6197	0,2013	0,989	0,146
$\rho = -0,3$	17,5863	0,2039	0,989	0,146
$\rho = -0,4$	17,5503	0,2067	0,989	0,145
$\rho = -0,5$	17,5111	0,2096	0,990	0,142
$\rho = -0,6$	17,5503	0,21285	0,991	0,136

Tabela 5.5. Wartości obliczeniowe i współczynniki wrażliwości dla $u_{\max} = 0,096$ m.
 E – rozkład lognormalny, $E\{E\} = 20$ MPa, $\sigma_E = 2$ MPa; ν – rozkład normalny $E\{\nu\} = 0,3$, $\sigma_\nu = 0,03$

Współczynnik korelacji	Współrzędne punktu obliczeniowego		Współczynniki wrażliwości	
	E	ν	α_E	α_ν
$\rho = 0,0$	16,3909	0,2801	0,947	0,322
$\rho = -0,2$	16,2123	0,2895	0,935	0,353
$\rho = -0,3$	16,1034	0,2951	0,930	0,368
$\rho = -0,4$	15,9754	0,3015	0,924	0,382
$\rho = -0,5$	15,8226	0,3089	0,919	0,395
$\rho = -0,6$	15,6316	0,3179	0,914	0,406

Tabele 5.4 i 5.5 wskazują na niewielką zmienność współczynników wrażliwości w zależności od współczynnika korelacji pomiędzy E i ν , przy czym zmienność ta jest istotnie większa przy większej wartości oczekiwanej współczynnika Poissona. Dodatkowo w tabelach 5.4 i 5.5 podano współrzędne punktu obliczeniowego (por. podrozdział 2.4) uzyskane dla osiadania dopuszczalnego $u_{\max} = 0,096$ m. Widać, że pomimo jednakowej wartości współczynnika zmienności dla E i ν wartości obliczeniowe modułu Younga znacznie bardziej odbiegają od wartości oczekiwanej aniżeli wartości współczynnika Poissona, co także wskazuje na większą istotność losowych wahań modułu.

W celu stwierdzenia, jak duży jest wpływ typu rozkładów prawdopodobieństwa użytych do opisu losowej zmienności współczynnika Poissona, przeprowadzono obli-

czenia, zakładając kolejno trzy różne rozkłady prawdopodobieństwa: normalny, prostokątny oraz beta. W każdym przypadku wartość oczekiwana była równa $E\{\nu\} = 0,3$. Dla rozkładu normalnego i rozkładu beta przyjęto współczynniki zmienności $\text{cov}\{\nu\} = 10\%$, a dla rozkładu beta założono dodatkowo, że jest on symetryczny i skoncentrowany na przedziale $[0,0; 0,5]$. W przypadku rozkładu prostokątnego przyjęto przedział zmienności $[0,25; 0,35]$, co dało współczynnik zmienności w przybliżeniu równy 10% (dokładnie 9,6%). Uzyskane rezultaty zestawiono w tabeli 5.6.

Tabela 5.6. Porównanie wskaźników niezawodności przy założeniu trzech różnych rozkładów prawdopodobieństwa współczynnika Poissona. $E\{\nu\} = 0,3$. E – rozkład lognormalny, $E\{E\} = 20$ MPa, $\sigma_E = 2$ MPa

Osiadanie dopuszczalne u_{\max} [m]	Rozkład prawdopodobieństwa ν	Wskaźnik niezawodności β				
		Współczynnik korelacji $\rho(E, \nu)$				
		$\nu = \text{const.}$ nielosowy	$\rho = 0,0$	$\rho = -0,2$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,6$
0,092	Normalny	1,757	1,67	1,79	1,95	2,16
	Prostokątny		1,69	1,81	1,97	2,15
	Beta		1,67	1,79	1,96	2,16
0,094	Normalny	1,975	1,88	2,01	2,18	2,43
	Prostokątny		1,89	2,03	2,21	2,41
	Beta		1,88	2,01	2,18	2,42
0,096	Normalny	2,186	2,08	2,22	2,41	2,86
	Prostokątny		2,09	2,24	2,43	2,65
	Beta		2,08	2,22	2,41	2,68
0,098	Normalny	2,40	2,27	2,43	2,64	2,94
	Prostokątny		2,29	2,45	2,67	2,88
	Beta		2,27	2,43	2,65	2,93
0,100	Normalny	2,60	2,46	2,64	2,86	3,18
	Prostokątny		2,48	2,65	2,89	3,10
	Beta		2,46	2,64	2,86	3,18
0,102	Normalny	2,79	2,65	2,84	3,08	3,43
	Prostokątny		2,67	2,85	3,11	3,36
	Beta		2,65	2,84	3,08	3,42
0,104	Normalny	2,99	2,83	3,03	3,29	3,67
	Prostokątny		2,86	3,05	3,32	3,60
	Beta		2,84	3,03	3,29	3,65
0,106	Normalny	3,18	3,02	3,22	3,50	3,90
	Prostokątny		3,04	3,24	3,53	3,83
	Beta		3,02	3,22	3,48	3,89
0,108	Normalny	3,37	3,20	3,41	3,70	4,13
	Prostokątny		3,22	3,43	3,74	4,04
	Beta		3,19	3,41	3,70	4,11

0,110	Normalny	3,55	3,37	3,60	3,90	4,35
	Prostokątny		3,39	3,62	3,94	4,24
	Beta		3,37	3,60	3,90	4,34
0,112	Normalny	3,73	3,54	3,78	4,10	4,57
	Prostokątny		3,57	3,80	4,14	4,43
	Beta		3,54	3,78	4,10	4,56
0,114	Normalny		3,71	–	–	–
	Prostokątny		3,73	3,98	4,33	4,61
	Beta		3,71	3,96	4,29	4,78
0,116	Normalny		3,88	–	–	–
	Prostokątny		3,91	4,15	4,52	4,79
	Beta		3,88	4,13	4,48	4,99
0,118	Normalny		4,04	–	–	–
	Prostokątny		4,07	–	4,71	4,97
	Beta		4,04	4,31	4,67	5,20

Tabela 5.7. Wpływ współczynnika zmienności współczynnika Poissona na wskaźnik niezawodności β .
 Przyjęto $E\{\nu\} = 0,3$. E – rozkład lognormalny, $E\{E\} = 20$ MPa, $\sigma_E = 2$ MPa

Osiadanie dopuszczalne u_{\max} [m]	cov $\{E\} = 10\%$ cov $\{\nu\} = 10\%$	cov $\{E\} = 10\%$ cov $\{\nu\} = 19\%$	cov $\{E\} = 10\%$ cov $\{\nu\} = 19\%$ rozkład złożony
0,088	1,26	1,14	1,059
0,090	1,48	1,33	1,238
0,092	1,69	1,52	1,415
0,094	1,89	1,71	1,591
0,096	2,09	1,89	1,764
0,098	2,29	2,07	1,937
0,100	2,482	2,26	2,107
0,102	2,671	2,43	2,275
0,104	2,856	2,61	2,441
0,106	3,038	2,78	2,605
0,108	3,218	2,96	2,768
0,110	3,39	3,12	2,929
0,112	3,57	3,29	3,078
0,114	3,74	3,46	3,244
0,116	3,90	3,62	3,399
0,118	4,07	3,78	

Wskaźniki niezawodności uzyskane dla zadanego poziomu osiadań dopuszczalnych u_{\max} są niemal identyczne dla wszystkich trzech rozkładów. Sytuacja ta ma miejsce dla wszystkich zbadanych wartości u_{\max} , które z kolei wyczerpują praktycznie wszystkie sensowne wartości wskaźnika niezawodności, oraz dla wszystkich zbadanych współczynników korelacji. Można więc wnioskować o niewielkim wpływie typu rozkładu prawdopodobieństwa współczynnika Poissona na wskaźniki niezawodności

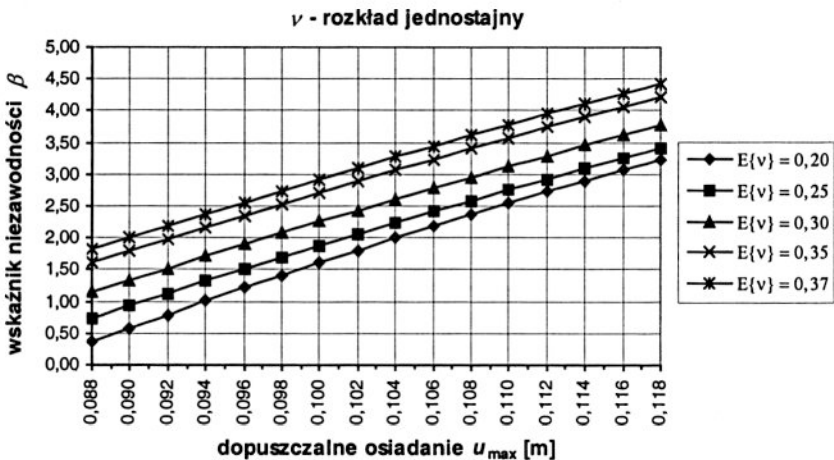
związane z przekroczeniem osiadań dopuszczalnych. Istotna jest natomiast wielkość współczynnika zmienności, co pokazują wyniki zestawione w tabeli 5.7, uzyskane przy założeniu prostokątnego rozkładu współczynnika Poissona. Jednak i w tym przypadku różnice w wartościach nie są drastyczne.

Dużo większe znaczenie mają wartości współczynników zmienności modułu Younga, co ilustrują wyniki obliczeń podane w tabeli 5.8, uzyskane przy założeniu jednostajnego rozkładu współczynnika Poissona skoncentrowanego na przedziale $[0,2; 0,4]$ wokół wartości oczekiwanej $E\{\nu\} = 0,3$. Pokazują one, że do poprawnej oceny wskaźnika niezawodności osiadań ośrodka sprężystego potrzebna jest przede wszystkim dokładna ocena współczynnika zmienności modułu Younga E .

Tabela 5.8. Wpływ współczynnika zmienności modułu Younga E na wskaźnik niezawodności β

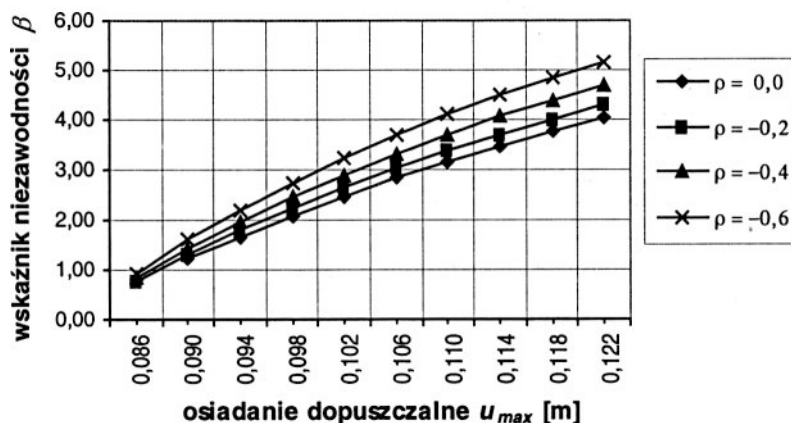
Osiadanie dopuszczalne u_{\max} [m]	Wskaźnik niezawodności β			
	cov $\{E\} = 10\%$ cov $\{\nu\} = 19\%$	cov $\{E\} = 20\%$ cov $\{\nu\} = 19\%$	cov $\{E\} = 30\%$ cov $\{\nu\} = 19\%$	cov $\{E\} = 40\%$ cov $\{\nu\} = 19\%$
0,10	2,26	1,218	0,776	0,520
0,11	3,12	1,672	1,092	0764
0,12	3,94	2,088	1,380	0,986
0,13	4,69	2,472	1,645	1,191
0,14	5,40	2,830	1,890	1,380
0,15	6,07	3,163	2,118	1,556
0,16	6,69	3,476	2,332	1,721
0,17	7,28	3,771	2,533	1,875
0,18	7,84	4,049	2,723	2,021
0,19		4,313	2,902	2,159
0,20		4,564	3,072	2,290
0,21		4,803	3,234	2,414
0,22		5,032	3,389	2,533
0,23		5,250	3,537	2,646
0,24		5,459	3,678	2,755
0,25		5,660	3,814	2,859
0,26			3,945	2,959
0,27			4,071	3,056
0,28			4,192	3,149
0,29			4,309	3,238
0,30			4,422	3,325
0,31				3,409
0,32				3,490
0,33				3,568
0,34				3,645

W sytuacji mało dostępnych danych statystycznych, pozwalających na rzetelną ocenę rozkładu prawdopodobieństwa współczynnika Poissona, proponuje się opisywać zmienność losową tegoż współczynnika za pomocą rozkładu prostokątnego, skoncentrowanego wokół wartości średniej na przedziale uzależnionym od współczynnika zmienności, a także od stopnia niepewności oznaczenia współczynnika Poissona. Przyjęcie szerszego przedziału zmienności daje bardziej konserwatywne wartości wskaźnika niezawodności, ale w przypadku niepewnego oszacowania – bardziej bezpieczne. Ponadto przyjęcie rozkładu równomiernego oznacza, że wartości współczynnika Poissona są przyjmowane z jednakowym prawdopodobieństwem na całym przedziale zmienności, co wydaje się uzasadnione w przypadku niezbyt precyzyjnego oznaczenia. Alternatywnie można zastosować rozkład beta, który pozwala na koncentrację wartości najbardziej prawdopodobnych wokół wartości modalnej. Tabela 5.6 pokazuje, że stosowanie rozkładu beta zamiast rozkładu jednostajnego prowadzi w rezultacie do bardzo zbliżonych wartości wskaźników niezawodności β . Stosując propozycję z rozkładem równomiernym przeprowadzono obliczenia, w których przyjęto różne wartości oczekiwane współczynnika ν oraz jego brak korelacji z modułem Younga E . Dla modułu E przyjęto rozkład lognormalny o $E\{E\} = 20$ MPa oraz $\sigma_E = 2$ MPa. Uzyskane zależności pokazano na rys. 5.8. Są one analogiczne do tych z rysunku 5.6. Potwierdza się liniowy charakter zależności wskaźnika niezawodności od osiadań dopuszczalnych. Mniejsze niż poprzednio wartości wskaźnika β spowodowane są większymi wariancjami współczynnika Poissona, gdyż w tym przypadku dla każdej wartości oczekiwanej przyjmowano przedział zmienności o długości $d = 0,2$. Przyjęcie takiej długości przedziału zmienności daje stałe odchylenie standardowe $\sigma_\nu = 0,058$, zaś współczynnik zmienności waha się od 16% dla $E\{\nu\} = 0,37$ do 29% dla $E\{\nu\} = 0,2$.



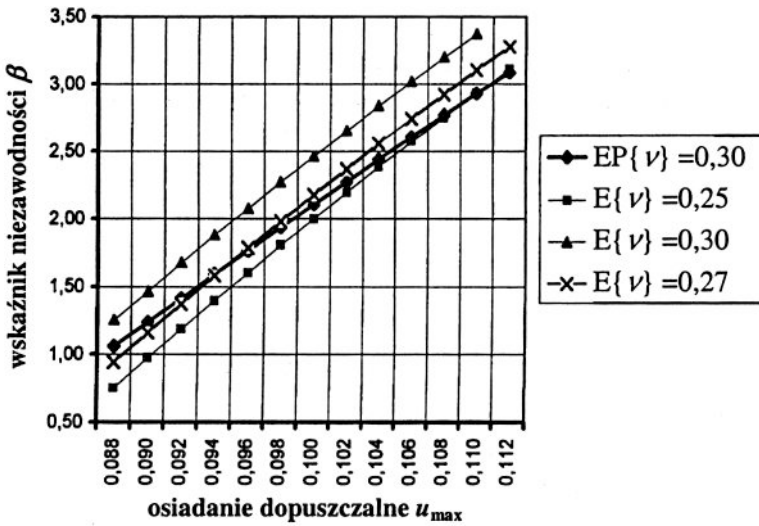
Rys. 5.8. Zależność wskaźnika niezawodności β od osiadania dopuszczalnego u_{\max} .
Przyjęto rozkład jednostajny dla współczynnika Poissona o długości przedziału zmienności $d = 0,2$

Z kolei na rysunku 5.9 pokazano wpływ wzajemnej korelacji parametrów E oraz ν na uzyskiwane wskaźniki niezawodności β . Wskaźnik niezawodności jest tym większy, im silniejsza ujemna korelacja pomiędzy parametrami sprzężystymi. Warto odnotować, że różnice pomiędzy poszczególnymi krzywymi, odpowiadającymi danemu współczynnikowi korelacji, zwiększają się wraz ze wzrostem wskaźnika β (osiadań dopuszczalnych).



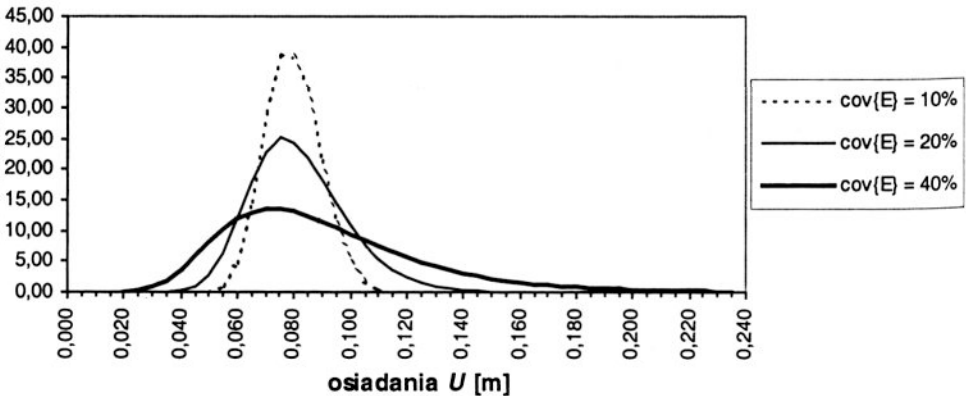
Rys. 5.9. Wykresy zależności wskaźnika niezawodności w zależności od współczynnika korelacji ρ oraz osiadania dopuszczalnego u_{max} . Przyjęto prostokątny rozkład współczynnika Poissona o wartości oczekiwanej $E\{\nu\} = 0,3$ i długości przedziału zmienności $d = 0,2$. Ponadto $E\{E\} = 20$ MPa oraz $\sigma_E = 2$ MPa

Jak wiadomo z praktyki obliczeniowej, w wielu wypadkach dokładna wartość współczynnika Poissona nie jest znana. Często się zdarza, że przy obliczeniach metodą elementów skończonych przyjmuje się bez specjalnego uzasadnienia wartość współczynnika Poissona równą $\nu = 0,3$. Wydaje się zatem, że w sytuacjach niepewnej wartości oczekiwanej można przyjąć prostokątny rozkład współczynnika Poissona skoncentrowany na szerszym przedziale, co oczywiście spowoduje wzrost jego wariancji. Innym rozwiązaniem jest użycie rozkładów złożonych, o których była mowa w podrozdziale 3.1. Można przyjąć, że wartość oczekiwana (średnia) współczynnika Poissona jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym skoncentrowanym wokół „niepewnej wartości”, a następnie przyjąć określony rozkład dla współczynnika Poissona, np. normalny lub beta. Rozkład złożony z losową wartością oczekiwaną zastosowano w obliczeniach, których wyniki pokazano w ostatniej kolumnie tabeli 5.7 oraz na rysunku 5.10. Przyjęto mianowicie, że wartość średnia współczynnika Poissona jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,2; 0,4]$, natomiast współczynnik Poissona jest zmienną losową o rozkładzie normalnym i współczynniku zmienności 19%.



Rys. 5.10. Zależność wskaźnika niezawodności beta od wartości oczekiwanej współczynnika Poissona oraz osiadania dopuszczalnego u_{max} . $EP\{\nu\} = 0,3$ oznacza rozkład złożony (opis w tekście).
W pozostałych przypadkach przyjęto rozkład prostokątny o $cov\{\nu\} = 10\%$

Porównując wyniki w tabeli 5.7 można zauważyć spadek wskaźników niezawodności, ale nie jest on bardzo znaczny. Na rysunku 5.10 wykres wskaźnika β dla rozkładu złożonego zestawiono z analogicznymi wykresami przy różnych wartościach oczekiwanych $E\{\nu\}$, będących wartościami stałymi. Niewielkie różnice w uzyskanych wskaźnikach niezawodności pozwalają sądzić, że taki model może stanowić dobrą aproksymację w sytuacji, gdy wartość oczekiwana $E\{\nu\}$ została określona z pewnym błędem.



Rys. 5.11. Gęstości prawdopodobieństwa osiadań U

Dysponując możliwością zmieniania w obliczeniach wartości osiadań dopuszczalnych u_{\max} można (poprzez przyjmowanie kolejnych wartości) wyznaczyć w przybliżony sposób dystrybuantę zmiennej losowej U , która charakteryzuje osiadania. Mając dystrybuantę zmiennej U , można następnie znaleźć odpowiadającą jej funkcję gęstości prawdopodobieństwa, a także oszacować momenty statystyczne. Uzyskane tą drogą funkcje gęstości prawdopodobieństwa U pokazano na rysunku 5.11 dla kolejnych wartości współczynnika zmienności modułu Younga, wynoszących odpowiednio 10%, 20% i 40%. W tabeli 5.9 zestawiono charakterystyki momentowe zmiennej losowej U .

Tabela 5.9. Momenty statystyczne osiadań U ,
uzyskane dla różnych wartości współczynników zmienności modułu Younga

Współczynniki zmienności modułu E	Osiedzenia		
	Wartość oczekiwana $E\{U\}$	Odchylenie standardowe σ_U	Współczynnik zmienności $\text{cov}\{U\}$
10%	0,07691	0,00971	12,62%
20%	0,07918	0,02112	26,68%
30%	0,083046	0,02550	30,71%
40%	0,088591	0,03580	40,41%

Uzyskane rezultaty są przybliżone. Warto jednak zauważyć, że współczynniki zmienności osiadań nie odbiegają zasadniczo od przyjętych w danym przykładzie współczynników zmienności modułu Younga. We wszystkich czterech przypadkach przyjęto równomierny rozkład współczynnika Poissona o wartości oczekiwanej $E\{\nu\} = 0,3$, skoncentrowanym na przedziale $[0,2; 0,4]$ (co daje 19% współczynnik zmienności). Okazuje się jednak, że zmienność losowa osiadań może (w sensie współczynnika zmienności) być większa od zmienności losowej modułu E . Fakt ten może mieć istotne znaczenie przy ocenie możliwych wahań osiadań podczas projektowania fundamentów. Warto też zauważyć, że uzyskane wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla osiadań są zbliżone kształtem do rozkładu lognormalnego, czyli rozkładu przyjętego dla modułu Younga. Wyniki analizy rozkładów prawdopodobieństwa osiadań U potwierdzają tezę o dominującym wpływie zmienności wahań losowych modułu Younga i drugorzędym znaczeniu losowych wahań współczynnika Poissona.

5.1.5. Uwagi podsumowujące

Zaproponowano opartą na połączeniu metody warstw skończonych z metodą SORM, efektywną procedurę służącą do analizy niezawodności fundamentu bezpośrednio posadowionego na liniowo-odkształcalnym ośrodku sprężystym.

Poprzez analizy numeryczne pokazano, że przy małych wartościach współczynnika Poissona ($\nu \leq 0,27$) jego wahania losowe mają znikomą wpływ na prawdopodobieństwo przekroczenia osiadania dopuszczalnego lub równoważny temu prawdopodobieństwu wskaźnik niezawodności β .

Typ rozkładu prawdopodobieństwa współczynnika Poissona ma bardzo niewielki wpływ na obliczony wskaźnik niezawodności i to zarówno dla małych, jak i dużych wartości średnich ν . Istotna jest natomiast wartość współczynnika zmienności ν .

Decydujący wpływ na wartość prawdopodobieństwa przekroczenia osiadania dopuszczalnego ma współczynnik zmienności modułu Younga E .

W przypadkach niewielkiej liczby danych dotyczących współczynnika Poissona proponuje się stosowanie rozkładu prostokątnego (równomiernego) na określonym przedziale zmienności. Można też zastosować rozkład złożony, w którym zmiany współczynnika ν opisuje rozkład normalny (lub beta), wartość zaś oczekiwana jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym.

Wzrost ujemnej korelacji pomiędzy parametrami sprężystymi E i ν powoduje wzrost wskaźnika niezawodności β . Przyjmując hipotezę, że korelacja pomiędzy E i ν jest ujemna, proponuje się przyjmować brak korelacji w sytuacjach, gdy dane nie pozwalają na oszacowanie współczynnika korelacji. W przypadku stwierdzenia dodatniej wartości współczynnika korelacji pomiędzy E i ν konieczne jest uwzględnienie tegoż współczynnika przy obliczaniu miar niezawodności.

W przypadku jednorodnego, liniowo-sprężystego podłoża o losowym module Younga, współczynniki zmienności osiadań są zbliżone do współczynników zmienności modułu.

Gdy z badań laboratoryjnych dostępna jest jedynie mała liczba oznaczeń modułu edometrycznego M , proponuje się następujący algorytm postępowania:

1. Oszacować rozkład prawdopodobieństwa modułu edometrycznego M .
2. Wstępnie przyjąć, że współczynnik Poissona jest nielosowy.
3. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa modułu Younga, korzystając ze znanej zależności teorii sprężystości

$$E = M_{ed} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}. \quad (5.3)$$

Przy przyjętym w punkcie 2. założeniu, że współczynnik ν jest nielosowy, moduł E ma rozkład prawdopodobieństwa tego samego typu co M , zmieniają się jedynie wartości oczekiwane i odchylenie standardowe, a także wyższe momenty.

4. Po określeniu rozkładu prawdopodobieństwa E , zrandomizować współczynnik ν , przyjmując, że ma on rozkład równomierny na przedziale, w którym oczekuje się jego zmienności. Zamiast rozkładu równomiernego można przyjąć rozkład złożony, w którym wartość oczekiwana jest zmienną losową.

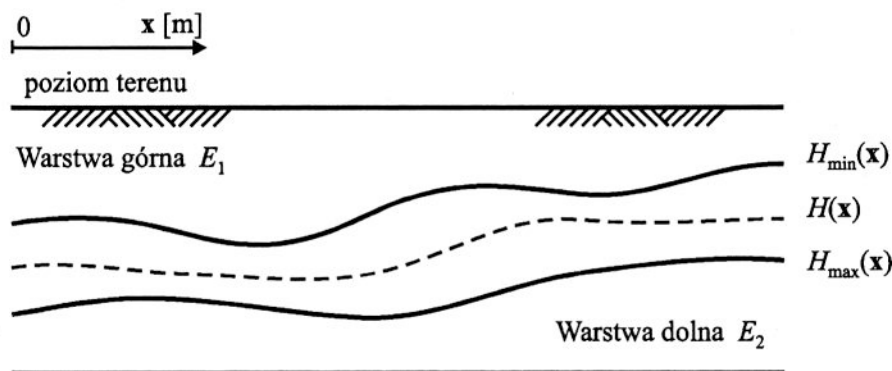
5. Założyć, że zmienne E i ν są stochastyczne niezależne.

Ta uproszczona procedura pozwala na uzyskanie łącznego rozkładu prawdopodobieństwa (E , ν) i przeprowadzenie obliczeń miar niezawodności w sytuacjach, gdy znane są tylko wyniki badań modułu edometrycznego, a więc w sytuacji najczęściej występującej w praktyce geotechnicznej.

5.2. Wpływ losowego położenia granicy warstw geotechnicznych na osiadania fundamentu bezpośredniego posadowionego na podłożu sprężystym

5.2.1. Sformułowanie zadania i sposób jego rozwiązania

Zagadnienie „losowej granicy” pomiędzy warstwami gruntowymi jest istotnym problemem z punktu widzenia praktyki geotechnicznej, gdyż na ogół określenie dokładnego przebiegu tej granicy nie jest możliwe. Szczególnie trudny przypadek stanowią niewielkie „soczewki” gruntu słabego. Położenie granicy może mieć istotny wpływ na osiadanie konstrukcji posadowionej na podłożu uwarstwionym, a w konsekwencji na zgodną z przeznaczeniem eksploatację budowli. Problem losowej granicy warstw został tu rozwiązany w zakresie oszacowania dwóch pierwszych momentów statystycznych zmiennej losowej osiadania. Zadanie rozwiązano posługując się metodą perturbacyjną, opisaną w podrozdziale 2.7.1, oraz metodą rozwinięcia w szereg Neumanna, przedstawioną w podrozdziale 2.7.2. Przedstawione poniżej rozwiązanie pochodzi z pracy opublikowanej przez Brząkałę i autora (Brząkała i Puła 1996).



Rys. 5.12. Schematyczne przedstawienie zadania „o losowej granicy warstw”

Zwykle poprzez dokonanie pewnej liczby odwiertów i pobranie próbek gruntu można określić pewien przedział głębokości ($H_{\min}(x)$, $H_{\max}(x)$), w którym przebiega granica pomiędzy warstwami $H(x)$, będąca zmienną losową. Pokazano to schematycznie na rysunku 5.12. Tak postawione zadanie, w którym zmienna losowa ma charakter geometryczny, można zastąpić przez zadanie ze zmienną opisującą niepewność parametryczną (Brząkała i Puła 1992a, Brząkała i Puła 1996), zakładając, że losowe położenie granicy warstw implikuje losową zmienność parametrów gruntu w obrębie przedziału $[H_{\min}(x), H_{\max}(x)]$. Załóżmy ponadto, że losowe położenie granicy

$H(\mathbf{x})$ jest funkcją losową, której wartość oczekiwana jest usytuowana w środku przedziału, tj.

$$E\{H(\mathbf{x})\} = \frac{H_{\max}(\mathbf{x}) + H_{\min}(\mathbf{x})}{2}. \quad (5.4)$$

Dla uproszczenia zadania, jak też mając na uwadze rezultaty pokazane w podrozdziale 5.1, rozważono jedynie pole modułów Younga $E(\mathbf{x})$, pomijając losowe wahanie współczynników Poissona. Przyjęto, że w obszarze zmian losowych moduły $E(\mathbf{x})$ zmieniają się następująco:

$$E_3(\mathbf{x}) = \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_1 - E_2}{2} \Delta e(\mathbf{x}), \quad (5.5)$$

gdzie E_1 jest wartością oczekiwaną modułu w warstwie górnej, E_2 – wartością oczekiwaną modułu w warstwie dolnej, $\Delta e(\mathbf{x})$ zaś jest, dla ustalonego punktu \mathbf{x} , bezwymiarową fluktuacją losową (zmienną losową) daną wzorem

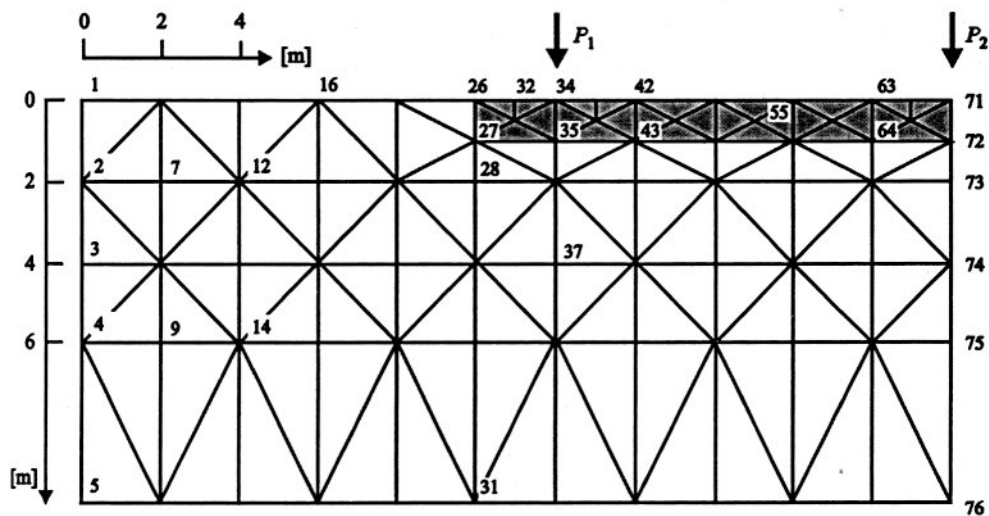
$$\Delta e(\mathbf{x}) = 2 \frac{H_{\max}(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x})}{H_{\max}(\mathbf{x}) - H_{\min}(\mathbf{x})} - 1, \quad (5.6)$$

przy czym $H(\mathbf{x})$ jest losowym położeniem granicy warstw. Należy zauważyć że:

1. $\Delta e(\mathbf{x}) \in [-1, 1]$.
2. Wzory (5.5) i (5.6) pozwalają na przejście od losowości geometrycznej do losowości parametrycznej poprzez specyficzną interpolację liniową w przedziale $[H_{\min}(\mathbf{x}), H_{\max}(\mathbf{x})]$.
3. Jeżeli $H(\mathbf{x})$ jest bliskie $H_{\max}(\mathbf{x})$, co oznacza, że granica przebiega w pobliżu warstwy dolnej, to $\Delta e(\mathbf{x})$ jest bliskie (-1) i E_3 przyjmuje wartość zbliżoną do E_2 , czyli modułu dolnej warstwy. Odwrotnie, położenie granicy w pobliżu warstwy górnej implikuje wartości modułów zbliżone do E_1 .
4. Wartość oczekiwana zmiennej losowej $\Delta e(\mathbf{x})$ jest równa zeru dla każdego \mathbf{x} , co wynika bezpośrednio z założenia (5.4) i wzoru (5.6).

5.2.2. Założenia przyjęte do obliczeń numerycznych

Rozwiązywano zadanie w płaskim stanie odkształcenia. Przyjęto siatkę MES jak na rysunku 5.13. Rysunek ten ilustruje jedynie połowę siatki, jednak w obliczeniach używano całości, gdyż mimo symetrii zadania deterministycznego, fluktuacje losowe pola nie muszą być symetryczne. Utwierdzenie w dwóch kierunkach przyjęto na obwodzie 1–5–76–147–143 (oczywiście bez węzłów znajdujących się „na powierzchni terenu”).



Rys. 5.13. Siatka MES przyjęta w zadaniu o warstwie losowej

Analizuje się osiadanie fundamentu płytowego wysokości $h = 1$ m i szerokości $B = 24$ m położonego między węzłami 26–71–116–117–72–27. Fundament ten obciążono siłami $P_2 = 1000$ kN/m, $P_1 = P_3 = 750$ kN/m przyłożonymi w węzłach o numerach odpowiednio 71, 34 i 108. Założono, że losowa granica pomiędzy warstwami sprężystymi została zaobserwowana pomiędzy 2 i 6 metrem w stosunku do powierzchni terenu (poziome pasmo 2–73–143–145–75–4 – lewa część tego pasma pokazana jest na rysunku 5.13). Dla porównania ta sama siatka oraz siły zostały zastosowane przy analizie trzech pojedynczych fundamentów pasmowych (każdy o wysokości 1 m i szerokości 4 m), przy czym obszary płyty betonowej z przykładu zostały zastąpione przez górną warstwę gruntu w sektorze 42–63–64–43 oraz jego symetrycznym obrazie 79–100–101–80.

Przyjęto następujące wartości deterministyczne dotyczące parametrów sprężystych rozpatrywanych zagadnień brzegowych:

Fundament betonowy: $E_0 = 27$ GPa, $\nu = 0,25$;

warstwa górna: $E_1 = 100$ MPa, $\nu = 0,30$;

warstwa dolna: $E_2 = 20$ MPa, $\nu = 0,40$.

Dla pasma (2–73–143–145–75–4), w którym przewidziano losowy przebieg granicy warstw, przyjęto założenia sformułowane w punkcie 5.2.1. Moduł Younga E_3 zmienia się losowo pomiędzy głębokościami $H_{\min} = 2$ m oraz $H_{\max} = 6$ m, przy stałym (nielosowym) współczynniku Poissona $\nu = 0,35$. Pole losowe modułu $E_3(\mathbf{x})$ zostało uproszczone do funkcji losowej jednej zmiennej $E_3(x_1)$, której zmienna niezależna x_1 w omawianych przykładach zmieniała się w przedziale $0 < x_1 < 44$ m. W ten sposób moduł $E_3(x_1)$ przyjmuje tę samą losową wartość w pionowej kolumnie złożonej z trójkątów siatki. W konsekwencji powstaje siatka 22 „makroelementów”, z których każdy składa się z czterech trójkątów, np. 4–9–7–2, 9–14–12–7 itd. Każdemu z makroele-

mentów przyporządkowana jest dokładnie jedna zmienna losowa E_i , $i = 1, 2, \dots, 22$. Powstałemu w ten sposób ciągowi zmiennych losowych nadano strukturę probabilistyczną, przyjmując następujące założenia:

- stała wartość oczekiwana i odchylenie standardowe:

$$E\{E_i\} = m, \quad \sqrt{E\{(X - E X_i)^2\}} = \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, 22,$$

- macierz kowariancji w postaci:

$$C = \text{cov}\{E_i, E_j\} = E\{(E_i - m)(E_j - m)\} = \sigma^2 \exp(-\alpha r_{ij}),$$

gdzie r_{ij} jest odległością pomiędzy środkami makroelementów i oraz j , α zaś parametrem funkcji korelacji zależnym od cech materiału.

Ze wzoru (5.5) wynika, że $E\{E_i\} = 60$ MPa. Wariancja zmiennej $\Delta e(x)$ była tak przyjmowana, aby uzyskać dla zmiennej $E_3(x_1)$ odchylenia standardowe $\sigma\{E_3(x_1)\} = 10$ MPa lub $\sigma\{E_3(x_1)\} = 16$ MPa (dwa różne przypadki). Ponadto założono, że $\alpha = 0,112$. Aby uzyskać momenty statystyczne dla osiadań, obliczenia wykonano metodą perturbacyjną (podrozdział 2.7.1), a następnie dla porównania obliczenia powtórzono stosując metodę rozwinięć Neumanna (podrozdział 2.7.2).

W metodzie Neumanna stosowano rozwinięcie drugiego rzędu (rozwinięcie pierwszego rzędu daje identyczne rezultaty jak metoda perturbacyjna), co oznacza uwzględnienie we wzorze (2.100) wyrazów U_0 , U_1 , i U_2 . Dodatkowo w metodzie Neumanna zastosowano symulację Monte Carlo losowego pola modułów, którą szczegółowo opisano w kolejnym podrozdziale. Przeprowadzono 1000 realizacji procesu symulacyjnego.

5.2.3. Symulacja pola modułów Younga

Przyjmuje się, że pole losowe modułów Younga $E_3(\mathbf{x})$ zostało zdyskretyzowane do postaci 22 zmiennych losowych, jak to opisano w poprzednim podrozdziale. Każda ze zmiennych E_i , $i = 1, 2, \dots, 22$ jest sprowadzona do postaci

$$E_i = m(1 + \Delta e_i), \quad (5.7)$$

gdzie $m = E\{E_i\}$ jest wartością oczekiwaną pola stałą na danym elemencie, Δe_i zaś jest losową fluktuacją (w postaci pojedynczej zmiennej losowej) o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji $\text{Var}\{\Delta e_i\} = \frac{\sigma^2}{m^2}$. W obliczeniach z zastosowaniem rozwinięć

Neumanna losowe fluktuacje Δe_i wprowadzono poprzez symulację Monte Carlo w postaci jednorodnego łańcucha Markowa według następującego algorytmu:

1. Wygenerować dwa ciągi liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$: $\{r_i^{(1)}\}$ oraz $\{r_i^{(2)}\}$.

2. Liczby pseudolosowe o rozkładzie normalnym obliczać według generatora Boxa (Rubinstein 1981)

$$\begin{aligned}x_i^{(1)} &= \sqrt{-2 \ln(r_i^{(1)})} \cos(2\pi r_i^{(2)}), \\x_i^{(2)} &= \sqrt{-2 \ln(r_i^{(1)})} \sin(2\pi r_i^{(2)}),\end{aligned}\tag{5.8}$$

gdzie $r_i^{(1)}$, $r_i^{(2)}$ są elementami ciągów wygenerowanych w punkcie 1. Otrzymuje się w ten sposób parę „niezależnych” (w zasadzie pseudoniezależnych) liczb pseudolosowych ze standardowego rozkładu normalnego.

3. Przy zadanej wartości wariancji σ^2 , charakteryzującej dane pole losowe, oraz współczynnika korelacji ρ pomiędzy sąsiednimi elementami, fluktuacje Δe_i generuje się według następującej zależności rekurencyjnej:

Δe_0 jest liczbą pseudolosową z rozkładu normalnego o średniej zero i wariancji σ^2 / m^2 , oraz

$$\Delta e_{i+1} = \rho \Delta e_i + Y, \tag{5.9}$$

gdzie Y jest liczbą pseudolosową z rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji

$$\text{Var}\{Y\} = \frac{\sigma^2}{m^2} (1 - \rho^2), \text{ niezależną od } \Delta e_i.$$

Należy zauważyć, że wygenerowany według tej procedury ciąg liczb pseudolosowych ma następujące własności:

a. Dla każdego i Δe_i jest zmienną losową normalną o średniej 0 i wariancji σ^2 / m^2 , gdyż wobec niezależności Δe_i oraz Y jest

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\Delta e_{i+1}\} &= \text{Var}\{\rho \Delta e_i + Y\} = \text{Var}\{\rho \Delta e_i\} + \text{Var}\{Y\} = \rho^2 \text{Var}\{\Delta e_i\} + \frac{\sigma^2}{m^2} (1 - \rho^2) \\&= \rho^2 \frac{\sigma^2}{m^2} + \frac{\sigma^2}{m^2} - \rho^2 \frac{\sigma^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2},\end{aligned}$$

b. Kowariancja sąsiednich zmiennych jest następująca:

$$\begin{aligned}\text{cov}\{\Delta e_{i+1}, \Delta e_i\} &= \text{E}\{\Delta e_i (\rho \Delta e_i + Y)\} = \text{E}\{\rho (\Delta e_i)^2 + \Delta e_i Y\} \\&= \rho \text{E}\{(\Delta e_i)^2\} + 0 = \frac{\sigma^2}{m^2} \rho.\end{aligned}$$

Stąd współczynnik korelacji wynosi $\rho(\Delta e_{i+1}, \Delta e_i) = \rho$. Analogicznie $\rho(\Delta e_{i+k}, \Delta e_i) = \rho^k$. Ciąg $\{\Delta e_i\}$ tworzy jednorodny łańcuch Markowa (por. np. Euler (1981)). Przy wartości $\rho = 0,8$ kowariance pomiędzy wyrazami są w przybliżeniu takie same jak przy zastosowaniu funkcji $\rho \exp(-\alpha r_{ij})$ ze stałą $\alpha = 0,112$ (por. podrozdział 5.2.2). Przy stosowaniu do symulacji rozkładu normalnego istnieje ryzyko, że wygenerowana liczba nie będzie należała do przedziału zmienności, tj. $\Delta e(x) \notin [-1, 1]$. W przypadku niewielkiego współczynnika zmienności ryzyko takie nie jest duże. W dalszych obliczeniach współczynnik zmienności modułu nie przekraczał wartości 27%, co dawało prawdopodobieństwo, że $\Delta e(x) \notin [-1, 1]$ około 0,0002. Przy liczbie realizacji w procesie symulacji nie przekraczającej 1000 szansa wyjścia poza przedział zmienności nie była więc duża ($\approx 0,01998$).

5.2.4. Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono dla czterech następujących wariantów zadania:

- **E.1.** Fundament płytowy, metoda perturbacyjna, odchylenie standardowe $\sigma\{E_3\} = 10$ MPa.
- **E.2.** Trzy równoległe, rozdzielone fundamenty ławowe, metoda perturbacyjna, odchylenie standardowe $\sigma\{E_3\} = 10$ MPa.
- **E.3.** Fundament płytowy, metoda Neumanna z zastosowaniem symulacji Monte Carlo, odchylenie standardowe $\sigma\{E_3\} = 10$ MPa.
- **E.4.** Fundament płytowy, metoda Neumanna z zastosowaniem symulacji Monte Carlo, odchylenie standardowe $\sigma\{E_3\} = 16$ MPa.

Uzyskane wyniki zestawiono w tabelach 5.10 i 5.11.

Tabela 5.10. Momenty statystyczne osiadań węzłowych

Numer węzła:	16 & 127	34 & 108	55 & 92	63 & 79	71
Wartość oczekiwana $E\{U\} = U_0$ [mm]	E.1: 2,5 E.2: 1,8 E.3: 2,5 E.4: 2,6	E.1: 11,8 E.2: 11,5 E.3: 11,9 E.4: 12,0	E.1: 14,1 E.2: 14,2 E.3: 14,2 E.4: 14,3	E.1: 15,1 E.2: 18,1 E.3: 15,2 E.4: 15,3	E.1: 15,4 E.2: 18,2 E.3: 15,5 E.4: 15,6
Odchylenie standardowe σ_U [mm]	E.1: 0,10 E.2: 0,06 E.3: 0,10 E.4: 0,15	E.1: 0,48 E.2: 0,47 E.3: 0,48 E.4: 0,68	E.1: 0,47 E.2: 0,55 E.3: 0,47 E.4: 0,67	E.1: 0,48 E.2: 0,73 E.3: 0,47 E.4: 0,67	E.1: 0,48 E.2: 0,71 E.3: 0,47 E.4: 0,67
Współczynnik zmienności $cov\{U\}$ [%]	E.1: 4,0 E.2: 3,6 E.3: 4,0 E.4: 5,6	E.1: 4,1 E.2: 4,1 E.3: 4,0 E.4: 5,7	E.1: 3,3 E.2: 3,9 E.3: 3,3 E.4: 4,7	E.1: 3,2 E.2: 4,0 E.3: 3,1 E.4: 4,4	E.1: 3,1 E.2: 3,9 E.3: 3,0 E.4: 4,3

Tabela 5.11. Korelacje węzłowych osiadań

E.1. E.2. E.3. E.4.	16	34	63	71	79	108	127
16	1,00 1,00 1,00 1,00						
34	0,92 0,63 0,91 0,91	1,00 1,00 1,00 1,00					
63	0,62 -0,05 0,60 0,59	0,84 0,68 0,83 0,82	1,00 1,00 1,00 1,00				
71	0,50 -0,17 0,49 0,47	0,76 0,59 0,75 0,74	0,99 0,98 0,99 0,99	1,00 1,00 1,00 1,00			
79	0,39 -0,29 0,37 0,35	0,67 0,48 0,67 0,65	0,96 0,93 0,96 0,96	0,99 0,98 0,99 0,99	1,00 1,00 1,00 1,00		
108	-0,07 -0,36 -0,09 -0,13	0,27 0,15 0,25 0,21	0,67 0,48 0,67 0,63	0,76 0,59 0,76 0,73	0,84 0,68 0,84 0,81	1,00 1,00 1,00 1,00	
127	-0,42 -0,39 -0,42 -0,46	-0,07 -0,36 -0,08 -0,13	0,39 -0,29 0,38 0,34	0,50 -0,17 0,50 0,46	0,62 -0,05 0,61 0,58	0,92 0,63 0,92 0,91	1,00 1,00 1,00 1,00

symetria

Przeprowadzone obliczenia pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Sprężysty betonowy fundament spoczywający na liniowo sprężystym podłożu powoduje „tłumienie” efektów losowych niejednorodności podłoża. W analizowanych przykładach zaobserwowano istotną redukcję współczynnika zmienności osiadań w stosunku do współczynnika zmienności modułu (z 27% do ok. 4–6% w przykładzie E.4). Wydaje się to być zjawiskiem charakterystycznym dla modeli liniowych (por. także Brząkała i Puła 1992). Z drugiej strony, redukcja ta może wiązać się z faktem, że losowe fluktuacje pojawiają się dopiero na pewnej głębokości, a nie bezpośrednio pod fundamentem. Jak bowiem pokazano w poprzednim podrozdziale, w przypadku losowych parametrów całego podłoża współczynniki zmienności osiadań mogą być zbliżone do współczynników zmienności modułów podłoża, a nawet je przewyższać.

2. W stosunku do macierzy korelacji trudno jest wyciągnąć tego typu jednoznaczne wnioski. Przykładowo współczynnik korelacji osiadań w węzłach 34 i 71 wyniósł 0,75 (przykład E.1), podczas gdy wartości modułów w tych węzłach były skorelowane niższym współczynnikiem $\rho = 0,33$. Dla rozdzielonych ław fundamentowych (przykład E.2) korelacja osiadań jest bliższa wartości 0,33 niż w przypadku fundamentu płytowego (przykład E.1). Warto zauważyć, że pomimo iż wszystkie współczynniki korelacji pola modułów były dodatnie, to korelacje osiadań przyjmują także wartości ujemne.

3. Dla małych wariacji modułów (przykłady E.1 i E.3) metodą Neumanna uzyskano wartości osiadań bardzo zbliżone do wyników otrzymanych metodą perturbacyjną (por. także Brząkała i Puła 1992b). Przewaga metody Neumanna nad perturbacyjną polega na tym, że można ją z powodzeniem zastosować także do znacznych wahań losowych parametru E , co wykorzystano w przykładzie E.4. Jest to bardzo istotne w zadaniach geotechniki, gdzie losowe wahania parametrów są daleko większe niż w materiałach takich jak beton czy stal.

5.3. Losowe obciążenia.

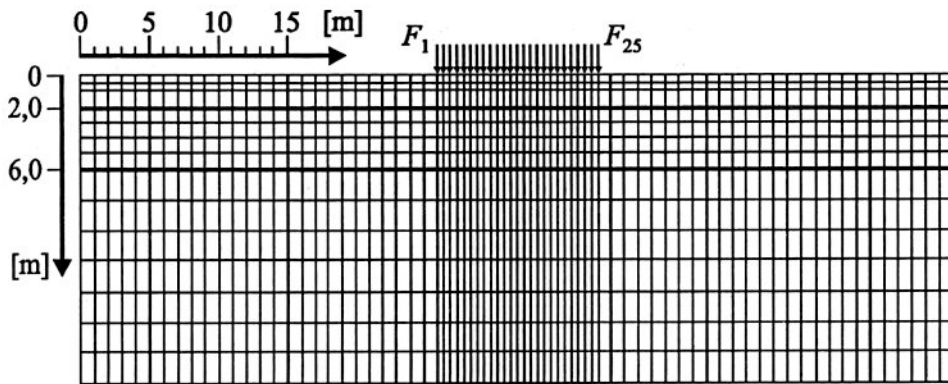
Efekt korelacji sił obciążających fundament

5.3.1. Sformułowanie zadania

W podrozdziale 5.1 zbadany został efekt wzajemnej korelacji parametrów sprężystych podłoża na uzyskiwane w analizie osiadań wskaźniki niezawodności. W podrozdziale 5.3 zostanie zbadany wpływ wzajemnego skorelowania sił obciążających fundament na prawdopodobieństwo przekroczenia dopuszczalnego poziomu osiadań. Zagadnienie to było badane przez Brząkałę oraz autora (Puła 1993; Brząkała i Puła 1996). Ponadto zbadano możliwość przybliżonego określenia rozkładu prawdopodobieństwa losowych osiadań fundamentu w celu ekstrapolacji prawdopodobieństw na dowolnie zadane wartości osiadań dopuszczalnych. Aby wyeliminować wpływy innych parametrów losowych, przyjęto parametry podłoża jako nielosowe, zaś jedynymi zmiennymi losowymi były siły obciążające fundament. Bazując na metodzie elementów skończonych, do rozwiązania zagadnienia przyjęto metodę FERM scharakteryzowaną w podrozdziale 2.7.3 w połączeniu z metodami FORM i SORM.

5.3.2. Założenia przyjęte do analiz numerycznych

Zadanie rozwiązywano dla fundamentu płytowego w oparciu o schemat zaprezentowany na rysunku 5.14.



Rys. 5.14. Siatka MES z przyłożonymi siłami o wartościach losowych

W płaskim stanie odkształcenia rozpatruje się fundament płytowy wysokości $h = 0,5$ m oraz szerokości $B = 12$ m poddany działaniu 25 pionowych sił F_i , $i = 1, 2, \dots, 25$ o losowej wartości, przyłożonych w punktach węzłowych siatki fundamentu. Założono przy tym, że wartość oczekiwana $E\{F_i\} = 100$ kN/m i odchylenie standardowe $\sigma\{F_i\} = 20$ kN/m są stałe dla wszystkich sił F_i , $i = 1, 2, \dots, 25$. Podłoże składa się z trzech poziomych warstw, traktowanych jako ośrodki liniowo sprężyste o nielosowych parametrach, posiadających następujące własności:

- warstwa górna (grubości 2 m): moduł Younga $E = 100$ MPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,30$;
- warstwa pośrednia (grubości 4 m): moduł Younga $E = 60$ MPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,35$;
- warstwa dolna (grubości 14 m): moduł Younga $E = 20$ MPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,40$.

Poniżej dolnej warstwy występuje podłoże skalne, które można uznać za nieodkształcalne. Przyjęto następujące parametry sprężyste fundamentu: $E = 27$ GPa oraz $\nu = 0,25$. Wszystkie zewnętrzne węzły siatki (oprócz powierzchniowych) przyjęto jako utwierdzone ze względu na przemieszczenia poziome i pionowe. Tak jak w sytuacji opisanej w podrozdziale 5.1.2 obliczano prawdopodobieństwa przekroczenia w postaci $p_F = P\{U_i > u(i)_{\max}\}$ oraz odpowiadające im jednoznacznie wskaźniki niezawodności β_i , $i = 1, 2, \dots, n$, przy czym $u(i)_{\max}$ oznacza arbitralnie ustalone osiadanie dopuszczalne w węźle i . W analizach numerycznych rozpatrywano cztery przypadki, oznaczane dalej jako A, B, C i D. We wszystkich czterech przypadkach wartości oczekiwane oraz odchylenia standardowe były stałe (o wartościach podanych wyżej) Oprócz wcześniej sprecyzowanych założeń przyjęto dodatkowo:

A: F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ mają rozkłady normalne i są stochastycznie niezależne;

B: F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ mają rozkłady normalne, ale siły F_i i F_j są skorelowane z wykładniczo zanikającym współczynnikiem korelacji: $\rho = (0,9)^{|i-j|}$,

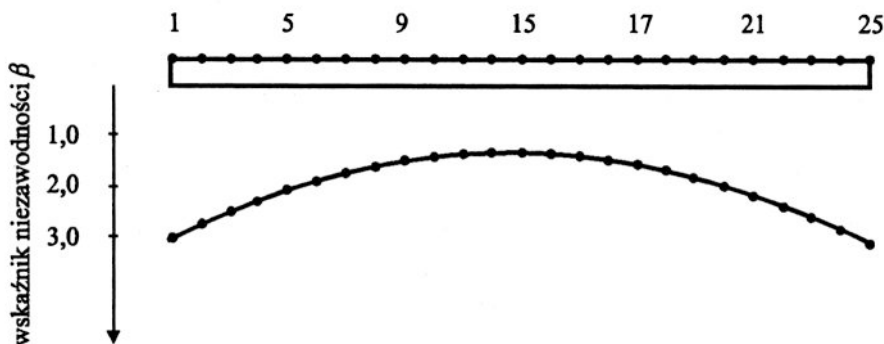
C: F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ mają rozkłady lognormalne i są stochastycznie niezależne,

D: F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ mają rozkłady lognormalne i są skorelowane w sposób identyczny jak w przypadku B.

5.3.3. Wyniki obliczeń i komentarze

Rezultaty obliczeń przy stałej wartości osiadań dopuszczalnych $u(i)_{\max} = 0,075$ m, dla $i = 1, 2, \dots, n$, zamieszczono w tabeli 5.12. Węzły są numerowane od strony lewej do prawej (patrz rys. 5.15).

Na rysunku 5.15 przedstawiono wartości wskaźników niezawodności β w poszczególnych węzłach (dla schematu obciążeń D).



Rys. 5.15. Wskaźnik niezawodności dla osiadań wybranych punktów fundamentu (schemat obciążenia D)

Wyniki w tabeli 5.12 pokazują bardzo istotny wpływ korelacji pomiędzy siłami obciążającymi fundament na wartości wskaźników niezawodności związanych z przekraczaniem osiadań dopuszczalnych przez różne punkty położone na fundamencie. Dla dużych wartości współczynnika korelacji wartości prawdopodobieństwa awarii są wielokrotnie większe niż w przypadku braku korelacji. Rezultat ten ma istotne znaczenie dla oceny bezpieczeństwa fundamentu. Świadczy on mianowicie o konieczności uwzględnienia korelacji pomiędzy siłami obciążającymi. Założenie braku korelacji lub stochastycznej niezależności w sytuacji braku odpowiednich danych „może być błędem w stronę niebezpieczną”, znacznie podwyższającym wskaźniki niezawodności.

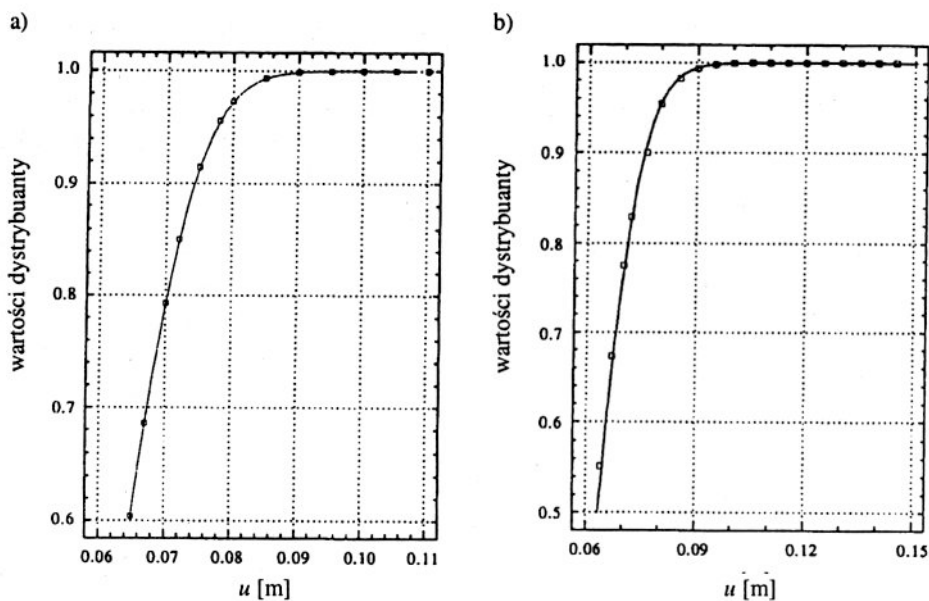
Z drugiej strony zmiana rozkładu prawdopodobieństwa sił z normalnego na lognormalny w zasadzie nie powoduje dużych zmian wskaźnika niezawodności. Zgodnie z oczekiwaniem, ze względu na asymetrię rozkładu lognormalnego, wskaźniki niezawodności uzyskane przy jego zastosowaniu są nieco mniejsze niż w przypadku przyjęcia rozkładu normalnego.

Przez powtarzanie obliczeń dla różnych wartości osiadań dopuszczalnych $u(i)_{\max}$ można określić w sposób przybliżony dystrybuantę lub gęstość prawdopodobieństwa losowego osiadania U zadanego punktu (tak jak to zrobiono w podrozdziale 5.1.4). Tu przykładowo zamieszczono wyniki dla punktu pod środkiem fundamentu (węzeł numer 13). W przypadku schematu obciążenia B (rys. 5.16a) okazało się, że dobrym przybliżeniem jest dystrybuanta rozkładu normalnego (przybliżenie uzyskane metodą najmniejszych kwadratów) o wartości oczekiwanej $E\{U\} = 0,0626$ m i odchyleniu standardowym $\sigma\{U\} = 0,0091$ m (współczynnik zmienności 14,5%). W przypadku schematu obciążenia D (rys. 5.16b) dobrym przybliżeniem jest dystrybuanta rozkładu lognormalnego o momentach identycznych jak w przypadku schematu obciążenia B. Okazało się, że rozkład prawdopodobieństwa osiadań U jest w przybliżeniu tego samego rodzaju co rozkłady prawdopodobieństwa sił obciążających fundament. Rezultat ten nie daje się przewidzieć na drodze teoretycznej. Łatwość określania przybliżonego rozkładu osiadań jest o tyle cenna, że z przybliżonej dystrybuanty można już bezpośrednio odczytywać prawdopodobieństwo awarii postaci $p_F = P\{U_i > u(i)_{\max}\}$ dla kolejnych progów osiadań już bez konieczności kolejnych obliczeń metodami FERM, FORM i SORM.

Warto także odnotować, że współczynnik zmienności zmiennej losowej U wyniósł 14,5%, a więc był mniejszy niż współczynniki zmienności sił obciążających fundament, przyjęte jednakowo dla każdej siły na poziomie 20%. Może to oznaczać efekt tłumienia zmienności losowej odpowiedzi przez model.

Tabela 5.12. Prawdopodobieństwa awarii oraz odpowiadające im wskaźniki niezawodności w wybranych węzłach (SORM)

Schemat obciążenia	Miary	Numer węzła							
		1	3	5	7	9	11	13	
A	p_F	$6,28 \cdot 10^{-33}$	$3,08 \cdot 10^{-23}$	$3,60 \cdot 10^{-16}$	$1,48 \cdot 10^{-11}$	$8,39 \cdot 10^{-9}$	$2,27 \cdot 10^{-7}$	$6,25 \cdot 10^{-7}$	
	β_n	11,90	9,86	8,07	6,65	5,64	5,05	4,85	
B	p_F	$9,06 \cdot 10^{-5}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$8,58 \cdot 10^{-3}$	$2,70 \cdot 10^{-2}$	$5,34 \cdot 10^{-2}$	$7,62 \cdot 10^{-2}$	$8,51 \cdot 10^{-2}$	
	β_n	3,74	2,99	2,38	1,93	1,61	1,43	1,37	
C	p_F	$6,50 \cdot 10^{-21}$	$1,30 \cdot 10^{-15}$	$5,30 \cdot 10^{-12}$	$3,42 \cdot 10^{-9}$	$2,50 \cdot 10^{-7}$	$2,68 \cdot 10^{-6}$	$5,69 \cdot 10^{-6}$	
	β_n	9,31	7,91	6,80	5,80	5,03	4,55	4,39	
D	p_F	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$5,26 \cdot 10^{-3}$	$1,69 \cdot 10^{-2}$	$3,78 \cdot 10^{-2}$	$6,34 \cdot 10^{-2}$	$8,42 \cdot 10^{-2}$	$9,21 \cdot 10^{-2}$	
	β_n	3,05	2,56	2,12	1,78	1,53	1,38	1,33	



Rys. 5.16. Dystrybuanty osiadań punktu węzłowego nr 13.

- a) schemat obciążenia B. Punkty z obliczeń oznaczono kółkami, linia ciągła jest wykresem fragmentu dystrybuanty rozkładu normalnego uzyskanej metodą najmniejszych kwadratów,
 b) schemat obciążenia D. Punkty z obliczeń oznaczono kwadratami, linia ciągła jest wykresem fragmentu dystrybuanty rozkładu lognormalnego uzyskanej metodą najmniejszych kwadratów

5.4. Adaptacja metody powierzchni odpowiedzi (*the response surface method*) do oszacowania prawdopodobieństwa przekroczenia osiadania dopuszczalnego przez fundament posadowiony na podłożu sprężystym

W podrozdziale 5.1 skonstruowano procedurę numeryczną umożliwiającą ocenę prawdopodobieństwa awarii (wskaźnika niezawodności), gdy za awarię przyjmuje się przekroczenie przez osiadanie wybranego punktu fundamentu pewnego ustalonego progu u_{\max} , zwanego osiadaaniem dopuszczalnym. Jak wiadomo, jest to kluczowe zagadnienie w obliczeniach stanu granicznego eksploatacji fundamentów. Procedura ta, zastosowana do zagadnień modelowania probabilistycznego parametrów sprężystych podłoża gruntowego, opierała się na metodzie warstw skończonych. Jednak w zagadnieniach inżynierskich, dla których tworzone są algorytmy obliczeń niezawodności, osiadania konstrukcji analizowane są częściej za pomocą metody elementów skończonych. Istotne

zatem staje się posiadanie procedury do obliczeń prawdopodobieństwa przekroczenia (5.2), stanowiącej kontynuację obliczeń osiadań przeprowadzanych metodą elementów skończonych. Taką procedurą jest np. metoda FERM, opisana w podrozdziale 2.7.3 i zastosowana do obliczeń w podrozdziale 5.3. Jednak jak już sygnalizowano w 2.7.3, ze względu na konieczność numerycznego szacowania gradientów na stosunkowo mało licznych zbiorach punktów, metoda FERM może prowadzić do znacznych i trudnych do oszacowania błędów w ocenie prawdopodobieństw awarii, zwłaszcza gdy elementy macierzy sztywności są zmiennymi losowymi o dużych współczynnikach zmienności. Z tych względów niniejszy podrozdział poświęcony jest zbudowaniu procedury do obliczeń miar niezawodności, opartej na metodzie elementów skończonych oraz metodzie powierzchni odpowiedzi (por. podrozdział 2.7.4). W literaturze dotyczącej zastosowań metody powierzchni odpowiedzi w geotechnice są prace dotyczące stateczności zboczy (Wong 1985) oraz tunelowania (El-Meligy et al. 1997). Natomiast osiadań fundamentów bezpośrednich dotyczą prace Bauera i Puły (Bauer i Puła 1999, Bauer i Puła 2000a) oraz poniższe opracowanie.

W podrozdziale 5.4 zaproponowane zostaną trzy rodzaje powierzchni odpowiedzi wraz z dyskusją możliwości ich stosowania do oceny prawdopodobieństw postaci (5.2) w przypadku podłoża liniowo sprężystego. Dodatkowo sprawdzona będzie procedura bazująca na tzw. analogu edometrycznym, inaczej zwana metodą odkształceń jednoosiowych (Wiłun 1976). Po omówieniu procedur wykonane zostaną analizy numeryczne, które stanowiąc będą uzupełnienie analiz przeprowadzonych w podrozdziale 5.1.

5.4.1. Funkcje odpowiedzi dla osiadań fundamentu bezpośredniego

Aby skonstruować procedury niezawodnościowe związane ze stanem granicznym użyteczności (por. podrozdział 2.7.4), należy określić funkcję opisującą w sposób jawny osiadanie fundamentów jako funkcję zmiennych, takich jak obciążenia, wielkości geometryczne i stałe materiałowe, które mogą być uważane za zmienne losowe. Funkcja ta, nazwana w 2.7.4 funkcją osiadania i oznaczona jako $U(\mathbf{X})$, będzie użyta do zdefiniowania funkcji stanu granicznego w sposób taki jak we wzorze (5.1). W celu uzyskania funkcji $U(\mathbf{X})$ w postaci odpowiedniej do dalszych obliczeń miar niezawodności należy:

- po pierwsze: założyć określoną postać funkcji (spośród funkcji elementarnych) z niewiadomymi parametrami,
- po drugie: podać procedurę prowadzącą do wyznaczenia niewiadomych parametrów (sposób dopasowania).

W celu określenia postaci funkcji U posłużono się metodami regresji w sposób opisany w podrozdziale 2.7.4. Poniżej przedstawione zostaną trzy propozycje dotyczące postaci funkcji odpowiedzi $U(\mathbf{X})$ dla osiadań fundamentu bezpośredniego: wielomian drugiego stopnia, wielomian drugiego stopnia z dodatkowym składnikiem

„edometrycznym” oraz funkcje wywodzące się z techniki sieci neuronowych. Dyskusja nad zastosowaniem kolejnych propozycji zostanie przeprowadzona w dalszych podpunktach. Funkcje przedstawione dalej są funkcjami dwóch zmiennych, gdyż w przykładach numerycznych rozpatrywane będzie podłoże jednowarstwowe, a więc przy obliczaniu osiadań jedynymi losowymi parametrami ośrodka będą: moduł Younga $X_1 = E$ oraz współczynnik Poissona $X_2 = \nu$.

5.4.1.1. Funkcja odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia

Ze względu na swoją prostotę wielomian drugiego stopnia jest często używany jako funkcja odpowiedzi (Bucher i Bourgund 1990). Dla dwóch zmiennych losowych ma ona ogólną postać

$$U(X_1, X_2) = B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + \text{err}, \quad (5.10)$$

gdzie X_1 reprezentuje moduł Younga E , X_2 jest współczynnikiem Poissona ν , a err jest zmienną losową błędu aproksymacji (por. wzór (2.112)). Dla przypadku fundamentu bezpośredniego proponuje się podany poniżej algorytm, będący zmodyfikowaną procedurą schematu opisanego w pracy Englund i Rackwitz (1992).

- Mając dane wartości oczekiwane zmiennych niezależnych wyznacza się przybliżony zakres zmienności X_1 i X_2 . Jego zasięg można przyjąć jako plus/minus wartość odchylenia standardowego od wartości oczekiwanej dla każdej zmiennej.

- Wybierając pary wartości stałych materiałowych z zakresu ich zmienności uzyskuje się (poprzez obliczenia metodą elementów skończonych) kilkanaście wartości osiadań fundamentu.

- Traktując wyrażenie (5.10) opisujące powierzchnię odpowiedzi jako model regresji, wyznacza się początkowe wartości b_i parametrów B_i za pomocą regresji liniowej.

- Tak otrzymaną powierzchnię $U(X_1, X_2)$ podstawia się do wzoru (5.1), uzyskując funkcję stanu granicznego $g(\mathbf{x})$.

- Następnie, stosując metodę FORM, znajduje się punkt obliczeniowy (podrozdział 2.4) położony na powierzchni stanu granicznego $g(\mathbf{x}) = 0$.

- Powyższe kroki postępowania powtarza się w otoczeniu punktu obliczeniowego, zmniejszając zakres zmiennych losowych na przykład do plus/minus połowy odchylenia standardowego od wartości współrzędnych wyznaczających punkt obliczeniowy. Wymaga to wyznaczenia nowego zestawu współczynników B_i .

- Wyznaczone w ten sposób współrzędne punktu obliczeniowego najczęściej są już wystarczająco dokładne, co sprawdza się przez obliczenia MES. Gdyby jednak zachodziła konieczność zwiększenia dokładności obliczeń, to można całą procedurę postępowania powtórzyć, zmniejszając jeszcze bardziej zakres zmiennych losowych, np. do plus/minus jednej czwartej odchylenia standardowego od wartości współrzędnych poprzednio wyznaczonego punktu obliczeniowego. Krok ten wymaga wyznaczenia za pomocą postępowania regresyjnego kolejnego zestawu współczynników B_i .

Dla ostatniego punktu obliczeniowego wyznacza się opowiadający mu wskaźnik niezawodności β , a następnie oblicza się prawdopodobieństwo awarii p_F według wzoru (2.31). Następnie stosuje się metodę SORM (podrozdział 2.4), ewentualnie poprawkę wynikającą z symulacji ważonej (podrozdział 2.5). Należy zwrócić uwagę, że w modelu powierzchni odpowiedzi (5.10) znajduje się składnik mieszany ze współczynnikiem B_6 . Powoduje to, że cały prostokątny obszar zmienności E i ν powinien być równomiernie pokryty punktami, dla których wyznaczono wartość osiadania. Nie wystarczy mieć tylko punkty na dwóch bokach prostokąta zmienności stałych materiałowych. Umieszczenie „składnika mieszanego” może okazać się kłopotliwe lub niecelowe, gdy liczba zmiennych losowych w zadaniu będzie większa. Spowoduje on bowiem konieczność przeprowadzenia dużej liczby obliczeń w celu wyznaczenia powierzchni typu (5.10). Wielomiany drugiego stopnia znajdują też zastosowanie w zadaniach o większej niż dwie liczbie zmiennych losowych (Bucher i Bourgund 1990). Wówczas jednak najczęściej unika się „składników mieszanych”:

Warto też podkreślić, że najdokładniejsze „dopasowania” powierzchni odpowiedzi dokonuje się w otoczeniu punktu obliczeniowego. Wynika to z faktu, że otoczenie tego właśnie punktu najwięcej wnosi do całej masy prawdopodobieństwa awarii (por. podrozdziały 2.4 oraz 2.7.4).

5.4.1.2 Aproksymacja drugiego stopnia ze „składnikiem edometrycznym”

Okazuje się, że w wielu sytuacjach dodanie dodatkowego składnika do wielomianu aproksymacyjnego może polepszyć dopasowanie powierzchni odpowiedzi do zbioru wyników numerycznych, o ile składnik ten wynika z teorii związanej z rozpatrywanym zadaniem (El-Meligy i inni 1997). Tu proponuje się uzupełnienie funkcji (5.10) o składnik określający osiadanie próbki gruntu (o jednostkowej wysokości i przy jednostkowym naprężeniu) w edometrze

$$s = \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{E(1 - \nu)}. \quad (5.11)$$

W ten sposób funkcja opisująca powierzchnie odpowiedzi dla osiadania przybierze postać

$$U(X_1, X_2) = B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + B_7 \frac{1 - X_2 - 2X_2^2}{X_1(1 - X_2)} + err. \quad (5.12)$$

Poza zmianą postaci funkcji z (5.10) na (5.12) algorytm obliczeń jest identyczny jak w punkcie 5.4.1.1.

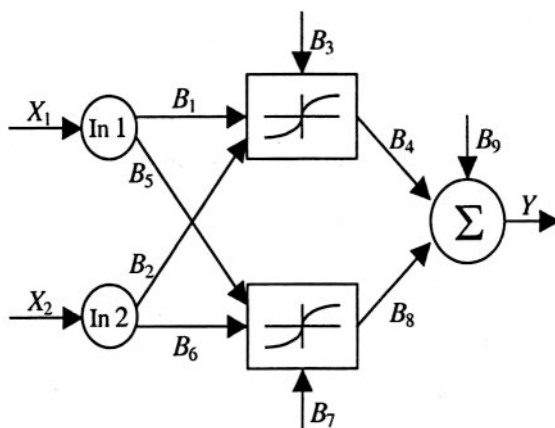
Obliczenia, których przykłady pokazane zostaną w dalszych punktach tego rozdziału, wykazały, że zastosowanie jedynie aproksymacji (5.10) może okazać się wystarczająco dokładne tylko dla wąskich przedziałów zmienności współczynnika Poissona

i niewielkiego przedziału zmienności modułu Younga. Natomiast funkcja (5.12) w istotny sposób poprawia dopasowanie na szerszych przedziałach.

5.4.1.3. Zastosowanie aproksymatorów wzorowanych na sieciach neuronowych

Funkcje postaci (5.10) oraz (5.12) jako elementy funkcji stanu granicznego (5.1) mają istotny mankament. Ze względu na obecność wielomianu drugiego stopnia krzywa $g(\mathbf{x}) = 0$ jest na płaszczyźnie (X_1, X_2) krzywą zamkniętą lub składającą się z dwóch gałęzi. W przypadku dużych krzywizn oraz szerokich przedziałów zmienności parametrów X_1, X_2 sytuacja ta może bardzo utrudnić lub wręcz uniemożliwić znajdowanie punktów obliczeniowych, a co za tym idzie – obliczenie wskaźnika niezawodności metodami FORM i SORM. Z analogiczną sytuacją spotykamy się także przy wyższym wymiarze (większa liczba zmiennych losowych), gdyż wzmiankowany problem wynika z faktu, że funkcje aproksymacyjne typu (5.10) oraz (5.12) nie są funkcjami różnowartościowymi. Problem ten, zwany dalej problemem „fałszywych gałęzi” lub „fałszywych punktów obliczeniowych”, będzie szerzej omówiony w podrozdziale 5.4.4 oraz w rozdziale 8. Mankament ten, a także chęć dalszego poszerzenia obszarów zmienności modułu Younga oraz współczynnika Poissona z jednoczesnym zachowaniem dobrej dokładności aproksymacji funkcji osiadania U , doprowadziły do zaproponowania trzeciego modelu, polegającego na zastosowaniu aproksymatora zaczerpniętego z technik sieci neuronowych. Propozycja ta polega na przyjęciu funkcji aproksymacyjnej w postaci liniowej kombinacji tangensów hiperbolicznych, które używane są jako funkcje aktywacji w sieciach neuronowych (Osowski 1996). Wydaje się, że w przypadku aproksymowania funkcji ciągłej sposób dopasowania może być taki jak działanie trzywarstwowej sieci neuronowej z warstwą ukrytą zawierającą dostatecznie dużą liczbę neuronów. Zgodnie z twierdzeniem o aproksymacji (pop. np. Hecht-Nielson 1991) żadaną dokładność uzyskuje się przez dodawanie kolejnych neuronów w warstwie ukrytej. W ten sposób otrzymuje się dobrą aproksymację na stosunkowo znacznym obszarze zmienności parametrów będących zmiennymi niezależnymi. W związku z tym nie ma na ogół potrzeby rafinowania powierzchni w otoczeniu punktu obliczeniowego, a to z kolei zapobiega nadmiernemu zakrzywieniu. W ten sposób oddala się niebezpieczeństwo powstawania fałszywych gałęzi i fałszywych punktów obliczeniowych. Na potrzeby zagadnienia rozpatrywanego w tym rozdziale dwa neurony w warstwie ukrytej okazały się wystarczające. Schemat sieci pokazano na rysunku 5.17. Na wejściu znajdują się dwa neurony reprezentujące dwie zmienne losowe X_1, X_2 , warstwa ukryta składa się z dwóch neuronów z funkcją aktywacji w postaci tangensa hiperbolicznego, na wyjściu zaś umieszczony jest neuron sumacyjny. Implikuje to następującą postać funkcji osiadania U :

$$U(X_1, X_2) = B_4 \operatorname{tgh}(B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3) + B_8 \operatorname{tgh}(B_5 X_1 + B_6 X_2 + B_7) + B_9. \quad (5.13)$$



Rys. 5.17. Schemat trójwarstwowej sieci neuronowej proponowanej do aproksymacji funkcji osiadania U

Parametry B_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ są wagami sieci. W technice sieci neuronowych wagi te określa się w procesie uczenia sieci, przez zastosowanie odpowiedniego algorytmu, np. algorytmu odwrotnej propagacji błęd (por. np. Osowski 1996). Tutaj proces uczenia zastąpiono opisaną w 2.7.4 procedurą regresji nieliniowej opartą na kompromisie Marquardta. Algorytm obliczeń przebiega tak jak w punkcie 5.4.1.1 przy zastąpieniu funkcji (5.10) przez funkcję (5.13).

5.4.2. Funkcja osiadania wynikająca z analogu edometrycznego

Zaproponowane modele powierzchni odpowiedzi postanowiono skonfrontować w obliczeniach niezawodnościowych z funkcją osiadań wynikającą z metody odkształceń jednoosiowych (Wiłun 1976), zwaną też metodą analogu edometrycznego (Dmitruk i inni 1982). Dokonano tego z dwóch powodów. Po pierwsze, metoda ta, aczkolwiek stanowiąca duże przybliżenie, daje bardzo prostą jawną zależność osiadań fundamentu od parametrów sprężystych podłoża. Po drugie, metoda analogu edometrycznego jest dopuszczona do praktycznego stosowania przez Polską Normę (PN-81/B-03020).

Metoda odkształceń jednoosiowych jest tu formułowana przy następujących założeniach:

- fundament jest wiotki,
- głębokość wykopu fundamentu można pominać,
- grunt poniżej fundamentu jest liniowo sprężysty i izotropowy, ze stałymi sprężystymi E oraz ν .

Przy tych założeniach maksymalne osiadanie fundamentu wyznacza się następująco (por. PN-81/B-03020):

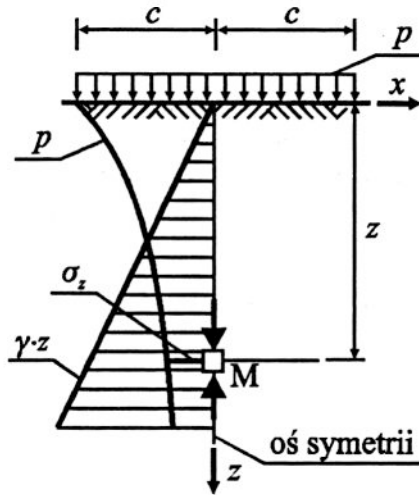
• Uzyskuje się rozkład naprężeń pionowych w gruncie σ_z pod środkiem ciężkości fundamentu, a więc dla fundamentu ławowego w jego osi symetrii, od obciążenia p przekazywanego na grunt przez fundament (rys. 5.18).

• Znajduje się głębokość z_{\max} , na której dodatkowe naprężenie od obciążenia p jest równe 30% wartości naprężenia pierwotnego opisanego zależnością γz , gdzie γ jest ciężarem objętościowym gruntu. Znalaziona głębokość jest miąższością warstwy, której odkształcenia powodują osiadanie fundamentu. Grunt znajdujący się głębiej jest uważany za nieodkształcalny.

• Grunt pod fundamentem dzieli się, do wyznaczonej głębokości z_{\max} , na warstwy o grubości h_i nie przekraczającej połowy szerokości fundamentu: $h_i < c = 0,5B$.

• Oblicza się osiadanie każdej warstwy ze wzoru ważnego dla osiadań próbków w edometrze $h_i \sigma_{zi} / M_{edi}$.

• Maksymalne osiadanie fundamentu, rozumiane jako pionowe przemieszczenie punktu pod środkiem fundamentu, jest równe sumie osiadań poszczególnych warstw.



Rys. 5.18. Rozkład naprężeń pod fundamentem dla obliczeń metodą analogu edometrycznego

Naprężenie od obciążenia p w punkcie M na głębokości z (rys. 5.18) w osi prostokątnego fundamentu o szerokości $B = 2c$ i długości L opisuje znany wzór Steinbrenera (Budownictwo Betonowe (1966), PN-81/B-03020). Dokonując w tym wzorze przejścia granicznego z L do nieskończoności, otrzymuje się zależność opisującą naprężenie pionowe w punkcie M pod fundamentem ławowym

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c}{z} + z \frac{c}{c^2 + z^2} \right). \quad (5.14)$$

Zgodnie z poprzednio przyjętymi założeniami grubość odkształcalnej warstwy pod fundamentem określa równanie

$$\frac{2p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c}{z} + z \frac{c}{c^2 + z^2} \right) - 0,3\gamma z = 0. \quad (5.15)$$

Podzielenie warstwy osiadającego podłoża o miąższości z_{\max} wyznaczonej z równania (5.15) na n warstw grubości $h_i < c$ pozwala napisać wzór określający osiadanie fundamentu

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_i \sigma_{zi}}{M_{edi}}, \quad (5.16)$$

w którym σ_{zi} jest naprężeniem pionowym w środku tej warstwy w osi fundamentu. Uwzględnienie związku pomiędzy edometrycznym modułem ścisłości M_{ed} a modułem Younga E i współczynnikiem Poissona ν oraz akceptacja założenia o jednorodności podłoża daje w wyniku szukaną postać funkcji osiadania

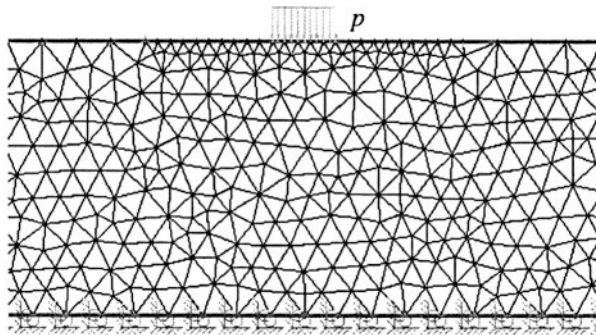
$$U = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sum_1^n h_i \sigma_{zi}. \quad (5.17)$$

Po określeniu wartości sumy, powyższa postać funkcji opisującej osiadanie fundamentu ławowego będzie używana w przeprowadzonych dalej obliczeniach miar niezawodności. Należy podkreślić, że opisane w punktach 5.4.1 oraz 5.4.2 sposoby postępowania są wystarczająco ogólne, aby wyznaczyć potrzebną postać funkcji osiadania dla innych zmiennych losowych. Zmiennymi losowymi mogą być np. obciążenie, grubość warstw różnych gruntów zalegających w podłożu lub ciężar objętościowy podłoża.

5.4.3. Założenia do obliczeń numerycznych

Problem wyznaczenia maksymalnych osiadań wiotkich fundamentów ławowych przy rozpatrywanych tu założeniach sprowadza się do problemu brzegowego płaskiego stanu odkształcenia teorii sprężystości. Jednak rozwiązując to zagadnienie nie można używać najczęściej stosowanego sposobu postępowania, gdy problem dotyczy ośrodka jako przestrzeni nieskończonej czy też półnieskończonej (półprzestrzeni sprężystej). Trudność polega na tym, że do rozważań bierzemy dostatecznie duży obszar, tak by wpływ postawionych warunków podparcia na brzegu tego obszaru na interesujące nas wielkości był pomijalnie mały. Niestety, ten sposób postępowania w przypadku wyznaczania przemieszczeń w półpłaszczyźnie sprężystej, wywołanych obciążeniem przekazywanym przez fundament, prowadzi do rozwiązania osobliwego. Wielkość wyznaczonego osiadania rośnie do nieskończoności, przy powiększaniu do nieskończoności dyskretyzowanego obszaru. Jest to związane z charakterystyczną

osobliwością rozwiązań wyznaczających przemieszczenia w płaskim stanie odkształcenia, wywołanych obciążeniami o niezerowych wypadkowych. Dla wszystkich takich obciążeń każdy punkt półpłaszczyzny teoretycznie przemieszcza się do nieskończoności. Jednoznacznie możliwe jest tylko wyznaczanie przemieszczeń względnych w stosunku do wybranego punktu odniesienia. Żeby postawione zagadnienie wyznaczenia osiadań uczynić jednoznacznym, i żeby równocześnie wyniki uzyskane za pomocą metody elementów skończonych i analogu edometrycznego były porównywalne, przyjęto zalecenie normowe, że o osiadaniu fundamentu decyduje warstwa sprężysta, w której naprężenia od fundamentu przekraczają o 30% naprężenia pierwotne, wywołane ciężarem własnym gruntu. Jako grubość tej warstwy przyjęto wynik rozwiązania równania (5.15). W obliczeniach metodą elementów skończonych skorzystano z programu PHASES (Hoek i inni 1993). Jest to wyspecjalizowany program płaskiego stanu odkształcenia. Schemat do obliczeń pokazany jest na rysunku 5.19. Swobodna powierzchnia jest obciążona obciążeniem równomiernie rozłożonym $p = 0,4$ MPa na odcinku szerokości 2,5 m. Warstwa głębokości 10,52 m i szerokości 82,5 m jest utwierdzona na dole. Boki mają odebraną swobodę poziomych przemieszczeń. W otoczeniu przyłożonego obciążenia zagęszczono liczbę elementów skończonych. Model obliczeniowy metody MES zawiera 1941 liniowych elementów trójkątnych, 1050 węzłów i 2100 stopni swobody. Stosując ten model wykonywano obliczenia maksymalnych przemieszczeń dla potrzebnych wartości modułu Younga i współczynnika Poissona rozpatrywanego podłoża.



Rys. 5.19. Schemat modelu podłoża przyjętego do obliczeń metodą elementów skończonych

Dla analogu edometrycznego rozwiązanie równania (5.15) przy opisanym schemacie obciążenia oraz zastosowanie wzoru (5.17) prowadzi do następującej funkcji osiadania:

$$U(E, \nu) = 1,68 \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{E(1 - \nu)}. \quad (5.18)$$

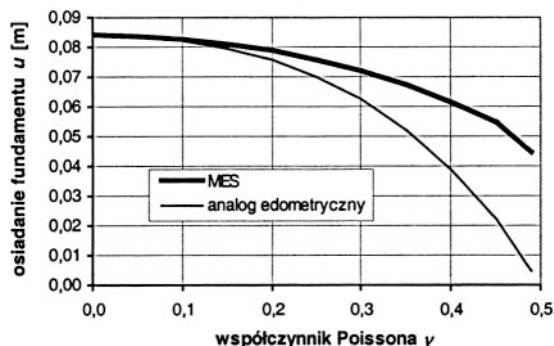
W rozpatrywanych przykładach zmiennymi losowymi są cechy odkształcalności gruntu traktowanego jako ośrodek sprężysty, tj. moduł Younga E oraz współczynnik Poissona ν . Podobnie jak w podrozdziale 5.1 obliczenia przeprowadzono dla podłoża o małym module sprężystości. Przyjęto, że moduł Younga ma rozkład lognormalny o średniej $E\{E\} = 20$ MPa i odchyleniu standardowym $\sigma\{E\} = 3$ MPa, co daje współczynnik zmienności równy 15%. Jako wartość progową osiadania przyjęto $u_{\max} = 0,12$ m. W większości przykładów analizowanych w tej pracy przyjmowano dla współczynnika Poissona rozkład beta, symetrycznie rozłożony wokół wartości oczekiwanej. Przy wartościach oczekiwanych $E\{\nu\} = 0,1$, $E\{\nu\} = 0,2$ oraz $E\{\nu\} = 0,3$ przyjmowano współczynnik zmienności 15%. Wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa w tych przypadkach pokazano na rysunku 5.1. Dla wartości oczekiwanej $E\{\nu\} = 0,4$, przy założeniu przedziału zmienności $[0,3; 0,5]$ przyjmowano rozkład równomierny (por. dyskusja w podrozdziale 5.1.2 oraz rys. 5.2) lub rozkład normalny. W celu uzyskania żądanych wartości współczynników korelacji posługiwano się konstrukcją Natafa (podrozdział 3.1.2).

Wykonując obliczenia metodą FORM oraz SORM korzystano z systemu COMREL (Struel 1997).

5.4.4. Rezultaty obliczeń

5.4.4.1. Znajdowanie powierzchni odpowiedzi

Na wstępie przeprowadzono jedynie obliczenia deterministyczne przy założeniu wartości modułu Younga $E = 20$ MPa oraz kilkunastu różnych wartości współczynnika Poissona. Na rysunku 5.20 pokazano osiadanie obliczone za pomocą MES oraz według analogu edometrycznego (wzór (5.18)). Wyniki potwierdziły oczekiwany fakt, że obliczenia według metody analogu edometrycznego dają mniejsze osiadania w stosunku do obliczonych metodą elementów skończonych zgodnie z teorią sprężystości.



Rys. 5.20. Porównanie wykresów osiadań dla różnych wartości współczynnika Poissona obliczonych metodą elementów skończonych oraz metodą analogu edometrycznego

W celu stworzenia powierzchni odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia (punkt 5.4.1.1) należało za pomocą metody elementów skończonych obliczyć osiadania dla zestawu punktów (E, ν) skoncentrowanych w otoczeniu przewidywanego punktu obliczeniowego. Do orientacyjnego, wstępnego oszacowania punktu obliczeniowego posłużyły obliczenia metodą FORM z zastosowaniem wzoru (5.18) do funkcji stanu granicznego (skorzystano z metody analogu edometrycznego). Obliczenia metodą FORM wykonano dla stosowanej dalej wartości progowej osiadania, $u_{\max} = 0,12$ m oraz kilku wartości progowych w pobliżu (aby uzyskać możliwie szeroki obszar aproksymacji). Przykładowy zestaw wyników podaje tabela 5.13.

Tabela 5.13. Przykładowe wyniki obliczeń osiadań, będące danymi wejściowymi przy określeniu powierzchni odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia (wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,2$)

Przemieszczenia U [m]	Moduł Younga E [MPa]	Współczynnik Poissona ν
0,1116	15,000	0,10
0,1081	15,000	0,15
0,1052	15,000	0,20
0,1012	15,000	0,25
0,0963	15,000	0,30
0,1200	13,783	0,10
0,1200	13,517	0,15
0,1200	13,150	0,20
0,1200	12,650	0,25
0,1200	12,033	0,30
0,1654	10,000	0,10
0,1622	10,000	0,15
0,1578	10,000	0,20
0,1518	10,000	0,25
0,1444	10,000	0,30

Następnie, stosując algorytm opisany w 5.4.1.1, otrzymano cztery powierzchnie odpowiedzi w postaci wielomianów drugiego stopnia (5.10) dla czterech różnych wartości oczekiwanych współczynnika Poissona. Odpowiednie współczynniki zamieszczono w tabeli Z.2.1 w załączniku nr 2 (załączniki umieszczono po rozdziale 9).

Aby uzyskać funkcje osiadania dla praktycznie pełnego zakresu współczynnika Poissona spotykanego w gruntach, należało uzyskać cztery istotnie różne funkcje, odpowiadające czterem podanym w tabeli Z.2.1 wartościom oczekiwany tegoż parametru. Przy mniejszej (niż cztery) liczbie powierzchni dokładność obliczeń nie była zadowalająca (sprawdzenia przez obliczenia MES). Okazuje się, że zastosowanie jedynie aproksymacji drugiego stopnia może się okazać wystarczająco dokładne jedynie dla wąskich przedziałów zmienności współczynnika Poissona i niewielkiego prze-

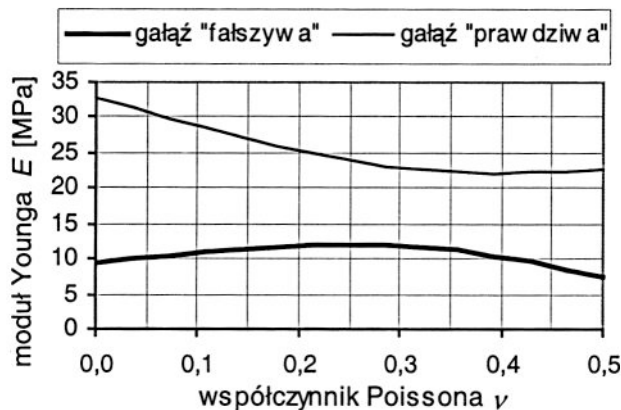
działu zmienności modułu Younga. Dlatego w tabeli Z.2.1 przedstawiono cztery aproksymacje dla czterech różnych wartości oczekiwanych współczynnika Poissona.

Należy zauważyć, że w przypadku powierzchni stanu granicznego, której lewa strona jest wielomianem drugiego stopnia, trzeba się liczyć z możliwością istnienia więcej niż jednego punktu obliczeniowego. Wynika to z własności powierzchni drugiego stopnia. W przypadku gdy powierzchnia ta nie ma punktu siodłowego, przecięcie jej płaszczyzną równoległą do płaszczyzny zmiennych niezależnych daje w wyniku powierzchnię zamkniętą. Zamiana zmiennych losowych fizycznych na normalne standardowe (w metodzie FORM) przekształca elipsoidę w zamkniętą powierzchnię o początku układu współrzędnych usytuowaną w jej wnętrzu. Najmniejsza odległość od początku układu współrzędnych do powierzchni określa punkt obliczeniowy. Jednak w procesie numerycznym znajdowania tego punktu najczęściej znajduje się lokalne minima, a globalne minimum może się okazać rozwiązaniem obcym (fałszywym).

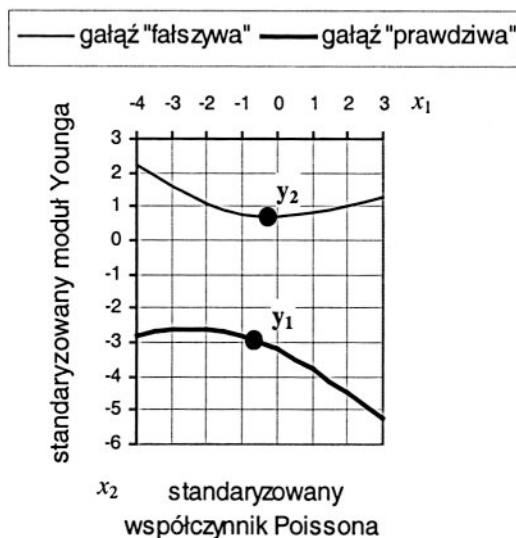
Jeżeli powierzchnia ma punkt siodłowy, to jej przecięcie płaszczyzną równoległą do płaszczyzny zmiennych niezależnych daje w wyniku dwie gałęzie, na których jest spełniony warunek stanu granicznego dla funkcji osiadania (5.10). Efekt tego typu pokazano na rysunkach 5.21, 5.22 i 5.23, wynikających z analizowanych przykładów. Na rysunku 5.21 pokazano fragmenty krzywych $g(\mathbf{x}) = 0$ we „współrzędnych fizycznych” (X_1, X_2), rysunki zaś 5.22 i 5.23 pokazują te krzywe w przestrzeni „przetransformowanej” (Y_1, Y_2), przy czym rysunek 5.22 dotyczy transformacji w postaci standaryzacji (2.23), rys. zaś 5.23 pokazuje krzywe po zastosowaniu transformacji Rosenblatta (2.34). Na każdej gałęzi można odnaleźć punkt realizujący minimalną odległość od początku układu współrzędnych (punkt obliczeniowy). Obydwa punkty mogą dawać intuicyjnie zadowalające „wartości obliczeniowe” poszczególnych parametrów fizycznych. W demonstrowanych tu przykładach obcy punkt obliczeniowy dawał najmniejszą wartość wskaźnika niezawodności beta. Żeby wykryć, który punkt obliczeniowy jest obcym rozwiązaniem, należy jego współrzędnych, tj. modułu Younga i współczynnika Poissona, użyć jako stałych materiałowych w programie MES i obliczyć osiadanie fundamentu. Jeżeli tak obliczone osiadanie jest bliskie osiadanu granicznemu, to w wyniku obliczeń niezawodnościowych uzyskano poszukiwany punkt obliczeniowy.

Jeżeli obcy punkt obliczeniowy realizuje globalne minimum odległości od początku układu, to aby uzyskać właściwy punkt obliczeniowy, należy przy definiowaniu funkcji stanu granicznego wprowadzić odpowiednie ograniczenia zakresu zmiennych losowych. W niektórych przykładach uzyskano punkt obliczeniowy ze współrzędną odpowiadającą modułowi Younga równą około 23 MPa. Z obliczeń wcześniej przeprowadzonych za pomocą wzoru (5.18) należało oczekiwać wartości modułu Younga równej około 11 MPa. Żeby uniemożliwić procesowi iteracyjnemu wskazywanie obcego punktu obliczeniowego, dla wartości X_1 modułu Younga przekraczających 13 MPa dodano do funkcji osiadania (5.10) składnik $(X_1 - 13)^{10}$:

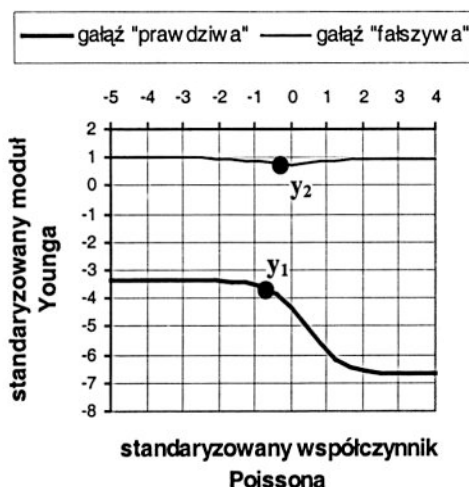
$$U = \begin{cases} B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + err & \text{dla } X_1 < 13 \\ B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + (X_1 - 13)^{10} + err & \text{dla } X_1 \geq 13. \end{cases} \quad (5.19)$$



Rys. 5.21. Dwie „gałęzie” funkcji stanu granicznego w „przestrzeni współrzędnych fizycznych”



Rys. 5.22. Dwie gałęzie funkcji stanu granicznego we współrzędnych „przetworzonych” (po standaryzacji). Moduł Younga i współczynnik Poissona są zmiennymi o rozkładzie normalnym. Zaznaczono dwa punkty realizujące lokalne minima odległości od początku układu współrzędnych („beta punkty”)



Rys. 5.23. Dwie gałęzie funkcji stanu granicznego we współrzędnych normalnych po dokonaniu transformacji Rosenblatta. Moduł Younga był zmienną losową o rozkładzie lognormalnym, a współczynnik Poissona miał rozkład beta

Składnik ten zapewnia dobrą gładkość funkcji osiadania w punktach o $X_1 = 13$, ponieważ tak zdefiniowana funkcja jest ciągła z pochodnymi do dziewiątego rzędu włącznie. Korekty tego typu mogą być przeprowadzone dopiero po wykonaniu wstępnej serii obliczeń. Warto zauważyć, że opisana powyżej trudność może wystąpić nie tylko w przypadku analizy osiadań, ale także w każdym innym zadaniu z zakresu niezawodności, które rozwiązywane jest metodą powierzchni odpowiedzi z użyciem wielomianu drugiego stopnia jako funkcji aproksymującej.

Jak już wcześniej wspomniano, zastosowanie aproksymacji drugiego stopnia może okazać się wystarczająco dokładne jedynie dla wąskich przedziałów zmienności współczynnika Poissona i niewielkiego przedziału zmienności modułu Younga. Aby otrzymać wystarczająco dokładne przybliżenia dla szerszego zakresu parametrów losowych, proponuje się przyjęcie wielomianu drugiego stopnia z dodanym „składnikiem edometrycznym”, według wzoru (5.12). Rezultaty aproksymacji osiadań fundamentów, w postaci współczynników B_i , za pomocą powyższego wyrażenia są zestawione w tabeli Z.2.2 (w załączniku nr 2). Przedstawione wyniki obejmują zakres zmienności współczynnika Poissona od 0 do 0,5. Tak więc jedna funkcja osiadania zastępuje cztery z poprzednich obliczeń. Dwie kolumny podają aproksymację dla szerszego i węższego zakresu modułu Younga. Średni błąd oszacowania pokazuje ostatni wiersz. Dodanie „składnika edometrycznego” poprawia aproksymację na szerszym przedziale zmienności losowych parametrów sprężystych podłoża.

Effekt dwóch „gałęzi” funkcji stanu granicznego występuje także i w tym przypadku, co zmusza do zastosowania „barier” w obliczeniach komputerowych funkcji stanu granicznego, np. w postaci podanej we wzorze (5.19).

Kolejnym etapem było zastosowanie funkcji osiadania wywodzącej się z techniki sieci neuronowych (wzór (5.13)). Współczynniki B_i dla tej powierzchni podano w tabeli Z.2.3 (w załączniku nr 2). Zastosowanie aproksymacji typu (5.13) pozwoliło na uniknięcie problemu „fałszywych gałęzi”. Zagadnienie to będzie jeszcze szerzej omawiane w rozdziale 8.

5.4.4.2. Obliczenia wskaźników niezawodności

W pierwszej serii przykładów osiadania wyznaczano zgodnie ze wzorem (5.18), czyli według analogu edometrycznego. W tym przypadku metodę SORM można było bezpośrednio zastosować do powierzchni stanu granicznego (5.1), gdzie w miejsce osiadań U wprowadzono zależność (5.18). Obliczenia przeprowadzono dla czterech różnych wartości średnich współczynnika Poissona, mających rozkłady prawdopodobieństwa opisane w punkcie 5.4.3. Założono, że zmienne losowe E oraz ν są stochastycznie niezależne. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 5.14.

Tabela 5.14. Obliczenia wskaźników niezawodności przy założeniu funkcji osiadania postaci (5.18)

Wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E\{\nu\}$	Wskaźnik niezawodności β	Współrzędne punktu obliczeniowego		Współczynniki wrażliwości	
		E^* [MPa]	ν^*	α_E	α_ν
0,1	2,47	13,70	0,098	0,999	0,048
0,2	2,97	12,90	0,180	0,976	0,216
0,3	3,73	11,96	0,236	0,928	0,372
0,4	4,90	10,13	0,309	0,935	0,355
E oraz ν są stochastycznie niezależne					

Wskaźniki niezawodności β rosną wraz ze wzrostem wartości średniej współczynnika Poissona, gdyż wraz ze wzrostem tego współczynnika osiadania gruntu maleją. Maleją też obliczeniowe wartości modułu Younga. Warto zwrócić uwagę, że dla niewielkich wartości współczynnika Poissona (0,1 lub 0,2) losowość tego parametru ma niewielkie znaczenie dla wskaźnika niezawodności. Świadczą o tym małe wartości współczynników wrażliwości α_ν dla wartości średnich 0,1 i 0,2. Szybkość wzrostu wskaźnika niezawodności zwiększa się wraz ze wzrostem wartości średniej współczynnika ν . Wzrasta też wpływ losowości ν na wartość wskaźnika β . Potwierdza to rezultaty i wnioski uzyskane w podrozdziale 5.1.

W kolejnej wersji przykładów obliczano wskaźniki niezawodności stosując funkcje osiadania w postaci wielomianu drugiego stopnia ze współczynnikami podanymi w tabeli Z.2.1. Przy każdej z czterech rozpatrywanych wartości średnich współczynnika Poissona powierzchnia aproksymująca była inna. Założenia dotyczące losowej zmienności parametrów były takie same jak w poprzedniej serii obliczeń, z tym że dla wartości średniej współczynnika ν przeprowadzono dodatkowe obliczenie przy zało-

zeniu, że ma on rozkład normalny ze współczynnikiem zmienności 15%. Podobnie jak poprzednio, założono stochastyczną niezależność E i ν . Dla uniknięcia problemu „fałszywych gałęzi” zastosowano ograniczenia, doprowadzając funkcję osiadania do postaci (5.19). Wyniki zestawiono w tabeli 5.15.

Tabela 5.15. Obliczenia wskaźników niezawodności przy założeniu funkcji osiadania postaci (5.19)

Wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E(\nu)$	Wskaźnik niezawodności β	Wartości obliczeniowe zmiennych losowych		Współczynniki wrażliwości		Osiadania u [m] dla wartości obliczeniowych
		E^* [MPa]	ν^*	α_E	α_ν	
0,1	2,43	13,78	0,099	0,999	0,030	0,12007
0,2	2,73	13,24	0,188	0,990	0,138	0,12007
0,3	3,20	12,49	0,258	0,964	0,256	0,12074
0,4*	3,80	11,84	0,321	0,931	0,355	0,11846
0,4**	3,80	11,77	0,325	0,951	0,297	0,11896
<i>E</i> oraz ν są stochastycznie niezależne						

* Rozkład normalny współczynnika Poissona.

** Rozkład jednostajny współczynnika Poissona.

Dodatkowo w ostatniej kolumnie przedstawiono wartości osiadań uzyskane po przyjęciu wartości obliczeniowych E i ν i wykonaniu obliczeń metodą elementów skończonych. Tego typu obliczenie miało na celu sprawdzenie, jak dokładną aproksymację powierzchni stanu granicznego uzyskano metodą powierzchni odpowiedzi. Z założeń metody SORM wynika bowiem, że punkt obliczeniowy znajduje się na powierzchni stanu granicznego, co oznacza, że przy proggu $u_{\max} = 0,12$ m osiadanie powinno wynosić dokładnie 0,12 m. Wyniki podane w ostatniej kolumnie tabeli 5.15 pokazują, że dokładność aproksymacji można uznać za wystarczającą. Podobnie jak w poprzedniej serii wskaźniki niezawodności rosną wraz ze wzrostem współczynnika Poissona, a wpływ losowości ν jest niewielki przy małych wartościach średnich (por. współczynniki wrażliwości α). Jednak porównując wyniki z tabel 5.14 oraz 5.15, można zauważyć, że analogiczne wskaźniki niezawodności β są mniejsze w przypadku aproksymacji wielomianem drugiego stopnia, aniżeli w przypadku analogu edometrycznego. Szczególnie duża różnica występuje dla wartości średnich 0,3 oraz 0,4 współczynnika Poissona. Wydaje się, że wyniki osiadań w ośrodku sprężystym uzyskiwane metodą elementów skończonych można uznać za stosunkowo dokładne. W związku z tym otrzymane tu rezultaty wskazują na to, że przy średnich wartościach współczynnika Poissona rzędu 0,3 lub 0,4 analog edometryczny może dawać zaniżone wartości osiadań, niebezpieczne z punktu widzenia teorii niezawodności. Dla średniej wartości ν równej 0,4 zarówno w przypadku rozkładu jednostajnego, jak i rozkładu normalnego uzyskane wyniki są podobne, chociaż większy wpływ losowości tegoż współczynnika na wskaźnik niezawodności daje rozkład normalny (por. uwagi na

temat małego wpływu rodzaju rozkładu prawdopodobieństwa współczynnika Poissona na wskaźniki niezawodności podane w podrozdziale 5.1).

Dla uniknięcia każdorazowej zmiany powierzchni aproksymującej wraz ze zmianą wartości oczekiwanej współczynnika Poissona i w celu objęcia zakresem większego przedziału zmienności modułu Younga E , przeprowadzono obliczenia z zastosowaniem powierzchni odpowiedzi zawierającej składnik edometryczny, opisanej równaniem (5.12). Obliczenia obejmowały dwa przypadki – szerszy $E \in [5, 30]$ MPa oraz węższy $E \in [5, 20]$ MPa zakres modułu Younga E . Odpowiednie współczynniki B_i dla powierzchni (5.12) w obu przypadkach zamieszczono w tabeli Z.2.2. Wyniki obliczeń niezawodnościowych zestawiono w tabelach 5.16. i 5.17.

Tabela 5.16. Obliczenia wskaźników niezawodności przy założeniu funkcji osiadania postaci (5.12).
Przy danych wejściowych zasięg wartości modułów Younga wynosił: $E \in [5, 30]$ MPa

Wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E\{\nu\}$	Wskaźnik niezawodności β	Wartości obliczeniowe zmiennych losowych		Współczynniki wrażliwości		Osiedzenia u [m] dla wartości obliczeniowych
		E^* [MPa]	ν^*	α_E	α_ν	
						FEM
0,1	2,25	14,35	0,099	0,955	0,024	0,11530
0,2	2,48	13,94	0,193	0,951	0,094	0,11368
0,3	2,84	13,40	0,268	0,930	0,218	0,11148
0,4*	3,33	12,80	0,330	0,889	0,354	0,10866
0,4**	3,35	12,77	0,333	0,906	0,302	0,10846
<i>E i ν są stochastycznie niezależne</i>						

* Rozkład normalny współczynnika Poissona.

** Rozkład jednostajny współczynnika Poissona.

Tabela 5.17. Obliczenia wskaźników niezawodności przy założeniu funkcji osiadania postaci (5.12).
Przy danych wejściowych zasięg wartości modułów Younga wynosił: $E \in [5, 20]$ MPa

Wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E\{\nu\}$	Wskaźnik niezawodności β	Wartości obliczeniowe zmiennych losowych		Współczynniki wrażliwości		Osiedzenia u [m] dla wartości obliczeniowych
		E^* [MPa]	ν^*	α_E	α_ν	
						FEM
0,1	2,51	13,65	0,099	0,989	0,033	0,12121
0,2	2,82	13,11	0,188	0,981	0,128	0,12126
0,3	3,29	12,47	0,257	0,956	0,260	0,12104
0,4*	3,83	11,88	0,307	0,902	0,411	0,12056
0,4**	3,89	11,65	0,324	0,941	0,3234	0,12034
<i>E i ν są stochastycznie niezależne</i>						

* Rozkład normalny współczynnika Poissona.

** Rozkład jednostajny współczynnika Poissona.

Wyniki pokazane w tabeli 5.17 różnią się bardzo nieznacznie w stosunku do podanych w tabeli 5.15, zarówno jeśli chodzi o wskaźniki niezawodności, jak i wartości obliczeniowe parametrów. Również wnioski dotyczące wpływu losowości współczynnika Poissona pozostają te same. Mając na uwadze fakt, że dopasowanie drugiego stopnia było bardzo dokładne (cztery powierzchnie w zależności od wartości średniej współczynnika Poissona), należy uznać aproksymację powierzchnią (5.12) za równie użyteczną. Powierzchnia (5.12) ma jednak tę zaletę, że obejmuje praktycznie cały zakres współczynników Poissona. Również wartości osiadań uzyskane dla wartości obliczeniowych metodą elementów skończonych (ostatnia kolumna tabeli 5.17) są bardzo zbliżone do założonego progu $u_{\max} = 0,12$ m. Natomiast wyniki pokazane w tabeli 5.16 odbiegają w sposób istotny od tych z tabeli 5.17 oraz tabeli 5.15. Oznacza to, że przy rozszerzeniu zakresu modułów Younga o większe wartości dokładność dopasowania spada, pomimo ponownego przeprowadzenia procedury regresyjnej. Na gorszą jakość dopasowania wskazują też wyniki osiadań z ostatniej kolumny tabeli 5.16, które odbiegają już w większym stopniu, aniżeli te z tabeli 5.17, od założonego progu $u_{\max} = 0,12$ m.

Z drugiej strony, gdyby rozważyć sytuację, w której tolerancja dokładności obliczenia osiadań jest większa, np. ok. 0,5 cm, to również wyniki z tabeli 5.16 mogą okazać się satysfakcjonujące, zwłaszcza że uzyskane w tabeli 5.16 wskaźniki niezawodności β są mniejsze od tych z tabeli 5.17, co oznacza że obliczenia wykonywane są „po stronie bezpiecznej”.

Porównanie wyników z tabeli 5.16 z wynikami z tabeli 5.17 pozwala zwrócić uwagę na pewien fakt, istotny dla zastosowań metody powierzchni odpowiedzi do zagadnień niezawodności. Pomimo że wartość oczekiwana modułu Younga wynosiła $E\{E\} = 20$ MPa, to powierzchnia dopasowana dla przedziału modułu $E \in [5, 30]$ jest gorsza niż dla przedziału $E \in [5, 20]$, co wskazuje, że dla potrzeb niezawodności znacznie bardziej istotne jest dopasowanie powierzchni odpowiedzi wokół „punktu obliczeniowego”, aniżeli w otoczeniu punktu złożonego z wartości oczekiwanych.

Z praktycznego punktu widzenia niepokojący jest fakt, że dużą dokładność obliczeń uzyskano dla stosunkowo wąskiego zakresu wartości modułu Younga E , tj. $E \in [5, 20]$. Rozszerzanie przedziału aproksymacji modułu E prowadzi, jak to wyżej pokazano, do spadku dokładności i istotnego niedoszacowania wartości wskaźników niezawodności. Dlatego w kolejnym etapie powtórzono obliczenia z zastosowaniem funkcji odpowiedzi o postaci aproksymatora sieci neuronowej (5.13), zachowując jednocześnie aproksymację na szerszym zakresie zmienności modułu Younga $E \in [5, 30]$. Uzyskane rezultaty zamieszczono w tabeli 5.18.

Tabela 5.18. Obliczenia wskaźników niezawodności przy założeniu funkcji osiadania postaci (5.13)

Wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E\{\nu\}$	Wskaźnik niezawodności β	Wartości obliczeniowe zmiennych losowych		Współczynniki wrażliwości		Osiedlenia u [m] dla wartości obliczeniowych
		E^* [MPa]	ν^*	α_E	α_ν	
0,1	2,49	13,66	0,099	0,997	0,039	0,12112
0,2	2,79	13,11	0,190	0,991	0,115	0,12126
0,3	3,22	12,52	0,260	0,968	0,260	0,12056
0,4*	3,77	11,95	0,309	0,911	0,409	0,11985
0,4**	3,82	11,75	0,324	0,947	0,317	0,11932
E oraz ν są stochastycznie niezależne						

* Rozkład normalny współczynnika Poissona.

** Rozkład jednostajny współczynnika Poissona.

Jak widać, wyniki zamieszczone w tabeli 5.18 są bardzo bliskie wynikom podanym w tabelach 5.15 oraz 5.17. Oznacza to, że funkcja osiadania uzyskana z aproksymatorów sieci neuronowych pozwala uzyskać jedną powierzchnię odpowiedzi dostatecznie dokładną dla wszystkich wartości współczynnika Poissona (por. tabela 5.15) oraz stosunkowo szerokiego zakresu wartości modułu Younga (por. tabela 5.17).

Aby móc ocenić wpływ korelacji pomiędzy parametrami E i ν na wskaźniki niezawodności, przeprowadzono obliczenia dla różnych wartości współczynnika korelacji. Niektóre z tych rezultatów zestawiono poniżej w tabelach. I tak w tabeli 5.19 podano rezultaty dla dodatniej wartości współczynnika korelacji $\rho = 0,3$ oraz przy braku zmienności losowej współczynnika Poissona ν . W tabeli 5.20 wyniki dla ujemnych wartości współczynników korelacji $\rho = -0,2$ oraz $\rho = -0,6$. Porównanie wyników z tabel 5.17, 5.19 i 5.20 prowadzi do wniosku, że wskaźnik niezawodności maleje ze wzrostem dodatniej korelacji pomiędzy parametrami E i ν oraz wzrasta z mocniejszą korelacją ujemną pomiędzy nimi. Jest to potwierdzenie rezultatu uzyskanego w podrozdziale 5.1. Dla niewielkich wartości współczynnika Poissona $\nu = 0,1$ i $\nu = 0,2$ wyniki dla braku korelacji oraz nielosowego parametru ν są bardzo podobne, ale zaczynają one wzrastać wraz ze wzrostem współczynnika Poissona. Tę samą prawidłowość odnotowano także w podrozdziale 5.1.

Porównując efekt wpływu rozkładu prawdopodobieństwa w przypadku współczynnika Poissona o wartości oczekiwanej $\nu = 0,4$, można stwierdzić, że nie jest on duży. Mniejsze wartości wskaźnika niezawodności oraz większe wartości współczynnika wrażliwości α_ν uzyskano dla rozkładu normalnego, co wynika z faktu, że nośnik rozkładu normalnego jest nieograniczony.

Tabela 5.19. Wpływ wzajemnej korelacji pomiędzy modułem Younga i współczynnikiem Poissona na wskaźniki niezawodności
 Zastosowano aproksymację ze składnikiem edometrycznym (wg wzoru (5.12)) dla zakresu modułu Younga $E \in [5, 20]$

Wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E\{\nu\}$	Wskaźnik niezawodności β	Współczynniki wrażliwości		Wartości obliczeniowe zmiennych losowych		Wskaźnik niezawodności β	Wartości obliczeniowe zmiennych losowych	
		α_E	α_ν	E^* [MPa]	ν^*		E^* [MPa]	ν^*
0,1	2,49	0,989	0,027	13,69	0,088	2,51	13,64	0,1
0,2	2,73	0,986	0,096	13,26	0,167	2,83	13,02	0,2
0,3	3,09	0,977	0,164	12,69	0,235	3,40	11,97	0,3
0,4*	3,47	0,940	0,317	12,22	0,279	4,35	10,41	0,4
0,4**	3,61	0,979	0,155	11,81	0,311	ν – nielosowe		
$\rho(E, \nu) = 0,3$								

* Rozkład normalny współczynnika Poissona.

** Rozkład jednostajny współczynnika Poissona.

Tabela 5.20. Wpływ wzajemnej korelacji ujemnej pomiędzy modułem Younga i współczynnikiem Poissona na wskaźniki niezawodności. Zastosowano aproksymację ze składnikiem edometrycznym (wg wzoru (5.12)) dla zakresu modułu Younga $E \in [5, 20]$

Wartość oczekiwana współczynnika Poissona $E\{\nu\}$	Wskaźnik niezawodności β	Wartości obliczeniowe zmiennych losowych		Współczynniki wrażliwości		Wskaźnik niezawodności β	Wartości obliczeniowe zmiennych losowych		Współczynniki wrażliwości	
		E^* [MPa]	ν^*	α_E	α_ν		E^* [MPa]	ν^*	α_E	α_ν
0,1	2,53	13,65	0,106	0,989	0,034	2,57	13,54	0,122	0,989	0,031
0,2	2,89	12,97	0,210	0,979	0,143	3,08	12,60	0,246	0,979	0,129
0,3	3,48	12,27	0,276	0,934	0,327	4,08	11,29	0,351	0,906	0,385
0,4*	4,17	11,61	0,328	0,867	0,477	5,47	10,89	0,378	0,741	0,646
0,4**	4,19	11,51	0,334	0,893	0,427	5,51	11,19	0,360	0,710	0,680
$\rho\{E, \nu\} = -0,2$						$\rho\{E, \nu\} = -0,6$				

* Rozkład normalny współczynnika Poissona.

** Rozkład jednostajny współczynnika Poissona.

5.4.5. Wnioski z obliczeń

Zgodnie z celem sprecyzowanym na początku podrozdziału 5.4 skonstruowano procedurę numeryczną służącą obliczaniu wskaźników niezawodności, bazującą na metodzie elementów skończonych oraz na metodzie powierzchni odpowiedzi (*the response surface method*), możliwą do zastosowania w przypadku obliczania osiadań fundamentu bezpośredniego posadowionego na podłożu liniowo-sprężystym. Zarówno konstruowanie tej procedury, jak też wykonane za jej pomocą obliczenia pozwalają na sformułowanie wniosków, dotyczących samych metod obliczeniowych oraz trudności, jakie mogą powstać, gdy stosuje się procedury metody powierzchni odpowiedzi, a także wyników obliczeń wskaźników niezawodności związanych z możliwymi osiadaniami fundamentów bezpośrednich.

Wybierając funkcję stanu granicznego do obliczeń wskaźników niezawodności preferuje się funkcję w postaci zamkniętej. Niestety, często taka zamknięta postać nie istnieje. W przypadku stanu granicznego użyteczności fundamentów ławowych sytuacja jest jeszcze trudniejsza. Z punktu widzenia teorii sprężystości funkcja stanu granicznego jest nieokreślona z powodu charakterystycznej logarytmicznej osobliwości rozwiązania dla osiadania fundamentu analizowanego w płaskim stanie odkształcenia. Można ją określić dopiero po przyjęciu dodatkowych założeń (uproszczonych warunków), np. takich jak podawane przez normę PN-81/B-03020. Uzyskana uproszczona postać funkcji stanu granicznego, np. z funkcją osiadania postaci (5.18), pozwala wyznaczyć współrzędne punktu obliczeniowego za pomocą metod FORM lub SORM. Znajomość tych współrzędnych pozwoli ograniczyć nakład pracy w przypadku, gdy zdecydujemy się użyć metody powierzchni odpowiedzi. Zastosowana funkcja osiadania oparta na analogu edometrycznym daje realistyczne wyniki dla wartości współczynników Poissona mniejszych od 0,25. Zdecydowanie zaniżone przewidywania, w porównaniu z teorią sprężystości, uzyskuje się dla wartości współczynnika ν z zakresu 0,3–0,45.

Niemniej procedura oparta na analogu edometrycznym może służyć jako wstępna przy stosowaniu algorytmu opisanego w punkcie 5.4.1.1, gdyż, jak wykazano, duża dokładność aproksymacji niezbędna jest w otoczeniu punktu obliczeniowego. Standardowym postępowaniem w metodzie powierzchni odpowiedzi jest użycie funkcji, aproksymującej posiadany zbiór punktów, w postaci wielomianu drugiego stopnia. W celu obniżenia pracochłonności obliczeń miar niezawodności warto rozważyć modyfikację tej funkcji powiększającą obszar, na którym daje ona dobre przybliżenie przebiegu analizowanej funkcji. Najczęściej do aproksymującego wielomianu drugiego stopnia dodaje się dodatkowy składnik. Jego postać zależy od specyfiki rozpatrywanego problemu. Dla fundamentów ławowych (także płytowych) może nim być składnik edometryczny, jak we wzorze (5.12). Jeszcze lepszy efekt uzyskuje się stosując aproksymator wzorowany na sieciach neuronowych o postaci (5.13).

Na podstawie analizowanych przykładów można stwierdzić, że metoda powierzchni odpowiedzi jest dobrym narzędziem do analizy niezawodności związanej z przemieszczaniem fundamentów bezpośrednich. Należy jednak pamiętać, że wprowadzono tu jedynie dwie zmienne losowe. Przy większej liczbie zmiennych losowych zagadnienie istotnie komplikuje się ze względu na konieczność wykonania znacznie większej liczby obliczeń, tak aby estymacja współczynników przyjętej hiperpowierzchni okazała się możliwa. Istotną rolę odgrywa tu odpowiedni algorytm regresji, który ma duży wpływ na jakość dopasowania. Algorytm oparty na kompromisie Marquarta należy do najsukuczniejszych. Przed zastosowaniem warto zatem poprzez wstępne analizy wyodrębnić te zmienne losowe, których wpływ na wartość wskaźnika niezawodności jest największy (np. o największych współczynnikach wrażliwości α).

Drugim bardzo ważnym elementem jest efektywność aproksymatora. Tu kombinacje liniowe funkcji typu tangens hiperboliczny (w terminologii sieci neuronowych zwane funkcjami sigmoidalnymi) zdają się być pożytecznym narzędziem. Efektywność aproksymacji może być poprawiona metodą kolejnych przybliżeń, przy czym w następnych krokach po pierwszym dokonuje się dopasowania powierzchni w sąsiedztwie punktu obliczeniowego.

Wobec na ogół skromnej wiedzy na temat wartości współczynnika Poissona dla gruntu, istotne jest, że poprzez dodanie „składnika edometrycznego” lub zastosowanie aproksymatora zaczerpniętego z sieci neuronowych udaje się uzyskać jedną powierzchnię aproksymacyjną dla całego zakresu zmienności tego współczynnika.

Cechą charakterystyczną powierzchni odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia jest możliwość uzyskania powierzchni stanu granicznego w postaci dwóch gałęzi, przy czym jedna z tych gałęzi nie opisuje rzeczywistego zachowania się ośrodka. Obie te gałęzie mogą dawać lokalne minima, a to z kolei może prowadzić do „fałszywych” punktów obliczeniowych. Pomyłek można uniknąć poprzez dodatkową weryfikację obliczeniami MES, a następnie wprowadzając odpowiednie ograniczenia w stosunku do zakresu zmienności parametrów losowych. Także aproksymacja kombinacjami liniowymi tangensów hiperbolicznych pozwala uniknąć wielokrotnych gałęzi, a co za tym idzie, zmniejsza istotnie ryzyko pojawienia się fałszywych punktów obliczeniowych. Zagadnienie występowania dwóch gałęzi oraz powierzchni zamkniętych będzie jeszcze dyskutowane w rozdziale 8.

Analizowane przykłady wskazują, że najlepsze rezultaty dała aproksymacja funkcji osiadania kombinacjami liniowymi tangensów hiperbolicznych, wzorowana na technice sieci neuronowych.

Z obliczeń wynika, że dla gruntów o współczynnikach Poissona nie większych niż $\nu \leq 0,2$ (w sensie wartości oczekiwanej), wpływ zmienności losowej tego parametru na zmienność osiadań jest bardzo mały i w wielu sytuacjach może być pominięty. Konkluzja ta potwierdza rezultaty uzyskane w podrozdziale 5.1.

Wskaźnik niezawodności β dla przekroczenia dopuszczalnej wartości osiadania wzrasta wraz ze wzrostem (co do wartości bezwzględnej) ujemnej korelacji pomiędzy

parametrami E i ν . Na podstawie skąpych informacji w literaturze można mniemać, że jeśli jest korelacja pomiędzy tymi parametrami, to jest ona ujemna (por. podrozdział 5.1). Ewentualne istnienie dodatniej korelacji istotnie utrudniałoby zadanie, gdyż wskaźnik niezawodności maleje wraz ze wzrostem korelacji dodatniej. Ten wniosek również potwierdza obserwacje uzyskane w obliczeniach z podrozdziału 5.1.

5.5. Przykład obliczania prawdopodobieństwa awarii w przypadku osiadań konstrukcji posadowionej na podłożu o cechach fizycznie nieliniowych

Analiza niezawodności, polegająca na obliczaniu prawdopodobieństwa awarii oraz wskaźnika niezawodności związanych z przekroczeniem przez wybrane punkty fundamentu określonych poziomów osiadań, komplikuje się istotnie, jeżeli model podłoża w postaci półprzestrzeni sprężystej lub warstwy sprężystej zostanie zastąpiony przez model sprężysto-plastyczny. Nawet stosunkowo niewielkie fluktuacje parametrów podłoża mogą bowiem powodować powstawanie znacznych deformacji. Eliminuje to praktycznie stosowanie metody perturbacyjnej. Dużą trudność stanowi też połączenie numerycznych procedur dla modeli sprężysto-plastycznych z procedurami typu FORM i SORM.

Za prace pionierskie, których autorzy stosują metody teorii niezawodności konstrukcji w połączeniu z metodą elementów skończonych dla sprężysto-plastycznego modelu podłoża gruntowego należy uznać prace El-Melighiego (1994) oraz El-Melighiego i współautorów (1995), w których analizowano wpływ zmienności losowej różnych parametrów gruntu na prawdopodobieństwo awarii stopy fundamentowej. Jako model podłoża przyjęto sprężysto-plastyczny model Druckera–Pragera, zaś analizę niezawodności przeprowadzono w oparciu o symulacyjną metodę adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej (por. podrozdział 2.6.4). Inną próbę podjęto w pracy El-Melighiego i współautorów (El-Melighi et al. 1997), w której analizowano obudowę tunelu w podłożu typu *cam-clay*, stosując metodę powierzchni odpowiedzi.

W podrozdziale 5.5 podano przykład analizy osiadań ściany oporowej, umiejscowionej w podłożu sprężysto-plastycznym Druckera–Pragera. Obliczenia niezawodności przeprowadzono w oparciu o metodę adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej. Opisane tu rezultaty pochodzą z pracy Brząkały, Puły i El-Melighiego (1995).

5.5.1. Rozwiązanie zadania nieliniową metodą elementów skończonych

Procedura podana poniżej została zaczerpnięta z monografii Bathego (1982) oraz Chena i Mizuno (1990). Rozpatruje się równania metody elementów skończonych w przyrostowej postaci

$$\mathbf{R}^{(i+1)} - \mathbf{F}^{(i+1)} = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

gdzie $\mathbf{R}^{(i+1)}$ jest wektorem sił węzłowych, wynikających z wewnętrznych naprężeń w elemencie, zaś $\mathbf{F}^{(i+1)}$ oznacza wektor sił węzłowych, wynikających z oddziaływań zewnętrznych oraz sił masowych. Indeks górny $(i + 1)$ odnosi się do kolejnego poziomu obciążenia. Nieliniowe równania (5.20) rozwiązuje się stosując schemat przyrostowo-iteracyjny w postaci

$$\mathbf{K}^T \Delta \mathbf{U}_j = \Psi_{j-1}^{(i+1)}. \quad (5.21)$$

W tym wzorze $\Psi_{j-1}^{(i+1)}$ oznacza wektor sił rezydualnych $(i+1)$ -go przyrostu w $(j-1)$ -tej iteracji, tj.

$$\Psi_{j-1}^{(i+1)} = \mathbf{F}^{(i+1)} - \mathbf{R}_{j-1}^{(i+1)}. \quad (5.22)$$

Ponadto $\Delta \mathbf{U}_j$ jest przyrostem przemieszczenia w j -tej iteracji dla $(i + 1)$ przyrostu obciążenia, czyli

$$\Delta \mathbf{U}_j^{(i+1)} = \Delta \mathbf{U}_{j-1}^{(i+1)} + \Delta \mathbf{U}_j \quad (5.23)$$

oraz

$$\mathbf{U}_j^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta \mathbf{U}_j^{(i+1)}, \quad (5.24)$$

gdzie $\Delta \mathbf{U}_j^{(i+1)}$ oznacza $(i + 1)$ przyrost przemieszczenia po j -tej iteracji, $\mathbf{U}_j^{(i+1)}$ jest całkowitym przemieszczeniem dla $(i + 1)$ poziomu obciążenia po j -tej iteracji, zaś $\mathbf{U}^{(i)}$ jest całkowitym przemieszczeniem po zakończeniu i -tego przyrostu obciążenia. Ponadto we wzorze (5.21) \mathbf{K}^T oznacza macierz sztywności.

Procedura się kończy, gdy spełniony jest warunek zbieżności sił rezydualnych postaci

$$\frac{\|\Psi_{j+1}^{(i+1)}\|}{\|\mathbf{F}^{(i+1)} - \mathbf{R}^{(i)}\|} \leq \varepsilon, \quad (5.25)$$

gdzie $\mathbf{R}^{(i)}$ jest wektorem sił wewnętrznych na końcu i -tego przyrostu, ε jest założonym poziomem tolerancji (zbieżności), zaś $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową.

5.5.2. Zastosowanie metody adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej

Metoda adaptowanej warunkowej wartości oczekiwanej została opisana w podrozdziale 2.6.4. Tutaj skorzystano z niej do obliczania prawdopodobieństwa przekrocze-

nia określonego poziomu przez przemieszczenia w nieliniowej analizie MES. W sytuacji, gdy obciążenie jest zmienną losową, obliczenia zaś wykonywane są poprzez symulację, należy liczyć się z możliwością wygenerowania w którejś z kolejnych realizacji obciążenia większego niż krytyczne, co z kolei spowodowałoby rozbieżność procesu opisanego w punkcie 5.5.1. Sytuacji tej można zapobiec poprzez przyjęcie obciążenia jako zmiennej kontrolnej (por. 2.6.4). Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ oznacza wektor bazowych zmiennych losowych (pozostałe oznaczenia – jak w podrozdziale 2.6.4). Niech ponadto X_1 oznacza obciążenie. Załóżmy, że X_1 jest zmienną stochastycznie niezależną od pozostałych składowych wektora \mathbf{X} . Przyjmijmy, że $\mathbf{X}'' = (X_1)$, co oznacza, że wektor kontrolnych zmiennych losowych jest jednowymiarowy. Niech $\mathbf{X}' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_{n-1})$ oznacza wektor zmiennych generowanych. Załóżmy, że istnieje gęstość prawdopodobieństwa tego wektora $f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}')$. Obliczenia prawdopodobieństwa awarii (przekroczenia poziomu osiadań) przebiegają według podanego niżej algorytmu (podanego w formie indukcyjnej):

1. Dla $k = 1$ jako początkową gęstość próbkowania k_W^1 (por. podrozdział 2.6.4) przyjąć $k_W^1 = f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}')$.

2. Dla $k = j$ niech k_W^j oznacza j -tą gęstość próbkowania. Wygenerować próbkę $\mathbf{x}_j^{(i)}$ według rozkładu o gęstości k_W^j .

3. Przesłać $\mathbf{x}_j^{(i)}$ do modułu realizującego obliczenia MES, w ramach którego:

a) przeprowadzić analizę przyrostową (p. 5.5.1),

b) na końcu każdego przyrostu l oszacować wartość funkcji stanu granicznego $g(\mathbf{F}^{(l)} | \mathbf{x}_j^{(i)})$,

c) zwiększać obciążenie przyrostowo aż do osiągnięcia warunku $g(\mathbf{F}^{(l)} | \mathbf{x}_j^{(i)}) \leq 0$,

d) obliczyć przybliżoną wartość „warunkowego obciążenia granicznego” $\mathbf{F}^{(c)}$ według wzoru interpolacyjnego

$$\mathbf{F}^{(c)} = \mathbf{F}^{(l-1)} + (\mathbf{F}^{(l)} - \mathbf{F}^{(l-1)}) \frac{g(\mathbf{F}^{(l-1)} | \mathbf{x}_j^{(i)})}{g(\mathbf{F}^{(l)} | \mathbf{x}_j^{(i)}) + g(\mathbf{F}^{(l-1)} | \mathbf{x}_j^{(i)})}. \quad (5.26)$$

4. Obliczyć warunkowe prawdopodobieństwo awarii $p_{f| \mathbf{x}' = \mathbf{x}_j^{(i)}}$ pod warunkiem

$\mathbf{X}' = \mathbf{x}_j^{(i)}$. Ponieważ, zgodnie z przyjętym założeniem, obciążenie jest zmienną stochastycznie niezależną od pozostałych współrzędnych wektora zmiennych bazowych \mathbf{X} , a ponadto funkcja stanu granicznego g jest funkcją malejącą względem argumentu $\mathbf{F}^{(l)}$, przeto poszukiwane prawdopodobieństwo warunkowe może być obliczone według zależności

$$P_f |_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^{(i)}} = 1 - F_F(\mathbf{F}^{(c)}), \quad (5.27)$$

gdzie F_F jest dystrybuantą zmiennej losowej obciążenia.

5. Obliczyć wartość wyrażenia

$$P_f |_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^{(i)}} f_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}'^{(i)}). \quad (5.28)$$

6. Obliczyć wartość estymatora J_6 (por. wzór (2.82) w podrozdziale 2.6) prawdopodobieństwa awarii p_F oraz jego wariancję (wzór (2.83)) i współczynnik zmienności.

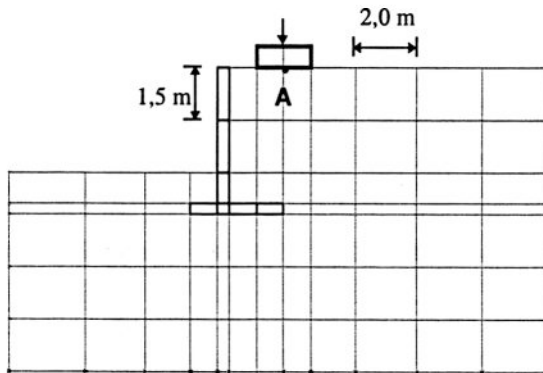
7. Sprawdzić, czy bieżąca wartość wyrażenia (5.28) jest większa od jego dotychczasowej wartości maksymalnej. Jeżeli tak, to dotychczasową gęstość próbkowania k_w^j przesuwa się tak, aby jej wartość oczekiwana znalazła się w punkcie $\mathbf{x}'^{(i)}$, czyli w punkcie nowego maksimum wyrażenia (5.28). W ten sposób otrzymuje się nową gęstość próbkowania k_w^{j+1} . Jeżeli zaś bieżąca wartość (5.28) nie jest większa od dotychczasowego maksimum, to gęstość próbkowania pozostaje taka sama, a następnym wygenerowanym elementem jest $\mathbf{x}'^{(i+1)}$.

8. Powtarzać kroki od 2 do 7 aż do uzyskania:

- założonego na początku docelowego współczynnika zmienności estymatora prawdopodobieństwa awarii (2.82) – bieżący współczynnik zmienności jest obliczany w punkcie 6 lub
- określonej na początku całkowitej liczby realizacji w procesie symulacyjnym.

5.5.3. Osiadania fundamentu w sąsiedztwie ściany oporowej

Rozpatruje się ścianę oporową oraz fundament pasmowy, posadowiony na naziemnie jak na rysunku 5.24.

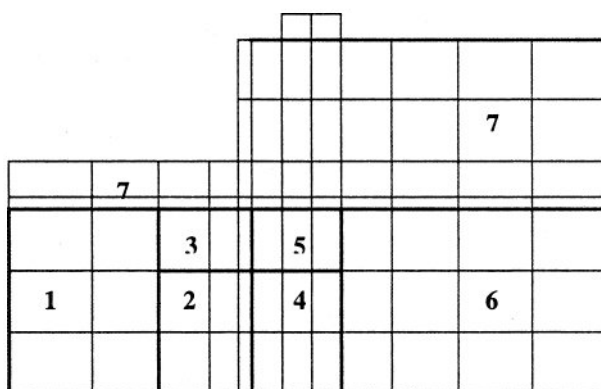


Rys. 5.24. Fundament w sąsiedztwie ściany oporowej oraz siatka MES do analizy zadania

W zadaniu przyjęto następujące założenia:

- Płaski stan odkształcenia.
- Podłoże pod podstawą ściany oporowej stanowi grunt spoisty w warunkach z drenażem.
- Zasypkę stanowi piasek z domieszką gliny, co implikuje pewną niewielką spójność.
- Pomija się ciężar objętościowy gruntu. W ten sposób rozpatruje się tylko przyrosty przemieszczeń spowodowane obciążeniem zewnętrznym.
- Podłoże jest traktowane jako materiał nieliniowy typu Druckera–Pragera.
- Zarówno ściana, jak i fundament wykonane są z betonu o module Younga $E = 30$ GPa oraz współczynnika Poissona $\nu = 0,167$. Oba te parametry są traktowane jako nielosowe.
- Przyjętą siatkę MES pokazano na rysunku 5.24.

Rozpatruje się pole losowe kąta tarcia wewnętrznego $\varphi(\mathbf{x})$ oraz pole losowe spójności $c(\mathbf{x})$. Na potrzeby obliczeń metodą elementów skończonych pola te zdyskretyzowano stosując metodę punktu środkowego (Der Kiureghian i Ke 1988), w której pole losowe w danym elemencie losowym jest reprezentowane przez pojedynczą zmienną losową będącą wartością tegoż pola w środku ciężkości tego elementu. W siatce MES niektóre elementy zostały połączone tak, aby stworzyć siedem elementów losowych, tak jak pokazano to na rysunku 5.25.



Rys. 5.25. Elementy losowe w ramach siatki MES

Z każdym elementem losowym skojarzone były dwie zmienne losowe φ oraz c . W ten sposób dwa pola losowe zostały zastąpione przez ciąg czternastu zmiennych losowych X_i , $i = 1, 2, \dots, 14$, których charakterystyki probabilistyczne podano w tabeli 5.21.

Tabela 5.21. Momenty statystyczne parametrów gruntu.

Zmienne X_2, X_4, \dots, X_{12} reprezentują kąt tarcia wewnętrznego w elementach od 1 do 6; zmienne $X_1, X_3, X_5, X_7, X_9, X_{11}$ reprezentują spójność w elementach od 1 do 6, zaś X_{13}, X_{14} oznaczają odpowiednio spójność i kąt tarcia wewnętrznego w elemencie 7

Zmienne losowe	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności (%)
$X_2, X_4, X_6, X_8, X_{10}, X_{12}$	12°	1,8°	15
$X_1, X_3, X_5, X_7, X_9, X_{11}$	22 kPa	5,5 kPa	25
X_{14}	33°	4,95°	15
X_{13}	10 kPa	1 kPa	10

W obu polach przyjęto funkcję korelacji o następującej postaci (por. wzór (3.19)):

$$\rho(X_i, X_j) = \rho(d_{ij}) = A \exp\left\{-\frac{d_{ij}}{a}\right\}, \quad (5.29)$$

gdzie: d_{ij} jest odległością pomiędzy środkami ciężkości elementów i oraz j , a – parametrem skali, który przyjęto tu jako równy szerokości podstawy ściany, tj. $B = 3,6$ m, A zaś przyjmuje dwie następujące wartości:

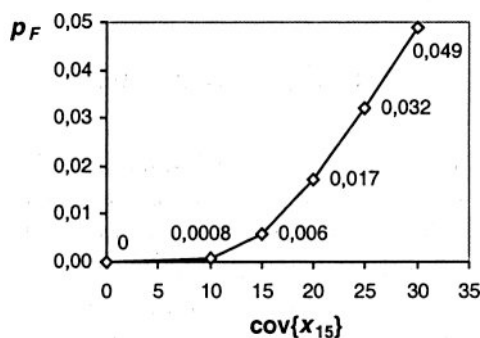
- $A = 1$ w przypadku autokorelacji, tj. gdy obydwa indeksy, i oraz j , są albo parzyste, albo nieparzyste,
- $A = -0,3$ w przypadku korelacji pomiędzy polami, tj. wtedy, gdy jeden z indeksów jest parzysty, a drugi nieparzysty.

Dodatkowo założono brak korelacji pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi podłoża pod podstawą ściany (zmienne od X_1 do X_{12}) a parametrami wytrzymałościowymi zasypki (zmienne X_{13} do X_{14}). Ponadto założono, że każda ze zmiennych losowych X_i , $i = 1, 2, \dots, 14$ ma rozkład lognormalny. Jako zmienną kontrolną X_{15} (por. podrozdział 5.5.2) przyjęto obciążenie zewnętrzne wywołane obecnością fundamentu na naziomiu. Zmienna ta – o rozkładzie Gumbela (por. Benjamin i Cornell 1977) – miała wartość oczekiwaną $E\{X_{15}\} = 300$ kN/m, odchylenie standardowe zmieniało się natomiast w trakcie obliczeń.

Obliczano osiadania podłoża pod środkiem fundamentu pasmowego usytuowanego na naziomiu (punkt A na rysunku 5.24). Podobnie jak w poprzednich zadaniach tego rozdziału obliczano prawdopodobieństwo postaci (5.2), przy czym jako maksymalne dopuszczone osiadanie przyjęto $u_{\max} = 0,02$ m. Do oszacowania tego prawdopodobieństwa zastosowano procedury opisane w podrozdziałach 5.5.1 oraz 5.5.2. W kolejnych przykładach badano prawdopodobieństwo przekroczenia jako funkcję odchylenia standardowego obciążenia fundamentem pasmowym (zmiennej kontrolnej). Założono, że proces symulacyjny kończy się po $N_H = 250$ realizacjach (por. punkt 8 algorytmu opisanego w podrozdziale 5.5.2), obliczając każdorazowo po zakończeniu symulacji współczynnik zmienności estymowanego prawdopodobieństwa awarii. Uzyskane rezultaty zamieszczono w tabeli 5.22 oraz na rysunku 5.26.

Tabela 5.22. Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa przekroczenia osiadań dopuszczalnych

Odchylenie standardowe obciążenia σ_{j5} [kN/m]	Współczynnik zmienności obciążenia [%]	Prawdopodobieństwo przekroczenia p_F	Wskaźnik niezawodności β	Współczynnik zmienności dla p_F [%]
30	10	0,0008	3,16	32
45	15	0,006	2,51	30
60	20	0,017	2,12	30
75	25	0,032	1,85	31
90	30	0,049	1,65	32

Rys. 5.26. Zależność prawdopodobieństwa przekroczenia p_F od współczynnika zmienności obciążenia

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wpływ zmienności losowej przyłożonego obciążenia na prawdopodobieństwo przekroczenia jest duży. Z drugiej strony trzeba odnotować, że mimo znacznego „wysiłku obliczeniowego”, który jest niezbędny do 250 realizacji w procesie symulacyjnym, obliczone prawdopodobieństwa charakteryzują się dużym współczynnikiem zmienności. Jednak współczynnik ten jest stabilny niezależnie od wartości prawdopodobieństwa.

6. Wpływ losowej nośności pali na momenty zginające w ławach posadowionych na palach

6.1. Wprowadzenie

W rozdziale 6, rozpoczynającym część związaną z problemami fundamentów palowych, autor postawił sobie za cel zbadanie efektu losowej zmienności momentów zginających, występujących w belce oczepowej fundamentu ławowego posadowionego na palach. Prac dotyczących probabilistycznej analizy nośności fundamentów palowych jest stosunkowo niewiele. Istotnym utrudnieniem jest fakt, że modelowanie probabilistyczne napotyka tu na szczególnie trudne procedury identyfikacji parametrów (np. niewielka liczba danych do estymacji statystycznej). Pionierską pracą w dziedzinie oceny ryzyka związanego z losową nośnością fundamentu palowego jest praca Evangelisty i współautorów (Evangelista et al. 1977). Z drugiej strony, przy fundamentach o dużych rozmiarach w planie losowe wahania nośności poszczególnych pali mogą mieć bardzo istotny wpływ na prawidłową pracę konstrukcji oczepowej. W celu wysublimowania efektu losowej nośności (lub losowych podatności) pali na momenty zginające przyjęto, że jedynymi rozpatrywanymi zmiennymi losowymi będą tu nośności (podatności) poszczególnych pali przekazujących obciążenia na grunt.

6.2. Schemat współpracy

Zakres sprężysty. Przyjęto schemat statyczny belki ciągłej, opartej na szeregu pali, który został zanalizowany za pomocą metody sił. Każdy pal jest reprezentowany przez podporę obciążoną wzdłuż jej dłuższej osi, zgodnie z liniową zależnością osiadania od obciążenia, aż do uzyskania nośności granicznej. Dla liczby pali większej od dwóch układ staje się statycznie niewyznaczalny. W takich przypadkach posłużono się odpowiednim wyznaczalnym układem, zastępując układ rzeczywisty, co zilustrowano na rysunku 6.1. W układzie zastępczym lewy koniec belki został utwierdzony, a podpory usunięto, zastępując je niewiadomymi reakcjami, tworząc belkę wspornikową. Reak-

cje w palach r_1, r_2, \dots, r_N oraz przemieszczenie y_0 i kąt obrotu φ_0 lewego końca belki rzeczywistej stanowią $N + 2$ niewiadome. Z warunku metody sił, dla którego względne przemieszczenie punktu łączącego belkę z każdym palem musi wynosić zero, otrzymujemy N równań kanonicznych. Dodatkowe dwa równania potrzebne do rozwiązania tego układu otrzymuje się z warunków równowagi statycznej. W tym przypadku suma sił pionowych oraz suma momentów muszą równać się zeru. Równanie kanoniczne można zapisać w postaci

$$r_1 \delta_{k,1} + r_2 \delta_{k,2} + \dots + r_i \delta_{k,i} + \dots + r_N \delta_{k,N} - y_0 - l_k \varphi_0 - \Delta_{k,F} = 0, \quad (6.1)$$

gdzie: $k = 1, 2, \dots, N$, r_i – reakcja w i -tym palu, y_0 – pionowe przemieszczenie lewego końca belki w układzie rzeczywistym, φ_0 – kąt obrotu lewego końca belki w układzie rzeczywistym, l_k – odległość pala k od lewego końca belki, $\delta_{k,i}$ – względne przemieszczenie punktu styczności pala k z belką, spowodowane jednostkową reakcją pala i , $\Delta_{k,F}$ – pionowe przemieszczenie punktu styczności pala k z belką, spowodowane wszystkimi pionowymi obciążeniami rzeczywistymi działającymi na belkę.

Natomiast równania równowagi mają formę

$$\sum_{i=1}^N r_i - \sum_{j=1}^n F_j = 0, \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^N r_i l_i - \sum_{j=1}^n F_j \lambda_j = 0, \quad (6.3)$$

gdzie: F_j – obciążenie skupione j działające na fundament, n – liczba sił obciążenia zewnętrznego, λ_j – odległość siły F_j od lewego końca belki.

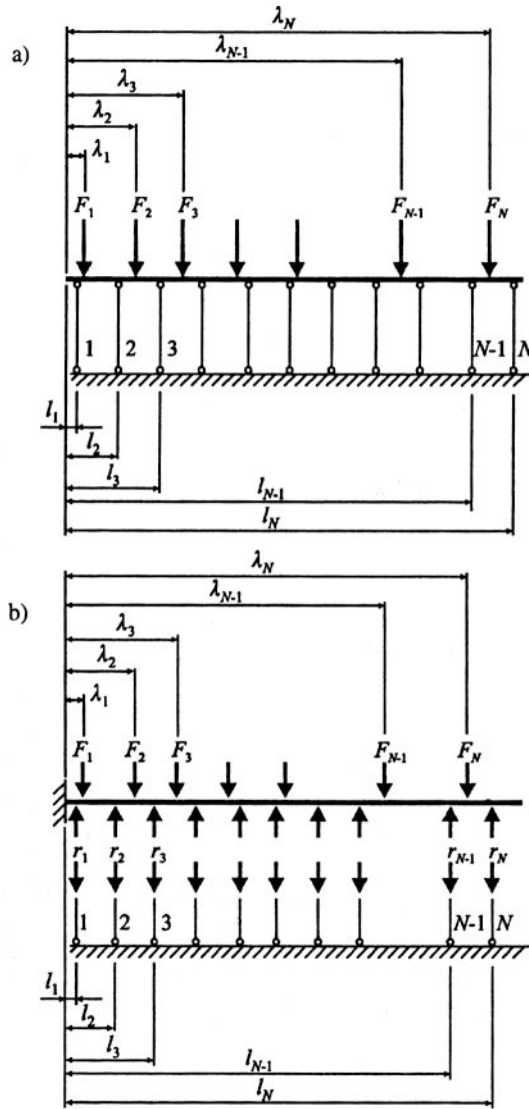
Dla $i = k$ współczynniki układu równań wynoszą $\delta_{k,k} = y_{k,k} + s_{k,k}$, gdzie $y_{k,k}$ jest przemieszczeniem punktu styczności pala k i belki spowodowanym jednostkową reakcją w palu k , a $s_{k,k}$ jest osiadaniem pala k pod działaniem jednostkowej siły. Dla pojedynczego pala k (bez uwzględnienia wpływu sąsiednich pali na osiadania)

$$y_{k,k} = \frac{l_k^3}{3EI}, \quad (6.4)$$

$$s_{k,k} = \frac{w}{P_{\text{dop-}k}}, \quad (6.5)$$

gdzie w jest osiadaniem pala, kiedy jego reakcja podporowa jest równa dopuszczalnej nośności $P_{\text{dop-}k}$ (np. przewidzianej w projekcie). Uwzględniając wpływ osiadania sąsiednich pali dla $i \neq k$, $\delta_{k,i} = y_{k,i}$ i

$$y_{k,i} = \frac{1}{6EI} l_i^2 (3l_k - l_i) \quad \text{dla } (l_k > l_i), \quad (6.6)$$



Rys. 6.1. Schemat układu palowego: a) zastępczego, b) rzeczywistego

$$y_{k,i} = \frac{1}{6EI} l_k^2 (3l_i - l_k) \quad \text{dla } (l_k < l_i), \quad (6.7)$$

gdzie EI jest sztywnością oczeppu, $\Delta_{k,F}$ oblicza się w podobny sposób

$$\Delta_{k,F} = \frac{1}{6EI} \sum_{j=1}^n V_{kj} F_j, \quad (6.8)$$

gdzie

$$V_{kj} = l_j^2(3l_k - l_j) \quad \text{dla } l_k > l_j, \quad (6.9)$$

$$V_{kj} = l_k^2(3l_j - l_k) \quad \text{dla } l_k < l_j. \quad (6.10)$$

W zapisie macierzowym, przydatnym w programowaniu komputerowym, układ równań można zapisać w postaci

$$\delta \mathbf{R} = \Delta, \quad (6.11)$$

gdzie δ jest macierzą współczynników równań kanonicznych, \mathbf{R} jest wektorem $N+2$ niewiadomych określonym jako

$$\mathbf{R} = [r_1, r_2, \dots, r_N, y_0, \varphi]^T \quad (6.12)$$

oraz

$$\Delta = \left[\Delta_{1,F}, \Delta_{2,F}, \dots, \Delta_{N,F}, \sum_{j=1}^n F_j, \sum_{j=1}^n F_j \lambda_j \right]^T. \quad (6.13)$$

Macierz współczynników wyraża się następująco:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,N} & -1 & -l_1 \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \dots & \delta_{2,N} & -1 & -l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{N,1} & \delta_{N,2} & \dots & \delta_{N,N} & -1 & -l_N \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & \dots & l_N & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Zakres plastyczny. Jeżeli we wzorze (6.5) $P_{\text{dop-}k}$ oznacza pewną wielkość umowną (konsekwentnie zwaną dalej nośnością dopuszczalną), która nie zostanie przekroczona przez reakcję r_k , wówczas pal k pracuje w zakresie sprężystym, zaś parametr określony wzorem (6.5) można traktować jako jego podatność. Natomiast w przypadku osiągnięcia przez reakcję r_t w palu t granicznej nośności pala $P_{\text{gr-}t}$, zależność osiadania pala od jego obciążenia staje się nieliniowa. Jeżeli z obliczeń powyższego układu równań wynika, że reakcja w palu t przekroczy wartość $P_{\text{gr-}t}$, równanie (6.11) jest zmieniane z uwzględnieniem redystrybucji reakcji na pozostałe pale. W macierzy δ współczynników układu równań wiersz i kolumna t zostają wykreślone, a także wiersz t w wektorach \mathbf{R} i Δ , natomiast indeksy w elementach macierzy zmniejsza

się o 1, jeżeli są one większe niż t . Dodatkowo wektor wyrazów wolnych Δ jest zamieniony na Δ' :

$$\Delta' = \begin{bmatrix} \Delta_{1,F} - P_{P_{gr-t}} \delta_{1,t} \\ \Delta_{2,F} - P_{P_{gr-t}} \delta_{2,t} \\ \dots \\ \dots \\ \Delta_{N-1,F} - P_{P_{gr-t}} \delta_{N-1,t} \\ \sum_{j=1}^n F_j - P_{P_{gr-t}} \\ \sum_{j=1}^n F_j l_j - P_{P_{gr-t}} \lambda_t \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Ostatecznie otrzymuje się nowy układ równań

$$\delta' R' = \Delta' \quad (6.16)$$

z $N + 1$ niewiadomymi. Jeżeli powyższy układ nie wskazuje, że któryś z kolejnych pali przekroczył nośność graniczną P_{gr-t} , to indeksy w wektorze R są przenumerowane do pierwotnych wartości, a reakcja r_t wynosi P_{gr-t} . W przeciwnym razie następuje dalsza modyfikacja równania (6.16).

6.3. Sformułowanie problemu w ramach teorii niezawodności konstrukcji

Jak wcześniej nadmieniono, w ogólnym przypadku za wektor zmiennych losowych przyjmuje się tu wektor nośności poszczególnych pali $(P_1, P_2, \dots, P_n) = (P_{dop-1}, P_{dop-2}, \dots, P_{dop-n})$. W przypadku zadań rozpatrywanych jedynie w zakresie sprężystym zmiennymi losowymi są podatności poszczególnych pali. Dla zadań dopuszczających pracę pali w zakresie plastycznym konieczne jest każdorazowe sprecyzowanie warunku, przy którym następuje przejście do zakresu plastycznego. Może on być zdefiniowany jako pewna funkcja losowej nośności pala. Można tu zastosować analogię do oceny nośności pala na podstawie obciążeń próbnych. Warunek ten należy zdefiniować na początku w ramach założeń rozpatrywanego zadania.

Na potrzeby badania losowych momentów pojawiających się w belce oцепowej, funkcję stanu granicznego można zapisać w postaci

$$g(P_1, P_2, \dots, P_n) = M_{\max} - M(P_1, P_2, \dots, P_n), \quad (6.17)$$

gdzie $M(P_1, P_2, \dots, P_n)$ jest losowym momentem zginającym w określonym wcześniej przekroju belki, zaś M_{\max} – wartością progową momentu, np. przyjętą jako wartość obliczeniowa do projektowania. Z punktu widzenia teorii niezawodności funkcja stanu granicznego (6.17) jest analogiczna do funkcji (5.1). Warunek (6.17) rozpatruje się w różnych przekrojach belki, uznanych za szczególnie niebezpieczne ze względu na zginanie. W przypadku ujemnych wartości losowego momentu $M(P_1, P_2, \dots, P_n)$ funkcja stanu granicznego (6.17) powinna być zapisana w postaci

$$g(P_1, P_2, \dots, P_n) = M(P_1, P_2, \dots, P_n) - M_{\min}. \quad (6.18)$$

Zatem prawdopodobieństwo awarii (awaryjność) rozumiane jest jako prawdopodobieństwo wystąpienia momentu większego od wartości maksymalnej lub mniejszego od wartości minimalnej w rozpatrywanym przekroju

$$P_F = P\{M_{\max} - M(P_1, P_2, \dots, P_n) < 0\} \quad (6.19)$$

lub

$$P_F = P\{M(P_1, P_2, \dots, P_n) - M_{\min} < 0\}. \quad (6.20)$$

W ramach tego rozdziału częściej jednak zadanie stawiane będzie w odwrotnej formie, tj. przy z góry zadanej wartości prawdopodobieństwa awarii lub równoważnego mu wskaźnika niezawodności należy określić wartość M_{\max} (lub M_{\min}). Taką wartość można by przyjąć do obliczeń zbrojenia, co oznacza wymiarowanie na określony z góry poziom bezpieczeństwa.

Sposób realizacji obliczeń niezawodnościowych stanowi tu oddzielny problem. Zastosowanie klarownych i efektywnych metod FORM/SORM napotyka na istotne ograniczenia w sytuacji, gdy liczba pali w rozpatrywanym fundamencie jest duża, lub gdy rozwiązania wychodzą poza zakres sprężysty. Wówczas rozwiązanie układu równań (6.16) w zamkniętej formie nie jest na ogół możliwe, co utrudnia lub wręcz uniemożliwia zastosowanie metod FORM/SORM. W takiej sytuacji zdecydowano się na zastosowanie techniki symulacyjnej Monte Carlo, proponując następujący algorytm obliczeń:

1. Przyjąć postulowaną wartość wskaźnika niezawodności (postulowaną wartość prawdopodobieństwa awarii).
2. Zdefiniować zależność pomiędzy wartością graniczną P_{gr-t} , określającą punkt przejścia do pracy plastycznej pala, a losową nośnością pala $P_t = P_{dop-t}$.
3. Założyć rozkłady prawdopodobieństwa dla nośności poszczególnych pali.
4. Przyjąć liczbę realizacji N_{rt} w procesie symulacyjnym (liczebność próby).
5. Wygenerować nośności (podatności) P_{it} pali o numerach $t = 1, \dots, N$, bieżącej wartości i , $1 \leq i \leq N_{rt}$.
6. Obliczyć współczynniki δ układu równań metody sił (6.11) oraz kolumnę wyrazów wolnych Δ (równ. (6.13)).

7. Wyznaczyć reakcję r_t w poszczególnych palach z równania (6.11) lub (6.16).
8. Jeżeli dla każdego t , $t = 1, 2, \dots, N$, $r_t \leq P_{gr-t}$, to przejść do punktu 9. W przeciwnym razie zmodyfikować współczynniki układu równań według procedury dla zakresu plastycznego opisanej w podrozdziale 6.2 i powrócić do punktu 7.
9. Obliczyć momenty zginające w zadanych w założeniach zadania przekrojach.
10. Jeżeli $i < N_{rt}$, przyjąć $i = i + 1$, a następnie powrócić do punktu 5. W przeciwnym razie przejść do punktu 11.
11. Dla każdego z wybranych przekrojów estymować wartość oczekiwaną i wariancję momentu zginającego oraz dokonać estymacji rozkładu prawdopodobieństwa.
12. Dla danego wskaźnika niezawodności (prawdopodobieństwa awarii) wyznaczyć wartości progowe momentów zginających w wybranych przekrojach, odwracając wzór (6.19) lub wzór (6.20).

W kolejnych podrozdziałach przedstawione będą analizy numeryczne prowadzone kolejno według metody SORM, a następnie według metody symulacyjnej.

6.4. Obliczenia dla rozwiązań w postaci zamkniętej (mała liczba pali)

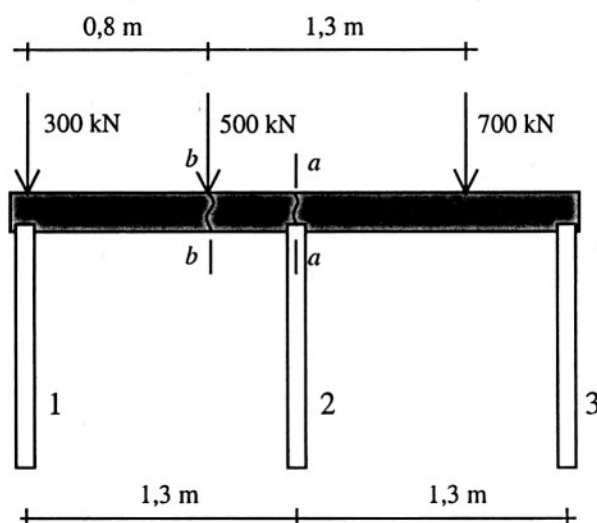
W przykładzie obliczeniowym pokazanym w tym podrozdziale rozpatruje się układ zawierający trzy pale i przyjmuje się założenie, że pale te pracują w zakresie sprężystym. W tej sytuacji układ równań (6.11) jest układem 5×5 i rozwiązuje się go w postaci zamkniętej. Pozwala to na uzyskanie jawnej zależności momentów zginających od zmiennych losowych, którymi są podatności poszczególnych pali. To z kolei umożliwia efektywne zastosowanie metody SORM. W tym podrozdziale będą zbadane zależności otrzymywanych granicznych momentów zginających od rodzaju przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa podatności pali, współczynnika zmienności tychże podatności oraz obecności korelacji pomiędzy podatnościami poszczególnych pali.

Schemat zadania przedstawiono na rysunku 6.2.

Przy założeniu jedynie sprężystego charakteru pracy pali zadanie staje się zadaniem o losowych podatnościach pali. Układ równań kanonicznych (6.11) można rozwiązać w postaci zamkniętej, stosując systemy do symbolicznych obliczeń matematycznych. Tutaj posłużono się aplikacją w programie MathCad (Grad 1998). W ten sposób uzyskano jawną zależność funkcji stanu granicznego od zmiennych losowych (podatności pali), co pozwalało na efektywne zastosowanie metody SORM do obliczenia wskaźników niezawodności i prawdopodobieństwa awarii.

Obliczeń momentów zginających w konstrukcji oczepowej dokonano w przekrojach a-a oraz b-b (rys. 6.2). Za dodatnie przyjęto momenty rozciągające włókna dolne belki oczepowej. Założono, że każdy z pali ma tę samą wartość oczekiwaną nośności dopuszczalnej $E\{P\} = 683,4$ kN. Jako wartość osiadania, odpowiadającego obciążeniu równe-

mu nośności dopuszczalnej (por. wzór (6.5)), przyjęto $w = 0,02$ m. W ten sposób losowa podatność pąła została określona. Sztywność oczepu przyjęto stałą na całej długości, $EI = 653386$ kNm². Aby przekonać się, jaki jest wpływ rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego (P_1, \dots, P_n), przeprowadzono obliczenia dla pięciu różnych rozkładów: lognormalnego, gamma, Gumbela (por. np. Benjamin i Cornell 1977), jednostajnego oraz normalnego. Zakładano przy tym jednakowe wartości oczekiwane oraz współczynniki zmienności $\text{cov}\{P_i\} = 0,2$. Założono wartość wskaźnika niezawodności $\beta = 3,0$, poszukując odpowiadających mu granicznych wartości momentów zginających w określonych przekrojach. Uzyskane z obliczeń wartości tych momentów w przekroju a-a zamieszczono w tabeli 6.1. Obliczenia wykonano metodą FORM.



Rys. 6.2. Schemat układu palowego

Tabela 6.1. Wpływ rozkładu prawdopodobieństwa nośności dopuszczalnej na wartość momentu progowego w przekroju a-a

Momenty [nm.] Dla a-a	Rozkład prawdopodobieństwa $E\{P_i\} = 683,4$ kN, $\text{cov}\{P_i\} = 0,2$				
	lognormalny	gamma	gumbela	jednostajny	normalny
$\beta = 3,0$	191,0	198,0	181,0	183,0	224,0

Momenty uzyskane przy założeniu rozkładu normalnego odbiegają istotnie od pozostałych. Różnice pomiędzy momentami nie są jednak drastyczne, co pozwala przypuszczać, że wybór typu rozkładu prawdopodobieństwa dla nośności dopuszczalnej pąła nie jest najistotniejszym czynnikiem dla wartości wskaźnika niezawodności.

Następnie zbadano wpływ współczynnika zmienności nośności dopuszczalnej pała oraz ewentualnej korelacji pomiędzy podatnościami poszczególnych pali. Wyniki dla wartości wskaźnika niezawodności $\beta = 3,0$ podano w tabeli 6.2. Wskazują one na istotny wpływ współczynnika zmienności podatności na wartość momentu progowego. Efekt ten jest niewątpliwie ważniejszy niż wpływ rodzaju rozkładu prawdopodobieństwa.

Największe wartości momentów zginających uzyskano przy założeniu braku korelacji pomiędzy podatnościami poszczególnych pali. Wynik taki uzyskano przy założeniu jedynie nieujemnych wartości współczynników korelacji. W literaturze brak jest informacji na temat oszacowania tej korelacji. Raporty z osiadań próbnych pali także nie zawierają takich informacji. Korelacja ujemna wydaje się jednak bardzo mało prawdopodobna, gdyż pale będące blisko siebie pracują na ogół w zbliżonych warunkach gruntowych. Ponieważ oszacowanie korelacji byłoby w praktyce bardzo kosztowne, więc z uzyskanych rezultatów wynika, że najbezpieczniej jest przyjąć stochastyczną niezależność podatności poszczególnych pali. Widać jednak, że efekt współczynnika korelacji jest bardzo duży i w przypadku stwierdzenia istnienia dodatniej korelacji momenty progowe można by uznać za znacznie mniejsze aniżeli przy założonym braku korelacji.

Warto też odnotować, że korelacja ma tym większy wpływ na progowe wartości momentów zginających, im większa jest wartość współczynnika zmienności podatności.

Tabela 6.2. Wpływ współczynnika zmienności podatności oraz współczynników korelacji na wartość progową momentu zginającego w przekroju a-a

Współczynnik zmienności $cov\{P_i\}$	$\sigma\{P_i\}$ [kN]	Rozkład prawdopodobieństwa, $E\{P_i\}$ kN							
		normalny				lognormalny			
		Współczynnik korelacji *				Współczynnik korelacji *			
		0	0,7/0	0,5/0,1	0,6/0,2	0	0,7/0	0,5/0,1	0,6/0,2
		Wartości momentów [kNm]							
10%	68,3	139,0	85,0	111,0	104,0	132,0	78,0	105,0	98,0
15%	102,5	180,0	104,0	140,0	130,0	163,0	86,0	125,0	116,0
20%	136,7	224,0	130,0	177,0	163,0	191,0	94,0	144,0	132,0
23%	157,2	252,0	154,0	204,0	188,0	207,0	98,0	154,0	142,0

* Pale bliższe /pale dalsze.

Znaczne losowe wahania momentów zginających, spowodowane losowymi podatnościami pali, mogą doprowadzić do takiej sytuacji, że w rozpatrywanym przekroju z niezerowym prawdopodobieństwem moment zginający może osiągać zarówno war-

tości dodatnie, jak i ujemne. Zatem przy zadanym wskaźniku niezawodności warto poszukiwać zarówno wartości M_{\max} według zależności (6.19), jak i zależności M_{\min} według (6.20). Takie obliczenia wykonano dla rozpatrywanych tu przekrojów a-a oraz b-b. Uzyskane wartości momentów zestawiono w tabeli 6.3.

Tabela 6.3. Progowe momenty przekrojowe, przy zmiennym rozkładzie prawdopodobieństwa i korelacji

Momenty przekrojowe [kNm] dla $\beta = 3,0$ i $\text{cov}\{P_i\} = 20\%$		Rozkłady prawdopodobieństwa					Obliczenia deterministyczne
		normalny		Gamma	lognormalny		
		Współczynnik korelacji *			Współczynnik korelacji *		
		0	0,4 / 0,2		0	0,4 / 0,2	
Przekrój a-a	M_{\min}	-123,0	-74,5	-113,7	-115,5	-66,5	47,7
	M_{\max}	224,0	193,3	198,0	191,0	159,0	
Przekrój b-b	M_{\min}	78,5	105,7	80,7	79,0	108,6	183,2
	M_{\max}	293,2	272,8	276,2	271,5	251,5	

* Pale bliższe /pale dalsze.

Jak widać w przekroju b-b, przy przyjętym wskaźniku niezawodności $\beta = 3,0$, momenty minimalne mają ten sam znak co momenty maksymalne (momenty dodatnie rozciągają włókna dolne belki oczepowej). Inaczej jest nad środkowym palem, w którym momenty wahają się po obu stronach przekroju oczepu. Porównując te wyniki z wynikami uzyskanymi z nielosowych obliczeń statycznych (ostatnia kolumna tablicy 6.3), w których układ zamodelowano palami o takiej samej, stałej podatności równej $s = \frac{w}{E\{P\}} = \frac{0,02}{683,4} \approx 2,927 \cdot 10^{-5} \text{ m(KN)}^{-1}$, da się zaobserwować różnicę w mogących pojawiać się momentach (szczególnie ich znaku). Może to mieć istotne znaczenie przy doborze zbrojenia w belce oczepowej.

6.5. Obliczenia oparte na symulacji cyfrowej

6.5.1. Cel obliczeń oraz założenia ogólne

Jak już wspomniano w podrozdziale 6.3, przy większej liczbie pali uzyskanie w postaci zamkniętej zależności pomiędzy nośnością poszczególnych pali a momentami zginającymi w belce oczepowej nie jest możliwe. Dla tej sytuacji proponuje się procedurę opartą na symulacji Monte Carlo, której algorytm przedstawiono w podrozdziale 6.3. Poniżej przedstawiony został przykład ławy z rzędem jedenastu pali. Pod-

stawowym celem tego przykładu, oprócz sprawdzenia skuteczności proponowanej procedury, jest ocena wahań momentów w sytuacji nieliniowej pracy pali poza zakresem sprężystym. Stąd wynikają określone proporcje pomiędzy nośnością poszczególnych pali a zastosowanymi obciążeniami w analizowanym przykładzie.

Kolejnym aspektem jest określenie granicy, poza którą kończy się zakres sprężystej pracy pala. Wydaje się, że najlepszą ocenę takiego warunku można uzyskać na podstawie obciążeń próbnych pali, związanych z konkretnym przedsięwzięciem geotechnicznym. Chodzi o określenie relacji pomiędzy nośnością graniczną przyjętą do obliczeń projektowych a obciążeniem, poza którym występują już bardzo duże przemieszczenia pala, co można uznać za przejście pala do pracy plastycznej (nieliniowej). Propozycje określania takich relacji podaje np. polska norma (PN-83/B-2482). W analizowanym przykładzie przyjęto warunek postaci

$$P_{gr-t} = 2P_t, \quad (6.21)$$

w którym P_t jest losową nośnością pala t , traktowaną tu jako nośność graniczną przyjętą do celów projektowych.

6.5.2. Przykład nr 1

W rozpatrywanym tu przykładzie przyjęto następujące założenia. Rząd 11 jednakowych pali zwieńczonych belką ocepową przekazuje na grunt obciążenie od 6 słupów (rys. 6.3). Wartość każdej z sił w słupach wynosi $F = 1800$ kN. Nośność każdego z pali jest zmienną losową o wartości oczekiwanej $E\{P_t\} = 683,4$ kN i współczynnika zmienności $cov\{P_t\} = 0,15$ (odchylenie standardowe $\sigma_{P_t} = 102,5$ kN, $t = 1, 2, \dots, 11$). Przyjęto stałą sztywność belki ocepowej na całej długości, $EI = 653386$ kNm². Obliczenia realizowano dla czterech różnych przypadków założeń probabilistycznych (nazywanych dalej seriami obliczeń):

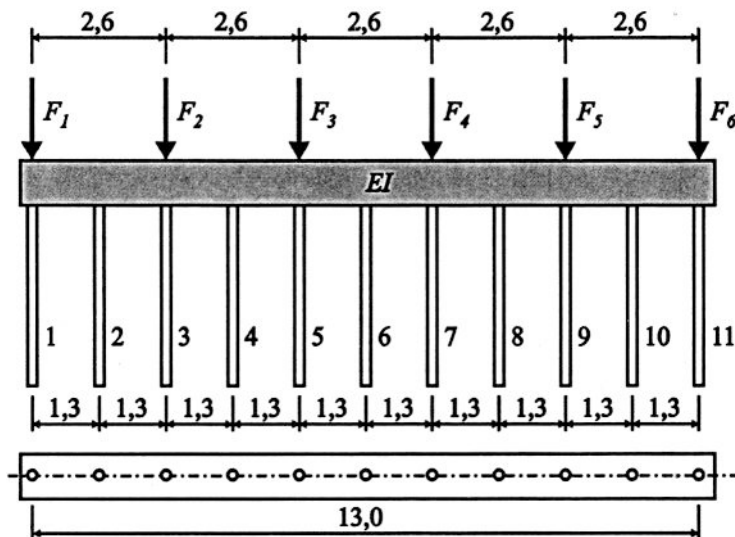
Seria 1. Nośność pojedynczego pala ma rozkład normalny. Nośności poszczególnych pali są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Seria 2. Nośność pojedynczego pala ma rozkład normalny, ale nośności poszczególnych pali są skorelowane ze sobą według następujących relacji:

- dla pali odległych od siebie o $d = 1,3$ m współczynnik korelacji wynosi $\rho = 0,4$,
- dla odległości $d = 2,6$ m, $\rho = 0,3$
- dla odległości $d = 3,9$ m, $\rho = 0,2$
- dla odległości $d = 5,2$ m, $\rho = 0,1$
- dla większych odległości $\rho = 0$.

Seria 3. Nośność pojedynczego pala ma rozkład lognormalny. Nośności poszczególnych pali są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Seria 4. Nośność pojedynczego pala ma rozkład lognormalny, przy założeniu struktury korelacyjnej między sąsiadującymi palami, jak w serii 2.



Rys. 6.3. Schemat układu palowego w przykładzie obliczeniowym (rozmiary podano w metrach)

Wektory losowe o rozkładzie normalnym i lognormalnym generowane były w programie statystycznym STATREL (STATREL 1997). Liczba realizacji w procesie symulacyjnym wynosiła $N_r = 15000$. Jak wiadomo (podrozdział 2.6), liczba taka nie jest wystarczająca do szacowania prawdopodobieństw awarii rzędu $p_F = 0,001$ (potrzebna liczba wynosi ok. $M = 1000000$). W związku z tym otrzymywane histogramy poddawano dalszej obróbce statystycznej dopasowując do nich konkretne funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa o zadanym wzorze analitycznym. Dopiero z tak przyjętych hipotetycznych rozkładów oznaczano momenty progowe.

W trakcie obliczeń monitorowano poszczególne realizacje symulacyjne pod kątem stwierdzenia, jak często pale znajdowały się poza liniowo sprężystym zakresem pracy. W tabeli 6.4 pokazano liczbę prób, w których co najmniej jeden z pali pracował w zakresie nieliniowym.

Tabela 6.4. Wpływ przyjętych rozkładów prawdopodobieństwa na liczbę nieliniowej pracy pali przy 15000 realizacjach

	Rozkład normalny	Rozkład lognormalny
bez korelacji	5873 (39%)	6053 (40%)
z korelacją	6798 (45%)	7043 (47%)

Łatwo zauważyć, że na procent nieliniowej pracy pali znacznie większy wpływ ma obecność korelacji pomiędzy nośnością poszczególnych pali niż rodzaj przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa.

Uzyskane z obliczeń symulacyjnych wartości oczekiwane i odchylenia standardowe momentów zginających w 11 przekrojach odczepu (nad każdą podporą), dla każdej z czterech serii przedstawiono w tabeli 6.5.

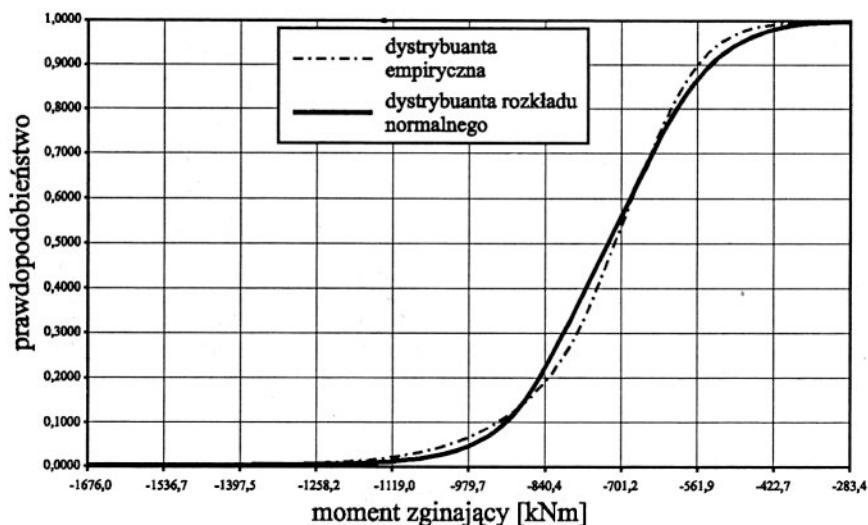
Tabela 6.5. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe oraz współczynniki zmienności momentów zginających w przekrojach odczepu dla czterech serii

Seria	M [kNm]	Przekrój										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$E\{M\}$	0	-733,7	-76,5	-519,9	172,7	-368,3	173,9	-518,1	-75,1	-733,7	0
	σ_M	0	150,2	194,3	177,8	144,4	125,3	142,0	174,3	191,5	149,4	0
	$cov\{M\}$	-	20%	254%	34%	84%	34%	82%	34%	255%	20%	-
2	$E\{M\}$	0	-742,4	-97,8	-551,0	135,9	-407,3	135,9	-551,0	-97,8	-743,5	0
	σ_M	0	136,3	215,9	251,6	257,9	255,4	255,2	247,0	211,8	134,7	0
	$cov\{M\}$	-	18%	221%	46%	190%	63%	188%	45%	217%	18%	-
3	$E\{M\}$	0	-730,1	-70,4	-513,4	177,1	-365,1	177,0	-515,6	-70,7	-731,3	0
	σ_M	0	137,4	172,7	155,4	124,5	109,1	124,6	154,5	173,3	138,6	0
	$cov\{M\}$	-	19%	245%	30%	70%	30%	70%	30%	245%	19%	-
4	$E\{M\}$	0	-740,0	-90,0	-537,4	153,9	-388,1	153,9	-537,0	-90,2	-740,8	0
	σ_M	0	123,1	183,7	197,5	187,0	177,5	181,8	192,4	179,0	120,9	0
	$cov\{M\}$	-	17%	204%	37%	122%	46%	118%	36%	198%	16%	-

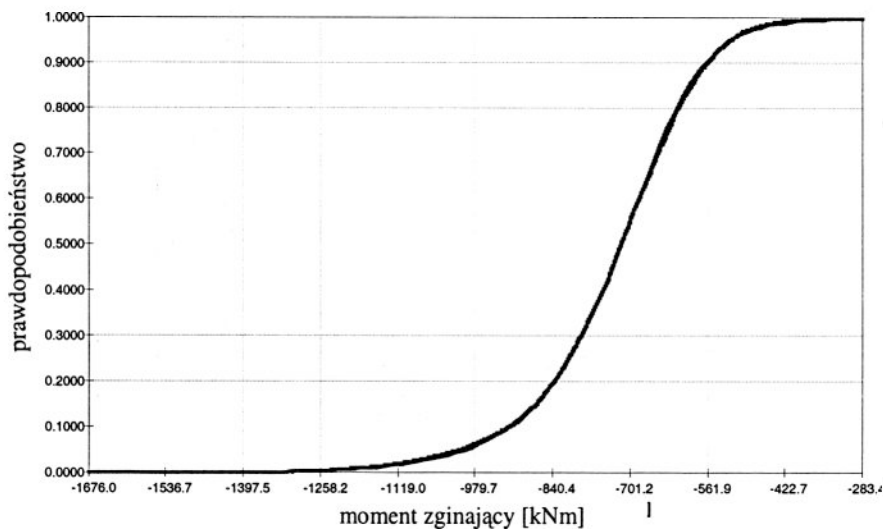
Należy odnotować, że odchylenia standardowe wzdłuż całej belki fundamentowej zmieniają się stosunkowo niewiele, co przy zmienności wartości średniej powoduje duże wahania współczynników zmienności. Ponadto wartości oczekiwane momentów zginających zmieniają się bardziej na skutek obecności korelacji, aniżeli na skutek zmiany rozkładu normalnego na lognormalny. Wartości oczekiwane momentów ujemnych znaków zwiększają swoją wartość bezwzględną wraz z wprowadzeniem korelacji pomiędzy nośnością poszczególnych pali. W wypadku momentów dodatnich – przeciwnie – wartość bezwzględna maleje wraz z obecnością korelacji. Korelacja powoduje ponadto zmniejszenie się odchyżeń standardowych na końcach belki, natomiast istotny wzrost tychże odchyżeń w części środkowej belki.

Momenty progowe wyznaczono według wzorów (6.19) i (6.20) dla wskaźnika niezawodności $\beta = 3,0$, co odpowiada prawdopodobieństwu awarii $P_F = \Phi(-\beta) = 1,35 \cdot 10^{-3}$. Jak już wcześniej wspomniano, ze względu na małe wartości prawdopodobieństwa P_F istotny wpływ na dokładność wyznaczenia momentów progowych ma aproksymacja otrzymanych na drodze symulacji wyników odpowiednim hipotetycznym rozkładem prawdopodobieństwa. Rozkłady te estymowano metodą momentów, zaś jakość dopasowania najlepiej można ocenić przez porównanie otrzymanej drogą symulacyjną dystrybuanty empirycznej z dystrybuantą hipotetyczną (uzyskaną metodą momentów). Dla przykładu na rysunku 6.4 zestawiono dystrybuantę empiryczną z dystrybuantą rozkładu normalnego dla przypadku pierwszego w przekroju 2, a na rysunku 6.5 tę samą dystrybuantę empiryczną porównano z dystrybuantą rozkładu Hermite'a, tj. rozkładu otrzy-

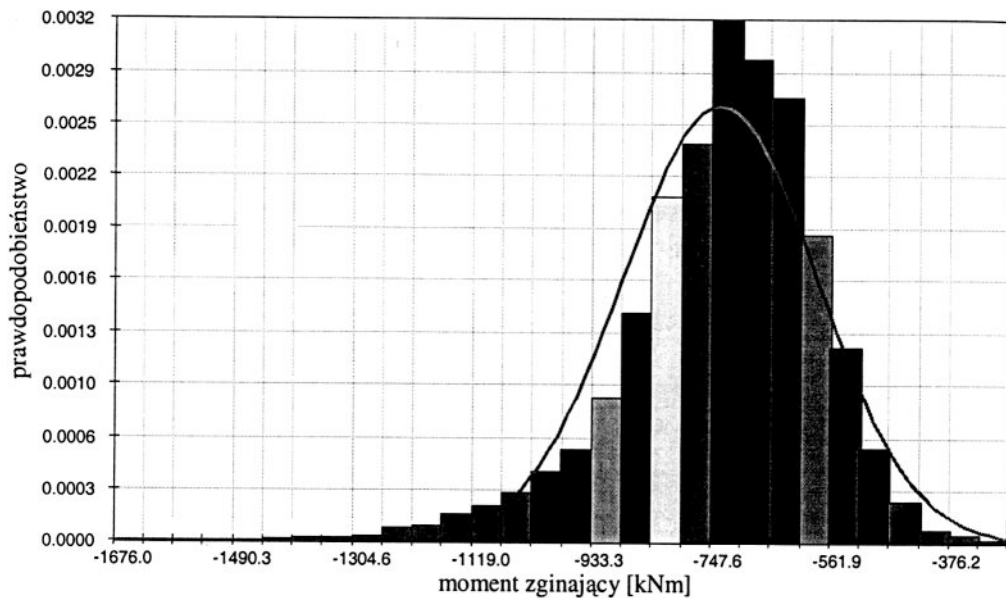
manego z rozwinięcia Grama–Charliera do czwartego rzędu (por. Cramer 1999 i STRUREL 1997). Dodatkowo sposób dopasowania zilustrowano poprzez porównanie funkcji gęstości rozkładów wymienionych powyżej z histogramami uzyskanych z symulacji. Na rysunku 6.6 – rozkład normalny, a na rysunku 6.7 – rozkładu Hermite’a.



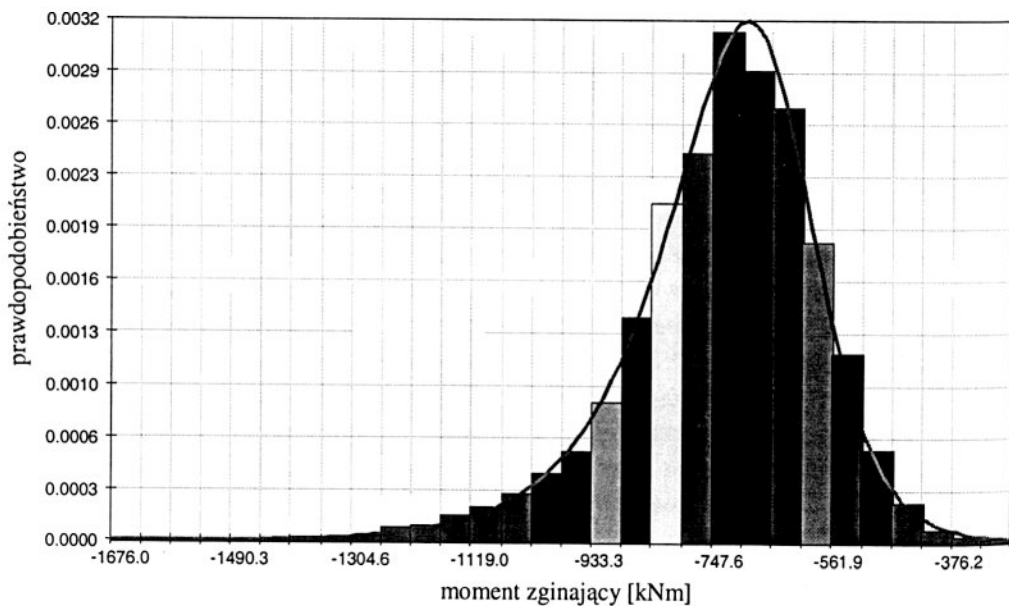
Rys. 6.4. Dystrybuanta empiryczna z symulacji (linia przerywana) i dystrybuanta rozkładu normalnego (linia ciągła). Serie 1, przekrój 2



Rys. 6.5. Dystrybuanta empiryczna z symulacji i dystrybuanta rozkładu Hermite'a. Serie 1, przekrój 2. Obie linie niemal pokrywają się



Rys. 6.6. Histogram momentów zginających uzyskanych z symulacji wpisany w funkcję gęstości rozkładu normalnego. Seria 1, przekrój 2

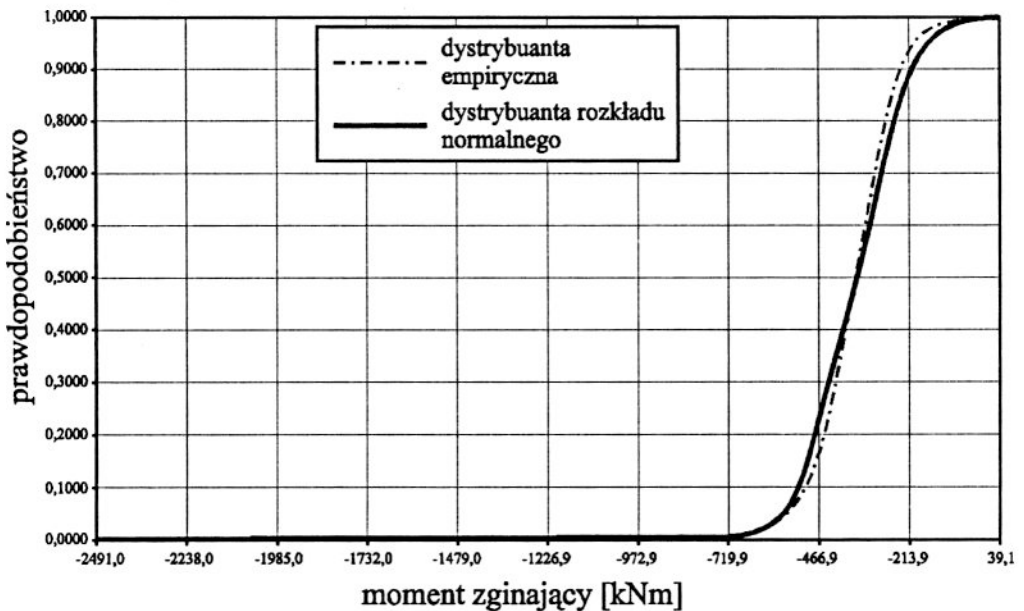


Rys. 6.7. Histogram momentów zginających uzyskanych z symulacji wpisany w funkcję gęstości rozkładu Hermite'a. Seria 1, przekrój 2

Dla przekroju nr 2 otrzymano minimalne momenty graniczne o wartościach odpowiednio:

- $-1184,32$ kNm w przypadku aproksymacją rozkładem normalnym oraz
- $-1434,62$ kNm w przypadku aproksymacją rozkładem Hermite'a.

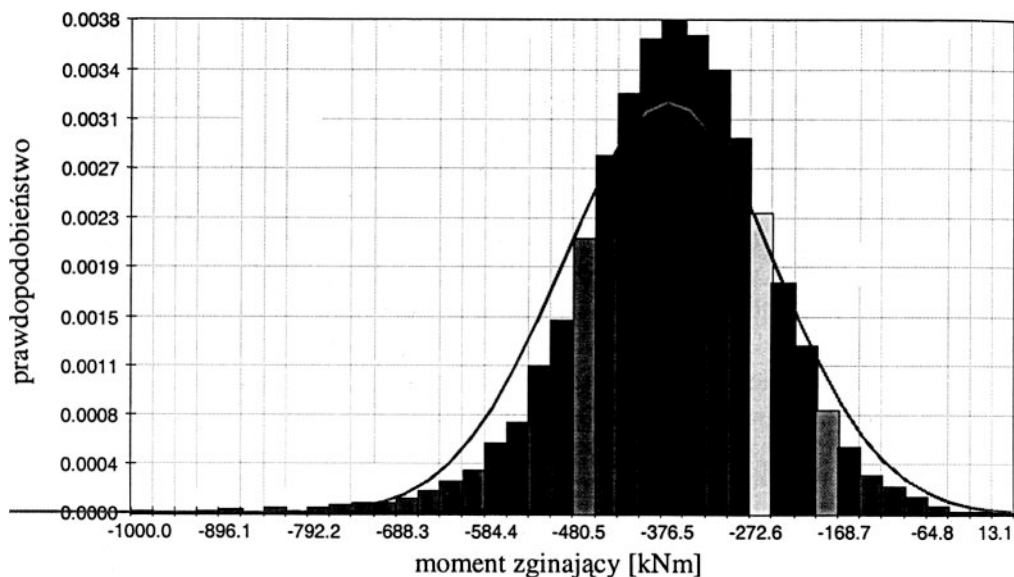
Różnica wartości wynosi około 17%. Niesymetryczny rozkład wartości momentów zginających w przekroju 2, znajdującym się w pobliżu pala nr 1, można tłumaczyć faktem, że, jak to wynika z „monitorowania” nieliniowej pracy pali, pal ten najczęściej pracował w zakresie nieliniowym (oraz symetrycznie przekrój 10 w pobliżu pala nr 11). Stąd wynika widoczne przesunięcie wartości modalnej w kierunku większych wartości bezwzględnych momentu. W pozostałych przekrojach rozkład momentów był już bardzo zbliżony do rozkładu normalnego, co przykładowo zilustrowano porównaniem dystrybuant i histogramów na rysunkach, odpowiednio – 6.8 i 6.9.



Rys. 6.8. Dystrybuanta empiryczna z symulacji (linia przerywana) i dystrybuanta rozkładu normalnego (linia ciągła).

Seria 1, przekrój 6

Wartości progowe momentów zginających ($\beta = 3,0$) w kolejnych jedenastu przekrojach, przy przyjęciu rozkładu normalnego, zestawiono w tabelach 6.6 i 6.7.



Rys. 6.9. Histogram momentów zginających uzyskanych z symulacji wpisany w funkcję gęstości rozkładu normalnego. Seria 1, przekrój 6

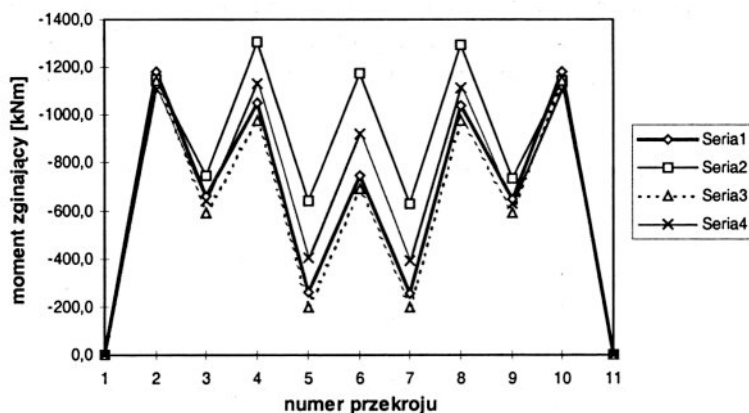
Tabela 6.6. Wartości progowe momentów zginających we włóknach górnych dla czterech serii

Numer przekroju	Wartości progowe momentów zginających we włóknach górnych [kNm]			
	Seria			
	1	2	3	4
1	0,0	0,0	0,0	0,0
2	-1184,3	-1151,1	-1142,2	-1109,4
3	-659,3	-745,7	-588,7	-641,2
4	-1053,4	-1305,69	-979,7	-1130,0
5	-260,5	-637,94	-196,3	-407,1
6	-744,3	-1173,39	-692,3	-920,6
7	-252,2	-629,77	-196,9	-391,5
8	-1041,1	-1292,00	-979,0	-1114,2
9	-649,5	-733,34	-590,5	-627,2
10	-1181,8	-1147,63	-1147,1	-1103,3
11	0,0	0,00	0,0	0,0

Tabela 6.7. Wartości progowe momentów zginających we włóknach dolnych dla czterech serii

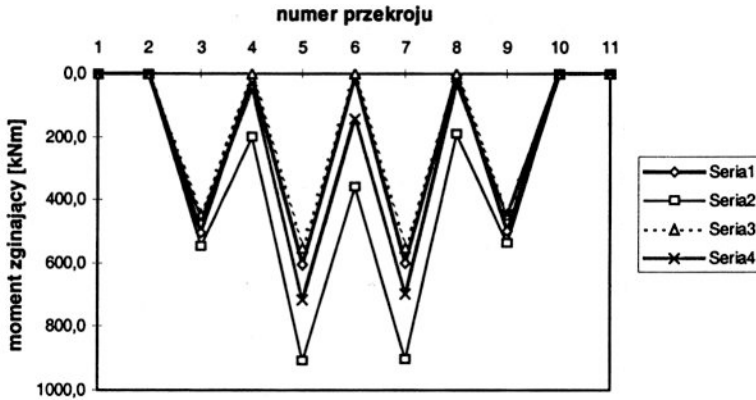
Numer przekroju	Wartości progowe momentów zginających we włóknach dolnych [kNm]			
	Seria			
	1	2	3	4
1	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,0	0,0	0,0	0,0
3	506,4	550,0	447,8	461,2
4	13,5	203,7	0,0	55,3
5	605,9	909,7	550,5	715,0
6	7,6	358,8	0,0	144,4
7	600	901,6	550,9	699,3
8	5,0	190,1	0,0	40,1
9	499,3	537,7	449,1	446,8
10	0,0	0,0	0,0	0,0
11	0,0	0,0	0,0	0,0

Ponadto wyniki te zilustrowano wykresami na rysunkach 6.10 i 6.11.



Rys. 6.10. Momenty zginające we włóknach górnych belki ocepowej dla czterech serii obliczeniowych

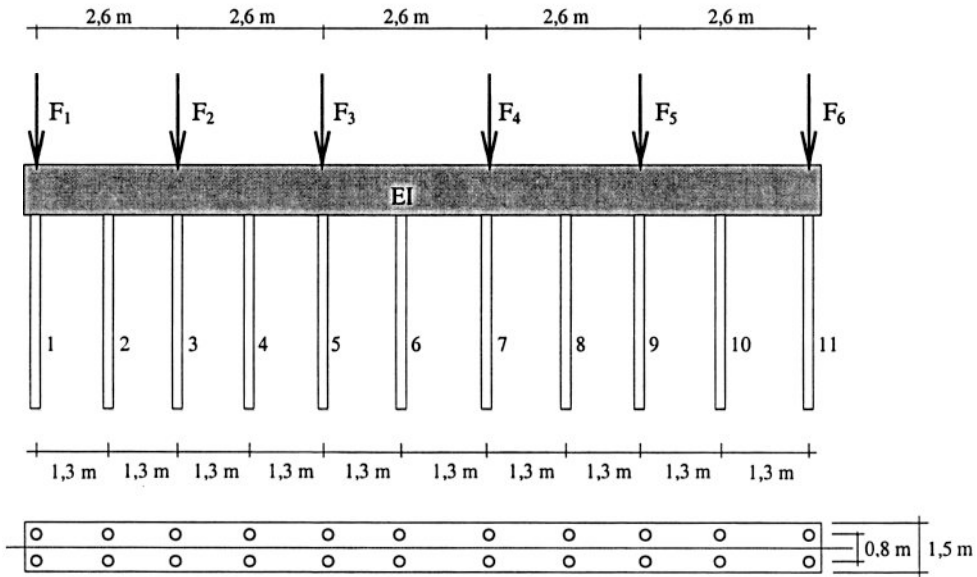
Porównując wartości momentów progowych dla czterech demonstrowanych tu serii obliczeń należy zwrócić uwagę na bardzo silny wzrost ich bezwzględnej wartości w środkowej części belki po uwzględnieniu korelacji pomiędzy nośnością poszczególnych pali. Jest to niewątpliwie związane z pracą tych pali w obszarze nieliniowym. Jeśli się bowiem uwzględni dodatnią korelację, to zwiększa się szansa na to, że po przekroczeniu strefy liniowej przez konkretny pał to samo zjawisko wystąpi w pału sąsiednim lub nawet w kilku sąsiednich. Interesujące, że efekt ten jest znacznie większy przy założeniu normalnego rozkładu nośności niż w przypadku rozkładu lognormalnego.



Rys. 6.11. Momenty zginające we włóknach dolnych belki ocepowej dla czterech serii obliczeniowych

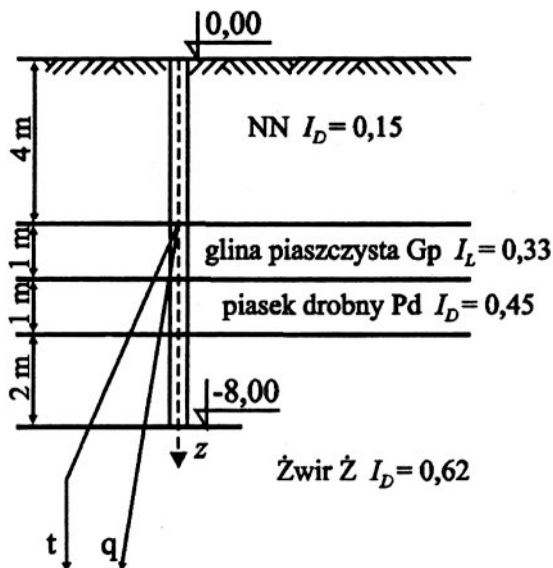
6.5.3. Przykład nr 2

Konstrukcja przekazuje obciążenie na fundament za pośrednictwem 6 słupów. Wartość obliczeniowa każdej z sił obciążających wynosi $F_i = 700 \text{ kN}$, $i = 1, \dots, 6$. Posadowienie obiektu zaprojektowano w postaci łąwy z dwoma rzędami pali jak na rysunku 6.12.



Rys. 6.12. Schemat obciążenia oraz układu palowego w fundamencie rozpatrywanym w przykładzie 2

Warunki panujące w podłożu pokazano na rysunku 6.13.



Rys. 6.13. Warunki gruntowe w przykładzie 2

Proponowane pale to pale Wolfsholza, długości 8,0 m każdy. Obliczeniowa nośność pojedynczego pala, wyznaczona zgodnie z normą PN-83/B-02482 dla warunków podłoża jak na rysunku 6.13 (z uwzględnieniem tarcia negatywnego w pierwszej warstwie), wynosi $N_t = 404,6$ kN. Do celów obliczeń probabilistycznych przyjęto, że podpora belki oczepowej składa się z pary pali o łącznej nośności $P_t = 2 N_t = 809,2$ kN. Jako że mamy tu do czynienia z wartością obliczeniową, przyjęto, że w tej sytuacji warunek graniczny liniowo-sprężystej pracy pala ma postać

$$P_{gr-t} = P_t. \quad (6.22)$$

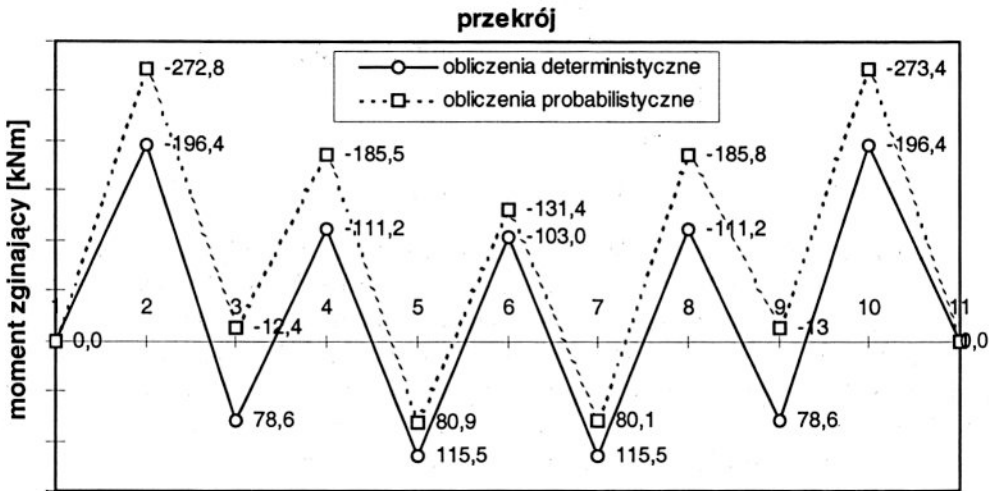
Założono, że nośności poszczególnych pali mają rozkłady normalne o parametrach $E\{P_t\} = 809,2$ kN i $\sigma_{P_t} = 121,4$ kN, ($cov\{P_t\} = 0,15$), $t = 1, 2, \dots, 11$. Podobnie jak poprzednio liczba realizacji w procesie symulacyjnym wyniosła $N_{rt} = 15000$. Obliczenia symulacyjne pokazały, że jedynie w 25 przypadkach przekroczona została granica liniowej pracy pala (pale nr 1 i 11), co stanowi zaledwie 0,2% ogólnej liczby prób. W tej sytuacji analizy momentów dokonano przy założeniu braku korelacji pomiędzy nośnościami poszczególnych pali, co w przypadku pracy w zakresie tylko liniowo-sprężystym prowadzi do mniej korzystnych wartości (por. podrozdział 6.4).

Momenty zginające wyznaczano w belce fundamentowej dla jedenastu przekrojów (nad podporami), a uzyskane wartości oczekiwane oraz odchylenia standardowe zestawiono w tabeli 6.8.

Tabela 6.8. Wartości średnie i odchylenia standardowe momentów w przekrojach belki odczepowej dla 15000 prób

[kNm]	Przekrój										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$E\{M\}$	0	-272,8	-12,4	-185,5	80,9	-131,4	80,1	-185,8	-13,0	-273,3	0
σ_M	0	50,7	58,1	51,3	44,0	41,4	44,9	51,6	58,8	51,2	0
$cov\{M\}$	-	19%	469%	27%	54%	32%	56%	28%	452%	19%	-

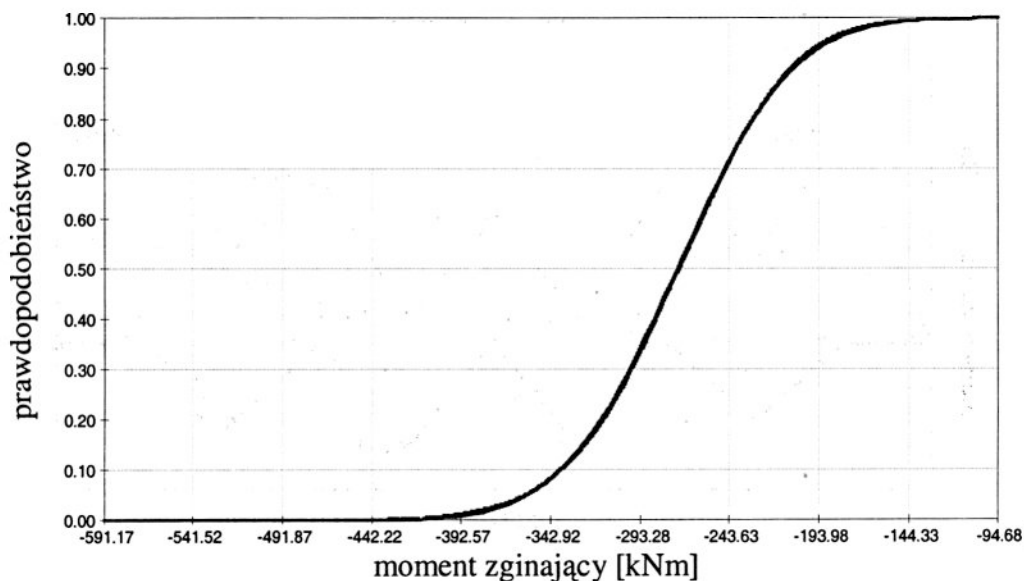
Warto odnotować, że podobnie jak w poprzednim przykładzie, odchylenia standardowe momentów zmieniają się w stosunkowo wąskim paśmie. Wartości oczekiwane momentów zginających porównano na rysunku 6.14 z wartościami momentów uzyskanymi na drodze obliczeń deterministycznych.



Rys. 6.14. Obwiednia momentów zginających w odczepie z obliczeń deterministycznych (linia ciągła) i probabilistycznych (linia kropkowa)

Jak widać, wartości oczekiwane z obliczeń probabilistycznych nie pokrywają się z wartościami uzyskanymi na drodze deterministycznej, a wręcz istotnie przewyższają je (różnice wahają się w granicach 20–30%). Wynika to z nieliniowych zależności pomiędzy podatnościami poszczególnych pali a momentami zginającymi w belce.

Uzyskane na drodze symulacyjnej rozkłady empiryczne momentów w poszczególnych przekrojach aproksymowano rozkładem normalnym (większość pali pracowała w zakresie liniowym). Przykładowe porównanie dystrybuant – empirycznej oraz gausowskiej pokazano na rysunku 6.15.



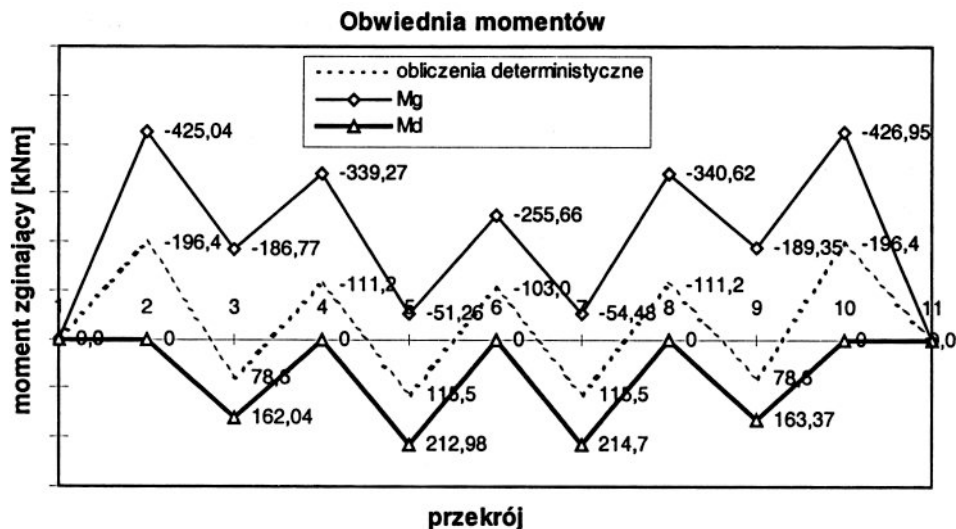
Rys. 6.15. Dystrybuanta empiryczna z symulacji i dystrybuanta rozkładu normalnego.
Przekrój 2. Obie krzywe niemal pokrywają się

Analogicznie do przykładu poprzedniego progowe wartości momentów w poszczególnych przekrojach wyznaczono przy założeniu wskaźnika niezawodności $\beta = 3,0$. Obliczone wartości podano w tabeli 6.9.

Tabela 6.9. Progowe wartości momentów dla włókien górnych i dolnych przy założonym wskaźniku niezawodności $\beta = 3,0$ w przekrojach belki ocepowej.
 M_g – momenty górne, M_d – momenty dolne

[kNm]	Przekrój										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_g	0,0	-425,0	-186,8	-339,3	-51,3	-255,7	-54,5	-340,6	-189,4	-426,9	0,0
M_d	0,0	0,0	162,0	0,0	213,0	0,0	214,7	0,0	163,4	0,0	0,0

Na rysunku 6.16 przedstawiono obwiednię momentów zginających w porównaniu z momentami obliczonymi bez losowej zmienności parametrów (obliczenia deterministyczne).



Rys. 6.16. Porównanie momentów zginających uzyskanych z obliczeń deterministycznych i analizy probabilistycznej

Jak łatwo zauważyć, różnice są bardzo duże, co daje pogląd jak duży może być wpływ losowej zmienności podatności pali na wartości momentów zginających w belce fundamentowej.

6.5.4. Wnioski i uwagi

Przystawione przykłady analizy wpływu losowych wahań nośności lub podatności pali fundamentowych na momenty zginające w belce oczepowej ilustrują skuteczność opracowanej procedury, bazującej na technice symulacji cyfrowej. Procedura ta może w zasadzie służyć do analizowania dowolnie dużych układów palowych. Pod tym względem przewyższa ona sposób obliczeń dla rozwiązań zamkniętych pokazany w podrozdziale 6.4. Jednak ceną, którą trzeba zapłacić za tę przewagę, są czasochłonne obliczenia komputerowe, których czas wzrasta wraz z podnoszeniem poziomu dokładności obliczeń lub wzrostem wskaźnika niezawodności β . Z drugiej strony istnieje pewna szansa uproszczenia procedury. Jak bowiem wskazano, w wielu przekrojach „wysymulowane” rozkłady prawdopodobieństwa można aproksymować rozkładem normalnym. Zwłaszcza w przypadkach pracy pali ograniczonej do zakresu sprężystego zgodność aproksymacji jest bardzo dobra. W przekrojach znajdujących się w pobliżu pali pracujących poza strefą liniową pokazano, że dobrą aproksymację uzyskuje się tu poprzez rozkład Hermite’a (dane tu zgromadzone wydają się jednak zbyt skromne, aby generalizować tę tezę). Jeśli zatem założyć a priori, że rozkład prawdopodobieństwa momentu zginającego w określonym przekroju jest normalny (ewentu-

alnie jest rozkładem Hermite'a), to wartość progową momentu można określić jako kwantyl z tego rozkładu, odpowiadający zadanemu prawdopodobieństwu awarii. W tej sytuacji wystarczająca jest znajomość wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu. Informacje te można uzyskać metodą symulacyjną, ale przy znacznie mniejszej liczbie realizacji (istotne skrócenie obliczeń). Warto też odnotować, że w przypadku rozkładu normalnego momentu zginającego wskaźnik niezawodności odpowiadający prawdopodobieństwu awarii (6.19) oraz (6.20) jest identyczny ze wskaźnikiem niezawodności Cornella β_C (por. rozdział 2.2).

Obliczenia unaocznily fakt bardzo istotnego wpływu wahań nośności pali na momenty zginające. Oczywiście rozmiar tego efektu zależy przede wszystkim od skali wahań nośności, mierzonej współczynnikiem zmienności. Źródłem oceny współczynnika zmienności mogą być wyniki obciążeń próbnych, wykonywanych każdorazowo podczas wykonywania dużych fundamentów palowych. Na podstawie wyników obciążeń próbnych pali z kilkunastu różnych obiektów, udostępnionych przez autorów badań (Rybak, 1999), współczynniki zmienności podatności pali mogą sięgać 15%–20%, a więc tak jak przyjęto w prezentowanych tu przykładach. Liczba obciążanych pali w badaniach próbnych jest, ze względu na koszty, zbyt mała, aby umożliwiła poprawną ocenę rozkładu prawdopodobieństwa nośności. Wystarcza ona co najwyżej do oceny wartości średniej i odchylenia standardowego. Jednak obliczenia zarówno w tym, jak i poprzednim podrozdziale wskazują, że wybór rozkładu prawdopodobieństwa nośności nie powoduje wielkich różnic w oszacowaniu momentów progowych. Ponadto przyjęcie rozkładu normalnego prowadzi do bardziej konserwatywnych oszacowań aniżeli rozkładu lognormalnego.

Interesujący jest natomiast efekt uwzględnienia ewentualnej dodatniej korelacji pomiędzy nośnością poszczególnych pali. Obliczenia wskazują, że w sytuacji gdy pale pracują poza zakresem liniowym, dodatnia korelacja powoduje bardzo istotny wzrost wartości bezwzględnej momentów zginających. Można to tłumaczyć wzrostem szansy na to, że dwa lub trzy sąsiednie pale pracują poza zakresem liniowym. Jeśli natomiast mamy do czynienia jedynie ze sprężystą pracą pali, to jak pokazały obliczenia w poprzednim podrozdziale, dodatnia korelacja powoduje spadek wartości bezwzględnej momentów. W tym przypadku dodatnia korelacja powoduje efekt redukcji wariancji. Widać zatem, że znajomość korelacji byłaby bardzo przydatna w obliczeniach momentów progowych. Wiarygodna ocena korelacji na podstawie prowadzonych obciążeń próbnych jest niestety, ze względu na niewielką liczbę wyników, trudna do uzyskania. Z drugiej strony jednak, gdyby zaakceptować hipotezę o jednakowej strukturze korelacyjnej wszystkich parametrów podłoża w ramach jednej warstwy geotechnicznej, to ocenę korelacji można by oprzeć na przeprowadzanych na wstępie badaniach połowych własności podłoża.

Ciekawym zjawiskiem jest ponadto fakt, że uzyskiwane odchylenia standardowe momentów wahają się w stosunkowo wąskim przedziale wzdłuż przekroju belki. Daje to możliwość stosunkowo łatwej ekstrapolacji wyników na inne przekroje, w których a priori obliczenia nie były wykonywane.

Przy dużych wartościach wskaźnika niezawodności uzyskane na drodze analizy probabilistycznej wartości momentów zginających mogą istotnie przekraczać momenty z obliczeń deterministycznych.

Zdaniem autora, proponowaną tu technikę obliczeniową można by w stosunkowo nietrudny sposób rozszerzyć na zagadnienia losowych osiadań fundamentów palowych, które są skutkiem losowych nośności pali.

6.6. Zastosowanie do projektowania fundamentu suwnicy bramowej (konstrukcja istniejąca)

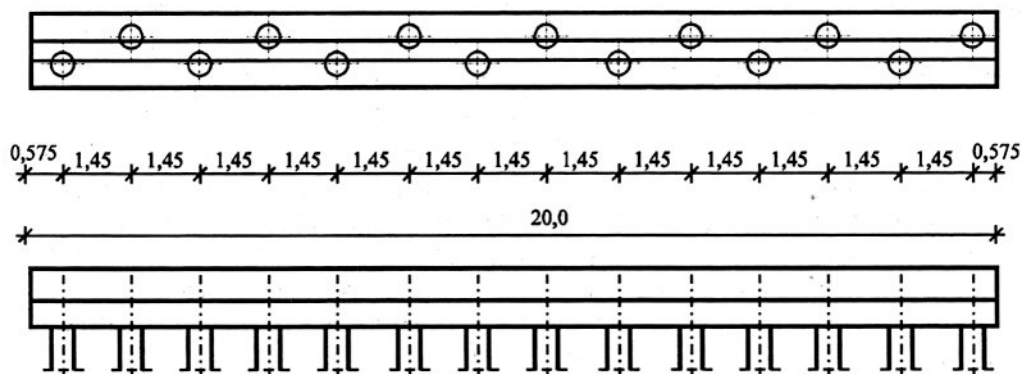
Na zakończenie tego rozdziału pokazany zostanie przykład zastosowania przedstawionych wcześniej procedur jako pomocniczego narzędzia do opracowania koncepcji zmiany sposobu posadowienia istniejącej w rzeczywistości konstrukcji – suwnicy bramowej na placu węglowym w Zakładach Celulozy i Papieru „Celuloza” S.A., w Świeciu nad Wisłą. Rekonstrukcję fundamentu analizowano w związku z nadmiernymi osiadaniami części toru posadowionego na około dziewięciometrowej warstwie niekontrolowanych nasypów. Nasypy zalegały w miejscu wyrobiska powstałego w wyniku eksploatacji piasków. Na odcinku toru jezdnego posadowionego na gruntach nasypowych wytworzyła się wyraźna niecka osiadania, odpowiadająca w przybliżeniu zasięgowi zasypanego wyrobiska, tj. ok. 80 m. Całkowita długość toru jezdnego suwnicy wynosiła 120 m i składała się z sześciu 20-metrowych, posadowionych bezpośrednio ław żelbetowych. Pomiar geodezyjne przeprowadzone w 1996 r. wykazały znaczne różnice osiadań na długości toru jezdnego, dochodzące maksymalnie do ok. 100 mm. Tak duże osiadania, narastające w czasie i niemożliwe do bieżącej rektyfikacji, uniemożliwiały bezpieczną eksploatację suwnicy i wymusiły konieczność podjęcia robót naprawczych.

Warunki geotechniczne posadowienia toru suwnicy nie są w zasadzie zróżnicowane. Belka toru południowego posadowiona jest w całości na gruncie rodzimym, natomiast belka północna jedynie w części posadowiona jest na niekontrolowanym, nieskonsolidowanym nasypie. Miąższość nasypu według dokumentacji geologicznej osiąga jednak wartość ok. 9,3 m, licząc od poziomu posadowienia belki toru. Poniżej nasypów występują rodzime grunty niespoiste: piaski, żwiry i pospółki o $I_D = 0,55$.

Zaproponowany projekt robót naprawczych zakładał wykonanie pod belką, na odcinku, gdzie wystąpiły znaczne osiadania, pali z zastosowaniem technologii iniekcji strumieniowej (*Jet-grouting*). Taki typ pali pozwala przekazać obciążenia z toru jezdnego na zalegające pod nasypami grunty rodzime – piaski, żwiry, pospółki – bez dodatkowych elementów przekazujących obciążenia z belki jezdnej na pal.

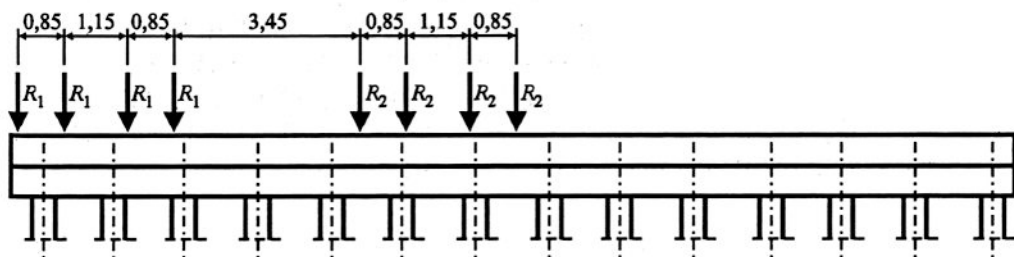
Zaprojektowano pale wykonywane pod podstawą belki jezdnej przez otwory wiercone w półce belki. Pod wzmocnianymi trzema dwudziestometrowymi odcinkami toru

zaprojektowano po 14 pali w rozstawie 1,45 m (rys. 6.17). Technologia wykonania pala wymaga dokonania przewiertów o średnicy ok. 150 mm. Powoduje to przecięcie części prętów zbrojeniowych i osłabienie przekroju w miejscu podparcia. Z tego względu za nierzadkie punkty belki, wymagające szczegółowej analizy, uznano nie przekroje, w których występują maksymalne momenty zginające, a przekroje osłabione przewiertami. Belka miała przekrój teowy, szerokości podstawy $B = 1,4$ m, szerokości środnika $b = 0,5$ m oraz całkowitej wysokości $h = 1,30$ m.



Rys. 6.17. Rozmieszczenie pali pod wzmacnianym odcinkiem toru podsuwnicowego

Statyka belki ciągłej opartej na szeregu pali została przeanalizowana metodą sił według procedury podanej w podrozdziale 6.2. Schemat obciążenia pokazano na rysunku 6.18.



Rys. 6.18. Schemat obciążenia belki toru

Obciążenia przekazywane są z suwnicy na belkę poprzez osiem kół (z dwóch wózków suwnicy) o następujących rozstawach: $d_1 = 0,85$ m, $d_2 = 1,15$ m, $d_3 = 0,85$ m, $d_4 = 3,45$ m, $d_5 = 0,85$ m, $d_6 = 1,15$ m, $d_7 = 0,85$ m. Poszczególne koła przekazują następujące obciążenia: $R_1 = 140,58$ kN, $R_1 = 140,58$ kN, $R_1 = 140,58$ kN, $R_1 = 140,58$ kN, $R_2 = 94,95$ kN, $R_2 = 94,95$ kN, $R_2 = 94,95$ kN, $R_2 = 94,95$ kN. Suwnica może znaleźć się w dowolnym miejscu belki. Obliczenia przeprowadzono dla wszystkich przekrojów podporowych (nad palami) i wybranych przekrojów przęsłowych, prze-

suwając koła suwnicy co 0,50 m. Pozwoliło to na wyznaczenie linii wpływu dla wartości średnich momentu zginającego w wybranych punktach belki oraz linii wpływu odchylenia standardowego momentu. Ze wstępnych analiz rozpoznano, że wielkość obciążeń oraz nośności przyjętych pali wskazują na pracę pali w strefie sprężystej, a więc problem ma charakter zadania o losowych podatnościach. Poniżej opisano model probabilistyczny zaproponowany do rozwiązania zadania tego typu.

Niech $y \in [0, L]$ oznacza współrzędną przekroju na belce fundamentowej. Losowy moment zginający w przekroju y będzie opisany za pomocą funkcji losowej $M(y, F(x), \mathbf{Q})$, gdzie $F(x)$ jest zmienną losową obciążenia wózkiem, zależną od położenia wózka na belce x , zaś $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ wektorem losowym podatności poszczególnych pali. Do obliczeń przyjęto następujące założenia:

1. Położenie ośmiu kół wózka na belce jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na długości belki. Oznacza to, że każde położenie wózka na belce jest jednakowo prawdopodobne. To założenie koresponduje z warunkami eksploatacji urządzenia.

2. Współrzędną x definiuje się jako położenie pierwszego koła wózka suwnicy (koła mogą się znajdować poza belką, wtedy nie wpływają na obciążenie belki).

3. Dla dowolnej wartości współrzędnej x zmienna losowa $F(x)$ jest stochastycznie niezależna od wektora losowego $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$.

W dalszym ciągu tego podrozdziału rozpatrywany będzie jedynie przypadek, gdy dla ustalonej wartości współrzędnej y wartość obciążenia $F(x)$ jest stała, tzn. nie zależy od x oraz jest wartością zdeterminowaną – nielosową. Wielkość obciążenia, przyjęta na podstawie informacji inwestora, jest określona jako wartość obliczeniowa do sprawdzania stanów granicznych nośności według polskich norm. Nadal jednak jej położenie pozostaje losowe, zgodnie z założeniem 1. W przekroju y rozważmy dwuwymiarowy wektor losowy (M_y, X) , którego współrzędnymi są zmienne losowe momentu zginającego w przekroju y oraz położenie wózka na belce. Oczywiście zmienne M_y oraz X nie są już stochastycznie niezależne. Załóżmy, że wektor (M_y, X) ma gęstość łączną $f(m, x)$. Wówczas prawdopodobieństwo przekroczenia przez moment zginający M_y pewnej a priori określonej wartości progowej M_0 jest równe

$$p_F = P(M > M_0) = \int_a^b \int_{M_0}^{\infty} f(m, x) dm dx. \quad (6.23)$$

Gęstość $f(m, x)$ można zapisać w postaci

$$f(m, x) = f_x(m) r(x), \quad (6.24)$$

gdzie $f_x(m)$ jest gęstością warunkową momentu M , czyli gęstością zmiennej losowej M pod warunkiem, że wózek (pierwsze koło wózka) suwnicy znajduje się w położeniu x na belce. Podstawiając (6.24) do (6.23) oraz korzystając z założenia 1 otrzymuje się:

$$p_F = P(M > M_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_{M_0}^{\infty} f_x(m) dm dx, \quad (6.25)$$

gdzie a i b są odpowiednio współrzędnymi początku i końca sekcji belki toru. Gęstość warunkową $f_x(m)$ wyznacza się na drodze symulacyjnej, tak jak to opisano w podrozdziale 6.5.

Obliczenia wykonane na tak sformułowanym schemacie warunkowym opisano w pracy Puły i Rybaka (1999). Podejście to jednak budzi zastrzeżenia w sytuacji, gdy dokonuje się analizy niezawodności niezależnej od czasu. Jakkolwiek bowiem wszystkie położenia suwnicy na belce są jednakowo prawdopodobne, to bez rozpatrywania zjawiska w pewnym przedziale czasowym należy skoncentrować się na przyjęciu takiego położenia suwnicy, które daje najbardziej niekorzystny efekt na moment zginający w rozpatrywanym przekroju y . Zajęcie takiego położenia przez suwnicę w dłuższym przedziale czasowym jest zdarzeniem pewnym z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa i, jak łatwo się domyślić, dającym największe prawdopodobieństwo awarii, które, po uproszczeniu wzoru (6.25), wyznaczy się jako

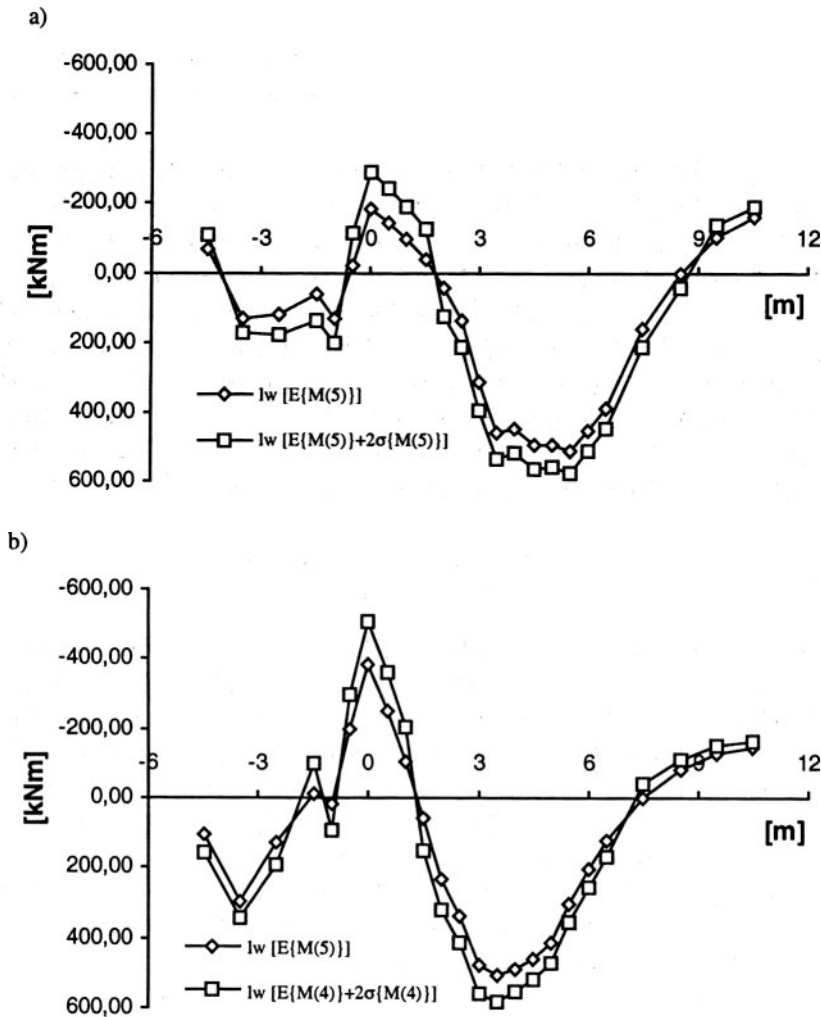
$$p_F = P(M > M_0) = \int_{M_0}^{\infty} f_{x_0}(m) dm, \quad (6.26)$$

gdzie x_0 jest najbardziej niekorzystnym punktem ustawienia suwnicy na belce. Punkt ten określa się analizując linie wpływu. Stosując procedurę symulacyjną opisaną w podrozdziałach 6.3 i 6.5 dla wybranych przekrojów określono najpierw linie wpływu dla wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego momentu zginającego. Linie te pozwoliły na określenie punktów x_0 dla analizowanych przekrojów (x_0 jest oczywiście różny dla różnych przekrojów), dających maksymalne prawdopodobieństwo przekroczenia przez moment wartości progowej. Przykładowo na rysunku 6.19 pokazano linie wpływu dla wartości oczekiwanej momentów zginających wraz z przedziałem ograniczającym szerokości dwóch odchyień standardowych w przypadku dwóch wybranych przekrojów – nad palem 5 oraz nad palem 4.

Założenia przyjęte do obliczeń symulacyjnych były następujące:

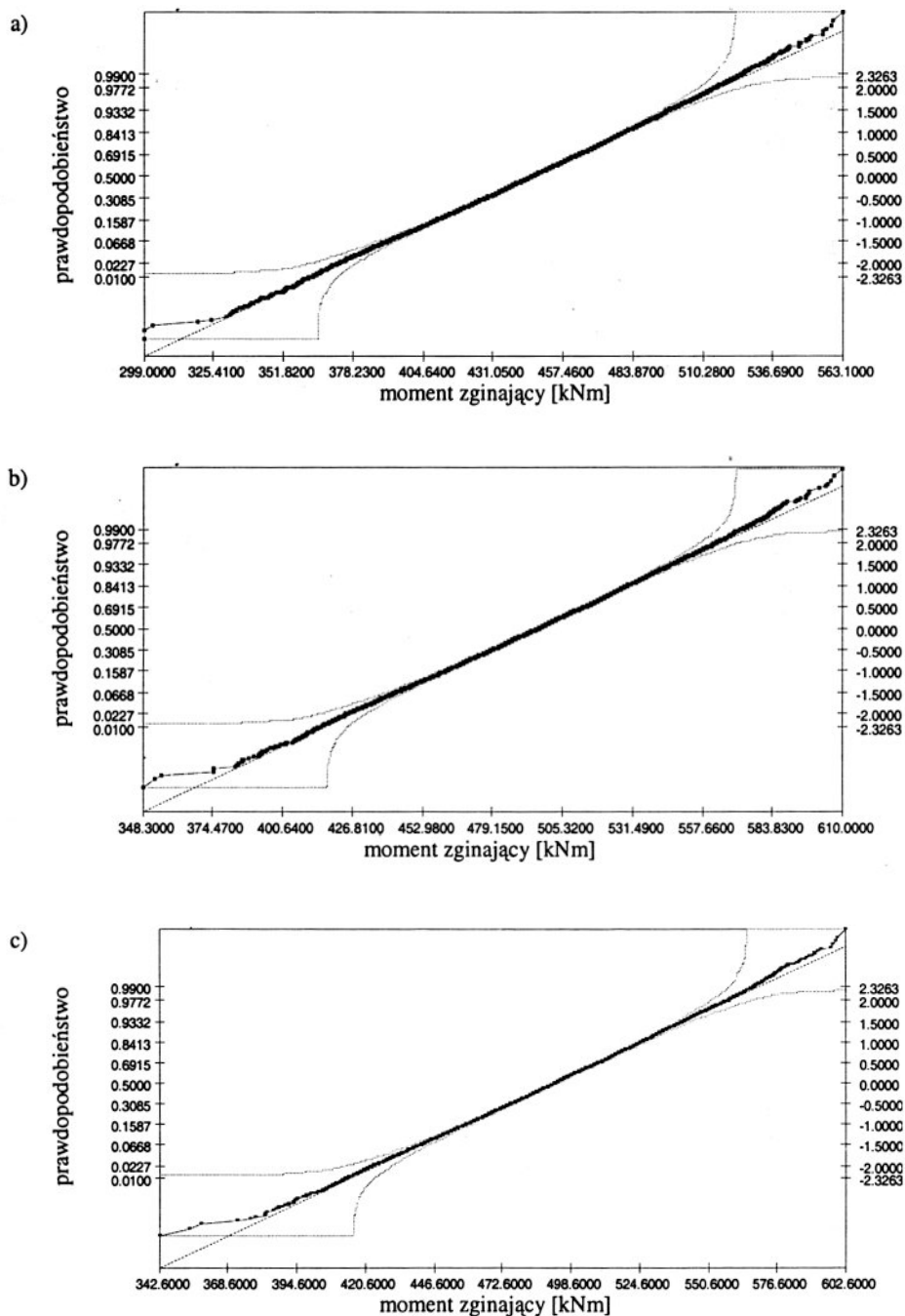
- Podatność indywidualnego pala jest zmienną losową o rozkładzie lognormalnym, który przyjęto ze względu na dodatnie wartości podatności pali.
- Podatności poszczególnych pali są stochastycznie niezależnymi zmiennymi losowymi, co jak wcześniej pokazano (podrozdziały 6.4 i 6.5), w przypadku pali pracujących jedynie w zakresie liniowym, daje bardziej konserwatywne oszacowanie aniżeli założenie dodatniej korelacji.
- Na podstawie wyników obciążeń próbnych pali wykonywanych w analogicznej technologii, z kilkunastu różnych obiektów, udostępnionych przez autorów badań (Rybak 1999), oraz publikacji Gwizdały (1997), współczynniki zmienności podatności pali wykonywanych w analogicznej technologii przyjęto na poziomie 20%.

- Obliczenia symulacyjne wykonano przy liczbie realizacji $N_{rt} = 10000$.

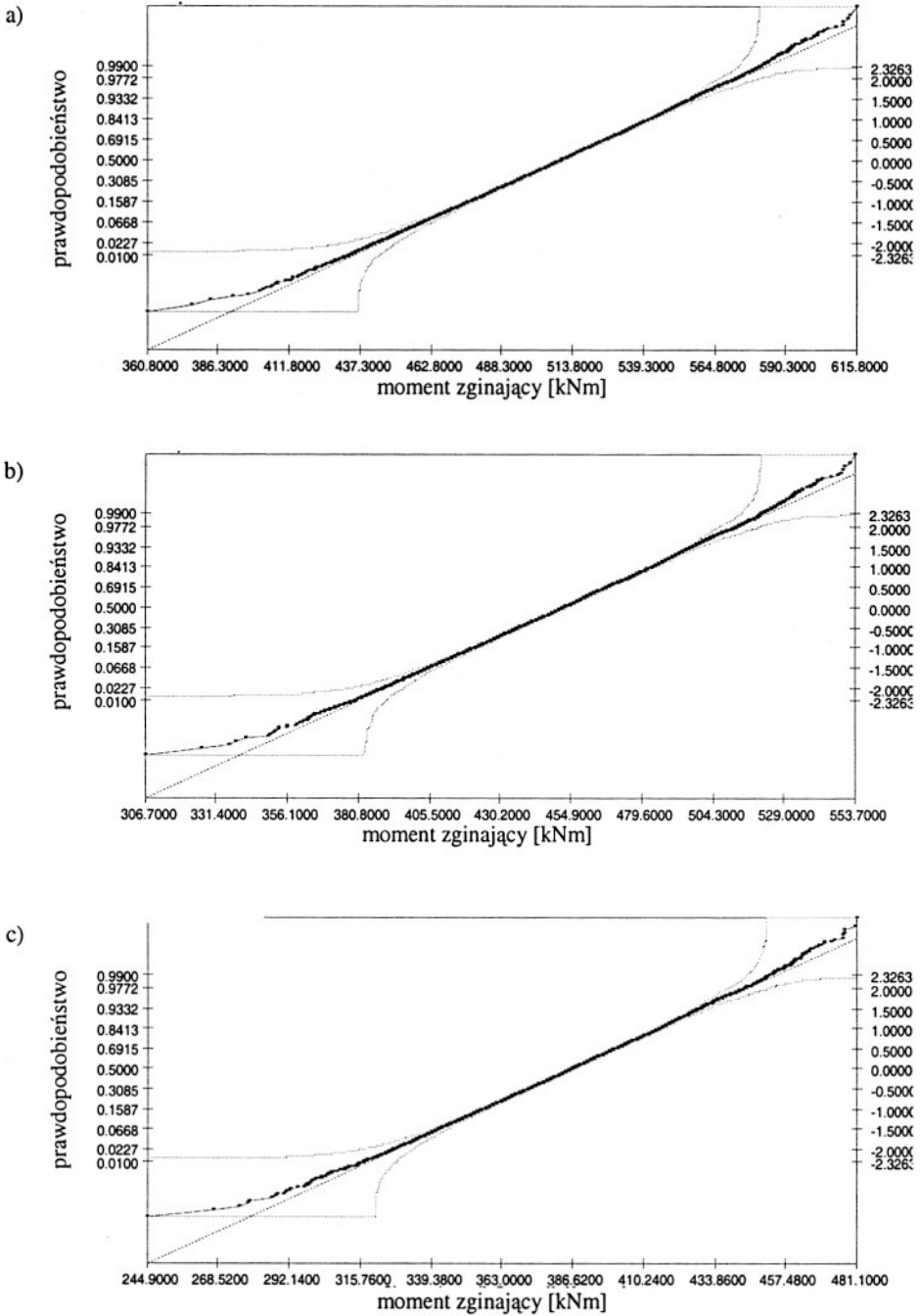


Rys. 6.19. Linie wpływu dla wartości oczekiwanych momentów zginających wraz z liniami uwzględniającymi wartości dwukrotnego odchylenia standardowego: a) nad palem nr 5, b) nad palem nr 4

Uzyskane rozkłady prawdopodobieństwa momentów zginających w analizowanych przekrojach wykazały dobrą zgodność z rozkładem normalnym (testy Kołmogorowa-Smirnowa i Andersona-Darlinga (STATREL 1997), co zilustrowano na rysunkach 6.20 i 6.21 dla wcześniej określonych przekrojów nad palem 5.



Rys. 6.20. Sprawdzenie dopasowania rozkładu normalnego dla podpory nr 5.
 Położenie pierwszego koła odpowiednio: a) 4,00 m, b) 4,50 m, c) 5,00 m od krawędzi



Rys. 6.21. Sprawdzenie dopasowania rozkładu normalnego dla podpory nr 5.
 Położenie pierwszego koła odpowiednio: a) 5,50 m, b) 6,00 m, c) 6,50 m od lewej krawędzi

Dla wizualizacji jakości dopasowania zastosowano tu tzw. *papier prawdopodobieństwa*, na którym osie współrzędnych są tak wyskalowane, aby hipotetyczna dystrybuanta rozkładu normalnego była linią prostą. Parametry rozkładu normalnego wyznaczone zostały metodą najmniejszych kwadratów. W przypadku przekroju nad pałem nr 5 uzyskano rozkład normalny o parametrach $E\{M\} = 510,3$ kNm i $\sigma\{M\} = 32,0$ kNm, przy takim położeniu wózków suwnicy, że pierwsze koło znajdowało się w odległości 5,5 m od początku belki, zaś dla przekroju nad pałem nr 4 – $E\{M\} = 508,7$ kNm i $\sigma\{M\} = 36,6$ kNm, przy położeniu pierwszego koła w odległości 3,5 m od początku belki. Dodatkowo nad pałem nr 4, dla momentów górnych (ujemnych), przy położeniu pierwszego koła na początku belki estymowany rozkład normalny miał parametry: $E\{M\} = -386,6$ kNm i $\sigma\{M\} = 61,2$ kNm.

Wartości progowe momentów zginających dla istniejącej belki fundamentowej oszacowano na podstawie dostępnej dokumentacji. Wynosiły one: $M_{\max} = 540$ kNm oraz dla momentów górnych $M_{\min} = -420$ kNm. Odpowiednie wskaźniki niezawodności i prawdopodobieństwa awarii wynoszą:

$$\text{Dla pała nr 5: } p_F = P\{M > M_{\max}\} = 0,177 \Rightarrow \beta = -\Phi_0^{-1}(p_F) = 0,93,$$

$$p_F = P\{M > M_{\max}\} = 0,197 \Rightarrow \beta = -\Phi_0^{-1}(p_F) = 0,86.$$

$$\text{Dla pała nr 4: } p_F = P\{M < M_{\min}\} = 0,292 \Rightarrow \beta = -\Phi_0^{-1}(p_F) = 0,55.$$

Chcąc uzyskać wskaźniki niezawodności na zadowalającym poziomie $\beta = 3,0$ należałoby określić następujące momenty progowe $M_{\max} = 606,3$ kNm nad pałem nr 5, $M_{\max} = 618,5$ kNm nad pałem nr 4 oraz $M_{\min} = -570,2$ kNm w przypadku pała nr 4. Jak widać, są to wartości istotnie większe od tych, które pojawiły się w projekcie.

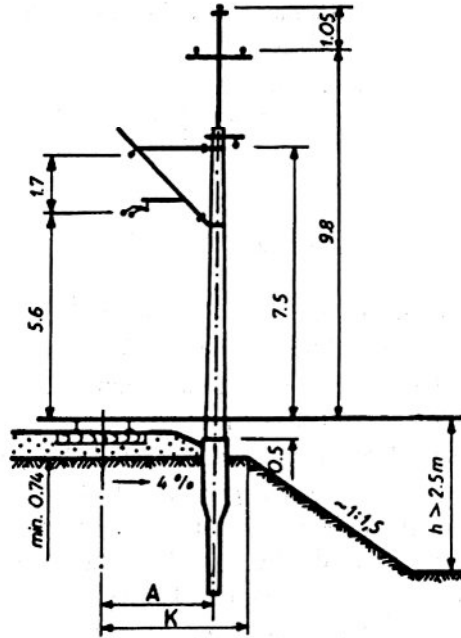
7. Nośność boczna pojedynczego pala sztywnego w podłożu o cechach losowych, poddanego obciążeniom poprzecznym

7.1. Wprowadzenie

Zagadnienia nośności bocznej sztywnych pali fundamentowych nie należą do często rozpatrywanych w praktyce inżynierskiej. Wynika to z faktu, że w wielu sytuacjach pale fundamentowe, zarówno ze względu na ich długość, jak i warunki geotechniczne, trudno jest uznać za sztywne. Ostatnio zainteresowanie tymi zagadnieniami znacznie wzrosło w związku ze stosowaniem pojedynczych pali jako fundamentów słupów sieci trakcyjnej linii kolejowych. Dotyczy to zwłaszcza modernizowanych linii kolejowych, gdzie nowe technologie wykonywania prefabrykowanych pali pozwalają na szybkie wykonawstwo fundamentów i montaż słupów (krótkie czasy zamknięć). Przykład takiego słupa wraz z fundamentem w postaci pojedynczego pala pokazano na rysunku 7.1.

Zagadnienie niezawodnościowe, któremu poświęcony jest ten rozdział, pojawiło się w związku z obliczeniami pali fundamentowych pod słupy sieci trakcyjnej (Puła i Puła 1995). Stwierdzono wówczas, że nieliniowe związki funkcyjne pomiędzy kątem tarcia wewnętrznego gruntu a granicznym obciążeniem poprzecznym charakteryzują się bardzo dużą wrażliwością wartości siły granicznej na niewielkie nawet zmiany kąta tarcia wewnętrznego. Zatem losowa niejednorodność podłoża może powodować istotną niepewność oszacowania siły granicznej. Odpowiedź na pytanie, jak duża jest to niepewność, prowadzi do przyjęcia adekwatnych współczynników bezpieczeństwa do obliczeń inżynierskich.

W ramach sprawdzenia nośności bocznej znajduje się graniczne wartości obciążenia, które doprowadzają do wystąpienia stanu granicznego w gruncie (wypierania gruntu wokół pala) lub zniszczenia pala. Często jednak obciążenia znacznie mniejsze od granicznych powodują przemieszczenia pala, które nie są dopuszczalne ze względu na prawidłową eksploatację konstrukcji (np. takich jak przyczółki mostowe lub budowle wysokie). Implikuje to konieczność sprawdzenia jak dużych przemieszczeń doznaje głowica pala.



Rys. 7.1. Przykład słupa sieci trakcyjnej posadowionego na pojedynczym pału.
Rysunek pochodzi z projektu sieci trakcyjnej na szlaku Wrocław Osobowice – Szewce.
Zamieszczony dzięki uprzejmości projektanta p. mgra inż. Jerzego Bilskiego

Sposób obliczeń, zarówno w przypadku stanu granicznego nośności, jak i analizy przemieszczeń, zależy od sztywności pała, a także od sposobu zamocowania głowicy w oczepie, tj. odpowiedzi na pytanie czy głowicę można uznać za swobodną, czy utwierdzoną. Rozdział ten dotyczy pali z głowicą swobodną. Taki też schemat można przyjąć w przypadku fundamentów słupów trakcyjnych w postaci pojedynczego pała.

Na to, czy dany pał można uznać za sztywny czy wiotki, mają wpływ nie tylko wymiary pała, ale także cechy otaczającego go podłoża. Najważniejszym jednak parametrem jest w tym przypadku długość pała. Pale krótkie można zwykle uznać za sztywne. Różne kryteria sztywności formułowane są przez różnych autorów. Według autorów normy PN-83/B-02482 (PN-83/B-02482, 1983) sztywność pali o głowicach swobodnych wyznacza się na podstawie następujących zależności:

Jeżeli $h < 1,5 h_s$, to pale uznaje się za sztywne, jeśli natomiast $h > 3,0 h_s$, to pale traktuje się jako wiotkie, przy czym h jest zagłębieniem pała w gruncie, zaś h_s – zagłębieniem sprężystym obliczanym według wzoru

$$h_s = \sqrt[n+4]{\frac{4EI}{Dk_x}} h^n, \quad (7.1)$$

w którym: EI – sztywność giętna pala, k_x – współczynnik podatności bocznej gruntu określany w przypadku gruntu niespoistego jako

$$k_x = \frac{S_n(750 I_D^2 + 225 I_D + 150)\gamma^{(n)}}{D} \quad (7.2)$$

oraz dla gruntu spoistego

$$k_x = 9600 \frac{(1 - I_L)}{D} S_n, \quad (7.3)$$

przy czym D oznacza średnicę lub szerokość pala mierzoną prostopadle do kierunku działania siły poziomej, γ jest ciężarem objętościowym gruntu, n jest wykładnikiem potęgi, przyjmowanym w zależności od rodzaju gruntu: – dla gruntów spoistych przekonsolidowanych $n = 0$ oraz $n = 1$ dla gruntów niespoistych i gruntów spoistych normalnie skonsolidowanych. Ponadto I_D oznacza stopień zagęszczenia gruntu niespoistego, a I_L – stopień plastyczności gruntu spoistego, zaś S_n – współczynnik uwzględniający stopień naruszenia gruntu w trakcie wykonywania pala.

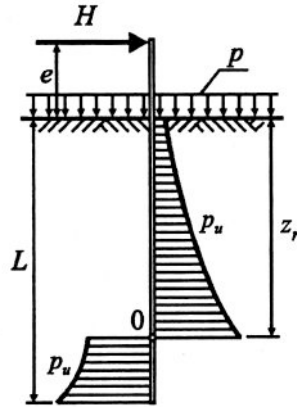
Jeżeli $1,5 h_s < h < 3,0 h_s$, to pal zalicza się do kategorii pośredniej, dla której wykonuje się obliczenia zarówno, jak dla kategorii sztywnej, jak i dla kategorii wiotkiej.

Podstawowa różnica w obliczeniach pomiędzy palami sztywnymi i wiotkimi polega na tym, że w przypadku pali sztywnych znajduje się wartość granicznej siły powodującej powstanie stanu granicznego w gruncie, natomiast w palach wiotkich zniszczenie pala jako żelbetowego słupa na skutek jego zginania może nastąpić znacznie wcześniej aniżeli powstanie stanu granicznego w gruncie. Nośność boczna wiotkich pali nie jest rozpatrywana w tym rozdziale. Informacje na temat metod jej obliczania można znaleźć w monografiach (np. Poulos i Davis 1980).

Celem tego podrozdziału jest rozwiązanie zagadnienia obliczania prawdopodobieństwa awarii polegającej na utracie nośności przez pojedynczy pal sztywny o swobodnej głowicy, pograżony w ośrodku gruntowym o losowych parametrach i poddany losowemu obciążeniu poprzecznemu. W kolejnych podrozdziałach podane zostaną założenia oraz rozwiązanie Brinch Hansena, a następnie oparte na nim rozwiązanie zadania losowego.

7.2. Schemat statyczny i równania równowagi

Mechanizm wypierania gruntu w otoczeniu sztywnego pala o swobodnej głowicy, obciążonego siłą poprzeczną, zakłada obrót pala wokół środka O spowodowany obciążeniem oraz oddziaływaniem gruntu (rys. 7.2). W celu oszacowania granicznego oporu boczno-pala zawieszono (tj. takiego, w którym nie całe obciążenie jest przenoszone przez podstawę pala) o swobodnej głowicy przyjmuje się schemat statyczny jak na rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Schemat statyczny przyjęty do wyznaczania bocznego oporu granicznego sztywnego pala (oznaczenia: H – siła pozioma, e – ramię działania siły H mierzone od poziomu terenu, L – zagłębienie pala w gruncie mierzone od poziomu terenu, p – obciążenie naziomu, p_u – wypadkowe parcie gruntu, z_r – położenie środka obrotu O)

Przyjmując, że graniczna wartość siły poziomej wynosi H_u , graniczna wartość momentu M_u i powodują one powstanie oporu granicznego gruntu $p_u(z)$ na głębokości z poniżej powierzchni terenu, oraz traktując pal jako pasmo o szerokości D (dla pala o średnicy D jest to pewne uproszczenie), równania równowagi sił poziomych oraz momentów można napisać w postaci

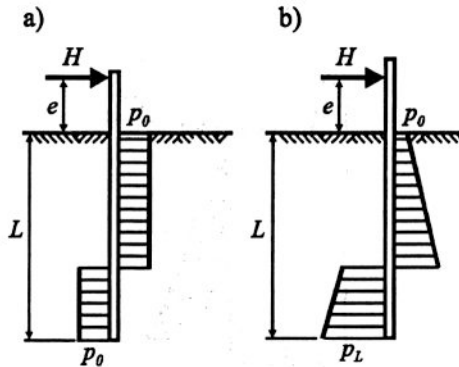
$$H_u = \int_0^{z_r} p_u(z) D dz - \int_{z_r}^L p_u(z) D dz, \quad (7.4)$$

$$M_u = H_u e = - \int_0^{z_r} p_u(z) D z dz + \int_{z_r}^L p_u(z) D z dz, \quad (7.5)$$

gdzie D oznacza średnicę (lub szerokość pala). Równania te rozwiązuje się ze względu na niewiadomą rzędną środka obrotu z_r oraz graniczną siłę poziomą H_u . Oczywiście rozwiązanie zależy od założonego rozkładu parć gruntu $p_u(z)$. Najprostszym założeniem jest przyjęcie, że odpór gruntu jest stały $p_u(z) = p_u$ i nie zależy od głębokości (rys. 7.3). Wówczas rozwiązanie równań (7.4) i (7.5) ma postać

$$z_r = \frac{1}{2} \left(\frac{H_u}{p_u D} + L \right), \quad (7.6)$$

$$\frac{H_u}{p_u D L} = \sqrt{\left(1 + \frac{2e}{L} \right)^2 + 1} - \left(1 + \frac{2e}{L} \right). \quad (7.7)$$



Rys. 7.3. Najprostsze rozkłady odporu gruntu: a) rozkład stały, b) rozkład liniowy

W przypadku liniowego rozkładu odporu gruntu z głębokością od wartości p_0 na powierzchni terenu do wartości p_L na poziomie podstawy pała rozwiązanie zadania można podać w następującej postaci uwikłanej:

$$4\left(\frac{z_r}{L}\right)^3 + \left[6\left(\frac{z_r}{L}\right)^2\right] \left[\frac{e}{L} + \frac{p_0}{p_L - p_0}\right] + \left(\frac{12p_0}{p_L - p_0}\right) \left(\frac{e}{L}\right) \left(\frac{z_r}{L}\right) - \left(3\frac{e}{L}\right) \left(\frac{p_0 + p_L}{p_L - p_0}\right) - \left(\frac{2p_L + p_0}{p_L - p_0}\right) = 0, \quad (7.8)$$

$$\frac{H_u}{p_L DL} = \left(1 - \frac{p_0}{p_L}\right) \left(\frac{z_r}{L}\right)^2 + \left(2\frac{p_0}{p_L}\right) \left(\frac{z_r}{L}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0}{p_L}\right). \quad (7.9)$$

Z równań (7.8) i (7.9) wyznacza się rzędną środka obrotu z_r oraz graniczną siłę poziomą H_u . Następnie przez podstawienie do (7.5) można otrzymać moment graniczny M_u .

W przypadku gruntów idealnie spoiowych ($\varphi = 0$) graniczny opór boczny p_u wzrasta od powierzchni do pewnej głębokości równej około trzem średnicom pała (Poulos i Davis 1980). Poniżej można przyjąć wartość stałą

$$p_u = K_c c. \quad (7.10)$$

Wartość współczynnika oporu bocznego K_c zależy od stosunku adhezji pała c_a do spójności gruntu c_a/c oraz od stosunku wymiarów przekroju poprzecznego D/D_1 , przy czym D_1 jest szerokością pała mierzoną równolegle do kierunku działania siły. Jednak rozwiązania (7.6)–(7.7) lub (7.8)–(7.9) stanowią jedynie oszacowania „z grubsza”, ze względu na niezbyt realistyczne założenia dotyczące rozkładu odporu gruntu wzdłuż pobocznic pała. Za najbardziej adekwatny graniczny rozkład parć $p_u(z)$ uważa się rozkład oparty na teorii stanów granicznych podany przez Brinch Hansena (Brinch Hansen 1961b), a następnie uogólniony przez Poulosa (Poulos 1976). Wyniki Brinch

Hansena, jako przyjęte do dalszych obliczeń zostaną omówione w następnym podrozdziale. W praktycznych zastosowaniach częściej korzysta się z tzw. metody Bromsa (Broms 1964a, Broms 1964b), zbliżonej do metody Brincha Hansena, ale wprowadzającej uproszczenia co do obliczeń rozkładu $p_u(z)$. Do najważniejszych osiągnięć dotyczących badań pali obciążonych siłami poprzecznymi należy zaliczyć także badania modelowe i uzyskane metody obliczeniowe, które zostały opisane w pracach pod redakcją Dembickiego (Dembicki i inni 1971, 1976).

W przypadku pali niesztynnych boczny opór graniczny może być zdeterminowany przez moment uplastycznienia przekroju pala, który może zostać osiągnięty przed wystąpieniem stanu granicznego w gruncie. Ponieważ maksymalny moment nie może przekroczyć momentu uplastycznienia, graniczny opór boczny jest mniejszą z dwóch następujących sił:

1. Poziomej siły potrzebnej do osiągnięcia stanu granicznego gruntu na całej długości pala;
2. Poziomej siły dającej maksymalny moment zginający równy momentowi uplastycznienia przekroju pala.

7.3. Metoda Brinch Hansena

Brinch Hansen (1961b) podał ogólną metodę obliczania oporu bocznego p_u wzdłuż poboczniczy pala, bazującą na teorii parcia gruntu oraz teorii stanów granicznych. Rozpatruje się schemat jak na rysunku 7.2. Przyjęto, że podłoże wokół pala jest charakteryzowane parametrami wytrzymałościowymi φ i c , zaś rzeczywisty ciężar objętościowy gruntu powyżej zwierciadła wody gruntowej wynosi γ (do głębokości z_d) i γ' poniżej. Na dowolnej głębokości z poniżej poziomu terenu działające naprężenie pionowe wynosi

$$q(z) = p + \gamma z_d + \gamma' z_s, \quad z = z_d + z_s. \quad (7.11)$$

Zakłada się, że pal jest doskonale sztywny. Ponad punktem obrotu, znajdującym się w dolnej części pala, działać będzie odpór gruntu po prawej stronie, parcie po lewej (rys. 7.2). Poniżej punktu obrotu sytuacja jest odwrotna. Wypadkowe parcie (parcie minus odpór) na jednostkę powierzchni pala na głębokości z wynosi

$$p_u(z) = q(z)K_q(z) + cK_c(z). \quad (7.12)$$

Współczynniki $K_q(z)$, $K_c(z)$ są współczynnikami parcia, które zależą od kąta tarcia wewnętrznego φ , średnicy pala D i głębokości z . Poniżej, w skrócie, za pracą Brinch Hansena (1961b), podano sposób ich wyznaczania. Autor ten proponuje, aby na zadanej głębokości z współczynniki $K_q(z)$ i $K_c(z)$ obliczać poprzez nieliniową

interpolację pomiędzy ich wartościami K_q^0 i K_c^0 dla poziomego terenu ($z = 0$) oraz wartościami K_q^∞ i K_c^∞ dla dużej głębokości ($z = \infty$). I tak dla poziomego terenu ($z = 0$) K_q^0 i K_c^0 są przyjęte jako różnica pomiędzy współczynnikami parcia biernego i czynnego dla ściany szorstkiej poddawanej przemieszczeniom poziomym (Brinch Hansesn i Lundgren 1960)

$$K_q^0 = e^{\left(\frac{1}{2}\pi + \varphi\right) \operatorname{tg} \varphi} \cos \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - e^{-\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) \operatorname{tg} \varphi} \cos \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (7.13)$$

$$K_c^0 = \left[e^{\left(\frac{1}{2}\pi + \varphi\right) \operatorname{tg} \varphi} \cos \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 1 \right] \operatorname{ctg} \varphi. \quad (7.14)$$

Dla znacznych głębokości linie poślizgu nie docierają do poziomego terenu, lecz układają się poziomo wokół pala. Ten przypadek może być traktowany podobnie do przypadku głębokiego fundamentu pasmowego (obliczenia według propozycji Brinch Hansena 1961a). Można pokazać (Brinch Hansen 1961b), że przy tych założeniach parcie bierne wyraża się wzorem

$$p_u^\infty(z) = (c + q(z)K_0 \operatorname{tg} \varphi) N_c d_c^\infty = q(z)K_q^\infty + cK_c^\infty, \quad (7.15)$$

w którym

$$d_c^\infty = 1,58 + 4,09 \operatorname{tg}^4 \varphi, \quad (7.16)$$

zaś N_c jest współczynnikiem nośności, określonym wzorem (4.3), a K_0 jest współczynnikiem parcia spoczynkowego, przyjętym w postaci

$$K_0 = 1 - \sin \varphi. \quad (7.17)$$

Ze wzoru (7.15) wynika bezpośrednio, że

$$K_c^\infty = N_c d_c^\infty \quad (7.18)$$

oraz

$$K_q^\infty = K_c^\infty K_0 \operatorname{tg} \varphi = N_c d_c^\infty K_0 \operatorname{tg} \varphi. \quad (7.19)$$

W przypadku niewielkich głębokości (które Brinch Hansen określa jako umiarkowane) Brinch Hansen zakłada bierny stan Rankine'a. Rzutując wszystkie działające siły na płaszczyznę tworzącą kąt φ z płaszczyzną poślizgu można ostatecznie otrzymać (Brinch Hansen 1961b) następujący wzór określający wypadkowe parce (bierne minus czynne) w zależności od głębokości z :

$$p_u^m(z) = q(z)K_q^0 \left(1 + \frac{z}{D} \frac{K_0 \sin \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)} \right) + cK_c^0 \left(1 + \frac{z}{D} 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right) \right). \quad (7.20)$$

Zamysłem Brinch Hansena było otrzymanie takich wzorów określających zależne od głębokości współczynniki parcia $K_q(z)$ oraz $K_c(z)$, aby

$$K_q(z) \rightarrow K_q^0 \quad \text{i} \quad K_c(z) \rightarrow K_c^0 \quad \text{gdy} \quad z \rightarrow 0, \quad (7.21)$$

oraz

$$K_q(z) \rightarrow K_q^\infty \quad \text{i} \quad K_c(z) \rightarrow K_c^\infty \quad \text{gdy} \quad z \rightarrow \infty. \quad (7.22)$$

Ponadto parcia na pośrednich głębokościach powinny osiągać zbliżone wartości do wartości otrzymanych ze wzoru (7.20). Współczynniki we wzorze (7.20) spełniają warunek (7.21), nie spełniają natomiast warunku (7.22). Dlatego Brinch Hansen (1961b) zaproponował następujące wzory interpolacyjne:

$$K_q(z) = \frac{K_q^0 + K_q^\infty a_q \frac{z}{D}}{1 + a_q \frac{z}{D}}, \quad (7.23)$$

gdzie

$$a_q = \frac{K_q^0}{K_q^\infty - K_q^0} \frac{K_0 \sin \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (7.24)$$

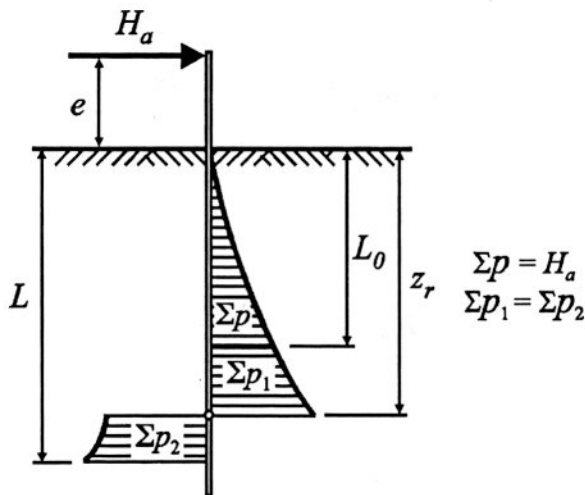
oraz

$$K_c(z) = \frac{K_c^0 + K_c^\infty a_c \frac{z}{D}}{1 + a_c \frac{z}{D}}, \quad (7.25)$$

przy czym

$$a_c = \frac{K_c^0}{K_c^\infty - K_c^0} 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (7.26)$$

Powyższe wzory spełniają warunki (7.21) i (7.22) oraz dają zbliżone wartości parć w stosunku do (7.20) dla pośrednich wartości z . Powstały one, jak to sam autor określa, „na drodze empirycznej” – tak, aby uzyskać możliwie dobre dopasowanie krzywych. Wzory te pozwalają na obliczenie parcia $p_u(z)$ działającego wzdłuż trzonu pała. Funkcję $p_u(z)$ podstawia się do równań równowagi (7.4) oraz (7.5), a następnie poprzez rozwiązanie tych równań uzyskuje się położenie środka obrotu z_r oraz wartość siły granicznej H_u . Ze względu na skomplikowany charakter powyższych zależności Brinch Hansen zaproponował następujący, iteracyjny sposób rozwiązania zadania. Jeżeli głębokość pogrążenia pała L jest zadana, to niewiadomymi są środek obrotu z_r oraz wartość siły granicznej H_u . Środek obrotu z_r znajduje się metodą prób, w ten sposób, że znajduje się punkt taki, aby dwa obszary parcia (powyżej i poniżej tego punktu) dawały jednakowy moment względem linii działania siły poziomej. Wówczas siła H_u jest różnicą między polami powierzchni tych dwóch obszarów parcia. Jeżeli zaś pał ma być zaprojektowany na przeniesienie danej siły H_a , to nieznanymi wielkościami będą głębokość pogrążenia pała L i rzędna środka obrotu z_r . W tym przypadku znajduje się najpierw głębokość L_0 , dla której wypadkowa siła poprzeczna jest równa zero. W tym punkcie oblicza się wartość momentu M_0 . Wartość M_0 może być użyta do zwymiarowania przekroju poprzecznego pała. Ostatecznie głębokość pogrążenia L oraz położenie środka obrotu z_r wyznacza się metodą prób, tak aby obszary parć (dodatni i ujemny) poniżej L_0 były równe co do wartości (dawały wypadkową siłę poprzeczną równą zero), zaś moment pochodzący od nich miał wartość M_0 . Pokazano to schematycznie na rysunku 7.4.



Rys. 7.4. Schemat do obliczeń pała metodą Brinch Hansena

Bezpieczeństwo się zapewnia przez odpowiedni dobór globalnego współczynnika bezpieczeństwa F określanego jako

$$F = \frac{H_u}{H_a}, \quad (7.27)$$

gdzie H_a jest przyłożonym obciążeniem poziomym. Alternatywnym sposobem jest przyjęcie cząstkowych współczynników dla tangensa kąta tarcia wewnętrznego, spójności i dla siły H_a . W pracy Brinch Hansena (1961b) zaproponowano następujące wartości obliczeniowe (według koncepcji współczynników cząstkowych): $H_a^{(r)} = 1,5$
 $H_a^{(n)}, \operatorname{tg} \varphi^{(r)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi^{(n)}}{1,2}, c^{(r)} = \frac{c^{(n)}}{1,5}$.

W celu usprawnienia obliczeń Brinch Hansen opracował nomogramy pozwalające na znajdowanie współczynników $K_q(z)$ oraz $K_c(z)$ w zależności od wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz geometrii pała.

Obliczenia przeprowadzane metodą Brinch Hansena (Puła i Puła 1995, Puła i Puła 1998) pokazały, że wartość siły granicznej H_u , wykazuje bardzo dużą wrażliwość na zmiany kąta tarcia wewnętrznego φ w podłożu. Efekt ten zilustrowano przykładowo w tabeli 7.1.

Tabela 7.1. Przykładowe zmiany położenia środka obrotu i wartości siły granicznej w zależności od wahań kąta tarcia wewnętrznego. Szczegółowe dane dotyczące tego przykładu podano w podrozdziale 7.5

Kąt tarcia wewnętrznego φ [rad]; [°]	Położenie Środka obrotu z_r [m]	Siła graniczna H_u [kN]
0,46; 26,35	2,106	13,30
0,48; 27,52	2,110	14,61
0,50; 28,63	2,113	16,07
0,52; 29,78	2,117	17,67
0,54; 30,93	2,121	19,45
0,56; 32,10	2,125	21,43
0,58; 33,22	2,129	23,62

Wyniki pokazane w tabeli 7.1 wskazują na zaskakujący efekt, że o ile położenie środka obrotu zmienia się stosunkowo niewiele przy wahaniach kąta tarcia wewnętrznego

nego, to zmiany wartości siły granicznej są bardzo duże (niewielkie odchyłki położenia środka powodują bardzo duże zmiany wartości siły granicznej). Taka sytuacja sprawia, że po pierwsze – położenie środka obrotu musi być obliczone z bardzo dużą dokładnością, po drugie – należy zbadać wrażliwość globalnego współczynnika bezpieczeństwa na losowe wahania kąta tarcia wewnętrznego.

7.4. Sformułowanie zadania i sposób rozwiązania w ośrodku niespoistym

Uwagi podane pod koniec poprzedniego podrozdziału prowadzą do następującego zadania z zakresu niezawodności:

Jakie jest prawdopodobieństwo (ewentualnie odpowiadający mu wskaźnik niezawodności), że przyłożona siła pozioma H_a przekroczy graniczną wartość H_u , co przy założeniu dodatnich wartości sił H_a oraz H_u jest równoważne stwierdzeniu, że globalny współczynnik bezpieczeństwa, dany wzorem (7.27), jest mniejszy od jedności:

$$p_F = P\{H_a > H_u\} = P\left\{\frac{H_u}{H_a} < 1\right\} = P\{F < 1\}. \quad (7.28)$$

Można też dla zadanego wskaźnika niezawodności β lub założonego poziomu prawdopodobieństwa awarii p_F poszukiwać odpowiednio dużej wartości współczynnika bezpieczeństwa F , którą można by przyjąć do celów projektowych.

Rozwiązanie tego zadania stanowi istotny problem numeryczny (Luźna i Puła 1998). Wynika to z uwikłanych i „silnie” nieliniowych zależności wartości granicznej H_u od kąta tarcia wewnętrznego (a także innych parametrów). Obliczanie prawdopodobieństwa (7.28) drogą bezpośredniej symulacji Monte Carlo, przy założeniu, że kilka parametrów zmienia się losowo, prowadziłoby do żmudnych obliczeń z niewielką szansą na dokładny wynik. Również bezpośrednio zastosowanie metod FORM czy SORM nie jest tu możliwe ze względu na brak jawnej zależności funkcji stanu granicznego

$$H_u - H_a = 0, \quad (7.29)$$

od kąta tarcia wewnętrznego oraz innych parametrów podłoża gruntowego. Dodatkowym aspektem jest konieczność niezwykle precyzyjnego znalezienia środka obrotu, co pokazano w poprzednim podrozdziale. W tej sytuacji bardzo pożyteczne staje się skorzystanie z systemów komputerowych dokonujących przekształceń symbolicznych i rozwiązujących równania w postaci zamkniętej (o ile zamknięta postać tychże rów-

nań istnieje). Takim systemem jest np. program *Mathematica* (*Mathematica* 2003)). Rozwiązywano równania równowagi (7.4) i (7.5) z funkcją $p_u(z)$ wynikającą z równań (7.12)–(7.26) w postaci symbolicznej, a następnie wprowadzono rezultaty do programu realizującego obliczenia metodą SORM (np. system COMREL, (STRUREL, 1997)). Zarys koncepcji rozwiązania problemu w tej postaci podano w pracy autora (Puła 1997).

Po pomnożeniu równania (7.4) obustronnie przez e (por. rys. 7.2), a następnie odjęciu stronami od otrzymanego wyniku równania (7.5), otrzymuje się równanie

$$\int_0^{z_r} p_u(z)[e+z]Ddz - \int_{z_r}^L p_u(z)[e+z]Ddz = 0, \quad (7.30)$$

w którym niewiadomą jest rzędna środka obrotu z_r , zaś w przypadku rozwiązania Brinch Hansena funkcja $p_u(z)$ ma postać

$$p_u(z) = (p + \gamma z)[K_q(z) + cK_c(z)], \quad (7.31)$$

przy czym pominięto efekt wody gruntowej (zwierciadło wody gruntowej poniżej podstawy pała), zaś funkcje $K_q(z)$ oraz $K_c(z)$ dane są wzorami (7.23) i (7.25). Obliczenie całek w równaniu (7.30) prowadzi do następującego równania przestępnego dla środka obrotu z_r :

$$a_0 + a_1 z_r + a_2 z_r^2 + a_3 z_r^3 + b_1 \ln(D + a_q z_r) + c b_2 \ln(D + a_c z_r) = 0, \quad (7.32)$$

w którym c oznacza spójność gruntu, D jest średnicą pała, L – długością pograżenia pała w gruncie, zaś a_q oraz a_c są funkcjami kąta tarcia wewnętrznego danymi wzorami, odpowiednio (7.24) i (7.26), a współczynniki przy kolejnych potęgach niewiadomej z_r mają postać

$$a_3 = \frac{2}{3} \gamma (K_q^\infty + cK_c^\infty), \quad (7.33)$$

$$a_2 = (e\gamma + p)(K_q^\infty + cK_c^\infty) + \frac{\gamma D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) + \frac{\gamma c D}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty), \quad (7.34)$$

$$a_1 = 2ep(K_q^\infty + cK_c^\infty) + \frac{2D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(e\gamma + p - \frac{\gamma D}{a_q} \right) + \frac{2cD}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \left(e\gamma + p - \frac{\gamma D}{a_c} \right), \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned}
a_0 = & - \left\{ \frac{1}{3} \gamma (K_q^\infty + cK_c^\infty) L^3 + \left[\frac{(e\gamma + p)}{2} (K_q^\infty + cK_c^\infty) + \frac{\gamma D}{2a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) + c \frac{D\gamma}{2a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \right] L^2 \right\} \\
& - \left\{ \left[ep(K_q^\infty + cK_c^\infty) + \frac{D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(e\gamma + p - \frac{\gamma D}{a_q} \right) + \frac{cD}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \left(e\gamma + p - \frac{\gamma D}{a_c} \right) \right] L \right\} \\
& - \left\{ \frac{D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(ep - \frac{\gamma De}{a_q} - \frac{pD}{a_q} + \frac{\gamma D^2}{a_q^2} \right) \ln(D^2 + a_q LD) \right\} \\
& - c \left\{ \frac{D}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \left(ep - \frac{\gamma De}{a_c} - \frac{pD}{a_c} + \frac{\gamma D^2}{a_c^2} \right) \ln(D^2 + a_c LD) \right\}.
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Ponadto

$$b_1 = \frac{2D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(ep - \frac{D\gamma e}{a_q} - \frac{Dp}{a_q} + \frac{\gamma D^2}{a_q^2} \right), \tag{7.37}$$

$$b_2 = \frac{2D}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \left(ep - \frac{D\gamma e}{a_c} - \frac{Dp}{a_c} + \frac{\gamma D^2}{a_c^2} \right). \tag{7.38}$$

Wzory (7.33)–(7.38) w połączeniu ze wzorami (7.13)–(7.26) dają zależność współczynników od kąta tarcia wewnętrznego, która jest bardzo złożona i nie nadaje się do dalszych przekształceń bez pomocy komputera.

W przypadku ośrodka niespoistego, dla którego $c = 0$, równanie (7.32) redukuje się do postaci

$$a'_0 + a'_1 z_r + a'_2 z_r^2 + a'_3 z_r^3 + b'_1 \ln(D + a_q z_r) = 0, \tag{7.39}$$

gdzie:

$$a'_3 = \frac{2}{3} \gamma K_q^\infty, \tag{7.40}$$

$$a'_2 = (e\gamma + p) K_q^\infty + \frac{\gamma D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty), \tag{7.41}$$

$$a'_1 = 2ep K_q^\infty + \frac{2D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(e\gamma + p - \frac{\gamma D}{a_q} \right), \tag{7.42}$$

$$a'_0 = - \left\{ \frac{1}{3} \gamma K_q^\infty L^3 + \left[\frac{(e\gamma + p)}{2} K_q^\infty + \frac{\gamma D}{2a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \right] L^2 + \left[ep K_q^\infty + \frac{D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(e\gamma + p - \frac{\gamma D}{a_q} \right) \right] L \right\} - \left\{ \frac{D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(ep - \frac{\gamma De}{a_q} - \frac{pD}{a_q} + \frac{\gamma D^2}{a_q^2} \right) \ln(D^2 + a_q LD) \right\}, \quad (7.43)$$

$$b'_1 = \frac{2D}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(ep - \frac{D\gamma e}{a_q} - \frac{Dp}{a_q} + \frac{\gamma D^2}{a_q^2} \right). \quad (7.44)$$

Ze względu na brak możliwości przedstawienia rozwiązania równania (7.39) w postaci funkcji elementarnych, zastosowano do funkcji logarytm, występującej po prawej stronie tegoż równania, rozwinięcie Taylora do czwartego wyrazu włącznie, tj. zastąpienie logarytmu przez wielomian trzeciego stopnia. Zastosowanie rozwinięć wyższych stopni uniemożliwiłoby otrzymanie rozwiązania równania (7.39) w postaci zamkniętej (twierdzenia Galois – por. np. Browkin 1970). Z drugiej strony, mając na uwadze konieczność bardzo dokładnego znalezienia środka obrotu z_r , rozwinięcie takie może okazać się zbyt mało dokładne. Aby polepszyć dokładność, wprowadzono parametr optymalizacyjny θ , zapisując argument logarytmu ze wzoru (7.39) w postaci

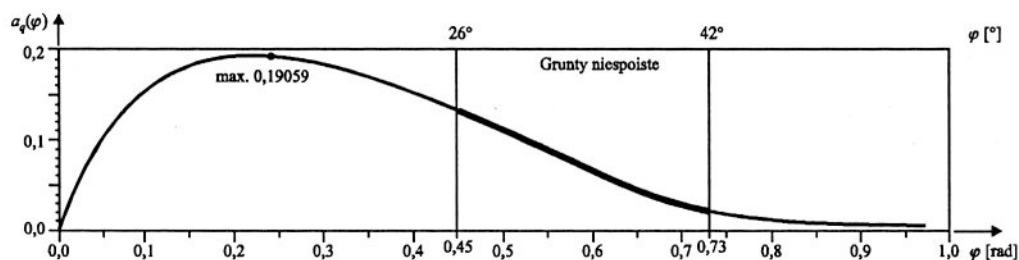
$$D + a_q z_r = D + \theta a_q - \theta a_q + a_q z_r = o + k, \quad (7.45)$$

gdzie $o = D + \theta a_q$ oraz $k = -\theta a_q + a_q z_r$. Rozwinięcia logarytmu dokonuje się wokół punktu o z przyrostem k :

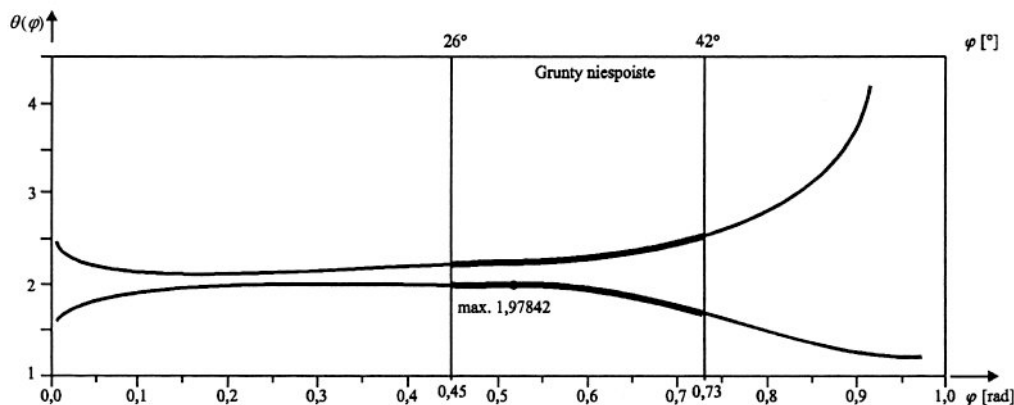
$$\ln(D + a_q z_r) = \ln(o + k) \approx \ln(D + \theta \cdot a_q) + \frac{a_q(-\theta + z_r)}{D + \theta \cdot a_q} - \frac{a_q^2(-\theta + z_r)^2}{2(D + \theta \cdot a_q)^2} + \frac{a_q^3(-\theta + z_r)^3}{3(D + \theta \cdot a_q)^3}. \quad (7.46)$$

Optymalizacja zadania polega na znalezieniu takiej wartości θ , dla której dokładność przybliżenia (7.46) jest duża. Dla zadanej wartości kąta tarcia wewnętrznego φ rozwiązuje się równania równowagi (7.4)–(7.5) numerycznie, znajdując położenie środka obrotu z_r . Następnie dla wyznaczonej wartości z_r rozwiązuje się numerycznie równanie (7.39), z uwzględnieniem (7.46), znajdując wartość θ . Obliczenia te należy przeprowadzić dla stosunkowo szerokiego przedziału kąta tarcia wewnętrznego, tak aby wartość θ (ewentualnie kilka wartości) była reprezentatywna dla szerokiego przedziału φ . Takie określenie parametru θ pozwoli na bezpośrednie zastosowanie metod

FORM i SORM. Pomimo szybkiej zmienności funkcji $a_q(\varphi)$ (na rysunku 7.5 przedstawiono wykres a_q jako funkcji kąta tarcia wewnętrznego φ) zmiany parametru θ , odpowiadające zmianom kąta φ okazują się być niewielkie. Ilustruje to rysunek 7.6. Warto odnotować, że istnieją dwa możliwe do zaakceptowania rozwiązania znajdujące się w pobliżu siebie. W przypadku pokazanym na rysunku 7.6 zmiany wartości θ są na tyle niewielkie, że do obliczeń metodami FORM i SORM można wybrać jedną wartość parametru θ reprezentatywną dla spotykanych w naturze kątów tarcia wewnętrznego gruntów niespoistych. Inne analizowane przykłady dla gruntów niespoistych potwierdziły te obserwacje.



Rys. 7.5. Wykres funkcji $a_q(\varphi)$



Rys. 7.6. Przykładowy wykres zależności $\theta(\varphi)$. Wykres ten dotyczy przykładu przedstawionego w podrozdziale 7.5

Po podstawieniu do równania (7.39) przybliżonej wartości logarytmu zgodnie z równaniem (7.46) otrzymuje się równanie

$$\begin{aligned}
 & a + bz_r + fz_r^2 + mz_r^3 + s_1[\ln(D + \theta\alpha_q)] + s_1 \frac{a_q(-\theta + z_r)}{D + \theta\alpha_q} \\
 & - s_1 \frac{a_q^2(-\theta + z_r)^2}{2(D + \theta\alpha_q)^2} + s_1 \frac{a_q^3(-\theta + z_r)^3}{3(D + \theta\alpha_q)^3} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

Jest to równanie trzeciego stopnia ze względu na z_r . Jako że współczynniki tego równania są liczbami rzeczywistymi, równanie to ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Jeśli się przyjmie sensowne, z inżynierskiego punktu widzenia, parametry zadania, to otrzymuje się dwa pierwiastki zespolone i jeden rzeczywisty, odpowiadający wartości położenia środka obrotu. Pierwiastki równania (7.47) w postaci zamkniętej można otrzymać stosując wzory Cardano (Felix 1973). System *Mathematica* wykonuje te obliczenia symbolicznie, podając formuły w postaci zamkniętej. Rozwiązanie pełne, uwzględniające rzeczywiste parametry zadania, jest bardzo skomplikowane i nie jest tu przytaczane. Jest ono transferowane do systemu wykonującego obliczenia miar niezawodności.

Wyrażenie na siłę graniczną, które uzyskuje się po podstawieniu do równania równowagi (7.4), przy założeniu p_u w postaci (7.31) w ośrodku niespoistym ($c = 0$), ma postać

$$H_u = a_0'' + a_1''z_r + a_2''z_r^2 + b_1''\ln(D + a_qz_r), \tag{7.48}$$

gdzie

$$a_2'' = D\gamma K_q^\infty, \tag{7.49}$$

$$a_1'' = 2D \left[pK_q^\infty + \frac{D\gamma}{a_q}(K_q^0 - K_q^\infty) \right], \tag{7.50}$$

$$\begin{aligned}
 a_0'' = & - \left\{ DL \left[pK_q^\infty + \frac{D\gamma}{a_q}(K_q^0 - K_q^\infty) \right] + \frac{D\gamma}{2} K_q^\infty L^2 + \frac{D^2}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(p - \frac{D\gamma}{a_q} \right) \ln(D^2 + a_qLD) \right\}, \\
 & \tag{7.51}
 \end{aligned}$$

$$b_1'' = \frac{2D^2}{a_q} (K_q^0 - K_q^\infty) \left(p - \frac{D\gamma}{a_q} \right). \tag{7.52}$$

Do równania (7.48) podstawiane jest rozwiązanie równania (7.47), co daje formułę uzależniającą explicite siłę graniczną od wszystkich parametrów zadania w postaci zamkniętej. Podsumowując, algorytm rozwiązania zadania przedstawia się w sposób następujący:

1. Przyjęcie parametrów zadania.
2. Obliczenie współczynników w równaniu (7.39).
3. Numeryczne wyznaczenie środka obrotu pala z_r , poprzez numeryczne rozwiązanie równania (7.39).
4. Znalezienie wartości (ewentualnie kilku wartości) θ z równania (7.46).
5. Powtarzanie operacji 2, 3, 4 dla różnych wartości kąta tarcia wewnętrznego φ , ewentualnie innych parametrów istotnych z punktu widzenia zadania, aż do określenia wartości (ewentualnie kilku wartości) θ reprezentatywnej dla całego obszaru.
6. Dla wyznaczonej wartości θ rozwiązanie równania (7.47) ze względu na z_r w postaci zamkniętej.
7. Znalezienie wartości granicznej siły H_u w postaci zamkniętej z równania (7.48).
8. Analiza niezawodności metodami FORM i SORM.

W przypadku ośrodka spoiwego formuła na siłę graniczną H_u ma następującą postać ogólną:

$$H_u = a_0'' + a_0'''c + (a_1'' + ca_1''')z_r + (a_2'' + ca_2''')z_r^2 + b_1'' \ln(D + a_q z_r) + b_1''' \ln(D + a_c z_r), \quad (7.53)$$

gdzie c oznacza spójność, zaś dodatkowo w stosunku do równania (7.48) współczynniki mają postać

$$a_2''' = D\gamma K_c^\infty, \quad (7.54)$$

$$a_1''' = 2D \left[pK_c^\infty + \frac{D\gamma}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \right], \quad (7.55)$$

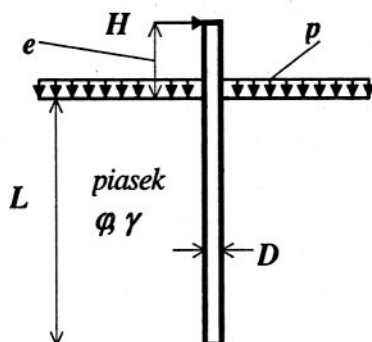
$$a_0''' = - \left\{ DL \left[pK_c^\infty + \frac{D\gamma}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \right] + \frac{D\gamma}{2} K_c^\infty L^2 + \frac{D^2}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \left(p - \frac{D\gamma}{a_c} \right) \ln(D^2 + a_c LD) \right\}. \quad (7.56)$$

$$b_1''' = \frac{2D^2}{a_c} (K_c^0 - K_c^\infty) \left(p - \frac{D\gamma}{a_c} \right). \quad (7.57)$$

7.5. Obliczenia numeryczne

Opisany w poprzednim podrozdziale sposób rozwiązania zadania zastosowano do sprawdzenia, jaki powinien być globalny współczynnik bezpieczeństwa F określony wzorem (7.27), aby uzyskać określony stopień bezpieczeństwa. Sam współczynnik F nie zawiera informacji o losowej zmienności parametrów zadania. Dlatego też warto dokonać kalibracji wartości tego współczynnika w zależności od poziomu wskaźnika niezawodności. Przy okazji zbadano wpływ poszczególnych

zmiennych losowych na wartości wskaźnika β . Schemat zadania przedstawiono na rysunku 7.7.



Rys. 7.7. Schemat obciążenia pała analizowanego w obliczeniach numerycznych

Przyjęte do obliczeń wymiary oraz założenia probabilistyczne zestawiono w tabeli 7.2.

Tabela 7.2. Parametry zadania

Parametr	Rozkład prawdopodobieństwa	Wartość oczekiwana	Współczynnik zmienności %
Kąt tarcia wewnętrznego φ	lognormalny	33,6 °	10%–15%
Obciążenie poziome H_d	normalny	8–25 kN	10%–20%
Obciążenie naziomu p	normalny	8,8 kNm ⁻²	5%
Ramię siły e	normalny	8,64 m	5%
Ciężar objętościowy γ	stały (nielosowy)	20,15 kNm ⁻³	
Średnica pała D	stała (nielosowa)	0,36 m	
Zagłębienie pała L	stałe (nielosowe)	2,9 m	

Zagłębienie pała w gruncie, średnicę, wysokość przyłożenia siły poziomej, a także warunki gruntowe i obciążenia przyjęto podobne do tych, jakie analizowano w pracy O. Puły i W. Puły (1995). Ponadto wstępne analizy (współczynniki wrażliwości) pokazały, że losowe zmiany kąta tarcia wewnętrznego mają decydujący wpływ na bez-

pieczeństwo sztywnego pała obciążonego siłą poziomą. W efekcie ograniczono się w dalszej analizie do czterech stochastycznie niezależnych zmiennych losowych, a mianowicie: kąta tarcia wewnętrznego φ , obciążenia poziomego H_a , obciążenia naziomu p oraz ramienia siły poziomej e .

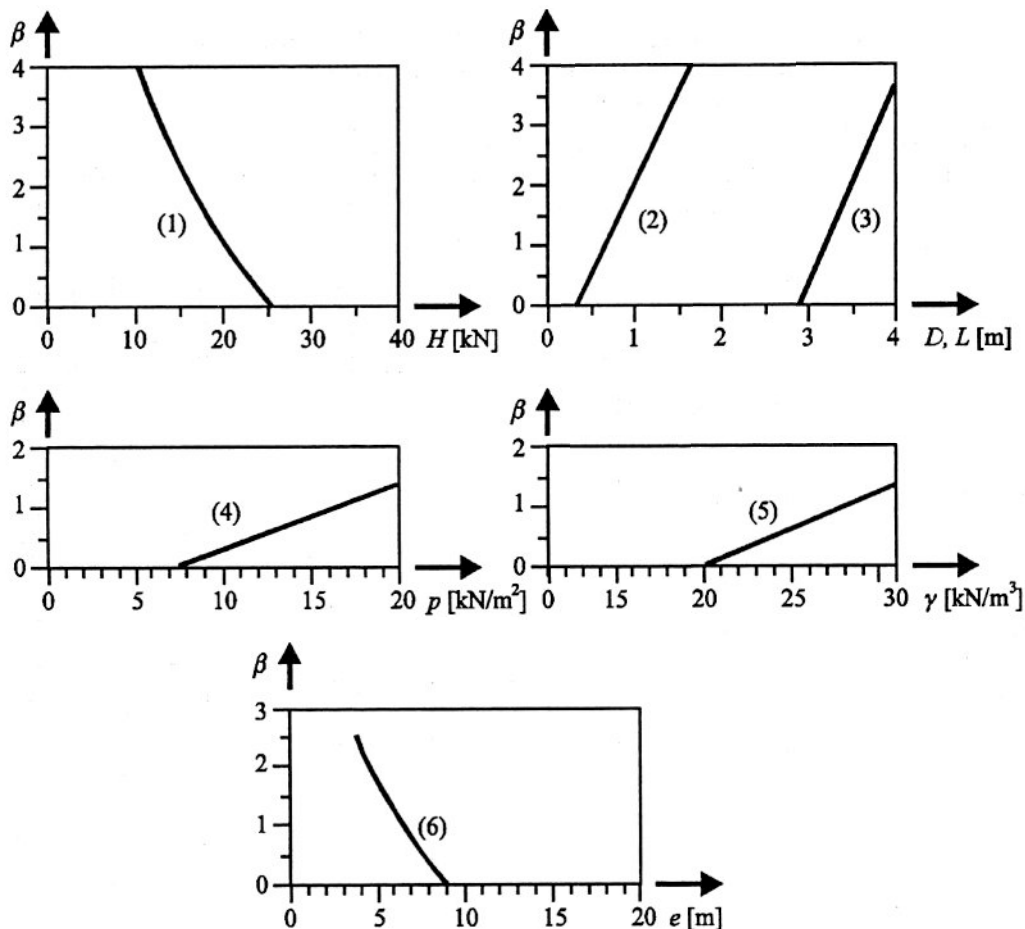
Następnie, przyjmując za najistotniejszy efekt zmienności losowej kąta tarcia wewnętrznego φ , sprawdzono jak zmienia się wskaźnik niezawodności wraz ze zmianami wartości oczekiwanych pozostałych zmiennych losowych, a także stałych parametrów. Wyniki tych obliczeń pokazano w formie graficznej na rysunku 7.8. Warto odnotować, że w czterech przypadkach, tj. średnicy, zagłębienia, obciążenia naziomu i ciężaru gruntu zależności wskaźnika niezawodności od wartości oczekiwanych lub nominalnych tych parametrów są liniowe. W przypadku wartości siły poziomej i jej ramienia należy zauważyć, że w zakresach istotnych z praktycznego punktu widzenia zależność jest także w przybliżeniu liniowa. W obu tych przypadkach spadek wartości wskaźnika β wraz ze wzrostem siły i jej ramienia jest bardzo szybki. Oznacza to, że w przypadku wymienionych wyżej parametrów stosunkowo łatwo jest przewidzieć efekty ich zmian. Uwaga ta nie dotyczy zmian kąta tarcia wewnętrznego.

Następnym etapem były obliczenia mające na celu stwierdzenie jakie jest prawdopodobieństwo awarii (wskaźnik niezawodności) przy ustalonej wartości współczynnika bezpieczeństwa F określonego według (7.27). Obliczenia przeprowadzono według następującego schematu:

1. Przyjąć wartość współczynnika bezpieczeństwa F .
2. Dla ustalonej wartości F , przyjmując wszystkie zmienne losowe jako stałe i równe swoim wartościom oczekiwany, obliczyć ze wzoru (7.27) dopuszczalną siłę poziomą H_a odpowiadającą współczynnikowi bezpieczeństwa F , przy czym H_a znajduje się z równań równowagi (7.4)–(7.5) z uwzględnieniem zależności (7.11)–(7.26).
3. Przyjmując H_a jako zmienną losową o wartości oczekiwanej obliczonej w punkcie 2 i traktując pozostałe parametry jako zmienne losowe zgodnie z tabelą 7.2, obliczyć prawdopodobieństwo awarii p_F oraz odpowiadający mu wskaźnik niezawodności β .
4. Powtórzyć obliczenia dla innej wartości F .

Po przeprowadzeniu wielu serii obliczeń uzyskane rezultaty przedstawiono w tabeli 7.3 oraz w formie graficznej na rysunku 7.9. Potwierdzają one wcześniejsze przypuszczenia (podrozdział 7.3), że losowe zmiany kąta tarcia wewnętrznego mają decydujący wpływ na bezpieczeństwo sztywnego pała obciążonego siłą poziomą. Oczywiście widoczny jest także wpływ wahań wartości obciążenia poziomego, ale jest on znacznie mniejszy niż wpływ kąta tarcia.

Powszechnie się uważa, że dla prawidłowo zaprojektowanej konstrukcji wskaźnik niezawodności β nie powinien być mniejszy niż 3 (por. np. ISO 2394 (1998)). Jak łatwo zauważyć (rys. 7.9), w przypadku gdy współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego $\text{cov}\{\varphi\} = 15\%$, współczynnik bezpieczeństwa F musi być nie mniejszy niż 3, aby zagwarantować wskaźnik β na poziomie 3. Dla wartości $\text{cov}\{\varphi\} = 10\%$ wartość F rzędu 2,1–2,4 może być wystarczająca.



Rys. 7.8. Wpływ wartości średnich poszczególnych zmiennych losowych oraz parametrów nielosowych na wskaźnik niezawodności β .

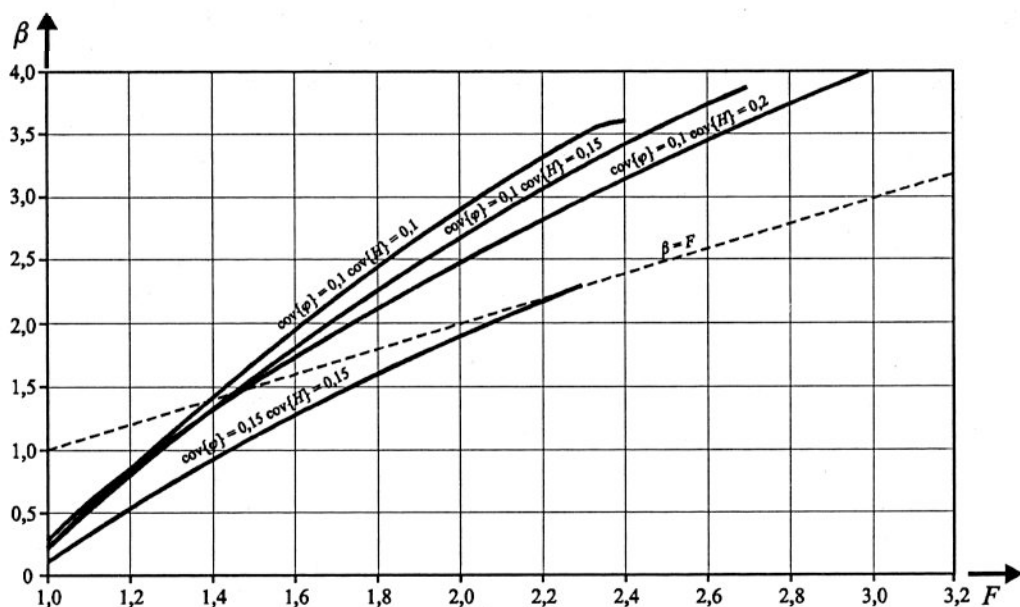
Wpływ: siły poziomej H – krzywa (1), średnicy pała D – krzywa (2), wpływ zagłębienia pała L – krzywa (3), obciążenia naziomu p – krzywa (4), ciężaru objętościowego γ – krzywa (5), ramienia siły e – krzywa (6)

Na ogół dla gruntów naturalnych obserwuje się większe współczynniki zmienności kąta tarcia wewnętrznego aniżeli 10%. Widać więc, że do zapewnienia odpowiedniego, z punktu widzenia teorii niezawodności konstrukcji, poziomu bezpieczeństwa, należy przyjmować wartości współczynnika bezpieczeństwa F około 3 lub więcej (z ewentualną korektą ze względu na współczynnik zmienności obciążenia poziomego H_w), w przypadku stosowania metody Brinch Hansena.

Tabela 7.3. Wskaźniki niezawodności i prawdopodobieństwa awarii w zależności od zadanych wartości współczynnika bezpieczeństwa F i współczynników zmienności kąta tarcia wewnętrznego φ oraz siły obciążającej H

Lp.	Współczynnik bezpieczeństwa F	Siła pozioma odpowiadająca przyjętemu F H	Współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego ν_φ	Współczynnik zmienności siły poziomej ν_H	Wskaźnik niezawodności β	Prawdopodobieństwo awarii P_F
1	2	3	4	5	6	7
1	1	24,38	0,1	0,1	0,21	0,4169
2				0,15	0,21	0,4152
3				0,2	0,22	0,4149
4	1,1	22,16	0,15	0,15	0,12	0,4529
5			0,1	0,1	0,54	0,2954
6			1,2	20,32	0,1	0,1
7	0,15	0,81			0,2105	
8	0,2	0,76			0,2240	
9	1,3	18,75	0,15	0,15	0,54	0,2933
10			0,1	0,1	1,14	0,1271
11			1,4	17,41	0,1	0,1
12	0,15	1,34			0,0910	
13	0,2	1,24			0,1067	
14	1,5	16,25	0,15	0,15	0,93	0,1766
15			0,1	0,1	1,69	0,0458
16			1,6	15,24	0,1	0,1
17	0,15	1,81			0,0351	
18	0,2	1,68			0,0460	
19	1,7	14,34	0,15	0,15	1,28	0,1008
20			0,1	0,1	2,19	0,0143
21			1,8	13,54	0,1	0,1
22	0,15	2,26			0,0201	
23	0,2	2,10			0,0183	
24	1,9	12,83	0,15	0,15	1,603	0,0545
25			0,1	0,1	2,66	0,0040
26			2,0	12,19	0,1	0,1
27	0,15	2,67			0,0038	
28	0,2	2,47			0,0068	
29	2,1	11,61	0,15	0,15	1,90	0,0285
30			0,1	0,1	3,09	0,0010
31			0,15	2,86	0,0021	
32	2,2	11,08	0,1	0,1	2,64	0,0041
33			0,15	2,05	0,0203	
34			0,1	0,1	3,30	0,0005
35	2,3	10,60	0,1	0,15	3,05	0,0011
36			0,2	2,82	0,0024	
37			0,15	0,15	2,19	0,0143
38	0,1	0,1	3,50	0,0002		

1	2	3	4	5	6	7
39				0,15	3,23	0,0006
40				0,2	2,98	0,0014
41			0,15	0,15	2,32	0,0101
42				0,1	3,61	0,0002
43	2,4	10,16	0,1	0,15	3,41	0,0003
44				0,2	3,15	0,0008
45	2,5	9,75	0,1	0,15	3,58	0,0002
46				0,2	3,31	0,0005
47	2,6	9,38	0,1	0,15	3,75	0,0001
48				0,2	3,46	0,0003
49	2,7	9,03	0,1	0,15	3,92	0,00005
50				0,2	3,61	0,0002
51	2,8	8,71	0,1	0,2	3,76	0,00009
52	2,9	8,41	0,1	0,2	3,89	0,00005
53	3,0	8,13	0,1	0,2	4,04	0,00003



Rys. 7.9. Zależności wskaźnika niezawodności β od współczynnika bezpieczeństwa F

7.6. Wnioski

Opisane w tym rozdziale obliczenia pozwalają na sformułowanie kilku przedstawionych poniżej wniosków:

- Zmienność losowa kąta tarcia wewnętrznego ma bardzo duży wpływ na oszacowanie siły granicznej w zagadnieniach nośności bocznej pali sztywnych. Wahania kąta tarcia wewnętrznego powodują zmiany położenia potencjalnego środka obrotu. Z kolei wartość siły granicznej cechuje się bardzo dużą wrażliwością na położenie środka obrotu. Wynika stąd konieczność precyzyjnego określenia kąta tarcia wewnętrznego podłoża, a także znacznej precyzji w prowadzeniu obliczeń, zwłaszcza w określeniu środka obrotu. Odnosi się to także do obliczeń wykonywanych w praktyce inżynierskiej.

- W gruntach niespoistych wpływ zmienności losowej kąta tarcia wewnętrznego na wartość wskaźnika niezawodności (prawdopodobieństwa awarii) przy oszacowaniu nośności bocznej pali sztywnych jest zdecydowanie większy aniżeli wpływ pozostałych parametrów.

- Przeprowadzone obliczenia pokazały, że obliczenia miar niezawodności mogą być skutecznie wspomagane przez systemy komputerowe realizujące obliczenia w postaci symbolicznej. Szczególnie wówczas, gdy związki pomiędzy parametrami podłoża (bazowymi zmiennymi losowymi) a naprężeniami lub siłami czy momentami (funkcja stanu granicznego) mają bardzo skomplikowaną, nieliniową postać, co może utrudnić lub wręcz uniemożliwić wykonanie obliczeń w standardowy sposób. Rozważane zagadnienie, jakkolwiek mające bardzo proste sformułowanie, nastroczało istotne trudności z punktu widzenia teorii niezawodności. Opracowana tu procedura łącząca obliczenia symboliczne z niezawodnościowymi pozwoliła na skuteczne wyznaczenie poszukiwanych miar.

- Z oszacowania wskaźników niezawodności dla różnych wartości globalnego współczynnika bezpieczeństwa F w metodzie Brinch Hansena wynika, że przy prowadzeniu obliczeń według naprężeń dopuszczalnych należy przyjmować znaczne wartości współczynnika F , najlepiej powyżej 3. Brinch Hansen (1961b) nie sugeruje żadnych wartości współczynnika F , gdyż jak wspomniano wcześniej, proponował zastosowanie cząstkowych współczynników bezpieczeństwa.

Korzystając z podanych tu algorytmów można także przeprowadzić obliczenia według metody stanów granicznych na określony poziom bezpieczeństwa. Przyjmując mianowicie zadaną wartość wskaźnika niezawodności β (np. $\beta = 3$), należy doprowadzić do sytuacji, aby analizowany pal miał taką właśnie niezawodność. Następnie jako wartości obliczeniowe poszczególnych parametrów przyjąć współrzędne punktu obliczeniowego, odpowiadającemu zadanemu wcześniej wskaźnikowi β .

Nierozwiązane pozostało analogiczne zadanie dla ośrodka spoistego. Autor wiąże nadzieje na jego rozwiązanie z zastosowaniem metody powierzchni odpowiedzi.

Innym pokrewnym problemem jest probabilistyczna analiza pali niesztywnych. Jednak sformułowanie tego zagadnienia jest całkowicie odmienne.

8. Unikanie trudności związanych z obliczaniem miar niezawodności na przykładzie analizy losowych osiadań pali fundamentowych

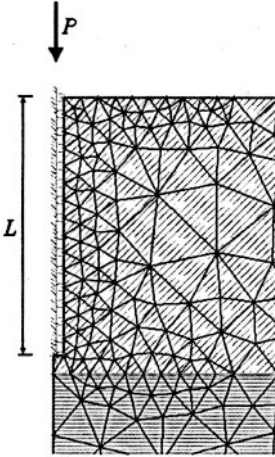
Rozdział ten, jakkolwiek związany z niezawodnością fundamentów palowych, to jednak koncentruje się na pewnych specyficznych zagadnieniach dotyczących metod obliczeniowych samej teorii niezawodności konstrukcji. W rozdziale 5 sygnalizowano już, że w pewnych przypadkach w numerycznym szacowaniu wskaźników niezawodności metodą FORM może dojść do znalezienia tzw. „fałszywych punktów obliczeniowych”. Jednak w pewnych sytuacjach kształt powierzchni aproksymującej powierzchnię stanu granicznego może wręcz uniemożliwić znalezienie punktu obliczeniowego. Przykłady takich sytuacji będą zademonstrowane poniżej. Podobnie jak w przypadku osiadań fundamentów bezpośrednich, tak i tutaj w celu efektywnego ominięcia trudności obliczeniowych proponuje się zbudowanie powierzchni odpowiedzi w oparciu o aproksymator stosowany w technice sieci neuronowych.

Ponadto zaproponowane procedury mogą służyć probabilistycznej ocenie osiadań fundamentów palowych w sytuacjach, gdy akceptuje się liniowo sprężysty model podłoża. Ze względu na specyfikę zaproponowanego rozwiązania, tj. z użyciem aproksymatorów wywodzących się z metod sieci neuronowych, przedyskutowano problemy wynikające z zastosowania tych aproksymatorów, nawiązując przy tym do obliczeń przeprowadzonych w podrozdziale 5.4.

8.1. Osiadanie pojedynczego pala w sprężystym ośrodku dwuwarstwowym. Sformułowanie zadania

Rozpatruje się pojedynczy pal zagłębiony w dwuwarstwowym ośrodku sprężystym, przy czym granica pomiędzy warstwami znajduje się poniżej podstawy pala. Warstwa dolna jest mniej odkształcalna w stosunku do górnej (ma większy moduł E). Zadanie jest traktowane jako osiowo symetryczne zagadnienie trójwymiarowe. Aby

uprościć obliczenia probabilistyczne, rozpatruje się jedynie dwie warstwy. W pewnym sensie zbliżone podejście do obliczeń osiadań pali prezentuje obecnie obowiązująca norma palowa (PN-83/02482), w której podłoże niejednorodne zastępuje się przez podłoże z „warstwą mniej ściśliwą w podstawie pala” lub „warstwą nieodkształcalną poniżej podstawy pala”.



Rys. 8.1. Pojedynczy pal obciążony siłą pionową w dwuwarstwowym ośrodku sprężystym wraz z siatką MES przyjętą do obliczeń

Osiadania obliczano metodą elementów skończonych za pomocą programu *Phases* (Hoek et al. 1993). Podobnie jak w przypadku fundamentów bezpośrednich funkcja stanu granicznego miała postać (5.1), co oznacza, że za stan awarii przyjmowano przekroczenie przez głowicę pala określonego arbitralnie poziomu osiadań u_{\max} . Schemat takiego zadania pokazano na rysunku 8.1, gdzie zaznaczono także sposób podziału na elementy (siatka MES). W kolejnych podrozdziałach poszukiwano prawdopodobieństwa przekroczenia osiadania dopuszczalnego przy założeniu, że losowo zmieniają się moduły Younga poszczególnych warstw. W obliczeniach probabilistycznych stosowano metodę powierzchni odpowiedzi (podrozdział 2.7.4).

8.2. Trudności pojawiające się przy stosowaniu powierzchni odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia

Rozważmy zadanie z dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi, którymi są moduły E_1 oraz E_2 poszczególnych warstw. Obie zmienne losowe mają rozkłady lognormalne o parametrach $E\{E_1\} = 60$ MPa, $\sigma_E = 12$ MPa oraz $E\{E_2\} = 80$ MPa, $\sigma_E = 16$ MPa, odpowiednio dla górnej i dolnej warstwy. Ponadto przyjęto (por. rys. 8.1): pograżenie pala w gruncie $L = 7,15$ m, jego średnicę $D = 0,6$ m, granicę pomiędzy warstwami na poziomie $7,65$ m poniżej powierzchni terenu, tj. $0,5$ m pod podstawą pala, współczynnik Poissona

gruntu – jednakowy dla obydwu warstw i nieosowy – $\nu = 0,25$, obciążenie pała siłą osiową o wartości $P = 816$ kN. Jako wartość dopuszczalnego osiadania przyjęto $u_{\max} = 0,03$ m.

Tabela 8.1. Wartości współczynników funkcji osiadania pojedynczego pała w postaci wielomianu drugiego stopnia

B_1	$9,89746 \times 10^{-2}$
B_2	$-2,59556 \times 10^{-3}$
B_3	$-4,20720 \times 10^{-4}$
B_4	$2,51620 \times 10^{-5}$
B_5	$2,54550 \times 10^{-6}$
B_6	$1,96990 \times 10^{-6}$
Odchylenie standardowe σ_{err}	$3,64787 \times 10^{-4}$

Założmy, że powierzchnia odpowiedzi ma postać wielomianu drugiego stopnia jak we wzorze (5.10), przy czym $X_1 = E_1$ oraz $X_2 = E_2$. Współczynniki wielomianu określono metodą regresji, według schematu podanego w punkcie 2.7.4, a otrzymane wartości zestawiono w tabeli 8.1. Mając wartości współczynników B_i można, stosując znane kryteria dotyczące krzywych drugiego stopnia na płaszczyźnie (por. np. Leja 1966), stwierdzić, że jeśli się przyjmie w równaniu (5.10) $err = 0$, równanie

$$U(X_1, X_2) - u_{\max} = 0 \quad (8.1)$$

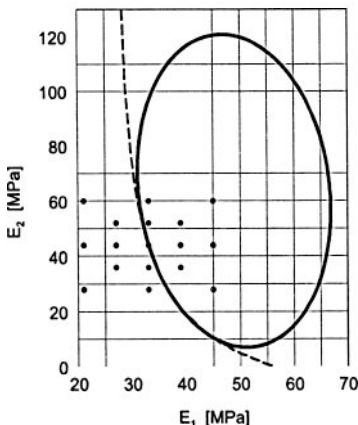
opisuje elipsę (dla wartości współczynników podanych w tablicy 8.1). Elipsę tę pokazano na rysunku 8.2. Kropki z lewej strony oznaczają punkty (E_1, E_2) , które służyły do dopasowania krzywej (5.10) metodą regresji. Tak więc za racjonalny z fizycznego punktu widzenia obszar, w którym krzywa ta opisuje osiadania, można uznać fragment krzywej przechodzący przez siatkę zaznaczonych punktów. Pozostałe fragmenty krzywej wynikają z równania (5.10), ale nie są „dobrą” aproksymacją rzeczywistej krzywej osiadania. Te pozostałe fragmenty mogą stanowić istotne utrudnienie w numerycznym rozwiązaniu zadania. Mając na względzie przyjęte założenie o lognormalnych rozkładach modułów E_1 i E_2 , jeśli się stosuje metodę FORM, należy zastosować transformację Rosenblatta (podrozdział 2.4). Po transformacji do „układu standardowych normalnych niezależnych zmiennych losowych” elipsa z rysunku 8.2 przyjmuje kształt pokazany na rysunku 8.3 (linia ciągła). Przeprowadzone metodą FORM obliczenia dały wskaźnik niezawodności $\beta = 0,563$ (prawdopodobieństwo awarii $p_F = 0,286886$), przy czym współrzędne punktu obliczeniowego w układzie współrzędnych fizycznych wyniosły $E^*_1 = 65,66$ MPa oraz $E^*_2 = 79,85$ MPa, zaś po transformacji Resenblatta $y^*_1 = 0,554$ oraz $y^*_2 = 0,090$. Punkt ten oznaczono na rysunku 8.3 jako y^*_F . Jakkolwiek jest to punkt realizujący minimum odległości od początku układu współrzędnych, to jednak położony jest on na fragmencie krzywej nie opisującej już fizycznych osiadań. Łatwo się o tym przekonać, wykonując obliczenia

osiadania dla wyżej podanych wartości modułów E_1 i E_2 . Dla tych wartości osiadanie wynosi $u = 0,016$ m, a więc jest daleki od wartości $u_{\max} = 0,03$ m. Oznacza to, że nie należy on do powierzchni stanu granicznego (8.1), gdzie $U(X_1, X_2)$ oznacza funkcję „fizycznych osiadań” (otrzymaną w postaci numerycznej za pomocą metody elementów skończonych). Punkt będący rozwiązaniem zadania powinien znajdować się na części krzywej położonej po lewej stronie rysunku. Jest to sytuacja analogiczna do opisanej w punkcie 5.4.4.1 dla fundamentu posadwionego bezpośrednio. Wówczas pojawieniu się „fałszywego” punktu obliczeniowego można było zapobiec przez zastosowanie ograniczeń na jedną ze zmiennych losowych (wzór (5.19)). W opisywanym w tym rozdziale przypadku najpierw zastosowano funkcję postaci

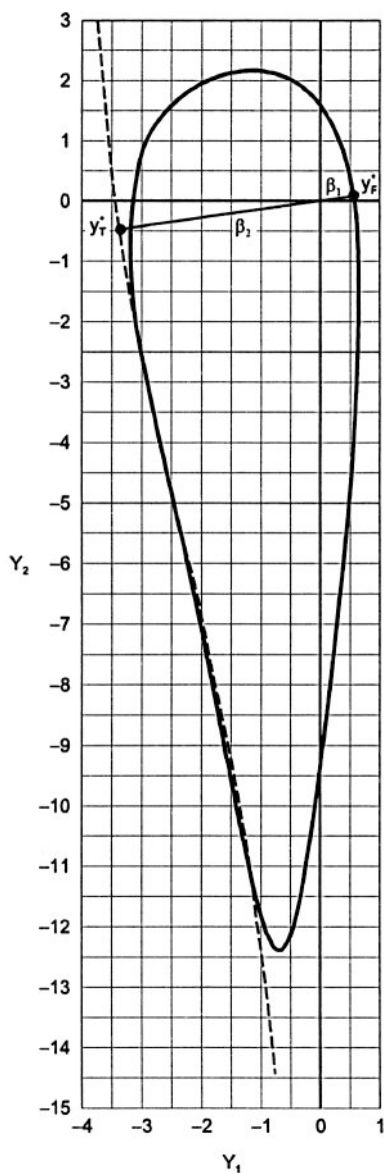
$$U = \begin{cases} B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + err & \text{dla } X_1 < E_g \\ B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + (X_1 - E_g)^{10} + err & \text{dla } X_1 \geq E_g \end{cases} \quad (8.2)$$

gdzie X_1, X_2 oznaczają moduły E_1 i E_2 , odpowiednio, zaś E_g jest wartością ograniczenia stawianego na moduł E_2 . Próba zastosowania takiej procedury do powyższego zadania nie powiodła się, co ilustruje tabela 8.2. W kolejnych próbach punkt obliczeniowy umiejscawiał się w pobliżu stawianego ograniczenia. W sytuacji bliskiego sąsiedztwa punktu obliczeniowego z zadaniem ograniczeniem wzór (8.2) może okazać się nieskuteczny, gdyż składnik zawierający potęgę może okazać się bardzo mały (nie spowoduje przerzucenia zmiennej w kierunku mniejszych wartości). W związku z tym obliczenia przeprowadzono także dla nieco innego typu ograniczenia, mianowicie

$$U = \begin{cases} B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + err & \text{dla } X_1 < E_g \\ B_1 + B_2 X_1 + B_3 X_2 + B_4 X_1^2 + B_5 X_2^2 + B_6 X_1 X_2 + 1000(X_1 - E_g) + err & \text{dla } X_1 \geq E_g \end{cases} \quad (8.3)$$



Rys. 8.2. Krzywe stanu granicznego (9.1). Elipsa (linia ciągła) wynika z aproksymacji funkcji osiadania wielomianem drugiego stopnia. Krzywa narysowana linią przerywaną wynika z przybliżenia aproksymatorami sieci neuronowych



Rys. 8.3. Krzywe stanu granicznego w układzie standardowych niezależnych normalnych zmiennych losowych. Linia ciągła – aproksymacja wielomianem drugiego stopnia.
Linia przerywana – aproksymator sieci neuronowych

Podobnie jak w przypadku poprzedniego ograniczenia pierwsza współrzędna punktu obliczeniowego plasowała się w okolicy kolejnych „barier ograniczających” (tab. 8.2), co uniemożliwiło skuteczne rozwiązanie zadania.

Zademonstrowany przykład pokazuje, że stosowanie powierzchni odpowiedzi w postaci wielomianu drugiego stopnia może prowadzić do sytuacji, w których znalezienie punktu obliczeniowego może okazać się bardzo utrudnione lub wręcz niemożliwe, pomimo zastosowania ograniczeń w zakresie zmienności. Zjawisko takie występuje wówczas, gdy krzywizna powierzchni stanu granicznego w przestrzeni standardowych, normalnych zmiennych losowych jest duża (rys. 8.3). Ta duża krzywizna pokazuje też, że wyniki uzyskane metodą FORM mogą być obarczone istotnym błędem i to „w stronę niebezpieczną”, gdyż obszar awarii jest wklęsły w dół.

Tabela 8.2. Wyniki obliczeń z zastosowaniem ograniczeń.
W kolumnach A podano wartości uzyskane przy zastosowaniu wzoru (8.2),
zaś w kolumnach B – z zastosowaniem wzoru (8.3)

Ograniczenie E_g [MPa]	Punkt obliczeniowy		Wskaźnik niezawodności β FORM	
	Rodzaj ograniczenia		Rodzaj ograniczenia	
	A	B	A	B
$E_1 \leq 45$	$E_1^* = 45,3$ MPa $E_2^* = 120,0$ MPa $y_1^* = -1,32$ $y_2^* = 2,15$	$E_1^* = 42,9$ MPa $E_2^* = 121,1$ MPa $y_1^* = -1,595$ $y_2^* = 2,191$	$\beta = 2,45$	$\beta = 2,54$
$E_1 \leq 40$	$E_1^* = 40,3$ MPa $E_2^* = 116,2$ MPa $y_1^* = -1,91$ $y_2^* = 1,99$	$E_1^* = 36,4$ MPa $E_2^* = 110,3$ MPa $y_1^* = -2,42$ $y_2^* = 1,72$	$\beta = 2,76$	$\beta = 2,90$
$E_1 \leq 36$	$E_1^* = 36,3$ MPa $E_2^* = 108,5$ MPa $y_1^* = -2,44$ $y_2^* = 1,64$	$E_1^* = 34,5$ MPa $E_2^* = 103,2$ MPa $y_1^* = -2,70$ $y_2^* = 1,38$	$\beta = 2,94$	$\beta = 2,98$
$E_1 \leq 33$	$E_1^* = 33,3$ MPa $E_2^* = 97,2$ MPa $y_1^* = -2,87$ $y_2^* = 1,08$	$E_1^* = 32,7$ MPa $E_2^* = 94,1$ MPa $y_1^* = -2,97$ $y_2^* = 0,92$	$\beta = 3,07$	$\beta = 3,09$
$E_1 \leq 31$	$E_1^* = 31,4$ MPa $E_2^* = 82,2$ MPa $y_1^* = -3,18$ $y_2^* = 0,24$	$E_1^* = 31,0$ MPa $E_2^* = 78,5$ MPa $y_1^* = -3,24$ $y_2^* = 3,3 \times 10^{-6}$	$\beta = 3,19$	$\beta = 3,24$

8.3. Rozwiązanie zadania poprzez zastosowanie aproksymatora sieci neuronowej

W związku z trudnościami opisanymi w poprzednim podrozdziale zadanie rozwiązano przyjmując powierzchnię odpowiedzi w postaci aproksymatora używanego w sieciach

neuronowych. Podobnie jak w przypadku zadań z zakresu osiadań fundamentów bezpośrednich opisanych w podrozdziale 5.4, wystarczająca okazała się sieć zawierająca dwa neurony w warstwie ukrytej (rys. 5.17). W związku z tym funkcja osiadania określona jest wzorem (5.13), przy czym X_1 , X_2 oznaczają odpowiednio moduły E_1 i E_2 .

Tabela 8.3. Wartości współczynników B_i funkcji osiadania U , pojedynczego pala, o postaci (5.13)

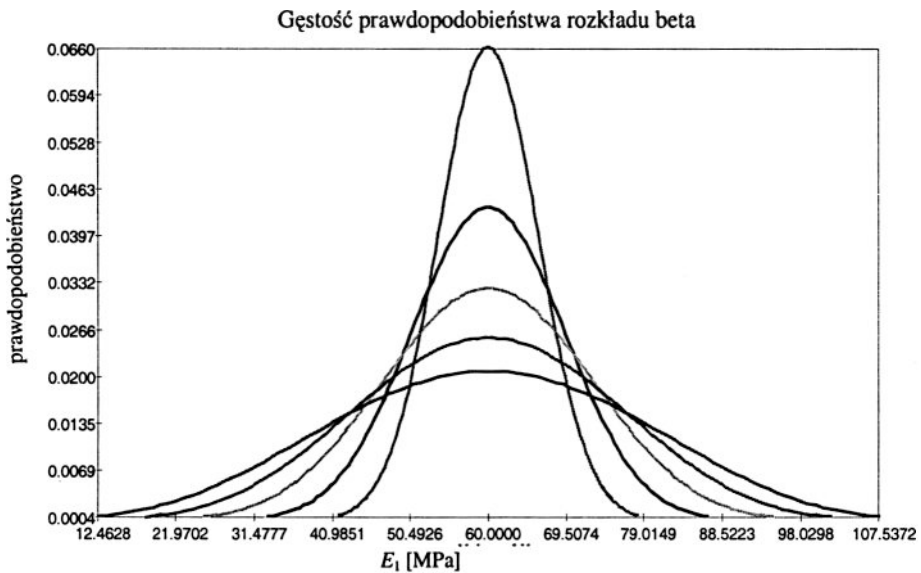
B_1	-6.16190×10^{-3}
B_2	-1.85644×10^{-2}
B_3	-2.42336
B_4	1.50143
B_5	-3.27460×10^{-2}
B_6	-4.70700×10^{-4}
B_7	-2.19660
B_8	4.14150
B_9	5.65860
Odchylenie standardowe σ_{err}	8.94×10^{-5}

Współczynniki B_i określono metodą regresji, według schematu podanego w punkcie 2.7.4, a otrzymane wartości zestawiono w tabeli 8.3. Linie stanu granicznego według zależności (8.1) zaznaczono na rysunkach 8.2 i 8.3 w postaci linii przerywanej. Jak widać, kształt tej krzywej na rysunku 8.3 w interesującym nas w tym zadaniu obszarze pozwala na łatwe znalezienie lokalnego minimum, a co za tym idzie, rozwiązanie zadania metodą FORM. Znaleziony punkt obliczeniowy, oznaczony na rysunku 8.3 jako y_T^* , określony jest przez współrzędne $y_1^* = -3,36$ oraz $y_2^* = -0,4989$, co odpowiada następującym wartościom modułów: $E_1^* = 30,27$ MPa i $E_2^* = 71,07$ MPa. Dla tych modułów obliczone metodą elementów skończonych osiadanie wyniosło $u = 0,0307$ m. Można więc uznać, że w przybliżeniu punkt ten położony jest na powierzchni stanu granicznego (8.1) i stanowi akceptowalne rozwiązanie zadania. Pozostałe rezultaty zamieszczono w tabeli 8.4. Niewielka wartość współczynnika α_2 w stosunku do α_1 pozwala wnioskować, że losowe zmiany modułu drugiej warstwy w sytuacji, gdy znajduje się ona 0,5 m poniżej podstawy pala mają bardzo niewielki wpływ na prawdopodobieństwo przekroczenia założonego poziomu osiadań. Oznacza to, że w obliczeniach praktycznych te wahania mogą być zignorowane (przy założeniu, że kolejna warstwa zalega w odległości nie mniejszej niż 0,5 m pod podstawą pala). Podobnie jak w przykładach analizowanych w rozdziale 5 zanalizowano wpływ typu rozkładów prawdopodobieństwa oraz współczynników zmienności na wartości wskaźnika niezawodności. W związku z niewielkim efektem zmienności losowej modułu drugiej warstwy E_2 obliczenia wykonano zmieniając charakterystyki probabilistyczne jedynie modułu E_1 . Wykonano je zakładając, że moduł E_1 ma kolejno

rozkład lognormalny, normalny oraz beta. Rozkład beta przyjęto, dla każdego z zastosowanych współczynników zmienności, jako symetryczny, skoncentrowany na przedziale $[0, 120]$. (Odpowiednie parametry podane są w tabeli 3.3 i podrozdziale 3.1). Wykresy gęstości rozkładu beta dla rozpatrywanych współczynników zmienności pokazano na rysunku 8.4. Założenia probabilistyczne dotyczące modułu E_2 są identyczne z podanymi w tabeli 8.4. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 8.5.

Tabela 8.4. Wyniki obliczeń z zastosowaniem aproksymatora sieci neuronowej jako powierzchni odpowiedzi. W ostatnim wierszu podano rezultaty uzyskane metodą SORM z korektą w postaci symulacji ważonej (por. podrozdział 2.6.2) z liczbą realizacji $N_H = 1000$

Zmienna losowa	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Rozkład prawdopodobieństwa	Współrzędne punktu obliczeniowego (y_1^*, y_2^*, y_3^*)	Współrzędne fizyczne punktu obliczeniowego	Współczynniki wrażliwości α_i , $i = 1, 2, 3$
E_1	60 MPa	12 MPa	lognormalny	$y_1^* = -3,36$	$E_1^* = 30,27$ MPa	$\alpha_1 = 0,989$
E_2	80 MPa	16 MPa	lognormalny	$y_2^* = -0,4989$	$E_2^* = 71,07$ MPa	$\alpha_2 = 0,147$
err	0,0	$8,94 \times 10^{-5}$	normalny	$y_3^* = -0,0169$	$err^* = 5,11 \times 10^{-6}$	$\alpha_3 = -0,017$
FORM:	wskaźnik niezawodności	$\beta = 3,39$;	prawdopodobieństwo awarii		$p_F = 0,00034$	
SORM:	wskaźnik niezawodności	$\beta = 3,38$;	prawdopodobieństwo awarii		$p_F = 0,00036$	
SORM + Symulacja:	wskaźnik niezawodności	$\beta = 3,38$;	prawdopodobieństwo awarii		$p_F = 0,00036$	



Rys. 8.4. Wykresy gęstości beta modułu E_1 przy założonych do analiz numerycznych wartościach współczynnika zmienności (większym wartościom współczynnika zmienności odpowiadają bardziej spłaszczone wykresy gęstości)

Tabela 8.5. Wyniki obliczeń niezawodnościowych dla różnych współczynników zmienności oraz trzech różnych rozkładów prawdopodobieństwa

Współczynnik zmienności $cov\{E_i\}$	Rozkład prawdopodobieństwa	Współrzędne punktu obliczeniowego	Współczynniki wrażliwości	Wskaźnik niezawodności SORM +symulacja
10%	lognormalny	$E_1^* = 32,45$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,927$	$\beta = 6,57$
		$E_2^* = 48,12$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,374$	
	normalny	$E_1^* = 30,53$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,988$	$\beta = 4,96$
		$E_2^* = 67,27$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,156$	
	beta	$E_1^* = 30,81$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,980$	$\beta = 5,25$
		$E_2^* = 63,66$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,200$	
15%	lognormalny	$E_1^* = 30,70$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,977$	$\beta = 4,50$
		$E_2^* = 65,00$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,201$	
	normalny	$E_1^* = 30,11$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,996$	$\beta = 3,33$
		$E_2^* = 73,70$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,095$	
	beta	$E_1^* = 30,20$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,993$	$\beta = 3,50$
		$E_2^* = 72,92$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,118$	
20%	lognormalny	$E_1^* = 30,27$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,989$	$\beta = 3,38$
		$E_2^* = 71,07$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,147$	
	normalny	$E_1^* = 29,99$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,998$	$\beta = 2,50$
		$E_2^* = 75,81$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,069$	
	beta	$E_1^* = 30,03$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,996$	$\beta = 2,60$
		$E_2^* = 75,13$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,084$	
25%	lognormalny	$E_1^* = 30,11$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,993$	$\beta = 2,69$
		$E_2^* = 73,80$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,114$	
	normalny	$E_1^* = 29,94$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,999$	$\beta = 2,00$
		$E_2^* = 76,77$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,054$	
	beta	$E_1^* = 29,96$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,998$	$\beta = 2,05$
		$E_2^* = 76,41$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,065$	
30%	lognormalny	$E_1^* = 30,02$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,996$	$\beta = 2,21$
		$E_2^* = 75,26$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,094$	
	normalny	$E_1^* = 29,91$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,999$	$\beta = 1,67$
		$E_2^* = 77,29$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,045$	
	beta	$E_1^* = 29,92$ MPa	$\alpha_{E_1} = 0,999$	$\beta = 1,67$
		$E_2^* = 77,10$ MPa	$\alpha_{E_2} = 0,052$	

Przedstawione rezultaty wskazują na decydujący wpływ współczynnika zmienności na wartość wskaźnika niezawodności. Jednak wpływ rodzaju rozkładu prawdopodobieństwa jest tu także istotny, o wiele bardziej niż w przykładach analizowanych w rozdziale 5. Warto zauważyć, że niezależnie od zastosowanego rozkładu oraz wartości współczynnika zmienności współrzędne punktu obliczeniowego E_1^* zawierają się w bardzo wąskim przedziale od 29,91 MPa do 32,45 MPa.

Przytoczony tu przykład stanowi kolejny argument za przydatnością stosowania aproksymatora sieci neuronowych do aproksymacji funkcji stanu granicznego w metodzie powierzchni odpowiedzi. Umożliwiło ono bowiem znalezienie „prawdziwego” punktu obliczeniowego w sytuacji, gdy zawiodło zastosowanie ograniczeń zasięgu zmiennych losowych przy aproksymacji wielomianem drugiego stopnia. Warto też zauważyć, że rozwiązanie uzyskano stosując bardzo prostą sieć neuronową (dwa neurony w warstwie ukrytej), co znacznie zmniejsza liczbę niezbędnych obliczeń osiadań metodą elementów skończonych.

9. Uwagi końcowe

W niniejszym opracowaniu przedstawiono wybrane zagadnienia dotyczące zastosowań teorii niezawodności konstrukcji w fundamentowaniu. Autor ma świadomość, że przeprowadzane analizy oparte były na stosunkowo prostych modelach, a często także przy dodatkowych założeniach upraszczających. Trzeba bowiem zdać sobie sprawę, że zastosowanie metod teorii niezawodności, a co za tym idzie, aparatu teorii prawdopodobieństwa, zmusza do znalezienia rozsądnego kompromisu. Z jednej strony bowiem w wielu sytuacjach opis probabilistyczny jest naturalnym opisem zjawisk przebiegających w sposób losowy, ale jednocześnie wymaga on znacznie większej ilości danych i na ogół bardziej skomplikowanych metod numerycznych. Z drugiej strony zastosowania te mają być instrumentem wspomagającym decyzje inżynierskie. W związku z tym powinny być blisko modeli najbardziej rozpowszechnionych w praktyce. Zdarza się często, że nawet przy tych prostych modelach losowy opis zjawiska staje się skomplikowany. Taka sytuacja ma miejsce podczas badania przemieszczeń metodą elementów skończonych, gdzie nawet dla modeli liniowo sprężystych obliczenia przy założeniu losowych parametrów zadania bardzo istotnie się komplikują.

Większość poruszanych w pracy zagadnień dotyczy fundamentów bezpośrednich, i to zarówno stanów granicznych nośności, jak i użyteczności. Zdaniem autora na szczególną uwagę zasługują zastosowania teorii pól losowych w postaci lokalnych uśrednień, które stanowią bardzo dobre narzędzie przy badaniu efektów losowych w stanach granicznych nośności fundamentów bezpośrednich. Bardzo istotnym elementem jest powiązanie losowego opisu (obszaru uśrednienia) z geometrią mechanizmu zniszczenia. Z tego punktu widzenia autor uważa za ważne wyniki uzyskane w rozdziale 4, które w znacznym stopniu ogólności dają możliwość adekwatnej redukcji wariancji, a ponadto stanowią kompletne rozwiązanie ważnego problemu teorii niezawodności.

Zadania związane z fundamentami palowymi nie były w tej pracy potraktowane kompleksowo. Były natomiast ściśle związane z zagadnieniami praktyki geotechnicznej. Tak jak bowiem wspomniano, w literaturze nie ma zbyt wielu przykładów analiz niezawodności rzeczywistych obiektów, będących przedmiotem badania geotechnika. Dlatego też zagadnieniu losowych podatności pali i jego oddziaływaniu na siły wewnętrzne

w belce fundamentowej oraz pracy sztywnego pała pod działaniem siły poprzecznej w warunkach podłoża o cechach losowych poświęcono dwa odrębne rozdziały. Zadania te zresztą okazały się interesujące i niełatwe z punktu widzenia analizy niezawodności.

Począwszy od rozdziału 4 aż do końca książki autor starał się pokazywać na poszczególnych przykładach, że wybór rodzaju (typu) rozkładu prawdopodobieństwa dla poszczególnych parametrów podłoża ma – w kontekście obliczania miar niezawodności w postaci prawdopodobieństwa awarii lub odpowiadającego mu wskaźnika niezawodności – daleko mniejsze znaczenie niż precyzyjne oszacowanie współczynnika zamienności tegoż parametru. Taka konkluzja pozwalałaby na dużo łatwiejsze stosowanie metod niezawodności w obliczeniach praktycznych, gdyż do estymowania rozkładu prawdopodobieństwa potrzebna jest dużo większa liczba danych statystycznych aniżeli do oceny współczynnika zmienności. Niestety zamysł autora nie do końca się powiódł. W przypadkach stanów granicznych nośności oraz użytkownika fundamentów bezpośrednich przykłady zdawały się potwierdzać tę tezę. Natomiast przykłady osiadań pała przedstawione w rozdziale 8 wskazują, że efekt typu rozkładu może być istotny. Niemniej jednak zawsze jest on mniejszy niż efekt współczynnika zmienności.

Pokrewnym zagadnieniem jest także problem dokładności obliczeń. W większości rozpatrywanych w pracy przykładów wskaźniki niezawodności obliczano z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Czyniono tak tylko ze względu na ułatwienie analiz porównawczych wyników, gdyż zdaniem autora przy liczbie praktycznie dostępnych danych statystycznych o parametrach podłoża, taka dokładność jest iluzoryczna. Błędy wynikające z niedostatecznej ilości danych powodują, że obliczanie wskaźnika z dokładnością większą niż jedna cyfra po przecinku jest niecelowe.

9.1. Ważniejsze rezultaty przedstawione w pracy

1. Kompletnie rozwiązanie zagadnienia uśrednienia lokalnego pól losowych parametrów wytrzymałościowych podłoża wzdłuż powierzchni poślizgu występujących w mechanizmie Prandtla, przy założeniu gaussowskiej funkcji kowariancji pola. Rozwiązanie podano zarówno dla pola jednowymiarowego, jak i dwuwymiarowego. Zawiera ono wyprowadzenie wzorów na wariancje i kowariancje zmiennych losowych otrzymanych przez uśrednienie wzdłuż krzywych (powierzchni) poślizgu występujących w tym mechanizmie oraz odpowiednią funkcję stanu granicznego.

2. Wykazanie istotnego wpływu wielkości obszaru lokalnego uśredniania na wartości miar niezawodności i propozycja powiązania tych obszarów z powierzchniami poślizgu występującymi w mechanizmach zniszczenia właściwych dla stanów granicznych nośności.

3. Wykazanie, że bezpośrednio zastosowanie klasycznych metod teorii niezawodności do oceny bezpieczeństwa związanej ze stanem nośności granicznej fundamentów bezpośrednich może prowadzić do nieadekwatnych wartości miar niezawodności.

4. Wskazanie na przydatność uśrednień lokalnych dla uzyskania wartości miar niezawodności adekwatnych do oceny bezpieczeństwa fundamentów bezpośrednich w tym sensie, że prawidłowo zaprojektowanym i bezpiecznym fundamentom odpowiadają wysokie wartości wskaźnika niezawodności.

5. Opracowanie procedury do obliczeń miar niezawodności związanych z osiadaniami fundamentów bezpośrednich opartej na metodzie warstw skończonych.

6. Zbadanie losowego efektu współczynnika Poissona oraz modułu Younga na osiadania fundamentu bezpośredniego posadowionego na podłożu liniowo sprężystym.

7. Opracowanie procedur do obliczeń miar niezawodności związanych z osiadaniami fundamentów posadowionych na podłożu liniowo sprężystym, korzystających z metody powierzchni odpowiedzi w sytuacji, gdy osiadania obliczane są metodą elementów skończonych.

8. Analiza krytyczna możliwości zastosowań różnego typu powierzchni odpowiedzi do obliczeń miar niezawodności związanych z osiadaniami fundamentów bezpośrednich.

9. Wskazanie na efekt „fałszywych punktów obliczeniowych” przy zastosowaniu metody powierzchni odpowiedzi w połączeniu z metodami FORM i SORM oraz podanie propozycji unikania tych punktów w procedurach numerycznego znajdowania miar niezawodności.

10. Opracowanie procedur do oceny wielkości losowych momentów zginających w belce oczepowej fundamentu palowego przy założeniu losowych podatności lub losowych nośności pali. Procedury umożliwiają także realizację obliczeń w przypadku nieliniowej pracy pali.

11. Analiza losowych momentów zginających dla projektu fundamentu palowego, stanowiącego wariant zmiany sposobu posadowienia rzeczywistego obiektu, którym było podtorze suwnicy portalowej.

12. Wyprowadzenie wzorów prowadzących do rozwiązania równań równowagi w przypadku sztywnego pala obciążonego siłą poprzeczną, z oddziaływaniem podłoża oszacowanego według propozycji Brinch Hansena.

13. Opracowanie procedury analityczno-numerycznej z zastosowaniem komputerowych obliczeń symbolicznych do obliczeń miar niezawodności w przypadku oceny nośności bocznej pali sztywnych. Procedura oparta jest na metodzie Brinch Hansena obliczania nośności bocznej.

14. Propozycja przybliżonego obliczania prawdopodobieństwa awarii w przypadku niejawniej funkcji stanu granicznego, polegająca na aproksymowaniu nieznannej funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi za pomocą wielomianów ortogonalnych Legendre'a i Czebyszewa.

15. Wykonanie analiz wrażliwości miar niezawodności na zmienność losową parametrów podłoża w przypadku oceny nośności granicznej fundamentu bezpośredniego oraz w przypadku nośności bocznej pala sztywnego.

16. Podsumowanie dotychczasowego stanu wiedzy na temat probabilistycznego opisu parametrów podłoża.

9.2. Niektóre wnioski sformułowane w pracy lub wynikające z niej

1. Aby poprawnie oszacować miary niezawodności fundamentów, bardzo ważne jest odpowiednie modelowanie probabilistyczne parametrów podłoża. W przypadku stanów granicznych nośności jest to modelowanie parametrów wytrzymałościowych, zaś w przypadku przemieszczeń – parametrów opisujących podatność podłoża.

2. W analizowanych tu zagadnieniach wartości miar niezawodności w postaci wskaźnika niezawodności lub prawdopodobieństwa awarii wykazują szybką zmienność jako funkcje współczynników zmienności poszczególnych parametrów losowych. Wrażliwość na wartość współczynnika zmienności była w analizowanych przypadkach większa niż drażliwość na zmiany rozkładu (rodzaj rozkładu) prawdopodobieństwa opisującego konkretny parametr losowy. W związku z tym dla losowego modelowania parametrów podłoża pierwszorzędne znaczenie ma możliwie precyzyjne określenie współczynnika zmienności tych parametrów. Odnosi się to szczególnie do tych parametrów, które w analizie drażliwości danego problemu wykazują największy wpływ na miary niezawodności.

3. Przeprowadzona w rozdziale 4 analiza drażliwości pokazała, że w zagadnieniach badania nośności granicznej podłoża decydujące znaczenie dla wartości wskaźnika niezawodności ma zmienność losowa kąta tarcia wewnętrznego i to zarówno w przypadku podłoża niespoistego, jak i spoistego. W przypadku podłoża spoistego drażliwość wskaźnika niezawodności na zmienność spójności jest również duża, lecz mniejsza od drażliwości na zmienność kąta tarcia wewnętrznego.

4. Znaczna zmiana położenia zwierciadła wody gruntowej w gruncie niespoistym powoduje istotne zmiany miar niezawodności. Potwierdza to ważność uwzględnienia długoterminowych wahań zwierciadła wody w projektowaniu. Zależność wskaźnika niezawodności od poziomu zwierciadła wody jest w przybliżeniu liniowa.

5. W celu uzyskania wartości wskaźników niezawodności dla fundamentu, umożliwiających porównywanie ich ze wskaźnikami niezawodności innych elementów konstrukcji, modelowanie parametrów wytrzymałościowych podłoża za pomocą pojedynczej zmiennej losowej jest niewystarczające. Wprowadzenie większej liczby zmiennych (wektora losowego) poprawia rezultaty. W szczególności posłużenie się teorią pól losowych, a zwłaszcza zastosowanie uśrednień przestrzennych (lokalnych), prowadzi do nowych zmiennych losowych o zredukowanej wariancji.

6. Zastosowanie uśrednienia lokalnego do obliczeń miar niezawodności związanych z nośnością fundamentów bezpośrednich spowodowało, że poprawnie zaprojek-

towane i bezpieczne z inżynierskiego punktu widzenia fundamenty wykazywały wzrost wskaźnika niezawodności do wartości znacznie przekraczających trzy. Daje to możliwość analizy całej konstrukcji budowlanej, wraz z jej fundamentem, według jednakowych kryteriów oceny niezawodności.

7. W zagadnieniach związanych z nośnością graniczną fundamentów bezpośrednich w wyniku przeprowadzonych obliczeń (rozdział 4) zaobserwowano, że wskaźniki niezawodności uzyskane przy zastosowaniu dwuwymiarowego pola losowego parametrów wytrzymałościowych niewiele się różnią od uzyskanych w zadaniu z zastosowaniem pola jednowymiarowego. Przy realistycznych wartościach poziomej skali fluktuacji (nie mniejszych niż 10-krotna wartość skali pionowej) oraz istotnych z punktu widzenia projektowego szerokości fundamentu, różnice te są na ogół do pominięcia. Jest to ważne z praktycznego punktu widzenia. Jeśli bowiem można ograniczyć się do jednowymiarowego uśrednienia, uwzględniającego jedynie pionową skalę fluktuacji pola losowego, to nie ma problemu z określaniem skali fluktuacji w kierunku poziomym.

8. Obliczenia przeprowadzone w rozdziale 5 pokazały, że przy małych wartościach współczynnika Poissona ($\nu \leq 0,27$) jego wahania losowe mają znikomy wpływ na prawdopodobieństwo przekroczenia osiadania dopuszczalnego lub równoważny temu prawdopodobieństwu wskaźnik niezawodności β .

9. Decydujący wpływ na wartość prawdopodobieństwa przekroczenia osiadania dopuszczalnego przez fundament posadowiony na podłożu liniowo sprężystym ma współczynnik zmienności modułu Younga E .

10. W przypadkach niewielkiej liczby danych dotyczących współczynnika Poissona do obliczeń miar niezawodności proponuje się stosowanie rozkładu prostokątnego (równomiernego) na określonym przedziale zmienności. Można też zastosować rozkład złożony, w którym zmiany współczynnika ν opisuje rozkład normalny (lub beta), zaś wartość oczekiwana jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym.

11. Ujemna korelacja pomiędzy parametrami sprężystymi E i ν powoduje wzrost wskaźnika niezawodności β związanego z przekroczeniem dopuszczalnego progu osiadań w stosunku do przyjęcia braku korelacji pomiędzy tymi parametrami.

12. Sprężysty betonowy fundament spoczywający na liniowo sprężystym podłożu o module Younga E powoduje „tłumienie” efektów losowych niejednorodności podłoża, co oznacza, że współczynnik zmienności osiadań wybranego punktu fundamentu jest mniejszy aniżeli współczynnik zmienności modułu Younga E podłoża. W przypadku fundamentu wiotkiego współczynniki zmienności osiadań są zbliżone do współczynników zmienności modułu.

13. Spośród powierzchni odpowiedzi proponowanych do obliczeń miar niezawodności związanych z osiadaniami fundamentów bezpośrednich za najlepsze można uznać powierzchnię „ze składnikiem edometrycznym” oraz powierzchnię z aproksymatorem zaczerpniętym z techniki sieci neuronowych (przydatną także do zadań związanych z osiadaniami fundamentów palowych).

14. Wobec na ogół skromnej wiedzy na temat wartości współczynnika Poissona dla określonego rodzaju podłoża, ważne jest, aby do obliczeń miar niezawodności związanych z przekroczeniem progu osiadań skonstruować powierzchnię odpowiedzi aproksymującą cały (istotny z punktu widzenia obliczeń) zakres zmienności tego współczynnika. Taką możliwość dały skonstruowane w rozdziale 5 powierzchnie „ze składnikiem edometrycznym” oraz powierzchnie z aproksymatorem zaczerpniętym z techniki sieci neuronowych.

15. Obliczenia przeprowadzone w rozdziale 6 unaocznily fakt bardzo istotnego wpływu losowych wahań nośności (podatności) pali na momenty zginające. Oczywiście rozmiar tego efektu zależy przede wszystkim od skali wahań nośności (podatności), mierzonej współczynnikiem zmienności, który jest na ogół znaczny (rzędu 20%). Źródłem oceny współczynnika zmienności mogą być wyniki obciążeń próbnych pali fundamentowych.

16. Duży wpływ na wielkość losowych momentów w belce oczepowej fundamentu palowego ma uwzględnienie dodatniej korelacji pomiędzy podatnościami lub nośnościami poszczególnych pali. Obliczenia wskazały, że w sytuacji pracy pali poza zakresem liniowym dodatnia korelacja powoduje bardzo istotny wzrost wartości bezwzględnej momentów zginających. Jeśli natomiast mamy do czynienia jedynie ze sprężystą pracą pali, to dodatnia korelacja powoduje spadek wartości bezwzględnej momentów. W tym przypadku dodatnia korelacja powoduje efekt redukcji wariancji. Korelacja ma tym większy wpływ na progowe wartości momentów zginających, im większa jest wartość współczynnika zmienności podatności.

17. Znaczne losowe wahania momentów zginających, spowodowane losowymi podatnościami pali, mogą doprowadzić do takiej sytuacji, że w rozpatrywanym przekroju z niezerowym prawdopodobieństwem moment zginający może osiągać zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

18. Na skutek nieliniowych zależności pomiędzy momentami zginającymi a podatnościami pali wartości oczekiwane momentów zginających w belce oczepowej otrzymane z obliczeń probabilistycznych znacznie się różnią od wartości uzyskanych na drodze deterministycznej, a wręcz istotnie je przewyższają (różnice wahają się w granicach 20–30%).

19. Chcąc uzyskać wskaźniki niezawodności związane z przekroczeniem przez momenty zginające w belce oczepowej określonych progów wartości, należy się liczyć z przyjęciem wartości obliczeniowych momentów większych niż wynikałoby to z konwencjonalnych obliczeń deterministycznych.

20. Podobnie jak w przypadku nośności fundamentu bezpośredniego, także i w przypadku nośności bocznej pala sztywnego stwierdzono największą wrażliwość miar niezawodności na wahania kąta tarcia wewnętrznego. Wniosek ten dotyczy podłoża niespoistego, dla którego przeprowadzono obliczenia w rozdziale 7.

21. Zmienność losowa kąta tarcia wewnętrznego ma bardzo duży wpływ na oszacowanie siły granicznej w zagadnieniach nośności bocznej pali sztywnych. Wahania

kąta tarcia wewnętrznego powodują zmiany położenia potencjalnego środka obrotu. Z kolei wartość siły granicznej cechuje się bardzo dużą wrażliwością na położenie środka obrotu. Wynika stąd konieczność precyzyjnego określenia kąta tarcia wewnętrznego podłoża, a także znacznej precyzji w prowadzeniu obliczeń, zwłaszcza w określeniu środka obrotu, gdy stosuje się obliczenia według propozycji Brinch Hansena. Odnosi się to także do obliczeń wykonywanych w praktyce inżynierskiej.

22. Stosowanie w powierzchni odpowiedzi kombinacji liniowych tangensów hiperbolicznych pozwala na uniknięcie „wielokrotnych gałęzi” funkcji stanu granicznego, a co za tym idzie, zmniejsza istotnie ryzyko pojawienia się fałszywych punktów obliczeniowych w metodzie FORM. Własności tej nie mają powierzchnie odpowiedzi o postaci wielomianowej, które są najczęściej stosowane.

9.3. Kierunki dalszych badań

Prezentowana praca dotyczy jedynie pewnych wybranych zagadnień niezawodności fundamentów, a przede wszystkim ogranicza się do stosunkowo wąskiej grupy samych fundamentów. Inne zagadnienia związane z fundamentowaniem, jak np. nasypy ziemne i skarpy oraz ściany zabezpieczające głębokie wykopy, mają już sporą literaturę probabilistyczną. Inne zaś, jak np. mikropale czy pale wykonywane metodą iniekcji strumieniowej – jeszcze jej nie mają. Można zatem stwierdzić, że nierozwiązanych zadań z zakresu niezawodności fundamentów jest jeszcze wiele.

Spośród zagadnień najbliższych omawianym w tej książce warto wymienić następujące:

- Dalsze studia nad zastosowaniem lokalnych uśrednień w zagadnieniach nośności granicznej, obejmujące losową geometrię powierzchni poślizgu oraz zagadnienia trójwymiarowe.

- Obliczenia miar niezawodności związanych z nośnością graniczną dla fundamentów posadowionych na podłożu uwarstwowym.

- Badanie efektów korelacji przestrzennej parametrów podłoża oraz lokalnych uśrednień na ocenę losowo zmiennych różnic osiadań różnych punktów pod fundamentem (w kontekście zastosowań do stanów granicznych użytkowalności).

- Rozszerzenie obliczeń miar niezawodności metodą techniki powierzchni odpowiedzi na sprężysto-plastyczne modele podłoża gruntowego.

- Ocena losowych osiadań fundamentów palowych, przy założeniu losowej podatności lub losowej nośności poszczególnych pali.

- Analiza nośności bocznej pali sztywnych w ośrodku spoistym.

- Probabilistyczna analiza nośności bocznej pali wiotkich.

Są to zagadnienia, nad którymi pracuję obecnie lub zamierzam się nimi zająć w niedalekiej przyszłości.

Zdaniem autora wymogi współczesnej geotechniki, nakazujące wykonanie dużej liczby badań w celu rzetelnej oceny własności podłoża, są naturalnym sprzymierzeńcem analiz probabilistycznych i niezawodnościowych. Dostarczają one bowiem coraz to nowego materiału statystycznego, który pozwoli na coraz lepsze oceny miar bezpieczeństwa. Wraz z rozwojem nowych technologii stosowanych w fundamentowaniu przybywa też nowych zadań, dla których potrzebne jest wypracowanie sposobów oceny bezpieczeństwa. Stwarza to perspektywy dla zastosowań teorii niezawodności w geotechnice.

Załącznik nr 1

Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności w zależności od osiadania dopuszczalnego i współczynnika korelacji pomiędzy parametrami E i ν

Przedstawione poniżej tabele pokazują wyniki omawiane w podrozdziale 5.1.4.

Tabela Z.1.1. Wpływ losowych zmian współczynnika ν oraz współczynnika korelacji ρ (E , ν) na wskaźnik niezawodności β , przy założeniu wartości oczekiwanej współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,2$

		E{ ν } = 0,2					
Osiadanie dopuszczalne u_{\max}	Wskaźnik niezawodności β						
	$\nu = 0,2$ nielosowe	ν – zmienne losowo korelacja					
		$\rho = 0,0$	$\rho = -0,2$	$\rho = -0,3$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,5$	$\rho = -0,6$
0,092	0,784	0,784	0,807	0,820	0,833	0,847	0,861
0,094	0,999	0,998	1,027	1,043	1,060	1,078	1,094
0,096	1,210	1,207	1,242	1,262	1,282	1,304	1,327
0,098	1,417	1,411	1,453	1,476	1,500	1,526	1,553
0,100	1,620	1,612	1,659	1,685	1,713	1,743	1,775
0,102	1,818	1,808	1,862	1,891	1,922	1,959	1,993
0,104	2,013	2,001	2,060	2,093	2,128	2,165	2,206
0,106	2,204	2,190	2,255	2,291	2,329	2,371	2,416
0,108	2,391	2,376	2,446	2,485	2,527	2,572	2,622
0,110	2,575	2,558	2,633	2,675	2,721	2,770	2,825
0,112	2,756	2,737	2,817	2,862	2,911	3,965	3,024
0,114	2,933	2,912	2,998	3,046	3,098	3,156	3,219
0,116	3,108	3,085	3,176	3,227	3,283	3,344	3,412

Tabela Z.1.2. Wpływ losowych zmian współczynnika ν oraz współczynnika korelacji $\rho \{E, \nu\}$ na wskaźnik niezawodności β , przy założeniu wartości oczekiwanej współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,25$

		E{ ν } = 0,25					
Osiadanie dopuszczalne u_{\max}	Wskaźnik niezawodności β						
	$\nu = 0,25$ nielosowe	ν – zmienne losowo korelacja					
		$\rho = 0,0$	$\rho = -0,2$	$\rho = -0,3$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,5$	$\rho = -0,6$
0,088	0,758	0,752	0,789	0,810	0,832	0,856	0,883
0,090	0,986	0,971	1,019	1,046	1,075	1,107	1,142
0,092	1,206	1,186	1,244	1,276	1,312	1,352	1,396
0,094	1,421	1,396	1,464	1,502	1,544	1,591	1,644
0,096	1,632	1,601	1,679	1,723	1,772	1,826	1,888
0,098	1,839	1,803	1,890	1,939	1,994	2,056	2,127
0,100	2,041	2,000	2,096	2,215	2,246	2,282	2,361
0,102	2,240	2,194	2,299	2,359	2,427	2,503	2,591
0,104	2,434	2,384	2,497	2,563	2,636	2,720	2,817
0,106	2,625	2,570	2,692	2,763	2,842	2,933	3,039
0,108	2,813	2,753	2,883	2,959	3,044	3,142	3,257
0,110	2,996	2,932	3,070	3,151	3,243	3,348	3,471
0,112	3,177	3,109	3,255	3,340	3,438	3,550	3,681
0,114	3,354	3,282	3,436	3,526	3,629	3,748	3,888
0,116	3,529	3,452	3,613	3,709	3,817	3,943	4,092

Tabela Z.1.3. Wpływ losowych zmian współczynnika ν oraz współczynnika korelacji $\rho \{E, \nu\}$ na wskaźnik niezawodności β , przy założeniu wartości oczekiwanej współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,27$

		E{ ν } = 0,27					
Osiadanie dopuszczalne u_{\max}	Wskaźnik niezawodności β						
	$\nu = 0,27$ nielosowe	ν – zmienne losowo korelacja					
		$\rho = 0,0$	$\rho = -0,2$	$\rho = -0,3$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,5$	$\rho = -0,6$
0,088	0,961	0,943	0,998	1,030	1,065	1,104	1,148
0,090	1,189	1,159	1,227	1,266	1,309	1,357	1,413
0,092	1,409	1,372	1,451	1,497	1,548	1,606	1,672
0,094	1,625	1,579	1,670	1,723	1,782	1,849	1,927
0,096	1,836	1,783	1,885	1,944	2,011	2,087	2,176
0,098	2,042	1,982	2,095	2,161	2,235	2,320	2,421
0,100	2,245	2,178	2,301	2,373	2,455	2,549	2,661
0,102	2,443	2,370	2,503	2,581	2,670	2,773	2,896
0,104	2,638	2,558	2,700	2,785	2,881	2,993	3,127
0,106	2,829	2,742	2,895	3,985	3,089	3,209	3,354
0,108	3,016	2,923	3,085	3,181	3,292	3,421	3,577
0,110	3,200	3,101	3,272	3,374	3,492	3,630	3,796
0,112	3,381	3,276	3,456	3,564	3,688	3,834	4,012
0,114	3,558	3,448	3,636	3,750	4,880	4,035	4,223
0,116	3,732	3,617	3,814	3,932	4,070	4,233	4,432

Tabela Z.1.4. Wpływ losowych zmian współczynnika ν oraz współczynnika korelacji ρ (E, ν) na wskaźnik niezawodności β , przy założeniu wartości oczekiwanej współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,30$

E{ ν } = 0,30							
Osiadanie dopuszczalne u_{max}	Wskaźnik niezawodności β						
	$\nu = 0,3$ nielosowe	ν – zmienne losowo korelacja					
		$\rho = 0,0$	$\rho = -0,2$	$\rho = -0,3$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,5$	$\rho = -0,6$
0,092	1,757	1,674	1,794	1,866	1,949	2,046	2,164
0,094	1,975	1,878	2,011	2,091	2,184	2,293	2,427
0,096	2,186	2,077	2,223	2,312	2,414	2,535	2,864
0,098	2,392	2,273	2,432	2,528	2,639	2,772	2,936
0,100	2,595	2,465	2,636	2,739	2860	3,005	3,184
0,102	2,793	2,653	2,835	2,947	3,077	3,233	3,426
0,104	2,988	2,838	3,032	3,150	3,289	3,456	3,665
0,106	3,179	3,019	3,224	3,350	3,497	3,675	3,898
0,108	3,366	3,197	3,413	3,546	3,702	3,890	4,128
0,110	3,550	3,372	3,599	3,738	3,902	4,101	4,353
0,112	3,730	3,544	3,781	3,927	4,099	4,309	4,574

Tabela Z.1.5. Wpływ losowych zmian współczynnika ν oraz współczynnika korelacji ρ (E, ν) na wskaźnik niezawodności β , przy założeniu wartości oczekiwanej współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,32$

E{ ν } = 0,32						
Osiadanie dopuszczalne u_{max}	Wskaźnik niezawodności β					
	$\nu = 0,32$ nielosowe	ν – zmienne losowo korelacja				
		$\rho = -0,2$	$\rho = -0,3$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,5$	$\rho = -0,6$
0,092	2,452	2,041	2,134	2,224	2,376	2,541
0,094	2,659	2,256	2,358	2,479	2,624	2,808
0,096	2,861	2,466	2,577	2,708	2,868	3,069
0,098	3,060	2,672	2,792	2,934	3,106	3,325
0,100	3,254	2,874	3,002	3,154	3,340	3,576
0,102	3,445	3,072	3,208	3,370	3,568	3,822
0,104	3,254	3,266	3,411	3,582	3,793	4,063
0,106	3,445	3,456	3,609	3,790	4,013	4,300
0,108	3,632	3,644	3,804	3,995	4,229	4,532
0,110	3,816	3,828	3,995	4,195	4,441	4,760
0,112	3,997	4,009	4,128	4,392	4,650	4,984
0,114	4,174	4,186	4,367	4,585	4,854	5,204
0,116	4,348	4,361	4,549	4,775	5,055	5,421

Tabela Z.1.6. Wpływ losowych zmian współczynnika ν oraz współczynnika korelacji ρ $\{E, \nu\}$ na wskaźnik niezawodności β , przy założeniu wartości oczekiwanej współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,35$

E{ ν } = 0,35							
Osiadanie dopuszczalne u_{\max} [m]	Wskaźnik niezawodności β						
	$\nu = 0,35$ nielosowe	ν – zmienne losowo korelacja					
		$\rho = 0,0$	$\rho = -0,2$	$\rho = -0,3$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,5$	$\rho = -0,6$
0,088	2,035	1,825	1,999	2,107	2,237	2,389	2,606
0,090	2,263	2,027	2,217	2,336	2,480	2,657	2,887
0,092	2,483	2,225	2,431	2,561	2,717	2,910	3,162
0,094	2,699	2,419	2,641	2,781	2,949	3,158	3,431
0,096	2,909	2,609	2,847	2,996	3,177	3,401	3,695
0,098	3,116	2,796	3,048	3,207	3,399	3,639	3,953
0,100	3,319	2,980	3,246	3,415	3,618	3,872	4,206
0,102	3,517	3,160	3,440	3,618	3,832	4,101	4,453
0,104	3,712	3,338	3,631	3,817	4,042	4,325	4,697
0,106	3,902	3,512	3,818	4,013	4,248	4,544	4,935
0,108	4,090	3,638	4,002	4,205	4,451	4,760	5,169
0,110	4,274	3,851	4,183	4,394	4,650	4,972	5,399
0,112	4,454	4,017	4,360	4,579	4,845	5,180	5,624
0,114	4,632	4,180	4,535	4,761	5,037	5,384	5,846
0,116	4,806	4,340	4,707	4,940	5,225	5,585	6,064
0,118	4,970	4,498	4,875	5,117	5,411	5,782	6,728

Tabela Z.1.7. Wpływ losowych zmian współczynnika ν oraz współczynnika korelacji ρ $\{E, \nu\}$ na wskaźnik niezawodności β , przy założeniu wartości oczekiwanej współczynnika Poissona $E\{\nu\} = 0,37$

E{ ν } = 0,37							
Osiadanie dopuszczalne u_{\max} [m]	Wskaźnik niezawodności β						
	$\nu = 0,37$ nielosowe	współczynniki korelacji					
		$\rho = 0,0$	$\rho = -0,2$	$\rho = -0,3$	$\rho = -0,4$	$\rho = -0,5$	$\rho = -0,6$
0,092	2,83	2,45	2,69	2,85	3,00	3,28	3,59
0,094	3,04	2,64	2,90	3,07	3,27	3,52	3,86
0,096	3,25	2,83	3,10	3,28	3,48	3,76	4,12
0,098	3,46	3,01	3,30	3,49	3,71	4,00	4,38
0,100	3,66	3,19	3,49	3,69	3,93	4,23	4,63
0,102	3,86	3,36	3,69	3,89	4,14	4,46	4,88
0,104	4,06	3,54	3,87	4,09	4,35	4,68	5,12
0,106	4,25	3,71	4,06	4,28	4,55	4,90	5,36
0,108	4,43	3,88	4,24	4,47	4,75	5,11	5,59
0,110	4,62	4,04	4,42	4,66	4,95	5,32	5,82
0,112	4,80	4,21	4,59	4,84	5,14	5,53	6,05

Załącznik nr 2

Wyniki obliczeń współczynników B_i powierzchni odpowiedzi dla różnych funkcji osiadania

Przedstawione poniżej tabele pokazują wyniki omawiane w podrozdziale 5.4.4.1.

Tabela Z.2.1. Współczynniki funkcji osiadania w postaci wielomianu drugiego stopnia (5.10). Cztery różne powierzchnie otrzymano przy czterech różnych wartości oczekiwanych współczynnika Poissona

Współczynniki B	Wartość oczekiwana współczynnika Poissona			
	0,1	0,2	0,3	0,4
B_1	0,397839	0,410466	0,407413	0,436019
B_2	-0,030604	-0,032386	-0,031190	-0,043214
B_3	-0,060239	-0,080708	-0,057315	0,149711
B_4	0,000768	0,000832	0,000722	0,001025
B_5	-0,166729	-0,211499	-0,301765	-0,881754
B_6	0,004073	0,006113	0,007455	0,024773
Odchylenie standardowe σ_{err}	0,000405	0,000458	0,001469	0,001812

Tabela Z.2.2. Współczynniki B dla dwóch zakresów zmienności modułu Younga wyznaczone przy założeniu funkcji osiadania postaci (5.12) (ze „składnikiem edometrycznym”)

Współczynniki B	Zakresy zmienności modułu Younga	
	5–30 MPa	5–20 MPa
B_1	0.237703	0.339195
B_2	-0.013756	-0.027901
B_3	-0.005953	-0.067943
B_4	0.000245	0.000700
B_5	-0.050773	-0.106475
B_6	-0.000066	0.004179
B_7	0.390865	0.448634
Odchylenie standardowe σ_{err}	0.005668	0.003168

Tabela Z.2.3. Współczynniki B wyznaczone przy założeniu funkcji osiadania postaci (5.13)

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	Odchylenie standardowe
-0,06073	-0,01761	-3,0706	96,37	0,02577	-3,0967	4,627	30,677	65,74	0,0030694

Literatura

- [1] ABDO T., RACKWITZ R., (1990), *A New Beta-Point Algorithm for Large Time-Invariant and Time-Variant Reliability Problems*, Proc. of 3rd WG 7.5 IFIP Working Conf., March 26–28, Berkeley.
- [2] ADLER J.P., (1981), *The geometry of random fields*, Wiley, Chichester.
- [3] ALEN C., JENDEBY L., (1993), *Design value of the bearing capacity for a friction pile at a given risk level*, Proceedings of the International Symposium on Limit State Design in Geotechnical Engineering, Copenhagen, May 26–28, Sponsored by Danish Geotechnical Society, Vol. 1, s. 91–100.
- [4] ALONSO E., (1976), *Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays*, Geotechnique, Vol. 26, No. 3, s. 453–472.
- [5] ALONSO E., KRIZEK R.J., (1975), *Stochastic formulation of soil properties*, Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng., (ICASP), Aachen, Vol. II, s. 9–32.
- [6] ANG A., H-S, CORNELL C.A., (1974), *Reliability Basis of Structural Design and Safety*, J. Struct. Engng., ASCE, 100, No. ST9.
- [7] ARNBJERG-NIELSEN T., BJERAGER P., (1988), *Finite element reliability method with improved efficiency by sensitivity analysis*, Computational Probabilistic Mechanics, ADM-93, ASME, s.15–26.
- [8] ARORA J.S., *Introduction to Optimum Desgn.*, (1989), McGraw-Hill, New York.
- [9] ARORA J.S., (1990), *Computational design optimization: A review and future directions*, Structural Safety, Vol. 7, s. 131–148.
- [10] ATHANASIOU-GRIVAS D., HARR M.E., (1979), *A reliability approach to the design of soil slopes*, Proc. of the 7th European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Brighton, s. 95–99.
- [11] ATHANASIOU-GRIVAS D., HARROP-WILLIAMS K., (1979), *Joint Distribution of the Components of Soil Strength*, Proc. 3rd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng., (ICASP), Sydney, Vol. 3, s. 427–430.
- [12] AUVINET G., GONZÁLEZ J.L., (2000), *Three-dimensional reliability of earth slopes*, Computers and Geotechnics, Vol. 25, No. 3–4, s. 247–261.
- [13] AVEN T., JENSEN U., (1999), *Stochastic Models in Reliability*, Springer-Verlag, New York.
- [14] AYYUB B.M., HALDAR A., (1984), *Practical structural reliability techniques*, J. Struct. Engng., ASCE, 110(8), s. 1707–1724.
- [15] AYYUB B.M., LAI K-L., (1991), *Selective sampling in simulation-based reliability assessment*, Int. J. Pres. Ves. & Piping, 46, s. 229–249.
- [16] AYYUB B.M., CHIA C.-Y., (1992), *Generalized conditional expectation for structural reliability assessment*, Structural Safety, 11, s. 131–146.
- [17] Baecher G.B., Christian J.T., (2003), *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*, J. Wiley & Sons, Chichester.
- [18] Baecher G.B., Ingra T.S., (1981), *Stochastic FEM in settlement predictions*, J. of Geotechnical Engineering, ASCE, 107, GT4, s. 449–463.

- [19] BAGHERY S., MAGNAN J.P., (1983), *Analyse probabiliste de la stabilité et des tassements des remblais du site expérimental de Cubzac-les-Ponts*, Ministère de l'Urbanisme et du Logement Ministère des Transports, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Rapport de recherche, LPC, No. 122.
- [20] BARDEN L., (1963), *Stresses and Displacements in a cross-anisotropic soil*, Geotechnique, Vol. 13, No. 3, s. 198–210.
- [21] BATHE K. J., *Finite element procedures in engineering analysis*, Engelwood Cliffs, Prentice-Hall, 1982.
- [22] BAUER J., PUŁA W., (1999), *Some remarks on application of response surface method in reliability computations*, [w:] Pande G., Pietruszczak S. (eds.), *Proc. of the Seventh Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, Graz, 1999, Balkema, Rotterdam, 221–228.
- [23] BAUER J., PUŁA W., (2000a), *Reliability with respects to settlement limit-states of shallow foundation on linearly-deformable subsoil*, Computers & Geotechnics, 25, No. 3–4, 281–308.
- [24] BAUER J., PUŁA W., (2000b), *Neural network supported response surface method with respect to reliability computations in geotechnics*, Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. 22, No. 3–4, s. 103–115.
- [25] BECKER D., (1996), *Eighteen Canadian Geotechnical Colloquium: Limit States Design for Foundations*, Part II. *Development for the National Building Code of Canada*, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 33, s. 984–1007.
- [26] BEN HAIM, (1996), *Robust Reliability in the Mechanical Sciences*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [27] BENJAMIN J.R., CORNELL C.A., (1977), *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, WNT, Warszawa.
- [28] BIEGUS A., (1996), *Podstawy probabilistycznej analizy bezpieczeństwa konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [29] BIEGUS A., (1999), *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław.
- [30] BIELSKI R., TEJCHMAN A., (1985), *Analiza stateczności konstrukcji oporowej w probabilistycznym ujęciu teorii niezawodności*, Archiwum Hydrotechniki, t. XXXI, z. 1, s. 123–135.
- [31] BIERNATOWSKI K., (1966a), *Stateczność fundamentów cz. I – Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa dla oceny współczynników bezpieczeństwa przy sprawdzaniu fundamentów*, Archiwum Hydrotechniki, t. 13, nr 2, s. 239–262.
- [32] BIERNATOWSKI K., (1966b), *Stateczność fundamentów cz. II – Stateczność na obrót i przesunięcie w ujęciu probabilistycznym*, Archiwum Hydrotechniki, t. 13, nr 2, s. 283–302.
- [33] BIERNATOWSKI K., (1968a), *Stateczność fundamentów cz. III – Stateczność na wypieranie gruntu w ujęciu probabilistycznym*, Archiwum Hydrotechniki, t. 15, s. 261–280.
- [34] BIERNATOWSKI K., (1968b), *Stability of slopes in probabilistic solutions*, Proc. of the 7th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Mexico, Vol. 2, s. 527–530.
- [35] BIERNATOWSKI K., (1969), *Stateczność fundamentów cz. IV – Kryteria stateczności fundamentów*, Archiwum Hydrotechniki, t. 16, s. 209–217.
- [36] BIERNATOWSKI K., (1972), *Stability of rigid structures in probabilistic formulation*, Proc. of the 5th European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Madrid, Vol. 1, s. 111–116.
- [37] BIERNATOWSKI K., (1976), *Stochastyczny model współpracy układu budowla–fundament–podłoże*, cz. II. Raport Instytutu Geotechniki PWr, nr 226, Wrocław (praca wykonana na zlecenie KILiW PAN).
- [38] BIERNATOWSKI K., (1977), *Model stochastyczny układu budowla–fundament–podłoże gruntu*, Mat. XXIII Konf. Nauk. KIL i W PAN i KN PZITB, Krynica, t. 1, s. 9–15.
- [39] BIERNATOWSKI K., (1981), *Parametry geotechniczne w metodzie stanów granicznych*, Materiały VI Krajowej Konferencji Mechaniki Gruntów i Fundamentowania, Warszawa, s. 17–25.
- [40] BIERNATOWSKI K., (1982), *Metody statystyczne w geotechnice*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

- [41] BIERNATOWSKI K., PUŁA W., (1984), *Rozkłady statystyczne parametrów gruntowych do symulacyjnych badań bezpieczeństwa konstrukcji*, [w:] Materiały VII Krajowej Konferencji Mechaniki Gruntów i Fundamentowania, Poznań, t. 1, s. 145–150.
- [42] BIERNATOWSKI K., PUŁA W., (1986), *Wpływ zmienności parametrów gruntu na stateczność przyczółków masywnych*, [w:] *Podpory i fundamenty mostów*, Konferencja Naukowo-Techniczna, SITK Zarz. Gł. Tech. Most., Szczecin, 5–7 czerwca 1986, s. 42–57.
- [43] BIERNATOWSKI K., PUŁA W., (1988), *Probabilistic analysis of the stability of massive bridge abutments using simulation methods*, *Structural Safety*, Vol. 5 (1), s. 1–15.
- [44] BJERAGER P., (1988), *Probability integration by directional simulation*, *Journ. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 114, s. 1285–1302.
- [45] BOLOTIN V.M., (1965), *Statističeskie metody v stroitelnoj mechanike*, Strojizdat, Moskva.
- [46] BOLOTIN V.M., (1968), *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Arkady, Warszawa.
- [47] BOLOTIN V.M., (1971), *Primenenie metodov teorii verojatnostej i teorii nadežnosti w rasčetach sooruzenij*, Strojizdat, Moskva.
- [48] BOOKER J.R., DAVIS E.H., BALAAM N.P., (1985), *The behaviour of an elastic non-homogeneous half-space*, Part I. *Line and points loads*, *International Journal Num. Meth. in Geomech.*, Vol. 9, s. 353–367.
- [49] BOOKER U.R., SMALL J.C., (1985), *The use of microcomputers to solve problems in geomechanics using finite layer methods*, Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, A. A. Balkema, s. 1683–1689.
- [50] BOX G.E.P., JENKINS G.M., (1983), *Analiza szeregów czasowych*, PWN, Warszawa.
- [51] BOX G.P., DRAPER N.R., (1996), *Empirical model-building and response surface*, J. Wiley & Sons, New York.
- [52] BREITUNG K., (1984), *Asymptotic approximation for multinormal integrals*, *J. Engng. Mech. ASCE*, Vol. 110, No. 3, s. 357–366.
- [53] BRINCH HANSEN J., (1961a), *A general formula for bearing capacity*. The Danish Geotechnical Institute, Bulletin, No. 11, Copenhagen.
- [54] BRINCH HANSEN J., (1961b), *The ultimate resistance of rigid piles against transversal forces*, The Danish Geotechnical Institute, Bulletin, No. 12, Copenhagen.
- [55] BRINCH HANSEN J., (1970), *A revised and extended formula for bearing capacity*, The Danish Geotec. Institute Bull., No. 28, Copenhagen.
- [56] BRINCH HANSEN J., LUNGGREN J., (1960), *Hauptprobleme der Bodenmechanik*, Springer Verlag, Berlin.
- [57] BROMS B.B., (1964a), *Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils*, *Journ. of Soil Mech. and Foundation Eng. Division, ASCE*, Vol. 90, SM2, s. 27–63.
- [58] BROMS B.B., (1964b), *Lateral Resistance of Piles in Cohesionless Soils*, *Journ. of Soil Mech. and Foundation Eng. Division, ASCE*, Vol. 90, SM3, s. 123–156.
- [59] BROWKIN J., (1970), *Wybrane zagadnienia algebry*, wyd. II, PWN, Warszawa.
- [60] BRZAŃKAŁA W., (1981), *Losowość parametrów podłoża gruntowego*, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, Vol. 28, z. 4, s. 599–606.
- [61] BRZAŃKAŁA W., (1990), *Rozkłady naprężeń w ośrodku rozdrobnionym w ujęciu dyfuzyjnym*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [62] BRZAŃKAŁA W., (1995), *Stochastic finite layer method*, [w:] M. Lemaire, J.-L. Favre, A. Mebarki et al. (eds.), *Applications of Statistics and Probability – Proc. ICASP 7 Conf.*, Paris July 1995, Balkema, Rotterdam, s. 47–54.
- [63] BRZAŃKAŁA W., GHANEM R., (1994), *Stochastic Finite Element Analysis of soil layers with random interface*, [w:] *Structural Safety and Reliability*, G.I. Schuëller, M. Shinozuka, J.T.P. Yao (eds.), *Proc. of ICOSSAR'93*, A.A. Balkema, Rotterdam, Vol. I, s. 333–339.

- [64] BRZAKAŁA W., PUŁA W., STOOF R., (1990), *Berechnung von Teilsicherheitsfaktoren für die Ermittlung der Tragkraft des Baugrundes unter Flachgrundungen*, Bauplanung-Bautechnik, Heft 1, Jan. 1990, s. 25–30.
- [65] BRZAKAŁA W., PUŁA W., (1992a), *Stochastic finite element method in a settlement analysis*, [w:] Pande G., Pietruszczak S. (eds.), Proc. of the Fourth Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Swansea 1992, Balkema, Rotterdam, Vol. 2, 879–886.
- [66] BRZAKAŁA W., PUŁA W., (1992b), *Neumann Expansion in the Stochastic Finite Element Method*, [w:] M. Doležalova (ed.), Proc. of the Second Czechoslovak Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Prague, Vol. 2, 17–22.
- [67] BRZAKAŁA W., PUŁA W., EL-MELIGY M., (1995), *Settlement analysis by non-linear finite element method*, [w:] M. Lemaire, J.-L. Favre, A. Mebarki et al. (eds.), Applications of Statistics and Probability – Proc. ICASP 7 Conf., Paris July 1995, Balkema, Rotterdam, Vol. 1, s. 55–63.
- [68] BRZAKAŁA W., PUŁA W., (1996), *A probabilistic analysis of foundation settlements*, Computers and Geotechnics (Elsevier), Vol. 18, No. 4, s. 291–309.
- [69] BUCHER C.G., BOURGUND U., (1990), *A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems*, Structural Safety, Vol. 7, s. 57–66.
- [70] *Budownictwo Betonowe*, t. IX, (1966), Praca zbiorowa, Arkady, Warszawa.
- [71] CAMERON R.H., MARTIN W.T., (1947), *The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier–Hermite functionals*, Annals of Mathematics, Vol. 48, s. 385–392.
- [72] CARDOSO A.S., FERNANDES M.M., (2001), *Characteristic values of ground parameters and probability of failure in design according to Eurocode 7*, Geotechnique, Vol. 51, No. 6, s. 519–531.
- [73] CASAGRANDE A., (1965), *Role of the “Calculated Risk” in Earthwork and Foundation Engineering*, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, Vol. 91, SM4, s. 1–40.
- [74] CASAS J.R., JUAN R., (1997), *Reliability – Based Partial Safety Factors in Cantilever Construction of Concrete Bridges*, Journal of Structural Engineering, Vol. 12, No. 3, s. 305–312.
- [75] CHAVEZ-GARCIA F., BARD P.-Y., (1989), *Effect of Random Thickness Variation on the Seismic Response of a Soft Soil Layer: Applications to Mexico City*, [w:] Engineering Seismology and Site Response, (ed.), A.S. Cakmak, I. Herrera, Computational Mechanics Publications, Southampton, s. 247–261.
- [76] CHEN W.F., BALADI G.Y., (1985), *Soil plasticity, Theory and implementations*, Elsevier, Amsterdam.
- [77] CHEN W.F., MIZUNO E., (1990), *Non-linear analysis in soil mechanics*, Elsevier, New York.
- [78] CHEN X., LIND N.C., (1983), *Fast probability integration by three-parameter normal tail approximation*, Structural Safety, Vol. 1, s. 269–276.
- [79] CHERUBINI C., (1992), *Collecting coefficients of variations of some geotechnical properties*, Unpublished report, komunikat prywatny.
- [80] CHERUBINI C., (1977), *Data and consideration on the variability of geotechnical properties of soils*, Proc. of the ESREL Conf. Lisboa, s. 1538–1591.
- [81] CHERUBINI C., (1998), *Poisson's ratio variability*, komunikat prywatny.
- [82] CHERUBINI C., (2000), *Probabilistic approach to the design of anchored sheet pile walls*, Computers and Geotechnics, Vol. 26, No. 3–4, s. 309–330.
- [83] CHERUBINI C., GIASI C., RETHATI L., (1993), *The coefficients of variations of some geotechnical parameters*, [w:] Probabilistic methods in geotechnical engineering, K.S. Li i S.C.R. Lo (eds.), Balkema, Rotterdam, s. 179–184.
- [84] CHEUNG Y.K., (1968), *Finite strip method of analysis of elastic slabs*, Journ. Eng. Mech, ASCE, Vol. 94, EM6, s. 1365–1378.
- [85] CHONG P.C., PHOON K.K., TAN T.S., (2000), *Probabilistic analysis of saturated residual soil slopes*, [w:] Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering Reliability and Risk Analysis, Proc. of the Conf. ICASP 8, Sydney 1999, Balkema, Rotterdam, Vol. 1, s. 375–382.

- [86] CHOWDHURRY R., TANG W.H., SIDI I., (1987), *Reliability model of progressive slope failure*, Geotechnique, s. 467–481.
- [87] CHOCJALOV N.F., (1929), *Zapasy pročnosti*, Stroitel'naja promyšlennost, Nr 10.
- [88] CHOCJALOV N.F., (1932), *Massowyj analiz w żelazobetonnom dele*, Stroitel'naja promyšlennost, nr 1.
- [89] CHRISTIAN J.T., LADD C.C., BEACHER G.B., (1994), *Reliability applied to slope stability analysis*, Journal of the Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 12, s. 2180–2207.
- [90] CHUNG K.L., (1974), *A course in Probability Theory*, Academic Press, New York.
- [91] CHURCHILL R.V., (1978), *Fourier series and boundary value problems*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [92] CICHY W., (2001), *O projektowaniu geotechnicznym w świetle norm światowych i europejskich*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 12/2001, s. 737–740.
- [93] CORNELL C.A., (1967), *Bounds on the Reliability of Structural Systems*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, ST1, s. 117–200.
- [94] CORNELL C.A., (1969a), *A first-order reliability theory for structural design*, Study No. 3, Structural Reliability and Codified Design, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- [95] CORNELL C.A., (1969b), *A probability-based Structural Code*, ACI Journal, Vol. 66, No. 12, s. 974–985.
- [96] COROTIS R.B., AZZOUZ A.S., KRIZEK R.I., (1975), *Statistical Evaluation of Soil Index Properties and Constrained Modulus*, Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Aachen, Vol. II, s. 273–293.
- [97] CRAMER H., (1999), *Mathematical Methods of Statistics*, wyd. 19, Princeton University Press, Princeton.
- [98] CRANDALL S.H. (ed.), (1963), *Random vibrations*, Vol. 1, Cambridge, Massachusetts.
- [99] CYTOWICZ N. A., (1973), *Mechanika gruntov*, Izd. 2, Vysšaja Škola, Moskva.
- [100] DEMBICKI E. (red.), (1971), praca zbiorowa, *Stateczność pojedynczych fundamentów słupowych*, PWN, Warszawa–Poznań.
- [101] DEMBICKI E. (red.), (1976), praca zbiorowa, *Stateczność pojedynczych fundamentów słupowych w gruncie spoiwym*, PWN, Warszawa–Poznań.
- [102] DEAK I., (1985), *Three digit accurate multiple normal probabilities*, Numer. Maths., Vol. 35, s. 369–380.
- [103] DER KIUREGHIAN A., KE J.-D., (1988), *The stochastic finite element method in structural reliability*, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, No. 2, s. 83–91.
- [104] DER KIUREGHIAN A., LIU P.L., (1989), *Finite-element reliability methods*, [w:] *Lecture Note for "Structural Reliability: Methods & Applications"*, Univ. of California, Berkeley.
- [105] DIN 4017 (1979), Part 2: *Shear failure calculations for shallow foundations with oblique and eccentric loading*, DIN, Berlin.
- [106] DITLEVSEN O., (1979a), *Generalized second-moment reliability index*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 7, No. 4, s. 435–451.
- [107] DITLEVSEN O., (1979b), *Narrow reliability bounds for structural systems*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 7, No. 4, s. 453–472.
- [108] DITLEVSEN O., (1981), *Principle of Normal Tail Approximation*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 107, No. EM6, s. 1191–1208.
- [109] DITLEVSEN O., (1981), *Uncertainty modeling*, McGraw-Hill, New York.
- [110] DITLEVSEN O., (1985), *Clipped Normal FBC Load Combination by Deak simulation*, DCAMM Reports, Technical Univ. of Denmark, Lyngby.
- [111] DITLEVSEN O., MADSEN H.O., (1996), *Structural Reliability Methods*, John Wiley & Sons, Chichester.

- [112] DITLEVSEN O., TARP-JOHANSEN N.J., DENVER H., (2000), *Bayesian soil assessment combining prior with posterior censored samples*, Computers and Geotechnics, Vol. 26, No. 3–4, s. 187–198.
- [113] DMITRUK S., IZBICKI R.J., SUCHNICKA H., (1982), *Mechanika ośrodków rozdrobnionych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [114] DOLIŃSKI K., (1983), *First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: Critical review and alternative approach*, Structural Safety, Vol. 1, s. 211–231.
- [115] Doliński K., (1988), *Importance sampling techniques in reliability calculation*, Reports of the Institute Foundational Technological Research (IPPT), 37/1988, Warszawa.
- [116] DOLIŃSKI K., PUŁA W., (1989), *Zastosowanie metod niezawodności konstrukcji do obliczeń fundamentów posadowionych bezpośrednio*, Materiały XXXV Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB. Wrocław–Krynica, 1989, t.1, s. 37–42.
- [117] DOLIŃSKI K., PUŁA W., (1990), *Posadowienie bezpośrednie na podłożu o cechach losowych*, Inżynieria i Budownictwo, nr 4–5/90, s.161–163.
- [118] DRUMM E.C., BENNETT R.N., MANROD W.E., (1992), *Use of Reliability Methods for Sequential Analysis of a Small Dam*, Proceedings of ASCE Geotechnical Congress, Berkeley, s. 1126–1136.
- [119] DUNCAN J.M., (2000), *Factors of Safety and Reliability in Geotechnical Engineering*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol. 126, No. 4, s. 307–316.
- [120] DUNCAN J.M., CHANG C.-Y., (1970), *Nonlinear analysis of stress and strain in soils*, Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, Vol. 96, SM5, s. 1629–1653.
- [121] DUNCAN J.M., HOUSTON W.N., (1983), *Estimating Failure Probabilities for California Levees*, Journal of Geotechnical Division, ASCE, Vol. 109, No. 2, s. 260–268.
- [122] EIMER Cz., (1963), *Podstawy teorii bezpieczeństwa konstrukcji*, Rozprawy Inżynierskie. t. 11, z. 1, s. 53–135.
- [123] ELISHAKOFF I., (1983), *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*, Wiley, New York.
- [124] EL-MELIGY M., (1994), *Reliability analysis in non-linear soil mechanics*, Raport serii PRE, nr 36/94, Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Wrocławska (praca doktorska).
- [125] EL-MELIGY M., RACKWITZ R., ŚNIADY P., (1995), *The adaptive conditional expectation method in non-linear soil mechanics*, [w:] *Computational Stochastic Mechanics*, Proc. Second Intern. Conf. on Computational Stochastic Mechanics, Athens 1994, P.D. Spanos. (ed.), Balkema, Rotterdam, s. 735–745.
- [126] EL-MELIGY M., HARRAZ A., RACKWITZ R., (1997), *Reliability of tunnel using a response surface methodology*, [w:] Ditlevsen O., Mitteau J.C. (eds.), Proc. of the Euromech. 372, Reliability in Non-linear Structural Mechanics, Clermond-Ferrand, s. 119–122.
- [127] ENGELUND S., RACKWITZ R., (1992), *Experiences with Experimental Design Schemes for Failure Surface Estimation and Reliability*, Proc. 6th Speciality Conf. Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, Denver, Colorado, U.S.A., 252–255.
- [128] ENV 1991-1 (1993). Eurocode 1: *Basis of Design and Actions on Structures*, CEN/TC250.
- [129] ENV 1997-1 (1997). Eurocode 7: *Geotechnical design – part 1: general rules*, European Committee for Standardisation (CEN), Brussels.
- [130] ENV 1997-2 (1997). Eurocode 7: *Geotechnical design – part 2: geotechnical design assisted by laboratory testing*, European Committee for Standardisation (CEN), Brussels.
- [131] ENV 1997-3 (1997). Eurocode 7: *Geotechnical design – part 3: design assisted by field testing*, European Committee for Standardisation (CEN), Brussels.
- [132] Eurokod 1 (1994). *Podstawy projektowania i oddziaływania na konstrukcje*, część 1: *Podstawy projektowania*, część A: *Tekst polski europejskiej prenormy ENV 1991-1: 1993*. ITB, Warszawa.
- [133] EVANGELISTA A., PELLEGRINO A., VIGOGONI C., (1975), *The influence of the variability of coarse grained material properties on the stability of earth dams*, Proc. of the 2nd Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Aachen, Vol. 2, s. 71–87.

- [134] EVANGELISTA A., PELLEGRINO A., VIGGIANI C., (1977), *Variability among piles of the same foundation*, Proceedings of International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo session 2, s. 493–500.
- [135] FARAVELLI L.A., (1989), *A response surface approach for reliability analysis*, Journal of the Engineering Division, ASCE, 115(12), 2763–2781.
- [136] FARIDIS M.N., VENEZIANO D., (1981), *Statistical Analysis of Sand Liquefaction*, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 107, No. GT10, s. 1361–1377.
- [137] FAVRE J.L.W., (1979), *Statistics, reliability theory and safety factors*, Panel discussion. Proc. of 7th ICSMFE Conf., Brighton, Vol. 4, s. 98–99.
- [138] FELIX L., (1973), *Współczesny kurs matematyki elementarnej*, PWN, Warszawa.
- [139] FELLER W., (1981), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom 2, wyd. 3. PWN, Warszawa.
- [140] FENTON G.A., (1990), *Simulation and analysis of random fields*, PhD thesis, Princeton University.
- [141] FENTON G.A., GRIFFITHS D.F., (2002), *Probabilistic foundation settlement on spatially random soil*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol. 128, No. 5, s. 381–390.
- [142] FENTON G.A., PAICE G.M., GRIFFITHS D.V., (1996), *Probabilistic analysis of foundation settlement*, [w:] Proceedings of the ASCE Uncertainty'96 Conf. Madison, Wisconsin.
- [143] FENTON G.A., VANMARCKE E., (1991), *Spatial Variation in Liquefaction Risk Assessment*, Proceedings of the Geotechnical Engineering Congress, ASCE, Vol. I, s. 594–607.
- [144] FIESSLER B., NEUMANN H.-J., RACKWITZ R., (1979), *Quadratic Limit States Structural Reliability*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, No. EM4, s. 661–676.
- [145] FIŁONIENKO-BORODICZ M.M., (1945), *Some approximate theories of elastic foundation*, *Učenyje Zapiski Moskovskogo Gosudarstwenного Universiteta*, Mechanika, No. 46, s. 3–18.
- [146] FISZ M., (1967), *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa.
- [147] FREUDENTAL A.M., (1945), *The Safety of Structures*, Proc. American Society of Civil Engineers (ASCE), vol. 71, s. 1157–1191.
- [148] FREUDENTAL A.M., (1954), *Safety and the probability of structural failure*, Proc. American Society of Civil Engineers (ASCE), Vol. 80, s. 468/1–46.
- [149] FREDLUND D.G., DAHLMAN A.E., (1972), *Statistical geotechnical properties of glacial Lake Edmonton sediments*, Proc. 1st Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Hong-Kong Univ. Press, Hong-Kong, s. 203–228.
- [150] FÖRSTER W., WEBER E., (1982), *Influences on the probability of failure of slopes*, Proc. of the 10th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm, Vol. 3, s. 127–130.
- [151] FUJITA M., RACKWITZ R., (1988), *Updating first-and second-order reliability estimates by importance sampling*, Struct. Eng./Earthquake Eng., Japan Society of Civil Engineers, Vol. 5, No. 1, s. 53–59.
- [152] GAO A.Z., LI J.P., (1993), *Reliability analysis on pile bearing capacity*, Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, s. 295–301.
- [153] GARDNER W.A., (1986), *Introduction to Random Processes, With Applications to Signals and Systems*, Macmillan Publishing Company, New York.
- [154] GENSKE D.D., WALZ B., (1987), *Anwendung der probabilistischen Sicherheitstheorie auf Grundbruchberechnung nach DIN 4017*, Geotechnik, nr 2, s. 53–66.
- [155] GHANEM R., SPANOS P., (1991), *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York.
- [156] GIHKMAN I.I., SKOROHOD A.W., (1977), *Vvedenie v teoriu slučajnych processov*, Nauka, Moskva.
- [157] GIRKMANN K., (1956), *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa.
- [158] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D., (1968), *Metody matematyczne w teorii niezawodności*, WNT, Warszawa.
- [159] GOLLWITZER S., RACKWITZ R., (1988), *An Efficient Numerical Solution of the Multinormal Integral*, Probabilistic Engineering Mechanics, 3, 2, s. 98–101.

- [160] GRAD G., (1998), *Projektowanie belki oczepowej fundamentu palowego według zasad teorii niezawodności konstrukcji*, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej, Praca dyplomowa pod kierunkiem W. Puły.
- [161] GRAHAM J., HOULSBY G.T., (1983), *Anisotropic elasticity of a natural clay*, *Geotechnique*, Vol. 33, No. 2, s. 165–180.
- [162] GRIFFITHS D.V., FENTON G.A., (2001), *Bearing capacity of spatially random soil: the undrained clay Prandtl problem revised*, *Geotechnique*, Vol. 51, No. 4, s. 351–359.
- [163] GROLMUND J.P., RECORDON E., (1972), *Étude statistique sur les resultants d'essais de laboratoire effectués sur un sol considéré comme homogène*, Laboratoire de Géotechnique de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [164] GRYCZMAŃSKI M., (1969), *Rozwiązanie zagadnienia równowagi wielowarstwowego podłoża obciążonego pionowo na obszarze prostokątnym z zastosowaniem szeregów trygonometrycznych*, *Archivum Hydrotechniki*, nr 2/1969, s. 251–268.
- [165] GRYCZMAŃSKI M., (1978), *Semi-analytic solutions of consolidations problems*, [w:] *Proc. of the French-Polish Seminar on Applied Soil Mechanics*, Wdzydze 1978, ed. by E. Dembicki, s. 118–126.
- [166] GRYCZMAŃSKI M., (1994), *Analytical and numerical subsoil models for soil-foundation interaction problems*, *Studia Geotechnica et Mechanica*, No. 3–4/1994, s. 29–72.
- [167] GWIZDAŁA K., (1997), *Design by static load tests*, [w:] *ISSMFE European Regional Technical Committee 3 (ERTC3)*, Brussels.
- [168] HALIM I.S., TANG W.H., (1993), *Site Exploration Strategy for Geologic Anomaly Characterization*, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 119, No. 2, s. 195–213.
- [169] HARBITZ A., (1983), *Efficient and accurate probability of failure calculation by use of the importance sampling technique*, [w:] G. Augusti, A. Borri i G. Vannucchi (eds.), *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP-4)*, Florence, June 1983, Pitagora Editrice, Bologna, s. 825–836.
- [170] HARBITZ A., (1986), *An efficient sampling method for probability of failure calculation*, *Structural Safety*, Vol. 3, No. 2, s. 109–115.
- [171] HARR M.E., (1977), *Mechanics of Particulate Media: A Probability Approach*, McGraw-Hill, New York.
- [172] HASOFER A.M., LIND N.C., (1974), *An Exact and Invariant First-Order Reliability Format*, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 100, No. EM1, s. 111–121.
- [173] HALDAR A., TANG W.H., (1979), *Probabilistic Evaluation of Liquefaction Potential*, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 105, No. GT2, s. 145–163.
- [174] HAURYŁKIEWICZ J., (1991), *Metryczna metoda oceny bezpieczeństwa budowli*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie, Koszalin.
- [175] HECHT-NIELSON R., (1991), *Neurocomputing*, Amsterdam, Addison Wesley.
- [176] HETÉNYI M., (1946), *Beams on elastic foundations*, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor.
- [177] HETTLER A., (1993), *Probabilistic approach and partial safety factors for driven piles*, [w:] *Proceedings of the International Symposium on Limit State Design in Geotechnical Engineering*, Copenhagen, May 26–28. Sponsored by Danish Geotechnical Society, Vol. 1, s. 217–222.
- [178] HICKS M.A., SAMY K., (2002), *Influence of anisotropic spatial variability on slope reliability*, [w:] Pande G., Pietruszczak S. (eds.), *Proc. of the Eighth Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, Rome 2002, Balkema, Rotterdam, 535–539.
- [179] HISADA T., NAKAGIRI S., (1981), *Stochastic finite element developed for structural safety and reliability*, [w:] *ICOSSAR-3, Proc. of the 4th International Conference on Structural Safety and Reliability*, s. 395–408.

- [180] HISADA T., NAKAGIRI S., (1985), *Role of the Stochastic Finite Element Method in structural safety and reliability*, [w:] ICOSSAR-4, Proc. Of the 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, Kobe, Japan, May 1985, s. 385–394.
- [181] HOEK E., CARVALHO J.L., CORKUM B.T., (1993), *PHASES, a 2D Hybrid FE/BE Program for Calculating Stresses and Estimation Support around Underground Excavations*, Program Manual.
- [182] HOHENBICHLER M., GOLLWITZER S., KRUSE W., RACKWITZ R., (1987), *New light on first and second-order reliability methods*, Structural Safety, 4, 267–284.
- [183] HOHENBICHLER M., RACKWITZ R., (1981), *Non-normal dependent Vectors in Structural Safety*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 107, No. EM6, s. 1227–1237.
- [184] HOHENBICHLER M., RACKWITZ R., (1985), *A Bound and an Approximation to the Multivariate Distribution Function*, Math. Japonica, 30, 5, s. 821–828.
- [185] HOHENBICHLER M., RACKWITZ R., (1988), *Improvement of the second-order reliability estimates by importance sampling*, Journ Eng. Mech., ASCE, 114, 12, s. 2195–2199.
- [186] HONJO Y., SUZUKI M., MATSUO M., (2000), *Reliability analysis of shallow foundations in reference to design codes development*, Computers and Geotechnics, Vol. 25, No. 3–4, s. 331–346.
- [187] HOLTZ R.D., KRIZEK R.J., (1972), *Statistical evaluation of soil data*, Proc. of the First Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Ed. P. Lumb, Hong-Kong University Press, Hong-Kong, s. 230–278.
- [188] ISO 2394 (1998). *General principles on reliability of structures*. International Standard.
- [189] INGLES O., (1980), *Soil variability, constructon quality control and performance reliability*, Proceedings of the Univ. of New South Wales, Sydney.
- [190] IZBICKI R., MRÓZ Z., (1976), *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał*, PWN, Warszawa–Poznań.
- [191] JENDO S., PACZKOWSKI W.M., (1993), *Multicriteria discrete optimization of large scale truss systems*, Structural Optimization, Vol. 6, No. 4, s. 238–294.
- [192] JOHNSON N.L., KOTZ S., (1976), *Distributions in Statistics – Continuous Multivariate Distributions*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [193] JUANG C.H., ROSOWSKY D.V., TANG W.H., (1999), *A reliability-based method for assessing liquefaction potential of sandy soil*, Journal of Geotechnical and Environmental Engineering, ASCE, Vol. 125, No. 8, s. 684–695.
- [194] JUANG C.H., CHEN C.J., ROSOWSKY D.V., TANG W.H., (2000), *Probabilistic analysis of saturated residual soil slopes*, [w:] *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering Reliability and Risk Analysis*, Proc. of the Conf. ICASP 8, Sydney 1999, Balkema, Rotterdam, Vol. 1, s. 395–399.
- [195] JURLEWICZ T., SKOCZYŁAS Z., (2000), *Algebra liniowa 2*, Oficyna Wydawnicza GiS, wyd. V, Wrocław.
- [196] KAHN M., MARSHALL W., (1953), *Methods of reducing sample size in Monte Carlo computations*, Oper. Res., 1, s. 263–278.
- [197] KARAMACHANDANI A., BJERAGER P., CORNELL C., (1989), *Adaptive importance sampling*, Proc. of the Fifth Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR, s. 855–862.
- [198] KARAMACHANDANI A., CORNELL C., (1991), *Adaptive hybrid conditional expectation approaches for reliability estimation*, Structural Safety, Vol. 11, 59–74.
- [199] KEAVENY J.M., NADIM F., LACASSE G., (1989), *Autocorrelation functions for offshore geotechnical data*, Proc. of the 5th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR, s. 263–270.
- [200] KNABE W., PRZEWŁÓCKI J., (1990), *Probabilistyczna ocena stateczności zboczy*, Prace IBW, Gdańsk.
- [201] KNABE W., PRZEWŁÓCKI J., RÓŻYŃSKI G., (1998), *Spatial Averages for Linear Elements for Two-Parameter Random Fields*, Probabilistic Engineering Mechancs, Vol. 13, No. 3, 147–167.

- [202] KOLYMBAS D., (2000), *Introduction to Hypoplasticity*, Balkema, Rotterdam/Brookfield.
- [203] KOPOCIŃSKI B., (1973), *Zarys teorii niezawodności i odnowy*, PWN, Warszawa.
- [204] KLEIBER M., HIEN T.D., (1992), *The stochastic finite element method: Basic perturbation technique and computer implementation*, J. Wiley & Sons.
- [205] KRIGE D.G., (1951), *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*, J. Chem. Metall and Min. Soc. South Africa, Vol. 52, No. 6, s. 119–139.
- [206] KRIGE D.G., (1962), *Statistical applications in mine valuation*, Journal Inst. Mine Survey S. Afr., 12(2), s. 45–84, 12(3), s. 95–136.
- [207] KRIEGER-WOJNOWSKY S., (1933), *Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten*, Ingenieur-Archiv. Band IV, Berlin.
- [208] KULHAWY F.H., (1992), *On evaluation of static soil properties. Proceedings of the ASCE specially symposium: Stability and performance of slopes and embankments*, New York, Vol. 2, s. 95–115.
- [209] KULHAWY F.H., ROTH N.J., GRIGORIU M.D., (1991), *Some statistical evaluations of geotechnical properties*, Proc. of the 6th Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Mexico City, s. 705–712.
- [210] LANGEJAN A., (1965), *Some aspects of the safety factor in soil mechanics and foundation engineering*, Proc. of 6th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Montreal, Vol. II, s. 500–502.
- [211] LAZARD A., (1961), *Discussion*, Proc. of 5th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris, s. 325.
- [212] LEJA F., (1966), *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa.
- [213] LEVI R., (1948), *La securite des constructions. Recherche d'une metode concrete*, III Kongr. AIPC, Publ. Prel., Liege.
- [214] LEVI R., (1949), *Calculs probabilistes de la sécurité des constructions*, Ann. Ponts et Chaussées, 119, Nr 4, s. 493–539.
- [215] LEVI R., (1953), *L'application de la théorie des probabilités aux calculs de résistance*, Annales des Travaux Publics de Belgique, Vol. 54, s. 175–206.
- [216] LEVI R., (1958), *Les calculs de sécuroté en matière de fondations*, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics., Vol. 11, s. 541–544.
- [217] LI K.S., (1991), *Fallacies of Current Probabilistic Approaches to Progressive Slope Failure*, Proceedings of the 6th Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP 6), Mexico City, s. 784–791.
- [218] LI K.S., LEE I.K., LO S-C.R., (1993), *Limit state design in geotechnics*, [w:] *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, K.S.Li and S-C.R. Lo (eds.), Balkema, Rotterdam, s. 29–42.
- [219] LI K.S., LUMB P., (1987), *Probabilistic design of slopes*, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 24, s. 520–535.
- [220] LIND N.C., (1977), *Formulation of probabilistic design*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. Vol. 103, No. EM2, s. 273–284.
- [221] LIND N.C., (1979), *Optimal reliability analysis by fast convolution*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. Vol. 105, No. EM3, s. 447–452.
- [222] LIN Y.K., CAI G.Q., (1995), *Probabilistic Structural Dynamics*, Advanced Theory and Applications, McGraw-Hill, Inc.
- [223] LITVINOV J.M., (1951), *Issledowanie gruntov w polevych uslowijach*, Moskva–Charkov.
- [224] LIU P.-L., DER KIUREGHIAN A., (1986), *Multivariate distributions models with prescribed marginals and covariances*, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 1, No. 2, s. 105–112.
- [225] LIU P.-L., DER KIUREGHIAN A., (1989), *Finite element reliability methods for geometrically nonlinear stochastic structures*, Report No. UCB/SEMM-89/05, 1989, Dept. of Civil Engineering, University of California, Berkeley.

- [226] LIU P.-L., DER KIUREGHIAN A., (1991), *Optimization algorithms for structural reliability*, *Structural Safety*, 9, s. 161–177.
- [227] LIU W.K., BELYTSCHKO T., MANI A., (1986), *Random Field Finite Elements*, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, s. 1831–1845.
- [228] LIU W.K., MANI A., BELYTSCHKO T., (1987), *Finite Element Methods in Probabilistic Mechanics*, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2, 4, s. 201–213.
- [229] LO S.-C.R., LI K.S., LEE I.K., (1992), *Limit state design of pile foundations: a probabilistic appraisal*, *Proc. of 6th Australasian-New Zeland Conf. on Geomechanics*, Christchurch.
- [230] LUMB P., (1966), *The variability of natural soils*, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 3, No. 2, s. 74–97.
- [231] LUMB P., (1970), *Safety factors and the probability distributions of soil strength*, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 7, No. 3, s. 225–242.
- [232] LUMB P., (1972), *Precision and accuracy of soil properties*, *Proc. 1st Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng., (ICASP)*, Hong-Kong Univ. Press, Hong-Kong, s. 329–345.
- [233] LUMB P., (1974), *Application of Statistics in Soil Mechanics*, [w:] *Soil Mechanics – New Horizons*, ed. I.K. Lee, Newness-Butterworths, London, s. 44–111.
- [234] LUMB P., (1975), *Spatial variability of soil properties*, *Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng., (ICASP)*, Aachen, Vol. II, s. 397–422.
- [235] LUMB P., HOLT J., (1968), *The undrained shear strength of a soft marine clay from Hong-Kong*, *Geotechnique*, 18, s. 25–36.
- [236] LUŻNA D., PUŁA W., (1998), *Zastosowanie programu MATHEMATICA do badania niezawodności fundamentów palowych pod stopy sieci trakcyjnej*, [w:] *Podstawy probabilistyczne projektowania konstrukcji w ujęciu macierzowym*, Materiały Konferencji Naukowej Politechniki Krakowskiej i KILiW PAN, Janowice 1997, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, s. 147–158.
- [237] MADSEN H.O., KRENK S., LIND N.C., (1986), *Methods of structural safety*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [238] MAIER M., (1926), *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen*, Springer-Verlag, Berlin.
- [239] MARGUERRE K., (1931), *Druckverteilung durch eine elastische Schicht auf starrer rauher Unterlage*, *Ing. Arch.*, Vol. 2, s. 108–117.
- [240] MARQUARDT D.W., (1963), *An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters*, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, No. 2.
- [241] MARQUARDT D.W., (1966), *Last-squares estimation of non-linear parameters computer code*, NLIN2. Distribution No. 309401, IBM Share Library.
- [242] *Mathematica*, (2003), *A system for doing mathematics by computer*. Ver. 2.2.1, Wolfram Research Inc.
- [243] MATHERON G., (1963), *Principles of Geostatistics*, *Economic Geology*, Vol. 58, s. 1246–1266.
- [244] MATSUI M., ASAOKA A., (1977), *Probability models of undrained strength of marine clay*, *Soils and Foundations*, 17(3), s. 53–68.
- [245] MATSUI M., ASAOKA A., KAWAMURA K., (1980), *Reliability-based design of geotechnical engineering problems*, *Memories of the Faculty of Engineering, Nagoya University*, Vol. 32, Nagoya.
- [246] MCANALLY P.A., (1983), *Reliability of the bearing capacity design of shallow footings in sands*, *Proc. 4th Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng., (ICASP)*, Florence, s. 1545–1556.
- [247] MELCHERS R.E., (1984), *Efficient Monte Carlo Probability Integration*, *Res. Rep. Monash University*, No. 7.
- [248] MELCHERS R.E., (1987), *Structural Reliability. Analysis and Prediction*, Ellis Horwood Ltd., Chichester.

- [249] MELCHERS R.E., (1990), *Search-based importance sampling*, Structural Safety, 9, s. 117–128.
- [250] MELCHERS R.E., (1991), *Simulation in time-invariant and time-variant reliability problems*, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf. on Reliability and Optimization of Structural Systems, Munich, Germany, Sept. 11–13, s. 39–82.
- [251] MEYERHOF G.G., (1953), *The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads*, 3rd ICSMFE, Zurich 1953, Vol. 1, s. 440–445.
- [252] MEYERHOF G.G., (1970), *Safety factors in soil mechanics*, Canadian Geotechnical Journal, s. 349–355.
- [253] MEYERHOF G.G., (1993), *Development of geotechnical limit state design*, Proceedings of the international symposium on limit state design in geotechnical engineering, Copenhagen, Vol. 1, s. 1–12.
- [254] MEYERHOF G.G., (1995), *Development of geotechnical limit state design*, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 32, s. 128–136.
- [255] MIRONOWICZ W., ŚNIADY P., (1990), *Dynamika płyty o losowych parametrach jako konstrukcji wsporczej pod maszyny*, Rozprawy inżynierskie, 38, 1, s. 3–20.
- [256] MIRONOWICZ W., ZOMBRON M., (2000), *Problemy losowych drgań blokowych fundamentów zagłębionych w gruncie*, Materiały XLVI Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Wrocław–Krynica, DWE, Wrocław, t. 1, s. 115–122.
- [257] MIRONOWICZ W., ZOMBRON M., (2001), *Losowe drgania własne fundamentu skrzyniowego*, Materiały XLVII Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Opole–Krynica, DWE, Wrocław, t. 2, s. 95–102.
- [258] MIRONOWICZ W., ZOMBRON M., (2002), *Losowe drgania wymuszone fundamentu skrzyniowego*, Materiały XLVIII Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Opole–Krynica, DWE, Wrocław, t. 2, s. 133–140.
- [259] MLAK W., (1972), *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, wyd. II, PWN, Warszawa.
- [260] MORGENSTERN D., (1956), *Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen*, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik, No. 8, s. 234–235.
- [261] MOSTYN G.R., LI K.S., (1993), *Probabilistic slope analysis-State-of-play*, [w:] *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, K.S.Li and S-C.R.Lo (eds.), Balkema, Rotterdam, s. 89–109.
- [262] MURZEWSKI J., (1970), *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*, Arkady, Warszawa.
- [263] MURZEWSKI J., (1989), *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*, Arkady, Warszawa.
- [264] MURZEWSKI J., (2000), *Design templates a new tool for computer-aided design of structural elements*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2, Vol. 38, s. 331–350.
- [265] MURZEWSKI J., (2001), *Podstawy projektowania i niezawodność konstrukcji*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- [266] MURZEWSKI J. SOWA A., (1983), *Zarys teorii niezawodności konstrukcji*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- [267] MYERS R.H., (1971), *Response Surface Methodology*, Boston, Allyn and Bacon, Inc.
- [268] MYERS R.H., MONTGOMERY D.C., (1995), *Response Surface Methodology Process and Product Optimisation Using Design Experiments*, John Wiley and Sons, New York.
- [269] MORI Y., ELLINGWOOD B.R., (1993), *Time-dependent system reliability analysis by adaptive importance sampling*, Structural Safety, 12, s. 59–73.
- [270] MUROTSU Y., SHAO S., CHIKU N., FUJITA K., SHINOHARA Y., (1993), *Studies on assesment of structural reliability by response surface method and neural network*, [w:] P. Thoft-Christensen, H. Ishikawa (eds.), *Reliability and optimization of structural systems*, V. Amsterdam, North-Holland, s. 173–180.
- [271] NAMYSŁOWSKA-WILCZYŃSKA B., (1993), *Zmienność złóż rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej w świetle badań geostatystycznych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

- [272] NATAF A., (1962), *Determination des Distribution dont les Marges sont Donnees*, Comptes Rendus de l'Academie des Scences, **225**, s. 42–43.
- [273] NOUR A., SLIMANI A., LAOUAMI N., (2002), *Foundation settlement statistics via finite element analysis*, Computers and Geotechnics, Vol. 29, No. 8, s. 641–672.
- [274] NOWAK A.S., COLLINS K.R., (2000), *Reliability of Structures*, McGraw–Hill.
- [275] OBONI F., BOURDEAU P.L., (1983), *Determination of the critical slip surface in stability problems*, Proc. 4th Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Florence, s. 1413–1424.
- [276] OKAHARA M., KIMURA Y., OCHIAI H., MATSUI K., (1993), *Statistical characteristics of bearing capacity of single piles*, Proceedings of the International Symposium on Limit State Design in Geotechnical Engineering, Copenhagen, May 26–28, Sponsored by Danish Geotechnical Society. Vol. 1, s. 223–232.
- [277] ORR T.L.L., FARRELL E.R., (1999), *Geotechnical design to Eurocode 7*, Springer Verlag, London.
- [278] ORR T.L.L., (2000), *Selection of characteristic values and partial factors in geotechnical design to Eurocode 7*, Computers and Geotechnics, Vol. 25, No. 3–4, s. 263–279.
- [279] OSOWSKI S., (1996), *Sieci neuronowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- [280] PAPOULIS A., (1972), *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa.
- [281] PAICE G.M., GRIFFITHS D.V., FENTON G.A., (1996), *Finite element modelling of settlements on spatially random soil*, Journal of Geotechnical Engineering ASCE, **122**(9), s. 777–779.
- [282] PASTERNAK P.L., (1954), *Osnovy novogo metoda rasčeta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomošči dvoch koeficientov posteli*, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Architekture, Moskva.
- [283] PHOON K.K., KUHWAY F.H., GRIGORIU M.D., (1993), *Observations on reliability-based design foundation for electrical transmission line structures*, Proceedings of the international symposium on limit state design in geotechnical engineering, Copenhagen, Vol. 2, s. 351–362.
- [284] PHOON K.K., KUHWAY F.H., GRIGORIU M.D., (2000), *Reliability-based design for transmission line structure foundations*, Computers and Geotechnics, Vol. 26, No. 3–4, s. 169–185.
- [285] PN-81/B-03020, (1981), *Grunty budowlane. Posadowienie bezpośrednio budowli. Obliczenia statyczne i projektowanie*, PKNMiJ.
- [286] PN-83/B-02482, (1983), *Nośność pali i fundamentów palowych*, PKNMiJ.
- [287] PN-ISO 2394, (2000), *Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych*. Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa.
- [288] POOROOSHASB H.B., (2002), *Analysis of a pile in a layered system in a seismic region*, Computers and Geotechnics, Vol. 29, No. 5, s. 243–362.
- [289] POULOS H.G., (1976), *Behavior of Laterally Loaded Piles Near a Cut of Slope*, Australian Geomechanics Journal, Vol. G 6, No. 1, s. 6–12.
- [290] POULOS H.G., DAVIS E.H., (1974), *Elastic solutions for soil and rock mechanics*, J. Wiley, New York.
- [291] POULOS H.G., DAVIS E.H., (1980), *Pile foundation analysis and design*, J. Wiley, New York.
- [292] PRANDTL L., (1920), *Über die Härte plastischer Körper*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl., 74–85.
- [293] PROT M., (1936), *Note sur la notion de coefficient de securite*, Ann. P.C., 7, 2.
- [294] PRZEWŁOCKI J., (1998), *Losowość w wybranych zagadnieniach mechaniki gruntów*, Instytut Budownictwa Wodnego, PAN, Gdańsk.
- [295] PRZEWŁOCKI J., DARDZIŃSKA I., (2001), *Limit analysis of a strip footing on stochastic subsoil*, Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. 23, No. 3–4, s. 67–81.
- [296] PUŁA O., PUŁA W., (1995), *Analiza nośności bocznej prefabrykowanych żelbetowych pali*, Raport wykonany na zlecenie Biuro Projektów Kolejowych, Wrocław, Przedsiębiorstwo Projektowo-Wdrożeniowe (praca niepublikowana), Wrocław.

- [297] PUŁA O., PUŁA W., (1998), *O obliczeniach nośności bocznej pali-fundamentów słupów sieci trakcyjnej*, Inżynieria i Budownictwo, Nr 11/98, s. 626–629.
- [298] PUŁA O., RYBAK Cz., (2000), *O nośności fundamentów w inwentaryzowanych starych budynkach*, komunikat prywatny.
- [299] PUŁA O., RYBAK Cz., SARNIAK W., (1999), *Fundamentowanie*, DWE, Wrocław.
- [300] PUŁA W., (1984), *Probabilistyczna analiza stateczności masywnych przyczółków mostowych metodą symulacyjną*, rozprawa doktorska, Raport serii PRE Nr 308. Instytut Geotechniki. Politechnika Wroclawska, Wrocław.
- [301] PUŁA W., (1985), *O ocenie dokładności obliczania prawdopodobieństw metodą symulacji cyfrowej*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, Nr 109, Konferencje Matematyka, z. 9, t. 2, s. 433–438.
- [302] PUŁA W., (1987), *Statistical distributions of soil properties for the investigation of the reliability of geotechnical structures*, [w:] Proceedings of the 1st Conf. on Mechanics, Praha, Vol. 6, s. 134–137.
- [303] PUŁA W., (1991), *On same methods in structural reliability*, Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. 13, No. 1–2, s. 21–35.
- [304] PUŁA W., (1993a), *Ocena niezawodności fundamentów bezpośrednich technika symulacyjną*, Materiały XXXIX Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Wrocław–Krynica, 1993, s. 147–154.
- [305] PUŁA W., (1993b), *Zastosowania stochastycznej metody elementów skończonych w geotechnice*, Raport serii SPR, nr 685, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Politechnika Wroclawska, Wrocław.
- [306] PUŁA W., (1995), *Orthogonal expansions for the stochastic finite element analysis*, Computational Stochastic Mechanics. Proc. Second Intern. Conf. on Computational Stochastic Mechanics, Athens, 1994, P.D. Spanos (ed.), Balkema, Rotterdam, s. 469–477.
- [307] PUŁA W., (1997), *Reliability analysis of rigid piles subjected to lateral loads*, [w:] Numerical Models in Geomechanics, S. Pietruszczak, G.N. Pande (eds.), Balkema, Rotterdam, s. 521–526.
- [308] PUŁA W., HILDEBRAND M., (1999), *Ocena niezawodności podpory mostu wznieszonego metodą nawisową*, Materiały XLV Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Wrocław–Krynica, DWE, Wrocław, t. 6, s. 263–272.
- [309] PUŁA W., HILDEBRAND M., (2000), *Some reliability aspects on temporary support of concrete girder built by cantilever method*, Archives of Civil Engineering, XLVI, 1, s. 137–156.
- [310] PUŁA W., RĘDOWICZ W., (1993), *Probabilistyczna analiza stateczności jazu*, Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu, Inżynieria Środowiska, V, nr 234, s. 63–72.
- [311] PUŁA W., RYBAK J., (1999), *Wymiarowanie belki toru podsuwnicowego z uwzględnieniem losowej podatności podpór palowych*, Materiały XLV Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Wrocław–Krynica, DWE, Wrocław, t. 5, s. 167–174.
- [312] PUŁA W., STILGER-SZYDŁO E., (1990), *An analysis of embankment shape with random soil parameters based on the theory of limit states*, Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. 12, No. 3–4, s. 53–68.
- [313] PUŁA W., TRACZYK R., (1988), *Methods of determining design strength parameters for dump soil blends*, Archiwum Górnictwa, Vol. 33, No. 1, s. 137–148.
- [314] PUŁA W., WYJADŁOWSKI M., (1999), *Effect of elastic parameters random variability on shallow foundations settlements by finite layers method*, Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. 21, No. 3–4, s. 87–118.
- [315] QUECK S.T., CHOW Y.K., PHOON K.K., (1992), *Further Contribution to Reliability – Based Pile – Settlement Analysis*, Journal of Geotechnical Engineering ASCE, 118(5), s. 726–742.
- [316] RACKWITZ R., (1982), *Response surfaces in structural reliability*, Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Heft 67, LKI, Technische Universität München.
- [317] RACKWITZ R., (2000), *Reviewing probabilistic soils modeling*, Computers & Geotechnics, 25 (3–4), 199–223.

- [318] RACKWITZ R., (2001), *Spatial Correlation in the Kinematic-Element-Method*, praca niepublikowana, otrzymana jako komunikat prywatny
- [319] RACKWITZ R., FIESSLER B., (1978), *Structural reliability under combined random loads sequences*, Computers and Structures, No. 9, 489–494.
- [320] RAMACHANDRAN K., (1988), *Reliability analysis of propped embedded cantilever walls*, Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Balkema, Rotterdam.
- [321] REISSNER E., (1958), *Deflection of plates on viscoelastic foundation*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 80, s. 144–145.
- [322] *Reliability in Geotechnics* (2000). Special Issue of *Computers and Geotechnics*, Guest Editor Wojciech Puła, Vol. 25, No. 3–4.
- [323] RETHATI L., (1989), *Probabilistic Solutions in Geomechanics*, Elsevier, Amsterdam.
- [324] RICE S.O., (1944), *Mathematical Analysis of Random Noise*, Bell System Technical Journal, Vol. 23, s. 282.
- [325] RONALD K.O., (1990), *Reliability Analysis of Tension Pile*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 116, No. 5, s. 760–773.
- [326] RONALD K.O., BJERAGER P., (1992), *Model Uncertainty Representation in Geotechnical Reliability Analysis*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 118, No. 3, s. 363–376.
- [327] ROSENBLATT M., (1952), *Remarks on a multivariate transformation*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, s. 470–472.
- [328] ROSENBLUETH E., (1975), *Point estimates of probability moments*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 72, No. 10, Mathematics, s. 3812–3814.
- [329] ROSENBLUETH E., ESTEVA L., (1972), *Reliability Bases for Some Mexican Codes*, ACI Publications, SP-31: 1–41, Detroit, Michigan: American Concrete Institute.
- [330] RUBEN H., (1964), *An Asymptotic Expansion of the Multivariate Normal Distribution and Mill's Ratio*, Journal of Res. of the National Bureau of Standards, Vol. 68B, 1.
- [331] RUBINSTEIN R., (1981), *Simulation and the Monte Carlo Method*, J. Wiley, New York.
- [332] RYBAK Cz., (1999), *Obciążenia próbne fundamentów palowych*, komunikat prywatny.
- [333] RYBAK Cz., (2000), *Porównanie sposobów obliczania ciężaru gruntu poniżej zwierciadła wody gruntowej*, komunikat prywatny.
- [334] RYBAK J., (2002), *Analiza niezawodności wybranych konstrukcji oporowych*, rozprawa doktorska, Raporty Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, PRE nr 4/2002.
- [335] RŽANICYN A.R., (1947), *Opređenje zapasa pročnosti sooruzenij*, Stroit. Prom., Nr 8.
- [336] RŽANICYN A.R., (1949), *Statističeskoe obosnowanie rasčetych koefficientov*, Materiały k teorii rasčeta po predelnomu sostojaniju, Strojizdat, Moskva.
- [337] RŽANICYN A.R., (1952), *K probleme rasčetov sooruzenij na bezopasnost*, [w:] *Voprosy bezopasnosti i pročnosti stroitelnych konstrukcij*, Strojizdat, Moskva.
- [338] SAPIAN C., (1963), *Płyta kolistą na wielowarstwowej półprzestrzeni sprężystej*, rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska, Wroclaw.
- [339] SCHITTKOWSKI K., (1981), *The Non-linear Programming Method of Wilson, Han and Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function*, Numer. Math., 38, s. 83–127.
- [340] SCHITTKOWSKI K., (1983), *On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian type search function*, Math. Operat. Statist., 14, s. 197–216.
- [341] SCHUËLLER G.I., BUCHER C.G., BOURGUND U., OUYPORNPRASERT W., (1989), *On Efficient Computational Schemes to Calculate Structural Failure Probability*, Probabilistic Engineering Mechanics, 4(1), s. 10–19.
- [342] SCHUËLLER G.I., STIX R., (1987), *A critical appraisal of methods to determine failure probabilities*, Structural Safety, Vol. 4, s. 293–309.

- [343] SCHULTZE E., (1972), *Frequency distributions and correlations of soil properties*, Proc. of the First Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), P. Lumb (ed.), Hong-Kong University Press, Hong-Kong, s. 372–387.
- [344] SCHULTZE E., (1975), *Some aspects concerning the application of statistics and probability to foundation structures*, Proc. of the 2nd Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Aachen, s. 457–494.
- [345] SELVADURAI A.P.S., (1979), *Elastic analysis of soil-structure interaction*, Elsevier, Amsterdam.
- [346] SHINOZUKA M., (1972), *Monte Carlo solutions of structural dynamics*, International Journal of Computers and Structures, Vol. 2, s. 855–874.
- [347] SHINOZUKA M., (1977), *Time and space domain in the structural reliability assessment*, [w:] ICOSAR-2, Proc. of the 2nd International Conference on Structural Safety and Reliability, Munich, Germany, Sept. 1977, s. 9–28.
- [348] SHINOZUKA M., (1983), *Basic analysis of structural safety*, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 109, No. 3, 721–740.
- [349] SHINOZUKA M., (1987a), *Stochastic fields and their digital simulation*, [w:] Schueller G.I. and Shinozuka M. (eds.), *Stochastic methods in structural dynamics*, Martinus Nijhoff Publishers, Boston, Mass., s. 93–133.
- [350] SHINOZUKA M., (1987b), *Basic issues in Stochastic Finite Element analysis*, [w:] ICASP-5 Proceedings, 5th International Conference on Applications of Statistics and Probability, Vancouver 1987, Ed. by N. Lind, University of Waterloo Press, Ontario, Vol. 1, s. 507–520.
- [351] SHINOZUKA M., JAN C.-M., (1972), *Digital simulation of random processes and its applications*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 25, No. 1, s. 111–128.
- [352] SINDEL R., GOLLWITZER S., RACKWITZ R., (1996), *Problems and Solutions Strategies in Reliability Updating*, Proc. 15th OMAE, Florence 16–20. 06.1996, ASME, Vol. 2, s. 111–118.
- [353] SINGH A., (1972), *How reliable is the safety factor in foundation engineering?* Proc. 1st Int. Conf. Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP 1), Hong Kong, s. 389–424.
- [354] SMALL J.C., BOOKER J.R., (1983), *Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part I – Strip loadings*, University of Sydney, School of Civil and Mining Engineering, Research Report, No. R417.
- [355] SMITH G.N., (1985), *The use of probability theory to assess the safety of propped embedded cantilever retaining walls*, Geotechnique, 35, 4, s. 451–460.
- [356] SOBczyk K., (1973), *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa.
- [357] SOKOŁOWSKI W.W., (1958), *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa.
- [358] SOLNES J., (1887), *Stochastic processes and random vibrations*, J. Wiley and Sons, Chichester.
- [359] SOONG T.T., GRIGORIU M., (1993), *Random vibrations of mechanical and structural systems*, PTR Prentice-Hall.
- [360] SOVINC I., (1961), *Stresses and displacements in a limited layer of uniform thickness, resting on a rigid base and subjected to an uniformly distributed flexible load of rectangular shape*, Proc. of V ICOSOMEF. 3A/44, Dunod, Paris
- [361] SØRENSEN J.D., BURCHARTH H.F., (2000), *Reliability analysis of geotechnical failure modes for vertical wall breakwaters*, Computers & Geotechnics, 25 (3–4), 225–245.
- [362] STATREL ., (1997), *A Structural Reliability Statistical*, Users Manual, RCP Consult, München.
- [363] STEWART G.W., SUN. J., (1990), *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press.
- [364] STOCKI, KOLANEK, JENDO, KLEIBER (2001a), *Study on discrete optimisation techniques in reliability-based optimisation of truss structures*, Computers and Structures, Vol. 79, No. 22–25, s. 2235–2247.

- [365] STOCKI, KOLANEK, JENDO, KLEIBER (2001b), *An efficiency of numerical algorithms for discrete reliability-based structural optimisation*, [w:] K.J. Bathe (Ed.), *Proc. First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, June 12–15, Vol. 1, s. 660–662.
- [366] STRELECKI N.S., (1935), *K voprosu obščego koefficienta bezopasnosti*, Projekt i standard, nr 10.
- [367] STRUREL (1997), *A Structural Reliability Analysis Program System*, Comrel & Sysrel Users Manual, (1997), RCP Consult, München.
- [368] STRZELECKI T., AURIAULT J.-L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W., (1996), *Mechanika ośrodków niejednorodnych. Teoria homogenizacji*, DWE, Wrocław.
- [369] SUNDARAJAN S.R. et al., (1995), *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*, Chapman & Hall, New York.
- [370] SZCZEPIŃSKI W., (1974), *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa.
- [371] ŚNIADY P., (2000), *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [372] TANG W.H., (1987), *Updating Anomaly Statistics – Single Anomaly Case*, Structural Safety, Vol. 4, No. 2, s. 151–163.
- [373] TANG W.H., (1993), *Recent developments in geotechnical reliability*, [w:] *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, Proc. of the Conf. Canberra, Feb. 1993, Li & Lo (eds.), Balkema, Rotterdam, s. 3–27.
- [374] TERZGHI K., PECK R.B., (1966), *Soil Mechanics in Engineering Practice*, John Wiley and Sons, New York.
- [375] THAO N.T.P., (1984), *Parametry statystyczne parametrów geotechnicznych wybranych warstw geologicznych podłoża gruntowego określonego rejonu m. Wrocławia*, Prace Naukowe Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej, nr 44, Wrocław.
- [376] TICHY M., (1993), *Applied Methods in Structural Reliability*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [377] TOFT-CHRISTENSEN P., BAKER M.J., (1982), *Structural Reliability Theory and Its Applications*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- [378] TOFT-CHRISTENSEN P., MUROTSU ., (1986), *Application of Structural System Reliability Theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [379] TRAN-CHI ., (2000), *A Theory of Geotechnical Uncertainty*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk.
- [380] TVEDT L., (1983), *Two second-order approximations to the failure probability*, Det Norske Veritas, RDIV/20-004-83.
- [381] VANMARCKE E.H., (1977a), *Probabilistic Modelling of Soil Profiles*, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No. GT11, s. 1227–1246.
- [382] VANMARCKE E.H., (1977b), *Reliability of earth slopes*, Journal of Geotechnical Division, ASCE, 103 (GT11), 1247–1265.
- [383] VANMARCKE E.H., (1983), *Random Fields – Analysis and Synthesis*, MIT Press, Cambridge.
- [384] VANMARCKE E.H., GRIGORIU M., (1983), *Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams*, Journ. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 109, No. EM5, s. 1203–1214.
- [385] VANMARCKE E.H., SHINOZUKA M., NAKAGIRI S., SCHUËLLER G.I., GRIGORIU M., (1986), *Random fields and stochastic finite elements*, Structural Safety, Vol. 3, s. 143–166.
- [386] VICK S.G., BROMWELL L.G., (1989), *Risk Analysis for Dam Design in Karst*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 115, No. 6.
- [387] WANG J., FOX P.J., (1996), *Foundation beam analysis considering variability of supporting pile bearing capacity*, Report, Purdue University, West Lafayette, IN 47907.
- [388] WICKREMESINGHE D., CAMPANELLA R.G., (1993), *Scale of fluctuation as a description of soil variability*, [w:] Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, s. 233–239.

- [389] WENTZEL ., (1980), *Procesy stochastyczne*, PWN, Warszawa.
- [390] WIERZBICKI W., (1936), *Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Przegląd Techniczny, s. 690.
- [391] WIERZBICKI W., (1937), *W sprawie bezpieczeństwa pręta wyciąganego osiowo*, Czasopismo Techniczne, t. 55, nr 16, s. 273–277.
- [392] WINTERSTEIN ., (1988), *Nonlinear vibration models for extremes and fatigue*, Journal of. Eng. Mech. ASCE, Vol. 114, s. 1772–1290.
- [393] WILDE P., (1977), *Modele dyskretne pól losowych podłoża*, Prace Naukowe Instytutu Geotechniki PWr., nr 24, seria Konferencje, nr 9, s. 5–16.
- [394] WILDE P., (1981), *Dyskretyzacja pól losowych w obliczeniach inżynierskich*, PWN, Warszawa.
- [395] WILUN Z., (1974), *Zarys geotechniki*, WKiŁ, Warszawa.
- [396] WINKLER E., (1867), *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Dominikus, Prague.
- [397] WŁASOW W.Z., (1960), *Stroitel'naja mechanika tonkostennych prostranstvennych sistem*, Moskwa.
- [398] WOLIŃSKI Sz., WRÓBEL K., (2001), *Niezawodność konstrukcji budowlanych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów.
- [399] WONG F.S., (1985), *Slope Reliability and Response Surface Method*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 111, No. 1, Jan. 1985, 32–53.
- [400] WU T.H., (1974), *Uncertainty, safety, and decision in soil engineering*, Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, 100(3), s. 329–348.
- [401] WU T.H., KRAFT L.M., (1967), *The Probability of Foundation Safety*, Journ. of the Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, Vol. 93, SM3, s. 213–231.
- [402] WU T.H., TANG W.H., SANGREY D.A., BEACHER G.B., (1989), *Reliability of Offshore Foundations – State of the Art*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 115, s. 157–178.
- [403] WYJADŁOWSKI M., (1997), *Deterministyczna i stochastyczna metoda warstw skończonych w zagadnieniach współpracy fundamentu z niejednorodnym podłożem gruntowym*, rozprawa doktorska, Raporty Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, Seria PRE, nr 578.
- [404] YAMAZAKI F., SHINOZUKA M., (1988a), *Digital generation of non-Gaussian stochastic field*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 114(7), s. 1183–1197.
- [405] YAMAZAKI F., SHINOZUKA M., DASGUPTA G., (1988b), *Neumann expansion for stochastic finite element analysis*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 114(8), 1335–1354.
- [406] YARDENKO M.I., (1983), *Spectral theory of random fields*, Springer, Optimization Software Publ., New York.
- [407] YÜCEMEN M.S., (1983), *Three-dimensional reliability of earth slopes under seismic loads*, [w:] *Reliability Theory of structural engineering systems*, Danmarks Ingeniorakademi, Lyngby.
- [408] YÜCEMEN M.S., TANG W.H., (1975), *Long Term Stability of Soil Slopes: A Reliability Approach*, Proc. of the 2nd Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Aachen.
- [409] ZEITOUN D.G., BAKER R., UZAN J., (1988), *Application of random plasticity to soil mechanics*, Structural Safety, 5, 79–93.
- [410] ZHENG Y., GAO D.Z., WIE D.D., (1993), *Reliability analysis of the stability of offshore platform foundation*, [w:] *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, Proc of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, K.S.Li and S-C.R.Lo (eds.), Balkema, Rotterdam, s. 309–315.
- [411] ZIELIŃSKI R., (1970), *Generatory liczb losowych*, WNT, Warszawa.
- [412] ZUBRZYCKI S., (1957), *O szacowaniu parametrów złóż geologicznych*, Zastosowania Matematyki, No. 3, s. 105–153.
- [413] ŻELAZKO W., (1968), *Algebry Banacha*, PWN, Warszawa.





Zdaniem wielu autorów metody teorii niezawodności dotychczas właściwego zastosowania w geotechnice, co powoduje, że bezpieczeństwo fundamentów jest często oceniane za pomocą innych miar niż pozostałe elementy konstrukcji. W związku z tym autor postawił sobie za cel adaptowanie niektórych metod, wywodzących się z teorii niezawodności konstrukcji, do oceny bezpieczeństwa pewnych rodzajów fundamentów. Realizuje to poprzez rozwiązywanie wybranych zadań, które w taki czy inny sposób odbiegają od standardowych problemów teorii niezawodności konstrukcji, oraz wypracowanie procedur obliczenia miar niezawodności w postaci wskaźnika niezawodności lub prawdopodobieństwa awarii w tych zadaniach.

Rozpatrywane problemy dotyczą w głównej mierze fundamentów bezpośrednich oraz w mniejszym zakresie fundamentów palowych, prezentowane zaś analizy numeryczne koncentrują się przede wszystkim wokół wpływu losowych wahań parametrów podłoża na wartości miar niezawodności. Szczególną uwagę zwrócono na odpowiednie modelowanie probabilistyczne podłoża gruntowego, konieczne do uzyskania poprawnej oceny niezawodności. W związku z tym do oceny miar związanych ze stanami granicznymi nośności fundamentów bezpośrednich zaproponowano lokalne uśrednienia pól losowych parametrów wytrzymałościowych podłoża, dokonane po powierzchniach poślizgu, wynikających z przyjętego mechanizmu zniszczenia.

Innym obszernie omawianym zagadnieniem jest zastosowanie metod powierzchni odpowiedzi do obliczeń miar niezawodności w przypadku szacowania osiadań fundamentów.

Zagadnienia dotyczące niezawodności fundamentów poprzedzono rozdziałem omawiającym wybrane zagadnienia niezawodności konstrukcji, ułatwiającym studiowanie dalszych rozdziałów książki.

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika”

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
budynek A-1 PWr., tel (0-71) 320-25-34;
„Tech”

plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. (0-71) 320-32-52

Prowadzimy sprzedaż wysyłkową